



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS**

MONIQUE HÉVELYN PORTELA FARIAS

**RELATIVIDADE: DIFERENÇA FUNDAMENTAL ENTRE A RELATIVIDADE
RESTRITA E GERAL**

**SANTARÉM-PA
2024**

MONIQUE HÉVELYN PORTELA FARIAS

**RELATIVIDADE: DIFERENÇA FUNDAMENTAL ENTRE A RELATIVIDADE
RESTRITA E GERAL**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Ciências Exatas para obtenção do título de Licenciado em Matemática e Física; Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação.

Orientador: Dr. Glauco Cohen Ferreira Pantoja
Co-orientador: Msc. Paulo Moreira Veiga

SANTARÉM-PA
2024

Monique Hévelyn Portela Farias

**RELATIVIDADE: DIFERENÇA FUNDAMENTAL ENTRE A
RELATIVIDADE RESTRITA E GERAL**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao programa de ciências Exatas, Curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, para a obtenção do grau de Licenciada Plena em Matemática e Física da Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação.

Conceito:

Data de Aprovação 26/11/2024

Documento assinado digitalmente
 **GLAUCO COHEN FERREIRA PANTOJA**
Data: 30/01/2025 20:14:31-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Glauco Cohen Ferreira Pantoja- Orientador (a)
Universidade Federal do Oeste do Pará.

Documento assinado digitalmente
 **ALEX JUNIOR DE FREITAS CABRAL**
Data: 25/01/2025 19:19:11-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Alex Junior De Freitas Cabral – Banca examinadora
Universidade Federal do Oeste do Pará.

Documento assinado digitalmente
 **WAGNER PINHEIRO PIRES**
Data: 27/01/2025 11:46:10-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Wagner Pinheiro Pires – Banca examinadora
Universidade Federal do Oeste do Pará.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/Ufopa

F224r Farias, Monique Hévelyn Portela
 Relatividade: diferença fundamental entre a relatividade restrita e geral./ Monique Hévelyn Portela Farias. – Santarém, 2025.
 40 p.: il.
 Inclui bibliografias.

Monografia defendida em 2024 e depositada em 2025.

Orientador: Glauco Cohen Ferreira Pantoja.
Coorientador: Paulo Moreira Veiga.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Licenciatura em Matemática e Física.

1. Relatividade geral. 2. Relatividade restrita. 3. Diferença entre as duas teorias. I. Pantoja, Glauco Cohen Ferreira, *orient.* II. Veiga, Paulo Moreira, *coorient.* III. Título.

CDD: 23 ed. 530.1

Dedico ao meu pai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu pai e minha mãe que estiveram presentes nesta jornada.

Também gostaria de agradecer a minha amiga da universidade e ao meu marido por sempre me motivar em momentos difíceis.

RESUMO

Este trabalho apresenta as questões históricas que contribuíram para o surgimento da relatividade restrita e geral e a principal diferença entre as duas teorias. Para isso, se evidenciam ao longo de seu desenvolvimento os fatores históricos que desencadearam a formulação da relatividade e os pressupostos de Albert Einstein. Em seguida é apresentada, de forma simples, a discussão da distinção entre as teorias no último capítulo, no qual a relatividade restrita lida com objetos em movimento e velocidades próximas à da luz e também trabalha com referenciais inerciais, enquanto a relatividade geral expande essa teoria, incorporando a gravidade e a curvatura do espaço-tempo, descrevendo como a gravidade é um aspecto do espaço-tempo e afeta o movimento dos corpos. O trabalho também apresenta de forma conceitual a métrica de espaço-tempo de Schwarzschild para solução da equação de campo de Albert Einstein e essa é brevemente discutida em sua forma tensorial.

Palavras chave: Relatividade Geral. Relatividade Restrita. Diferença Entre As Duas Teorias. Albert Einstein.

ABSTRACT

This paper presents the historical issues that contributed to the emergence of special and general relativity and the main difference between the two theories. To this end, the historical factors that triggered the formulation of relativity and Albert Einstein's assumptions are highlighted throughout their development. Next, the discussion of the distinction between the theories is presented in a simple way in the last chapter, in which special relativity deals with objects in motion and at speeds close to that of light and also works with inertial reference frames, while general relativity expands this theory, incorporating gravity and the curvature of space-time, describing how gravity is an aspect of space-time and affects the movement of bodies. The paper also presents in a conceptual way the Schwarzschild space-time metric for solving Albert Einstein's field equation and this is briefly discussed in its tensor form.

Keywords: General Relativity. Special Relativity. Difference Between The Two Theories. Albert Einstein.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Transformação de Galileu	13
Figura 2- Experimento de Fizeau.....	15
Figura 3- Experimento de Michelson-Morley	16
Figura 4- Cone de Luz	31
Figura 5-Conservação do Momentum	33
Figura 6- Lentes Gravitacionais.....	37
Figura 7- Espaço-tempo de Schawrschild.....	39

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
1.1 Motivação.....	9
1.2 Objetivos	10
1.3 Estrutura do Trabalho	10
2 RELATIVIDADE RESTRITA.....	10
2.1 Referenciais inercias	10
2.2 Equações de Maxwell.....	13
2.3 Transformadas de Lorentz.....	22
2.4 Relatividade Restrita	24
2.4.1 Velocidade relativística.....	25
2.4.2 Dilatação do tempo	26
2.4.3 Contração do comprimento.....	27
2.4.4 Intervalo de Espaço-tempo	28
3 DINÂMICA RELATIVÍSTICA E RELATIVIDADE GERAL.	30
3.1 Dinâmica relativística	31
3.1.1 Momento relativístico	31
3.1.2 Energia relativística	32
3.2 Relatividade geral	34
3.2.1 Princípio da covariância.....	35
3.2.3 Equação de campo de Albert Einstein	36
4 DIFERENÇAS ENTRE RELATIVIDADE RESTRITA E GERAL	38
5 CONCLUSÕES.....	39
REFERÊNCIAS.....	40

1. INTRODUÇÃO

A teoria da relatividade, desenvolvida por Albert Einstein no início do século XX, revolucionou a compreensão da física e do universo. Dividida em duas partes distintas, a relatividade restrita, publicada em 1905, e a relatividade geral, em 1915. Estas teorias abordam diferentes aspectos do comportamento do espaço, do tempo e da gravidade.

Sendo assim, a relatividade restrita, também conhecida como relatividade especial, foca nos referenciais inerciais e na independência da velocidade da luz com respeito à fonte, introduzindo conceitos fundamentais como a dilatação do tempo e a contração do espaço. Esta teoria é aplicável principalmente em situações onde os efeitos gravitacionais são negligenciáveis. Por outro lado, a relatividade geral amplia os conceitos da relatividade restrita para incluir a gravidade como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, causada pela presença de massa e energia.

1.1 Motivação

Devido ao senso comum sobre a teoria da relatividade, o físico Albert Einstein ficou conhecido como figura principal na construção, desenvolvimento e finalização dessa teoria. Com isto, a relatividade e seu desenvolvimento histórico costuma ser narrada e concentrada apenas nesta figura. Sendo assim, foi identificada a necessidade de esclarecer a contribuição da comunidade científica da época, abordando alguns físicos e matemáticos com trabalhos importantes que já estavam estruturando a teoria da relatividade e que contribuíram para a formulação dos pressupostos de Albert Einstein.

Além da construção teórica contada de um ponto de vista histórico, foi importante evidenciar as principais diferenças entre a relatividade restrita e a geral conceitualmente. Isso acontece, pois, a relatividade restrita parece ser conhecida devido à sua simplicidade matemática comparada ao trabalho de Lorentz nas transformações para altas velocidades, enquanto a relatividade geral é menos abordada por conta de sua característica generalista, abrangendo na relatividade restrita a gravidade como curvatura do espaço-tempo causada pela presença da gravidade e de sua complexidade matemática, por utilizar a ferramenta tensorial, que é um pouco mais rebuscada que o tratamento matemático na relatividade restrita.

1.2 Objetivos

- Descrever a diferença fundamental de forma conceitual entre a relatividade geral e restrita;
- Apresentar os fatores históricos da época para a formulação da teoria da relatividade de Einstein.

1.3 Estrutura do Trabalho.

No segundo capítulo, são apresentados os referenciais inerciais e sua inconsistência em relação às equações de Maxwell no eletromagnetismo. Também se discute sobre a natureza da luz e os vários experimentos para a comprovação do éter, finalizando com a relatividade restrita. No terceiro capítulo, apresenta-se a dinâmica relativística, relatividade geral e seus dois principais postulados: equivalência e covariância, com apresentação da visão do espaço-tempo para Swartschild e finalizando com a ideia conceitual da equação de Einstein. No quarto e último capítulo, são apresentadas as diferenças de forma elementar entre a relatividade restrita e relatividade geral.

2 RELATIVIDADE RESTRITA

É necessário introduzir a formulação dos fundamentos da mecânica clássica construída nos séculos XVI e XVII por cientistas como Isaac Newton, cuja formulação parte de alguns postulados. A partir dela, obtemos postulados universais que abrangiam todas as leis físicas da época, sendo assim é necessário que sejam ressaltadas para o desenvolvimento do trabalho.

2.1 Referenciais Inerciais.

Segundo Gazinelli (2009), na mecânica clássica, o tempo e espaço são absolutos e homogêneos, respectivamente isotrópico e euclidiano. Através disso, temos que o tempo é independente em relação a qualquer referencial, portanto, o tempo sempre “passa da mesma maneira” para quaisquer referenciais, enquanto o espaço é sempre imóvel e é independente de qualquer coisa externa. Ainda, o fato de ser euclidiano indica que a menor distância entre dois pontos é uma reta e a isotropia implica na equivalência em todas as direções do espaço. Devido a isso, é necessário apresentar as leis de Newton para elucidação da fomentação teórica e para a observação de fenômenos físicos em baixas velocidades.

A partir dos postulados formulados por Newton, temos as três leis fundamentais que regem a mecânica clássica,

As partículas mantêm seu estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme, desde que forças externas não atuem sobre ele. A força que atua sobre uma partícula é igual ao produto da massa da partícula por sua aceleração. Se uma partícula A exerce uma força $\vec{F}$ sobre uma partícula B, então B exerce a força $-\vec{F}$ sobre A. (GAZZINELLI, 2009, p.2).

As leis de Newton tomam como postulados que o tempo e espaço são absolutos, logo essas grandezas correspondem a uma grandeza escalar para o tempo e métrica para espaço. Por consequência dos postulados de Newton, a comprovação física de determinado fenômeno mecânico deve se basear nestas três leis fundamentais. Além disso, a dinâmica, que é a forma com que o estado inicial de um sistema determina o estado futuro de forma eficaz através de uma equação diferencial também era utilizada para a verificação do fenômeno físico.

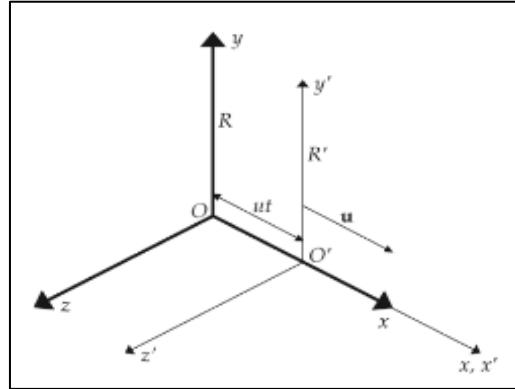
Tendo isso em vista, que os referenciais inerciais são os que atendem as leis de Newton. As primícias para encontrá-lo atende a seguinte regra

Um sistema de três eixos rígidos ortogonais constitui um referencial inercial se três partículas, sobre as quais não atuam forças, projetadas ao longo deles com velocidades uniformes, continuam a se mover com velocidades uniformes. (GAZZINELLI, 2009, p.3).

Sendo assim, o referencial inercial pode ser definido e visualizado. Qualquer transformação realizada neste referencial deve preservar as leis de Newton dentro de seu sistema. No entanto, ao adentrarmos estas definições para a vida real, temos um grande questionamento: como verificamos uma lei física em dois referenciais distintos? Ocorre alguma transformação? A partir das transformações de Galileu podemos formalizar matematicamente essa verificação das leis físicas em dois referenciais distintos.

Dado um evento (x,y,z) ocorre no referencial R e deseja ser analisando em R' , conforme ilustra a figura 2.1.

Figura 1: Transformação de Galileu



Fonte:(GAZZINELLI, 2009)

Temos a partir das transformações de Galileu quatro equações descrevendo um determinado evento em um referencial inercial. Então podemos descrever estas equações como:

$$x' = x + ut \quad (2.1)$$

$$y' = y \quad (2.2)$$

$$z' = z \quad (2.3)$$

$$t' = t \quad (2.4)$$

Pelas equações (2.2) e (2.3) não há variação. Percebemos que em R' ocorre a velocidade constante em relação ao tempo, mas observamos que na coordenada x há uma variação em relação ao tempo determinado pela equação (2.1). Identificamos que ambos os referenciais são inerciais e obedecem ao critério de tempo absoluto na equação (2.4). É necessário evidenciar que na relatividade de galileu, o espaço e o tempo são absolutos. As medidas podem diferir de um referencial para o outro, mas o espaço, em si, é invariante.

Na mecânica clássica podemos ilustrar a transformada de Galileu no seguinte exemplo: Júlia observa Ana correr no ônibus, Ana está correndo a 5km/h e o ônibus em movimento uniforme está a 50km/h, qual é a velocidade que Júlia está observando? Pela transformação de Galileu Júlia observa a velocidade 55km/h.

Os referenciais inerciais descritos possuem características absolutas para tempo e espaço, no entanto no século XIX devido ao estudo das características óticas, enfatizando a

natureza da luz, comprovou-se que a luz é uma onda e não haveria invariância entre a velocidade da fonte e o observador. Devido a este fato houve a inserção de um meio chamado éter para que as ondas pudessem se propagar e assim iniciou-se a corrida para a comprovação da existência deste meio.

2.2 Equações de Maxwell.

As equações de Maxwell ocasionaram um dilema na sua conjugação com a teoria da relatividade Galileana, pois elas não eram invariantes frente às transformações de Galileu. Mas, como se admitia a existência do éter, o problema se transformou no de encontrar o referencial no qual as equações de Maxwell seriam válidas, ou seja, o referencial no qual o éter estaria em repouso.

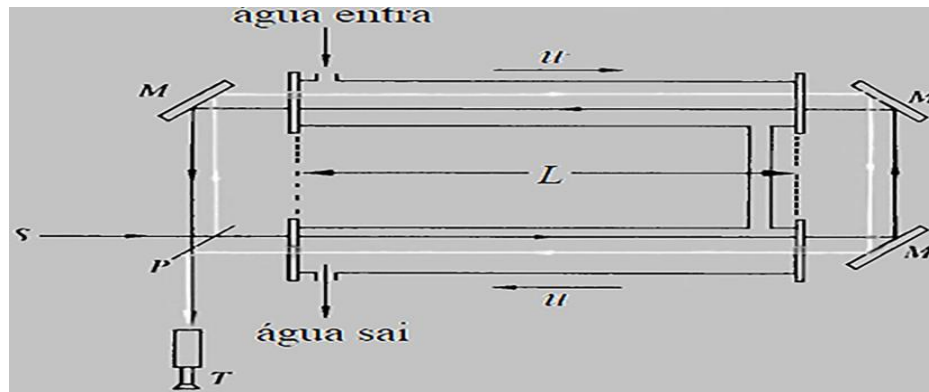
No século XVII surgiram duas teorias sobre a natureza da luz, sendo a teoria corpuscular e a ondulatória. A teoria corpuscular atribuída a Newton afirmava que a luz era feita de pequenas partículas emitidas pela fonte. Esta definição se baseou na reflexão e propagação linear da luz, segundo Menezes Júnior e Lardêlo (2019). Já, no ano de 1690, o físico Christian Huygens definia a natureza da luz como movimento ondulatório universal e sem massa, a qual acata a existência do éter.

O éter foi um conceito introduzido no século XVII, principalmente pelos trabalhos de Thomas Young e Augustin Fresnel, que serviu como suporte para as ondas, visto que na época de sua aceitação o campo não era considerado independente,

O éter teria propriedades bem peculiares: preencher todo o espaço, inclusive os corpos materiais, estar em repouso ao referencial absoluto, ser infinitamente elástico, não ter massa. (GAZZINELLI, 2009, p.16)

As teorias sobre o éter foram alvo de muitas experiências para detectar o movimento relativo ao éter. A primeira experiência que obteve sucesso foi realizada pelo físico Armand Fizeau (1819–1896) em 1853, mostrando que água em movimento transportava parcialmente a luz, conforme ilustra a figura 2.2.

Figura 2: Experimento de Fizeau

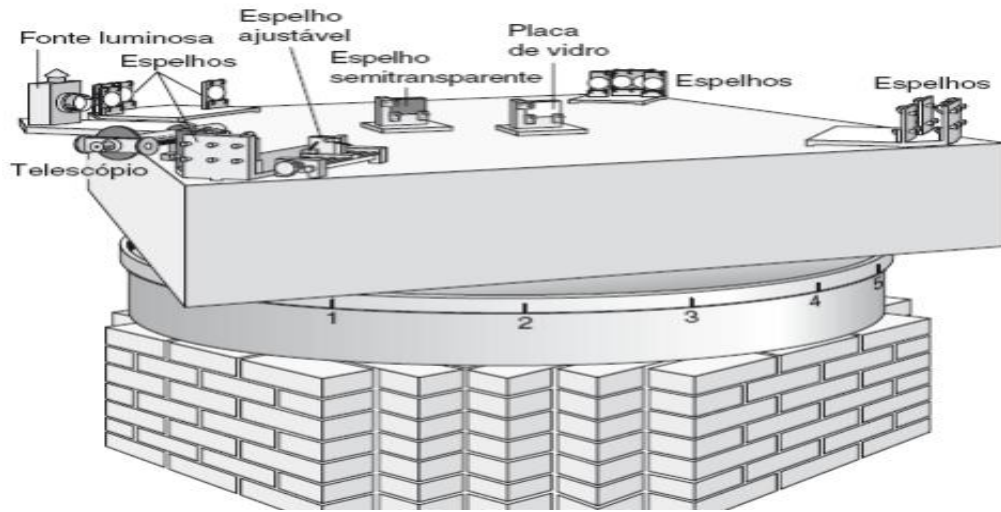


Fonte: (MENEZES JUNIOR; LARDÊLO, 2019)

Este experimento apresentou que o movimento da água modifica a velocidade da luz, afirmando que quando o líquido estivesse favorável à fonte luminosa, a velocidade da luz crescia e quando estivesse contrário, a velocidade da luz decrescia. A fim de medir a velocidade da terra em relação ao éter, Albert Abraham Michelson (1852–1931) e Edward Williams Morley (1838–1923) no ano de 1887, utilizaram um interferômetro capaz de medir a razão de $\frac{v^2}{c^2}$, no qual v é a velocidade da terra em relação ao éter e c é a velocidade da luz no vácuo, sendo assim, ao considerarmos o impacto do movimento da terra ou seja a influência da velocidade v sobre o comportamento da luz c , seria esperado obter a relação $\frac{v}{c}$, no entanto essa situação se adequa apenas para situações de linearidade no qual a transformação galileana dita a soma de velocidade sendo $v' = v_1 + v_2$ e suas transformações entre referenciais inerciais, mas o objetivo do experimento está centrado no tempo de propagação da luz e para altas velocidades como veremos mais adiante a dilatação dos tempos é utilizada, sendo assim a razão a ser considerada no experimento será $\frac{v^2}{c^2}$ esse termo quadrático surge porque o efeito do movimento da Terra sobre a luz não é apenas uma simples soma de velocidades de acordo com a soma de velocidades de Galileu, mas sim uma composição mais complexa, como veremos mais adiante, envolvendo o tempo que a luz leva para percorrer os caminhos em movimento. Portanto $\frac{v^2}{c^2}$ contempla o efeito de interferência entre ondas luminosas como um medidor de alta precisão, conforme ilustra a

imagem 2.3.

Figura 3: Experimento de Michelson-Morley



Fonte: (TIPLER, 2014, p. 15).

De acordo com Tipler (2014), o dispositivo foi montado a fim de evitar interferências e, com ele, concluía-se que a velocidade da terra e do éter é provavelmente menos que um sexto da velocidade orbital da terra e certamente menos que um quarto. Mas, o deslocamento previsto para a detecção do éter não foi encontrado, pois os deslocamentos das franjas de onda obtiveram a mesma ordem de precisão do equipamento.

No entanto, várias experiências para a comprovação do éter falharam e em meados de 1856, James Clark Maxwell (1831–1899) lança seu artigo, que deu início a eletrodinâmica de Maxwell e que utiliza o éter para sua verificação, portanto mostraremos a inconsistência entre a relatividade de galileu e as equações de Maxwell.

Podemos descrever as equações de Maxwell, sendo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Sendo ϵ_0 a permissividade do vácuo e μ_0 permeabilidade magnética do vácuo. A primeira equação (2.5), denominada Lei de Gauss, descreve a geração de campos eletrostáticos por cargas elétricas e mostra que é possível encontrar cargas elétricas isoladas na natureza, já a equação (2.6) denominada Lei de Gauss magnética indica a inexistência de monopolos magnéticos. A equação (2.8), denominada Lei de Ampère-Maxwell, mostra que campos magnéticos são gerados por correntes elétricas, bem como por campos de deslocamento elétrico variáveis. A equação (2.7) denominada, Lei de Faraday, fala que se os campos magnéticos forem variáveis no tempo, então eles originam campos elétricos induzidos.

No eletromagnetismo, percebemos a dependência da velocidade em suas equações, enquanto as equações newtonianas apresentam a dependência da aceleração. Segundo o princípio de galileu, o movimento retilíneo uniforme apresenta a aceleração absoluta e nula, enquanto para o eletromagnetismo a velocidade é absoluta. A questão em diante foi de como verificar no vácuo a velocidade de uma onda eletromagnética:

Aplicando o rotacional na Lei de Gauss magnética e lei de Ampère, respectivamente equação (2.6) e (2.8), temos:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times B = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}) \quad (2.9)$$

$$\nabla \times (\nabla \times B) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times E = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial B}{\partial t}) \quad (2.10)$$

Substituindo as identidades vetoriais, temos:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot E)}_{=0} - \nabla^2 E \quad (2.11)$$

$$\nabla \times (\nabla \times B) = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot B)}_{=0} - \nabla^2 B \quad (2.12)$$

Encontramos a equação de onda para E e B, temos:

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \nabla^2 E \quad (2.13)$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \nabla^2 B \quad (2.14)$$

Podemos obter a velocidade da luz no vácuo:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \therefore 2,99.10^8 \frac{m}{s} \quad (2.15)$$

Assim, obtemos que a velocidade da luz é medida e seu valor é constante, portanto depende somente de características eletromagnéticas do meio (independente também da velocidade da fonte). Podemos perceber ainda que ela possui as características de uma onda, visto que suas velocidades coincidem e que se caracterizam pelo seu comprimento de onda delimitado por 410 nm a 710 nm e ainda com esta dedução temos que c é uma constante, descrita através da teoria eletrodinâmica de Maxwell. É importante ressaltar que no vácuo as características de ondas eletromagnéticas são iguais à constante c , no entanto, o questionamento a partir da teoria é que transformações serão obtidas na verificação da determinada velocidade nos referenciais inerciais em relação a um outro referencial? Ressaltando-se de que a transformada de galileu é linear e o tempo não varia com o referencial.

Para verificamos as equações de Maxwell em referenciais inerciais, tomemos as equações no sistema gaussiano, mais conveniente para os cálculos do ponto de vista macroscópico (omite a permissividade do vácuo e a permeabilidade magnética do vácuo), sendo assim teremos :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad (2.16)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.17)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.18)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.19)$$

No qual, ρ é a densidade de carga total, c é a velocidade da luz no vácuo, j é a densidade de corrente. A partir das equações de Maxwell em sistema gaussiano, temos a seguinte relação $\mu_0 = 1$ e $\epsilon_0 = 1$, portanto:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.20)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (2.21)$$

Assim mostraremos a definição de Divergente e Rotacional respectivamente, onde $u = (u_x \hat{x} + u_y \hat{y} + u_z \hat{z})$ (GRIFFITHS, 2013, p. 15):

$$\nabla \cdot u = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (2.22)$$

$$\nabla \times u = \hat{x} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (2.23)$$

Divergente do campo Elétrico :

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (2.24)$$

Divergente do campo Magnético:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (2.25)$$

Rotacional do campo Elétrico:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (2.28)$$

Rotacional Magnético:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j_y + \frac{1}{c} \frac{\partial D_y}{\partial t} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial D_z}{\partial t} \quad (2.31)$$

A partir de dois referenciais S e S' onde em S' será aplicado as transformações de Galileu no Divergente e Rotacional dos campos Elétricos e Magnéticos. Realizaremos a aplicação das transformações de Galileu nas equações de Maxwell.

Transformações de Galileu:

$$x' = x - vt \quad (2.32)$$

$$y' = y \quad (2.33)$$

$$z' = z \quad (2.34)$$

$$t' = t \quad (2.35)$$

Após a aplicação da regra da cadeia para derivadas parciais nas transformações de Galileu, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad (2.39)$$

Substitui-se as derivadas parciais encontradas acima no rotacional e divergente dos campos Elétrico e Magnéticos. Após essas substituições teremos:

Divergente do campo Elétrico:

$$\frac{\partial Dx}{\partial x'} + \frac{\partial Dy}{\partial y'} + \frac{\partial Dz}{\partial z'} = 4\pi\rho' \quad (2.40)$$

Divergente do campo Magnético:

$$\frac{\partial Bx}{\partial x'} + \frac{\partial By}{\partial y'} + \frac{\partial Bz}{\partial z'} = 0 \quad (2.41)$$

Rotacional do campo Elétrico:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c'} \frac{\partial B_x}{\partial t'} - v \frac{\partial B_x}{\partial x'} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial E_z}{\partial x'} = -\frac{1}{c'} \frac{\partial B_y}{\partial t'} - v \frac{\partial B_y}{\partial x'} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{1}{c'} \frac{\partial B_z}{\partial t'} - v \frac{\partial B_z}{\partial x'} \quad (2.44)$$

Rotacional do campo Magnético:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} = \frac{4\pi}{c'} j_x + \frac{1}{c'} \frac{\partial D_x}{\partial t'} - v \frac{\partial D_x}{\partial x'} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \frac{\partial H_z}{\partial x'} = \frac{4\pi}{c'} j_y + \frac{1}{c'} \frac{\partial D_y}{\partial t'} - v \frac{\partial D_y}{\partial x'} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x'} - \frac{\partial H_x}{\partial y'} = \frac{4\pi}{c'} j_z + \frac{1}{c'} \frac{\partial D_z}{\partial t'} - v \frac{\partial D_z}{\partial x'} \quad (2.47)$$

Comparando o Divergente do campo Elétrico e Magnético do Referencial S' (2.40) e (2.41) com o Divergente do campo Elétrico e Magnético no Referencial S (2.24) e (2.25), teremos:

Para o campo Elétrico:

$$D'_x = D_x \quad (2.48)$$

$$D'_y = D_y \quad (2.49)$$

$$D'_z = D_z \quad (2.50)$$

Para o campo Magnético:

$$B'_x = B_x \quad (2.51)$$

$$B'_y = B_y \quad (2.52)$$

$$B'_z = B'_z \quad (2.53)$$

Resolvendo a equação (2.42), isolamos $\frac{\partial B_x}{\partial x'}$ do divergente do campo magnético (2.41) na equação (2.42) obteremos então:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial y'} - \frac{\partial B_z}{\partial z'} \quad (2.54)$$

Substitui-se na equação (2.42) que ficará da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial y'}(E_z - v B_y) - \frac{\partial}{\partial z'}(E_y + v B_z) = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t'} \quad (2.55)$$

Analisando por comparativo da equação (2.26), temos:

$$E'_z = E_z - v B_y \quad (2.56)$$

$$E'_y = E_y + v B_z \quad (2.57)$$

$$c' = c \quad (2.58)$$

$$B'_x = B_x \quad (2.59)$$

De acordo com as relações constitutivas dos campos Elétrico e Magnético na matéria no sistema Gaussiano de unidades (MACHADO, 2007, p. 696), temos que:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (2.60)$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \quad (2.61)$$

Por hipótese de que estejamos no vácuo, a Polarização $\vec{P}$ que é definida como o momento do dipolo Elétrico por unidade de volume, é igual a zero. Também temos que a Magnetização de $\vec{M}$ que é o momento do dipolo Magnético por unidade de volume, será igual a zero, logo:

$$\vec{P} = 0 \quad (2.62)$$

$$\vec{M} = 0 \quad (2.63)$$

Aplicando o Princípio da Relatividade para as Relações Constitutivas na matéria, temos que:

$$\vec{D} = \vec{E} \therefore \vec{D}' = \vec{E}' \quad (2.64)$$

Concluimos que:

$$D'_y = E'_y \therefore D'_y = E_y + v B_z \quad (2.65)$$

$$E_y = E_y + v B_z \therefore v B_z = 0 \quad (2.66)$$

Interpretando $v B_z = 0$, temos que a velocidade entre dois referenciais é nula, o que é inconsistente com a afirmação inicial, pois é admitido uma velocidade v entre os referenciais

S e S', também observamos que o campo magnético é nulo, esta informação é incoerente com as equações de Maxwell que engloba ambos os campos.

Com o questionamento da época sobre a veracidade das equações de Maxwell, a partir da variação em referenciais inerciais, admitiu-se ser necessário uma nova transformação para referenciais inerciais que englobassem as equações.

2.3 Transformações de Lorentz

Uma grande discussão acerca das equações de Maxwell sobre a invariância nos referenciais inerciais abalavam o século XIX. Percebe-se que há uma incoerência na transformação dessas equações dentro dos referenciais inerciais, por isso fez-se necessário a substituição deste sistema de coordenadas. Foi então que em 1895 surgiu um novo sistema de coordenadas que possuía como referência o éter. O sistema em questão foi criado pelo físico Lorentz e se caracterizou por estar em repouso em relação ao éter e expressou os fenômenos elétricos. As transformações de Lorentz são apresentadas como:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (2.67)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right). \quad (2.68)$$

No qual t' é o tempo próprio que se caracteriza pelo tempo do objeto no evento em movimento, t é o tempo para o referencial em repouso, v é a velocidade do evento e c^2 é a velocidade da luz. γ até então não tinha significado físico (ressaltava ser apenas uma construção matemática).

Para deduzir o fator de Lorentz, suponhamos um referencial S com as coordenadas (x, t) e S', sendo que S' se move com uma velocidade v em relação a S ao longo do eixo x . Consideremos então um evento em que um raio de luz se propaga, então a equação que descreve a propagação de luz em S, será:

$$x = ct. \quad (2.69)$$

Onde x é a posição no eixo x e t será o tempo. Então utilizando as transformações entre sistemas de coordenadas de forma linear, podemos estabelecer a relação das coordenadas (x, t) no referencial S com as coordenadas (x', t') no referencial S', teremos então:

$$x' = \alpha x + \beta t, \quad (2.70)$$

$$t' = \gamma x + \delta t. \quad (2.71)$$

Então é necessário encontrar α, β, δ e γ . Logo no referencial S' teremos:

$$x' = ct'. \quad (2.72)$$

Substituímos x e t na equação (2.71), temos:

$$\alpha x + \beta t = c(\gamma x + \delta t), \quad (2.73)$$

Organizando, temos:

$$\alpha = c\gamma, \quad (2.74)$$

$$\beta = c\delta. \quad (2.75)$$

Segundo a condição de invariabilidade para a luz de acordo com a métrica de espaço-tempo de Minkowski que será vista mais a frente, temos:

$$x^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (2.76)$$

Utilizaremos a relação de invertibilidade entre sistemas de coordenadas, então:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2. \quad (2.77)$$

Substituindo as transformações lineares, temos:

$$(\alpha x + \beta t)^2 - c^2 (\gamma x + \delta t)^2 = x^2 - c^2 t^2. \quad (2.78)$$

Para sua validação em x e t , temos:

$$\alpha^2 - c^2 \gamma^2 = 1, \quad (2.79)$$

$$\beta^2 - c^2 \delta^2 = 0, \quad (2.80)$$

$$2\alpha\beta - 2c^2\gamma\delta = 0, \quad (2.81)$$

Resolvendo o sistema de equações, onde v é a velocidade relativa entre os referenciais S e S' , temos:

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.82)$$

$$\beta = -\gamma v, \quad (2.83)$$

$$\delta = \gamma \frac{v}{c^2}, \quad (2.84)$$

Portanto as transformações de Lorentz para as coordenadas x e t , serão:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (2.85)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad (2.86)$$

Onde γ é o fator de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.87)$$

Nessa equação, γ é o fator de Lorentz que relata a correção entre as medidas das posições e tempos entre referenciais, e obteve esse significado com a formalização da teoria da relatividade restrita de Einstein. Então, em 1905 foi formulada uma nova proposta para a abrangência da relatividade na mecânica e na eletrodinâmica. A proposta em questão foi formulada por Albert Einstein que, em seu artigo, descrevia a eletrodinâmica para corpos em movimento. Percebemos historicamente que a relatividade descrita por Einstein não foi a única existente, apesar de ser a mais conhecida por pessoas de todas as áreas de trabalho. É importante reconhecer que este físico contribuiu para resolver grandes questões da época e ajudou a física a expandir seus horizontes.

2.4 Relatividade Restrita

Com nascimento em 1879, Albert Einstein, Físico Alemão que viveu na era nazista alemã e foi obrigado a sair de seu país, relata que sua ideia sobre relatividade restrita surgiu com um pensamento de perseguir um raio luminoso, sabendo que este raio teria velocidade igual a velocidade da luz. É importante ressaltar que nos artigos que descrevem seu trabalho sobre a relatividade são relatadas as tentativas falhas de encontrar o éter, embora não houvesse negação de sua existência Gazzinelli (2005, p.55).

Devido ao seu trabalho, o físico Albert Einstein foi indicado ao prêmio Nobel por vários anos seguidos, mas a tentativa de ganhar o Nobel pelo seu trabalho sobre a relatividade foi falho, pois, além de ser descrito apenas teoricamente, os avaliadores afirmavam falta de evidências para sua premiação segundo Rocha (2002, p.261). Então, no ano de 1922, o físico recebeu o Nobel por outro trabalho, sobre o efeito fotoelétrico, que foi verificado experimentalmente. Tal fato é incoerente com a fama dos trabalhos publicados por Einstein que é reconhecida universalmente pelo princípio da relatividade. A partir do artigo escrito por Albert Einstein em 1905, temos dois postulados:

- Primeiro postulado: “As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.” (TIPLER, 2014, p.12)

Nesse primeiro postulado, percebe-se a extensão do princípio da relatividade “clássico”, já visto anteriormente para fenômenos eletromagnéticos e como consequência relata que não existe nenhum referencial inercial privilegiado.

- Segundo postulado: “A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c , qualquer que seja o movimento da fonte”. (TIPLER, 2014, p.12)

Nesse segundo postulado, temos uma definição para todas as ondas eletromagnéticas, no qual sua velocidade não depende do movimento da fonte, isto inclui todas as ondas eletromagnéticas, inclusive as ondas luminosas.

Diante desses enunciados, precisamos determinar o que é um evento, no contexto da relatividade. Para isso, definimos que um evento é o que ocorre em um determinado lugar do espaço delimitado por um determinado instante e o observador se caracteriza como um medidor associado a um referencial inercial. Também é necessário enfatizar a relação de causalidade para eventos, essa relação se estabelece na implicação de que a ordem de eventos deve ser preservada, ou seja, se um evento em A pode causar um evento em B, então para qualquer referencial o evento em A deve ocorrer antes de B. Apesar de todas as explicitações para os entendimentos dos postulados de Einstein, foi identificado alguns paradoxos em sua teoria e para sanar esses paradoxos será necessário a relatividade da simultaneidade.

De acordo com Tipler (2014), dois relógios que estão sincronizados em um referencial não estão sincronizados em nenhum outro referencial inercial que esteja em movimento em relação ao primeiro.

A partir desse corolário, evitamos transformações iguais para diferentes referenciais e verificamos que, eventos simultâneos podem não ser simultâneo para outro observador que esteja em movimento relativo ao primeiro observador. Diante disso, podemos obter a transformação da velocidade relativística, na qual há um fator de correção entre as velocidades do referencial suposto em repouso e o referencial em movimento em relação ao primeiro, neste trabalho, denominaremos de referencial próprio.

2.4.1 Velocidade Relativística

Consideremos dois referenciais inerciais S e S' . Suponhamos uma partícula se movendo no referencial S com uma velocidade $u = \frac{dx}{dt}$, ou seja, sua posição x varia com o tempo t no sistema S .

Segundo as transformações de Lorentz, as coordenadas de tempo e espaço entre ambos os referenciais estão relacionados pelas equações (2.85) e (2.86). No referencial S' , a partícula terá uma velocidade $u' = \frac{dx'}{dt'}$.

Faz-se as derivadas segundo as transformações de Lorentz em S' , então temos:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt} [\gamma(x - vt)], \quad (2.88)$$

$$\gamma = \left(\frac{dx}{dt} - v \right), \quad (2.89)$$

$$\gamma = (u - v), \quad (2.90)$$

$$u' = \gamma(u - v). \quad (2.91)$$

Temos então, a transformação de velocidades entre dois referenciais inerciais:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \quad (2.92)$$

Verificamos que a transformação de velocidades relativísticas descreve como a velocidade de uma partícula é observada de diferentes referenciais inerciais sendo S e S' que estão em movimento relativo, no qual v é a velocidade relativa entre os dois referenciais definidos, u é a velocidade com a qual a partícula se move em relação ao sistema S e é utilizada para determinar u' , que é a velocidade no próprio evento. A velocidade relativística leva em consideração o fato de que as velocidades não se somam de maneira simples quando os sistemas estão se movendo próximos à velocidade da luz. Em vez disso, ela envolve um fator de correção, sendo esse o fator de Lorentz que depende da velocidade da luz c , refletindo a natureza relativística do movimento em altas velocidades.

Também podemos obter o intervalo de tempo entre dois eventos no referencial em repouso S em relação ao referencial em movimento S' e podemos concluir que o intervalo de tempo de movimentação do referencial em repouso S será maior do que o próprio descrito pelo referencial no movimento S' , esse fenômeno se denomina Dilatação dos tempos.

2.4.2 Dilatação dos tempos

Consideremos dois eventos que ocorrem nos instantes t'_A e t'_B no referencial S' . Em relação ao observador em repouso, os eventos ocorrem em lugares diferentes e nos instantes t_A e t_B em S , respectivamente:

$$t_A = \gamma \left(t'_A - \frac{vx'_A}{c^2} \right), \quad (2.93)$$

$$t_B = \gamma \left(t'_B - \frac{vx}{c^2} \right), \quad (2.94)$$

$$t_B - t_A = \gamma \left(t'_B - \frac{vx'}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_A - \frac{vx'}{c^2} \right), \quad (2.95)$$

$$\Delta t = \gamma(t'_B - t'_A). \quad (2.96)$$

Ou seja:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \quad (2.97)$$

Podemos assimilar a partir dessa demonstração que o intervalo de tempo não é igual para o mesmo evento. Isto quebra o absolutismo da mecânica clássica, na qual velocidade e tempo são absolutos. A partir da equação (2.97) obtemos a relação da percepção temporal para os referenciais no evento em um contexto relativístico, no qual Δt é o intervalo de tempo medido pelo observador em repouso e $\Delta t'$ é o intervalo de tempo próprio descrito pelo observador no evento.

Espera-se também que para diferentes referenciais a percepção do tamanho dos objetos sejam distintas, esse fenômeno é conhecido como contração do comprimento. Em particular, quando um objeto se move a uma velocidade muito alta em relação a um observador em repouso, seu comprimento na direção do movimento diminui, ou seja, sofre uma contração, conforme visto por esse observador.

2.4.3 Contração do comprimento

A contração do comprimento descreve como a percepção do tamanho de um objeto pode ser diferente para dois observadores em referenciais distintos S e S' , dependendo de suas velocidades relativas. Especificamente, quando um objeto se move a uma velocidade relativística em relação a um observador em repouso, o comprimento do objeto, medido na direção do movimento, parece encolher para o observador no referencial próprio S' .

Temos:

$$L = x_b - x_a, \quad (2.98)$$

$$L' = x'_b - x'_a, \quad (2.99)$$

$$L' = \gamma(x_b - vt) - \gamma(x_a - vt), \quad (2.100)$$

$$L' = \gamma(x_b - x_a), \quad (2.101)$$

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.102)$$

Observamos que para o observador no referencial em repouso S que visualiza o objeto em movimento sendo denotado por L mede um comprimento maior do que o comprimento medido pelo observador no movimento S' denotado por L'. Naturalmente, isto é esperado, visto que para um observador em repouso, o comprimento real do objeto pode ser medido facilmente. No entanto, para um observador que está se movendo em relação ao objeto com uma alta velocidade, o comprimento do objeto será reduzido na direção do movimento.

2.4.4 Intervalo de espaço-tempo

Apesar do relativismo entre todas as grandezas absolutas classicamente, temos uma grandeza invariante na relatividade denominada intervalo de espaço-tempo:

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2). \quad (2.103)$$

Na expressão 2.103, $(\Delta s)^2$ é o intervalo de espaço-tempo, $(c\Delta t)^2$ é a distância no tempo e $(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$ é a distância no espaço.

O intervalo de espaço-tempo é uma medida fundamental que descreve a separação entre dois eventos no espaço-tempo, sendo assim o intervalo de espaço-tempo entre dois eventos depende das suas coordenadas espaciais e temporais. Podemos então obter três tipos de intervalos distintos.

Para o intervalo de tempo maior que o intervalo do espaço, temos o intervalo do tipo temporal.

$$\frac{\Delta s}{c} = \sqrt{(\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2}. \quad (2.104)$$

Para o intervalo do espaço maior que o intervalo de tempo, temos o intervalo do tipo espacial.

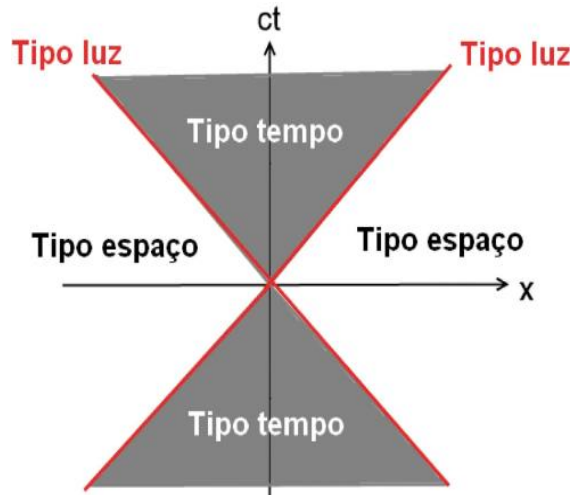
$$(\Delta s)^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) - (c\Delta t)^2. \quad (2.105)$$

Para intervalos iguais, temos o intervalo luminoso, naturalmente pensamos neste analisando a velocidade da luz constante, visto que em um evento com pulso luminoso em referenciais distintos a chegada e a saída para os observadores são iguais.

$$(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = (c\Delta t)^2. \quad (2.106)$$

A partir dos intervalos de espaço-tempo podemos descrever cada tipo de intervalo, visualmente através do diagrama de Minkowski de espaço-tempo contendo um cone de luz.

Figura 4: Cone de Luz



Fonte: (CARAÇA,2017)

O cone de luz representado no diagrama de Minkowski de espaço-tempo é utilizado para ilustrar as trajetórias da luz denominadas linhas de mundo e as relações causais entre os eventos no espaço-tempo. No diagrama de Minkowski temos as seguintes compontes:

- A ordenada ct , onde representa o tempo multiplicado pela velocidade da luz c , para que as unidades de tempo e espaço sejam compatíveis.
- A abscissa x que representa uma das dimensões espaciais.

Sendo assim o cone de Luz é a região do espaço-tempo que pode ser alcançada pela luz, a partir de um evento específico, sendo o cone de luz delimitado pela linha vermelha na figura(número). Podemos então definir os três tipos de eventos que podem ser descritos pelo diagrama de Minkowski:

- $(\Delta s)^2 < 0$ Intervalo tipo tempo, onde o tempo será maior que o espaço e ocorre a preservação da causalidade, no qual a velocidade da luz não pode ser ultrapassada;
- $(\Delta s)^2 > 0$ Intervalo tipo espaço, onde o espaço será maior que o tempo, nele ocorre eventos com velocidade maior que a luz e viola a causalidade;
- $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2$ Intervalo tipo luz, onde espaço é igual ao tempo e delimita o cone de luz.

Na relatividade restrita se utiliza a métrica de Minkowski para espaço-tempo. Segundo

Rocha (2002), Hermann Minkowski (1864–1909) era inicialmente cético em relação à relatividade especial de Einstein, mas ele logo percebeu a grandeza dessa teoria e sua implicação fundamental, onde tempo e o espaço não são independentes, mas sim entrelaçados em uma única entidade chamada espaço-tempo, temos então a métrica de espaço-tempo para Minkowski:

$$d^2 = c^2 t^2 - x^2 \quad (2.107)$$

A partir da métrica de espaço-tempo formalizada por Minkowski, temos que o espaço-tempo se baseia em três dimensões para espaço e uma dimensão para o tempo e suas linhas de mundo, ou seja, as trajetórias de eventos podem ser determinadas por uma reta como sugere a geometria euclidiana, no qual é utilizada para referenciais inerciais.

3 DINÂMICA RELATIVÍSTICA E RELATIVIDADE GERAL

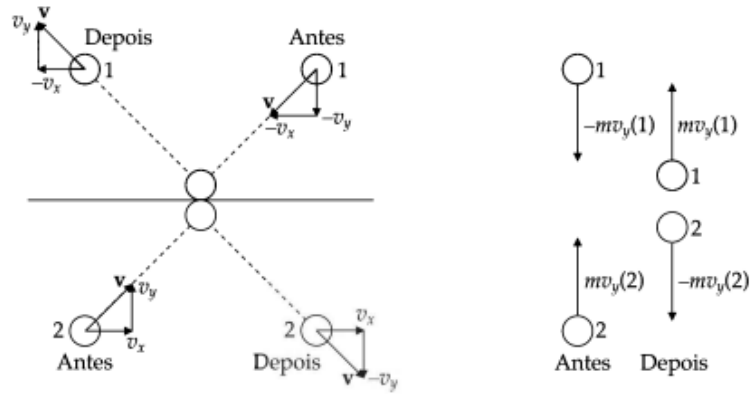
Devido à proposta da época, as transformações de Lorentz passaram a substituir as transformações de Galileu para altas velocidades, no entanto, apesar do sucesso desta transformação, seria necessário que as leis da mecânica respeitassem a invariância nas transformações de Lorentz. Para isto, foi necessária a verificação da trindade, energia, massa e momento a partir das coordenadas de Lorentz.

Temos que a conservação do momento para referenciais inerciais é obedecida utilizando as transformações de Galileu, mas o que ocorre quando esta é submetida á transformação de Lorentz?

3.1 Dinâmica Relativística

Considerando uma colisão entre duas esferas, temos dois referenciais distintos sendo S' um referencial no qual a colisão ocorre de maneira simétrica, o que automaticamente mostra a conservação do momentum. Nesse caso, 1 e 2 (de mesma massa) são considerados como tendo velocidades opostas em sentido, com mesma intensidade.

Figura 5: Conservação do Momentum



Fonte:GAZZINELLI, Ramayana. Teoria da relatividade especial. São Paulo:Blucher, 2009. p. 61.

Portanto, com as velocidades serão “trocadas”, o momentum total do sistema é nulo. Quando vamos fazer a transformação de velocidades para analisar a conservação do momentum no referencial S, no entanto, o momentum não é conservado. Esse argumento é suficiente para indicar que é preciso reescrever o momentum de maneira que ele seja conservado, uma vez que é uma variável dinâmica relevante para a Física como um todo.

3.1.1 Momento Relativístico

A partir dessa inconsistência vieram muitos questionamentos e devido à inserção da teoria houve duas perguntas relevantes: a conservação do momento deveria ser abandonada? Se não, deveria existir uma nova definição para momento que o mantivesse conservado? Foi constatado que seria necessária a mudança na definição de momento. Esta mudança passou a validação da conservação de momento para todos os referenciais, temos então:

$$t' = t \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}, \quad (3.1)$$

$$v' = \frac{dr}{dt'}. \quad (3.2)$$

Então:

$$dt' = dt \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}, \quad (3.3)$$

$$v' = \frac{dr}{dt \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}}. \quad (3.4)$$

$$v' = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{dr}{dt'} \quad (3.5)$$

$$v' = \gamma v, \quad (3.6)$$

onde:

$$\vec{p}' = m v'. \quad (3.7)$$

Então:

$$\vec{p}' = \gamma m v \quad (3.8)$$

A conservação do momento em todos os referenciais foi possível devido ao dt' próprio que é invariante. Nisso, a conservação do momento significa que, para qualquer processo ou interação (como colisões ou decaimentos de partículas), mesmo quando as partículas de um determinado sistema estão se movendo a velocidades próximas da velocidade da luz, o momento total do sistema não muda. A definição relativística de momento faz com que todos os referenciais inerciais sejam equivalentes e obedeçam a conservação de momento, retornando para a definição clássica em baixas velocidades.

Devido a isso, a força será definida como:

$$\vec{F} = \frac{d(\gamma m v)}{dt} \quad (3.9)$$

3.1.2 Energia Relativística

Também devemos obter uma definição de energia válida para todos os referenciais inerciais através da transformação de Lorentz e que obedeçam a conservação de energia.

Classicamente temos para a energia cinética:

$$Ec = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (3.10)$$

A partir do momento relativístico, temos:

$$\vec{p} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.11)$$

Fazendo em uma dimensão temos:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m v) = \gamma^3 m \frac{dv}{dt} \quad (3.12)$$

O trabalho ficará:

$$\tau = \int_{x_1}^{x_2} \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/3}} \frac{dv}{dt} dx \quad (3.13)$$

Então:

$$\tau = m \int_{v_1}^{v_2} \frac{v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \quad (3.14)$$

O teorema trabalho-energia cinético relativístico é dado por:

$$\tau = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \quad (3.15)$$

Onde teremos:

$$\tau = K_2 - K_1 \quad (3.16)$$

Supondo que $v_1 = 0$ ou seja um determinado corpo está em repouso e logo não haverá energia cinética, então $K_1 = 0$. Quando esse corpo atingir o ponto 2 com a velocidade v_2 sua energia cinética será:

$$K_2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - mc^2 \quad (3.17)$$

Conforme a equação acima a energia cinética será K_2 , então é conveniente definir o primeiro termo como energia total, visto que o segundo termo mc^2 caracteriza a energia de repouso e aparece independente na equação. Para a energia total, temos:

$$E_{total} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \gamma mc^2. \quad (3.18)$$

Nesse caso, γmc^2 será energia total e mc^2 energia de repouso, percebemos assim que a energia é conservada e ela tende ao valor clássico quando a velocidade tende a zero.

Logo, percebemos que $E=mc^2$ obedece à conservação de energia e chegamos na tão famosa equação escrita por Albert Einstein. Esta equação foi descrita no seu artigo sobre teoria da relatividade especial lançado em 1905, descreve a equivalência entre massa e energia, e deduz também que se um corpo emite energia sob forma de radiação sua massa decresce $\frac{v}{c^2}$ e a radiação transporta a inércia para outros corpos. Concluimos que na mecânica relativística, há apenas uma lei de conservação que equivale para momento e energia, sendo

ela a lei de conservação massa-energia e esta lei foi comprovada experimentalmente por experiências com colisões de partículas ou desintegração nuclear.

3.2 Relatividade Geral

Apesar das inovações descritas em seus artigos, o físico alemão ainda permanecia anônimo para a comunidade acadêmica, até que o físico basilar da mecânica quântica, Max Planck, lhe enviou uma carta com dúvidas sobre sua publicação e assim a fama e reconhecimento finalmente chegou ao físico Albert Einstein. Ele foi convidado para escrever sobre seu artigo em uma publicação sobre inovações físicas da época Gazzinelli (2005, p.119). A partir desta nova escrita sobre seu trabalho que ele então pensou em descrever o peso próprio de uma pessoa em queda livre, surgindo assim um de seus principais postulados sobre a teoria da relatividade geral, o princípio da equivalência.

Historicamente, a massa gravitacional e a massa inercial foram identificadas como proporcionais em alta precisão sendo possível na mecânica newtoniana igualar estas massas e assim poderiam afirmar que em um campo gravitacional homogêneo a queda livre ocorre com a mesma aceleração, então classicamente,

$$F = \frac{GMm}{r^2} \hat{r} \quad (3.19)$$

Percebemos que a força gravitacional descrita por Newton indica a atração entre corpos devido sua massa, na qual o campo gravitacional é intrínseco exclusivamente pela interação atrativa da massa de dois objetos e por consequência sua intensidade depende da relação da massa inversamente ao quadrado da distância. A fim de estender o mesmo princípio da força gravitacional para altas velocidades, Einstein realizou algumas adequações utilizando a invariância das transformações de Lorentz e inclusão da massa-energia definida pela relatividade restrita que resultariam ao equivalente clássico quando a velocidade se aproximasse de zero, então foi formulado o princípio da equivalência.

As massas inerciais e gravitacionais são iguais e o resultado de qualquer experimento local não gravitacional em um referencial em queda livre é independente da velocidade do referencial (invariância de Lorentz) e sua localização no espaço tempo, localmente (a menos de forças de maré) podemos recuperar as mesmas leis da relatividade especial. (BERNADO, 2018, p.8).

O princípio da equivalência reformulado indica que não há distinção entre um referencial acelerado e em um campo gravitacional homogêneo para o mesmo referencial. Por consequência, a gravidade seria vista de um âmbito geral como uma interação geométrica que não se entenderia mais como uma força central, o que mais tarde seria descrito como consequência do princípio da equivalência a própria deflexão da luz por um campo gravitacional na ausência das condições do princípio da equivalência, no qual analogamente há diferença entre um referencial acelerado e outro em repouso. Uma manifestação direta dessa deflexão da luz devido a curvatura do espaço-tempo, demonstrando como a gravidade pode desviar a luz, exatamente como se a luz estivesse sendo "acelerada" ou "desviada" por uma força pode ser visualizada através das Lentes gravitacionais.

Figura 6: Lentes Gravitacionais



Fonte: EUROPEAN SOUTHERN OBSERVATORY

O fenômeno de lentes gravitacionais é um exemplo direto da curvatura do espaço-tempo prevista pela relatividade geral. Quando a luz passa por um campo gravitacional, como o de uma galáxia massiva, ela sofre uma curvatura de sua trajetória, o que é um reflexo direto da ideia do princípio da equivalência, pois a curvatura do espaço-tempo pode ser vista como a "aceleração" do movimento da luz em direção ao objeto massivo.

3.2.1 Princípio da Covariância

Assim, podemos assimilar que mesmo com as adequações fornecidas por Einstein, as

leis da natureza são invariantes no campo gravitacional, por este motivo surgiu o princípio da covariância, afirmando que “as leis da física são as mesmas para todos os observadores” (BERNADO, 2018, p.9). Então, após essa generalização, a formalidade matemática foi em busca de ferramentas que incluíam as coordenadas generalizadas e, assim, Schwarzschild, em 1916, resolveu as equações de campo de Einstein e formalizou uma nova métrica de espaço-tempo, na qual admitia a geometria Riemanniana e álgebra tensorial e que, assim como na relatividade restrita, utiliza geodésica, mas com o acréscimo do campo gravitacional ao espaço-tempo. Com isso, a relatividade geral deve ser tratada de forma tensorial devido suas características generalistas a partir da nova métrica.

A métrica do espaço-tempo não é plana, como foi assumido na relatividade especial. As linhas de mundo de corpos em queda livre em um campo gravitacional são simplesmente as geodésicas da métrica do espaço-tempo WALD (1984, p. 73).

A atribuição do campo gravitacional ao espaço-tempo nos revela que a ideia de força gravitacional já foi extinta para a teoria e que agora será necessário descrever a atribuição de campo gravitacional em termos do encurvamento do espaço-tempo. “Não temos uma maneira significativa de descrever a gravidade como um campo de força; em vez disso somos forçados a ver a gravidade como um aspecto da estrutura do espaço-tempo” (WALD, 1984, p.73). Sendo assim, iremos apenas conhecer a equação de campo de Albert Einstein em seu modelo tensorial para detalhar conclusões sobre as resoluções da mesma.

3.2.2 Equação de campo de Alber Einstein

A equação de campo descreverá como a matéria e a energia influenciam a curvatura do espaço-tempo.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

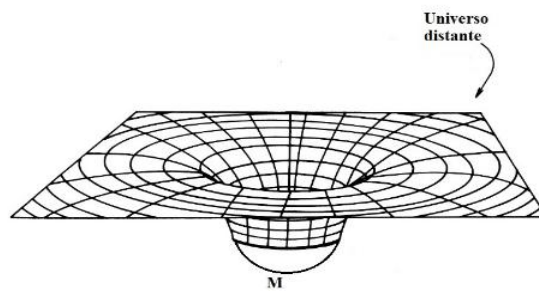
Temos que:

- $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Ricci;
- $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia momento que descreverá a distribuição de energia e matéria no espaço;
- G é a constante gravitacional de Newton;

- μ e ν são índices que representam as quatro dimensões de espaço-tempo.

A partir desta equação de campo, podemos determinar a solução de Schwarzschild, ressaltando que essa é uma solução particular com uma determinada métrica de espaço-tempo para objetos massivos que atende aos pressupostos da relatividade geral, e que descreverá a curvatura de espaço-tempo em torno de um objeto massivo e esférico, no qual a partir dessa solução, concluímos que a matéria diz como o espaço-tempo deve se curvar e o espaço-tempo diz como a matéria deve se mover.

Figura 7: Espaço-tempo de Schwarzschild



Fonte:(SOARES,2017)

Logo após a publicação das equações de campo de Einstein, Schwarzschild encontrou uma solução exata para essas equações. Segundo Saa (2016) Schwarzschild era um astrofísico e matemático renomado, e sua contribuição para a relatividade geral foi feita sob circunstâncias dramáticas. Durante a Primeira Guerra Mundial, ele estava servindo como oficial médico na *front* oriental e, mesmo em condições adversas, conseguiu aplicar sua habilidade matemática para resolver as equações de campo de Einstein para o caso de um corpo esférico e não rotacional.

A métrica de espaço-tempo de Schwarzschild está baseada na geometria Riemanniana, onde a menor distância entre dois pontos é descrita por uma curva, sendo assim possível descrever a curvatura do espaço-tempo ao redor de uma massa esférica, também podemos definir que as linhas de mundo no espaço-tempo são descritas como geodésicas, ou seja como a menor curva entre dois pontos. A métrica de Schwarzschild é dada por:

$$dr^2 = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right] dt^2 - \left[1 - \frac{2MG}{r}\right]^{-1} dr^2 - r^2 d\theta - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.21)$$

De acordo com Weinberg (1972) essa métrica prediz uma singularidade em $r = 0$, onde a curvatura do espaço-tempo se torna infinita e as leis da física, tal como as conhecemos, deixam de ser aplicáveis. A singularidade representa um ponto de densidade infinita e volume

zero, onde as equações da relatividade geral não se aplicam. Nos buracos negros, a singularidade está no centro da região conhecida como horizonte de eventos, essa é a área onde toda a massa do buraco negro está concentrada. Os buracos negros podem ser descritos pela solução de Schwarzschild, que prevê que o centro do buraco negro seja uma singularidade.

4 DIFERENÇAS ENTRE A RELATIVIDADE GERAL E RESTRITA

A teoria da relatividade teve sua construção histórica antes do físico Albert Einstein, porém, a visibilidade deste físico foi pautada na construção de postulados que sanavam alguns problemas da teoria para a época. Percebe-se então que na relatividade restrita obtemos os pressupostos mais voltados para os problemas de sistema de coordenadas com os referenciais inerciais e a mecânica para altas velocidades construída de forma mais acessível do que as estabelecidas anteriormente por Lorentz, além de estabelecer a ideia de espaço-tempo utilizando a métrica de Minkowski, na qual possui aspectos euclidianos e é aplicada apenas em referenciais inerciais.

Com a expansão da teoria da relatividade restrita para incluir referenciais acelerados e a gravitação, temos a relatividade geral, na qual adere a interação gravitacional como aspecto do espaço-tempo e utiliza de novas métricas para o mesmo em determinadas situações. Além de sua matemática possuir um caráter mais generalista, utilizando tensores (o que é opcional na relatividade restrita), a relatividade geral possui dois pressupostos que determinam a característica geométrica da teoria utilizando a geometria Riemmaniana para a ideia de linhas de mundo no espaço-tempo. Por consequência, a resolução da equação de campo de Einstein descreverá os componentes de deformação no espaço-tempo devido à interação gravitacional.

Percebemos assim que a principal diferença se concentra na métrica de espaço-tempo para ambas teorias e os referenciais, sendo utilizado o referencial inercial para a relatividade restrita e o referencial acelerado para a relatividade geral. No qual o espaço-tempo na relatividade restrita não possui interação gravitacional descrita pela métrica de Minkowski, e para a relatividade geral o espaço-tempo descrito por determinadas métricas dependendo da situação como a de Schwartzchild que é descrita pela geometria Riemmaniana determinando linhas de mundo geodésicas na situação de interação do espaço-tempo com objetos massivos esféricos.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho objetivou apresentar a construção histórica para o desenvolvimento da teoria da relatividade restrita e geral e a diferença conceitual elementar entre as duas teorias. Foi apresentado de forma simples e conceitual o desenvolvimento de cada teoria, visando sempre colocar de forma cronológica o acontecimento dos fatos e ressaltar as problemáticas, nas quais foram sanadas e desenvolvidas da forma mais clara possível matematicamente. O texto busca não apenas explicar os principais conceitos envolvidos, mas também ressaltar as problemáticas e que surgiram antes e durante a elaboração das ideias de Einstein, e como essas questões foram solucionadas ao longo do tempo. Dessa forma, foi possível oferecer uma visão mais clara e acessível, tanto do ponto de vista histórico quanto matemático, permitindo uma melhor compreensão dos impactos dessas teorias.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, Bernardo França de. Relatividade geral. 2018. **Trabalho de Conclusão de Curso** (Graduação em Bacharelado em Física) — Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2018.

CARAÇA, Reinaldo da Silva. Efeitos relativísticos sobre observadores uniformemente acelerados. **Revista Brasileira de Física**, v. 37, n. 2, p. 206-214, 2017.

EUROPEAN SOUTHERN OBSERVATORY. ESO: Images of the Universe. Disponível em: <https://www.eso.org/>. Acesso em: 17 dez. 2024.

GAZINELLI, Ramayana. **Introdução à relatividade especial**. São Paulo: Blucher, 2009.

MACHADO, Kleber Daum. Teoria do Eletromagnetismo: Volume 03. 1. ed. São Paulo: Editora Universidade de São Paulo, 2009.

MENEZES JÚNIOR, Roberto dos Santos; LARDELO, Fernando Santos. Análise de experimentos de corpos em movimento no éter sobre a perspectiva ondulatória de luz de Fresnel. **Revista Brasileira do Ensino de Física**, v. 26, p. 41, 2019. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/7wDCLzzV9CDW3vxLMThgSZN/>. Acesso em: 22 set. 2024.

ROCHA, José Fernando. Origem e evolução das ideias da física. 1. ed. São Paulo: Editora, 2002.

SAA, Alberto. Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild.

Revista Brasileira de Física, v. 36, n. 4, p. 511–518, 2016. Disponível em:

<https://doi.org/10.5935/1678-4432.20160053>. Acesso em: 17 dez. 2024.

SOARES, Domingos. Espaço-tempo e buracos negros. Disponível em:

<https://lilith.fisica.ufmg.br/dsoares/esptmp/esptmp.htm>. Acesso em: 17 dez. 2024.

TIPLER, Paul A.; LLEWELLYN, Ralph A. Física moderna. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

WALD, Robert M. **General relativity**. Chicago: University of Chicago Press, 1984.

WEINBERG, Steven. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. 1. ed. New York: Wiley, 1972.