UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
LICENCIATURA INTEGRADA EM MATEMÁTICA E FÍSICA

GABRIEL PEREIRA COELHO

PROPOSTA E APLICAÇÃO DE UMA DINÂMICA INTERDISCIPLINAR BASEADA NA TEORIA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA CONTEXTUALIZADA NO JOGO DE SINUCA

SANTARÉM-PA
2025

GABRIEL PEREIRA COELHO

PROPOSTA E APLICAÇÃO DE UMA DINÂMICA INTERDISCIPLINAR BASEADA NA TEORIA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA CONTEXTUALIZADA NO JOGO DE SINUCA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao instituto de ciências da educação, da Universidade Federal do Oeste do Pará, para obtenção do grau de Licenciatura Integrada em Matemática e Física.
Orientador(a): Prof. Dr. Sérgio Antônio de Souza Farias

SANTARÉM- PA
2025

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/Ufopa

C672p Coelho, Gabriel Pereira
Proposta e aplicação de uma dinâmica interdisciplinar baseada na teoria da situação didática contextualizada no jogo de sinuca./ Gabriel Pereira Coelho. – Santarém, 2025.
44 p.: il.
Inclui bibliografias.

Orientador: Sérgio Antônio de Souza Farias.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Licenciatura em Matemática e Física.

1. Principio de Fermat. 2. Óptica geométrica. 3. Geometria plana. I. Farias, Sérgio Antônio de Souza, *orient*. II. Título.

CDD: 23 ed. 531

Bibliotecária - Documentalista: Renata Ferreira – CRB/2 1440

ATA DE APRESENTAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos oito dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e cinco, às quinze horas e cinquenta minutos, nas dependências da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), especificamente no Instituto de Ciências da Educação (ICED), realizou-se a sessão pública de apresentação e defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do discente **Gabriel Pereira Coelho**, referente ao curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física.

O trabalho intitulado **"Proposta e Aplicação de uma Dinâmica Interdisciplinar Baseada na Teoria da Situação Didática Contextualizada no Jogo de Sinuca"** foi desenvolvido sob a orientação do **Professor Dr. Sérgio Antônio de Souza Farias**.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes professores doutores: **Professor Dr. Carlos José Freire Machado**, **Professor Dr. Émerson Silva de Sousa** e **Professor Dr. Sérgio Antônio de Souza Farias**, os quais, após a apresentação oral do discente e a arguição do conteúdo apresentado, deliberaram pela aprovação do trabalho, destacando sua relevância pedagógica, fundamentação teórica coerente e aplicabilidade no contexto da Educação Matemática com ênfase interdisciplinar. Após reunião em sessão reservada, a Banca Examinadora deliberou acerca do referido trabalho, atribuindo a nota final oito (08), e divulgando formalmente o resultado ao discente e aos demais presentes. Eu, Professor Dr Sérgio A. de S. Farias, na qualidade de Presidente da Banca Examinadora, lavrei a presente ata, que será assinada por mim e pelos demais membros da banca examinadora.

Aprovado.

Santarém (PA), 08 de julho de 2025.

gov.br Documento assinado digitalmente
SERGIO ANTONIO DE SOUZA FARIAS
Data: 08/07/2025 21:32:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Sérgio Antônio de Souza Farias
Orientador e membro da Banca

gov.br Documento assinado digitalmente
CARLOS JOSE FREIRE MACHADO
Data: 18/07/2025 06:18:45-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Carlos José Freire Machado
Membro da Banca

gov.br Documento assinado digitalmente
EMERSON SILVA DE SOUSA
Data: 17/07/2025 17:08:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Émerson Silva de Sousa
Membro da Banca

AGRADECIMENTO

Gostaria de expressar meus mais sinceros agradecimentos a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, fonte de força, sabedoria e perseverança, que me sustentou ao longo de toda essa jornada.

Aos meus pais Patrícia Pereira Coelho e Rilson Coelho da Costa, manifesto minha profunda gratidão pelo apoio incondicional, pelo incentivo constante e pela compreensão nos momentos de ausência e dedicação. Sem o amor e a confiança de vocês, esta conquista não seria possível.

Expresso também minha imensa gratidão ao meu orientador, Professor Sérgio A. de S. Farias, pela paciência, pelas orientações valiosas e por sempre acreditar no meu potencial. Sua sabedoria, disponibilidade e dedicação foram fundamentais para a realização e o aprimoramento deste trabalho.

Ao professor Sebastian Mancuso que contribuiu para a dedução da generalização para n reflexões, também expresso minha profunda gratidão.

Aos meus amigos e colegas de curso Eliane Barros Chaves e Neuri Ingredi de Souza Almeida, agradeço pela troca de experiências, pelo apoio mútuo e pelo companheirismo ao longo destes anos. Juntos, superamos desafios e celebramos conquistas que guardarei para sempre com carinho e gratidão.

Por fim, estendo meus agradecimentos a todos os professores e funcionários da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), que, direta ou indiretamente, contribuíram para minha formação acadêmica e para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos, minha mais sincera e eterna gratidão.

RESUMO

O Princípio de Fermat (PF) descreve a trajetória da luz durante a reflexão ou refração e está intimamente relacionado à geometria plana. Sua aplicação exige conhecimentos tanto de Física quanto de Matemática, tornando-o um conceito interdisciplinar apropriado para a educação básica e superior. Este estudo propõe a contextualização do PF por meio do jogo recreativo de sinuca, integrando conteúdos científicos abstratos em um ambiente familiar e envolvente. A Teoria das Situações Didáticas (TSD) fornece a base pedagógica, com momentos estruturados conduzidos pelo professor, pelo aluno e por meio de diálogo colaborativo. A abordagem foi implementada com estudantes de um curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física de uma universidade na região amazônica. A oficina, com duração de dezesseis horas presenciais apoiadas por vídeos explicativos, teve como objetivo promover a aprendizagem significativa. A progressão do conhecimento foi avaliada por meio de dois testes diagnósticos sobre trigonometria, álgebra, algoritmos básicos e derivadas, combinados com a prática e análise da situação *adidática*. A sequência didática proposta inclui quatro etapas: momento didático, momento adidático, momento de validação e momento de institucionalização. Os resultados da aprendizagem foram avaliados de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), reforçando a relevância do ensino interdisciplinar no desenvolvimento de competências científicas essenciais.

Palavras-Chave: Princípio de Fermat; Óptica geométrica; Geometria Plana; Interdisciplinaridade; Teoria da Situação Didática.

ABSTRACT

Fermat's Principle (FP) describes the path of light during reflection or refraction and is closely related to plane geometry. Its application requires knowledge of both Physics and Mathematics, making it an interdisciplinary concept suitable for both basic and higher education. This study proposes the contextualization of FP through the recreational game of billiards, integrating abstract scientific content into a familiar and engaging environment. The Theory of Didactical Situations (TDS) provides the pedagogical foundation, with structured moments led by the teacher, the student, and through collaborative dialogue. The approach was implemented with students from an Integrated Mathematics and Physics Teaching Degree program at a university in the Amazon region. The workshop, lasting sixteen hours of in-person activities supported by explanatory videos, aimed to promote meaningful learning. Knowledge progression was assessed through two questionnaires covering trigonometry, algebra, basic algorithms, and derivatives, combined with practice and analysis of the *adidactic* situation. The proposed didactic sequence includes four stages: didactic moment, *adidactic* moment, validation moment, and institutionalization moment. Learning outcomes were evaluated according to the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC), reinforcing the relevance of interdisciplinary teaching in the development of essential scientific competencies.

Keywords: Fermat's Principle; Geometrical Optics; Plane Geometry; Interdisciplinarity; Theory of Didactical Situations.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A apropriação dos fundamentos matemáticos da Física depende da compreensão dos conceitos abordados em cálculo, álgebra e geometria, entre outros. A aplicação da Física a problemas relacionados à realidade e à modelagem computacional requer muita compreensão da Matemática, e é recomendável que os alunos aprimorem a apropriação dos conceitos oriundos da Física e da Matemática. (Studart, 2021) chama a atenção para a interdependência entre a Física e a Matemática e para a importância de os alunos estarem preparados para desafios interdisciplinares.

A interdisciplinaridade deve ser consolidada no Ensino Médio. Entretanto, há grandes dificuldades nessa consolidação, desde a falta de professores com formação interdisciplinar até a falta de apoio no desenvolvimento das aulas (Mozena; Ostermann, 2014).

As metodologias ativas no ensino da matemática podem gerar maior envolvimento dos alunos e desenvolver habilidades críticas por meio da aprendizagem significativa, em que os alunos participam ativamente do ambiente de aprendizagem (Altino Filho; Nunes; Ferreira, 2020).

Em ambos os momentos destacados na resolução CNE/CP N° 2, de 2 de dezembro de 2019, fica clara a necessidade de modernizar a formação inicial dos professores da Educação Básica por meio de metodologias inovadoras, também centradas na aprendizagem significativa. A interdisciplinaridade está, portanto, associada à modernização na formação de professores. A Teoria da Situação Didática (TSD), de Guy Brousseau, está alinhada aos preceitos destacados na resolução (Jorge *et al.* 2013). Trata-se de uma teoria educacional proposta inicialmente para o ensino da Matemática, mas que também pode ser utilizada na Física teórica (De Souza Farias; Meira Filho; Santos Kamassury, 2021).

O ponto de partida para a TSD é a identificação do ambiente *(milieu)* em que a situação didática está presente. A partir da identificação do ambiente, ocorrem os seguintes momentos: i) didático, no qual o professor explica conceitos, definições, teoremas e lemas ligados ao ambiente; ii) *adidático*, no qual os alunos interagem com o ambiente e dialogam entre si; iii) validação da situação, quando os alunos testam as previsões construídas nos momentos anteriores e iv) institucionalização, que ocorre quando o professor explica como a prática pode ser apropriada pela sociedade (Jorge *et al.* 2013).

A sinuca consiste em uma atividade lúdica em que o conhecimento intuitivo de Física e Matemática é necessário para o jogador, portanto, é uma boa candidata *milieu* para a situação didática. Este texto tem como objetivo tratar de situações em que o jogador precisa usar a reflexão da bola branca para sair de uma situação difícil. Para isso, aplicaremos o princípio de Fermat implementado no software livre amplamente utilizado como ferramenta educacional, o GeoGebra, e a linguagem de programação Python. A determinação quantitativa do ponto em que a reflexão deve ocorrer será determinada analiticamente e modelada por funções encontradas no GeoGebra e Python (A, 2021; Ziatdinov; Valles, 2022).

O GeoGebra é um software gratuito que combina dinamicamente geometria e álgebra. Ele é amplamente utilizado para motivar os alunos de várias ciências exatas. A partir dele, podemos gerar gráficos, analisar dados e simular princípios físicos e matemáticos. Utilizando o GeoGebra, foi possível simular o princípio de Fermat e interpretar dados gerados por meio de regressões.

O presente trabalho tem como público-alvo professores e alunos de Componentes Curriculares como geometria plana, trigonometria, pré-cálculo e cálculo, ou seja: visa atingir preferencialmente os Componentes Curriculares iniciais dos cursos de ciências naturais em nível superior, mas pode ser aplicado no Ensino Médio apenas no caso de uma única tabela $(n = 1)$ e também pode ser tratado de forma informativa no Componente de Mecânica Clássica para discutir o princípio de Fermat por meio da abordagem alternativa do caso de uma tabela $(n = 1)$.

O princípio de Fermat é um princípio variacional aplicado ao tempo. Ele consiste em um princípio físico que estabelece um suporte matemático formal para a Mecânica Analítica. Ele é de grande importância para a Óptica Geométrica, pois tem aplicações em refração e reflexão. De acordo com o princípio de Fermat, *o caminho seguido pela luz que viaja de um ponto a outro é tal que o tempo de viagem é mínimo*. Esse princípio justifica a introdução do índice do meio na refração, pois a luz pode percorrer uma trajetória mais longa e levar menos tempo nessa trajetória. A justificativa para isso consiste no fato de que, embora a trajetória seja maior em um determinado meio, o índice de refração desse meio é menor. A consequência direta do princípio de Fermat na: i) reflexão leva à afirmação de que o ângulo de incidência (i) é igual ao ângulo de reflexão (r) e na ii) refração leva na lei de Snell (apêndice).

Admitindo o caráter corpuscular da luz, podemos aplicar o fenômeno da reflexão à sinuca. O maior defensor do caráter corpuscular da luz foi Isaac Newton. Nessa teoria, a luz é tratada como um fluxo de partículas muito pequenas que se movem em um caminho reto. Entretanto, ao unificar as leis da eletricidade e do magnetismo, James C. Maxwell argumentou que a luz é uma combinação de ondas elétricas e magnéticas que se movem em fase. Mais tarde, no início do século XX, experimentos mostraram que a natureza da luz é dual (onda-partícula). Essas partículas muito pequenas, pensadas por Newton, foram chamadas de fótons por Albert Einstein.

Uma expressão comum entre os jogadores é: “sinuca de bico”, ou seja, um jogador coloca a bola branca em uma situação em que o oponente não consegue acertar a bola, ou as bolas, por meio uma linha reta. Na sinuca de bico, o jogador precisa usar experiência e muita habilidade para resolver o problema que o adversário lhe colocou. É comum fazer com que a bola branca seja refletida pela borda da mesa "tabela". Nesse momento, o princípio de Fermat pode ajudar o jogador a sair da sinuca.

O presente trabalho, dentro da construção de dinâmicas em conteúdos de Física e Matemática, tem como objetivos: i) sugerir uma prática de ensino interdisciplinar para mostrar o princípio de Fermat, como conteúdo transversal à Óptica Geométrica e à Geometria Plana; ii) familiarizar o software livre GeoGebra com o ambiente de ensino, e iii) mostrar, por meio de uma situação didática, que a modelagem computacional pode ser aplicada, em alguns momentos, ao cotidiano de jovens e adultos. Todos os pontos mencionados estarão na situação didática e didática. Portanto, o último objetivo é acrescentado: iv) sugerir uma situação didática e suas práticas.

2 METODOLOGIA

No primeiro momento, o professor apresenta o *milieu,* que é o princípio de Fermat contextualizado no jogo de bilhar. Se a dinâmica for contextualizada em cursos de Física em nível superior, é interessante que o professor discuta a natureza corpuscular e ondulatória da luz. Um resultado imediato da interpretação corpuscular da luz é a igualdade entre os ângulos de incidência e reflexão da luz.

2.1 Momento 01 - Situação Didática

Na TSD o primeiro momento é um momento didático conduzido pelo professor. Nesse momento, o professor apresenta o *milieu* em que a ação é definida para a aquisição de conhecimento a partir dele (Jorge *et al.* 2013).

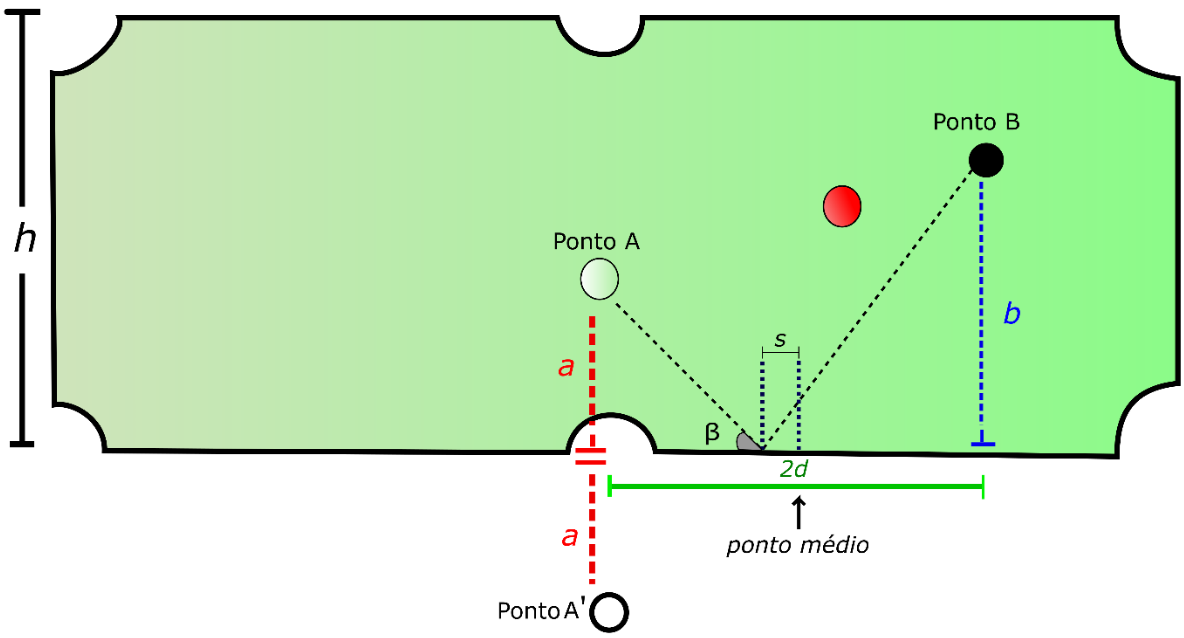
O milieu sugerido é o jogo de bilhar, no qual são colocadas situações difíceis para o jogador. A solução ocorrerá por meio da aplicação do princípio de Fermat, implementado no software GeoGebra para casos envolvendo *n* reflexões em tabelas paralelas. Para cada caso, os alunos devem medir os parâmetros de entrada, chamados de *inputs,* a saber: $a, b, 2d$ e h , em que (a) é a distância ortogonal da bola até a primeira tabela que receberá o primeiro impacto, (b) é a distância ortogonal entre a mesma tabela e a segunda bola, $(2d)$ é a distância entre as projeções ortogonais dessas bolas sobre a tabela e, por fim,(h) é a largura da mesa ou a distância entre as tabelas paralelas maiores, conforme mostrado na Figura 01. Os *inputs* selecionados são aqueles que podem ser medidos pelo jogador ao dar uma tacada. O paramentos de saída, chamado de *output,* (c) é a distância entre o primeiro ponto de contato, onde a bola deve atingir a tabela para alcançar a outra bola, e o ponto médio entre as projeções ortogonais mencionadas anteriormente (Fig. 01), obtido a partir das equações determinadas por meio da Geometria Plana. O algoritmo Python calcula o *output* com base nos inputs (Fig. 0 5), deduzido com o auxílio do princípio de Fermat no plano. A seguir, ilustraremos o trabalho proposto para o caso mais simples.

É importante destacar que: i) o modelo considera as bolas como objetos pontuais, sem raio, de modo que o jogador deve acertar o centro da bola com o taco; e ii) as bordas da mesa devem estar livres de deformações, com as tabelas em boas condições. Como em trajetórias longas, os efeitos angulares e as possíveis deformações nas bordas da mesa precisariam ser considerados, analisaremos casos com até três $(n = 3)$ tabelas.

Ao inspecionar os sites de vendas, observa-se que o raio da maioria das bolas é de cerca de $52\,mm$, e o raio da bola branca (a bola branca) é de cerca de 58 mm, enquanto as dimensões das mesas são $2{,}80 \times 1{,}52\,m$ (mesa pequena) e $3{,}10 \times 1{,}70$ m (mesa padrão). Considerando o maior raio da bola e a menor dimensão da mesa, obtém-se que essa dimensão é aproximadamente $2{,}60 \times 10^3$ % maior que o raio da bola. Devido a essa discrepância, podemos considerar o modelo de bola pontual.

A modelagem do princípio de Fermat no GeoGebra pode ser feita refletindo o ponto A, onde A' é o ponto imagem, em relação à linha definida pela tabela onde a bola será refletida. Como mencionado, serão consideradas apenas as tabelas entre bordas paralelas. A Figura 1 mostra (a) uma situação de sinuca de bico, (b) a modelagem de uma única tabela no GeoGebra, em que o ponto A é a bola branca, c é a distância do ponto médio de $2d$ ao ponto de reflexão e o poto *B* é a bola alvo. A' é a reflexão do ponto A em torno da tabela.

Figura 1 - Representação de uma situação de sinuca de bico, triângulos formados pela simulação do Princípio de Fermat.



Fonte: Autor (2025)

No primeiro momento da situação didática, o professor deve apresentar o conjunto de *input* composto pelas distâncias a, b e $2d$. Em seguida, o aluno deve usar conhecimentos de Geometria Plana e Álgebra Elementar para encontrar a distância c

com os *inputs* a, b e $2d$. O programa em Python consiste em um conjunto de distâncias c, para n tabelas, com base no conjunto *de inputs*.

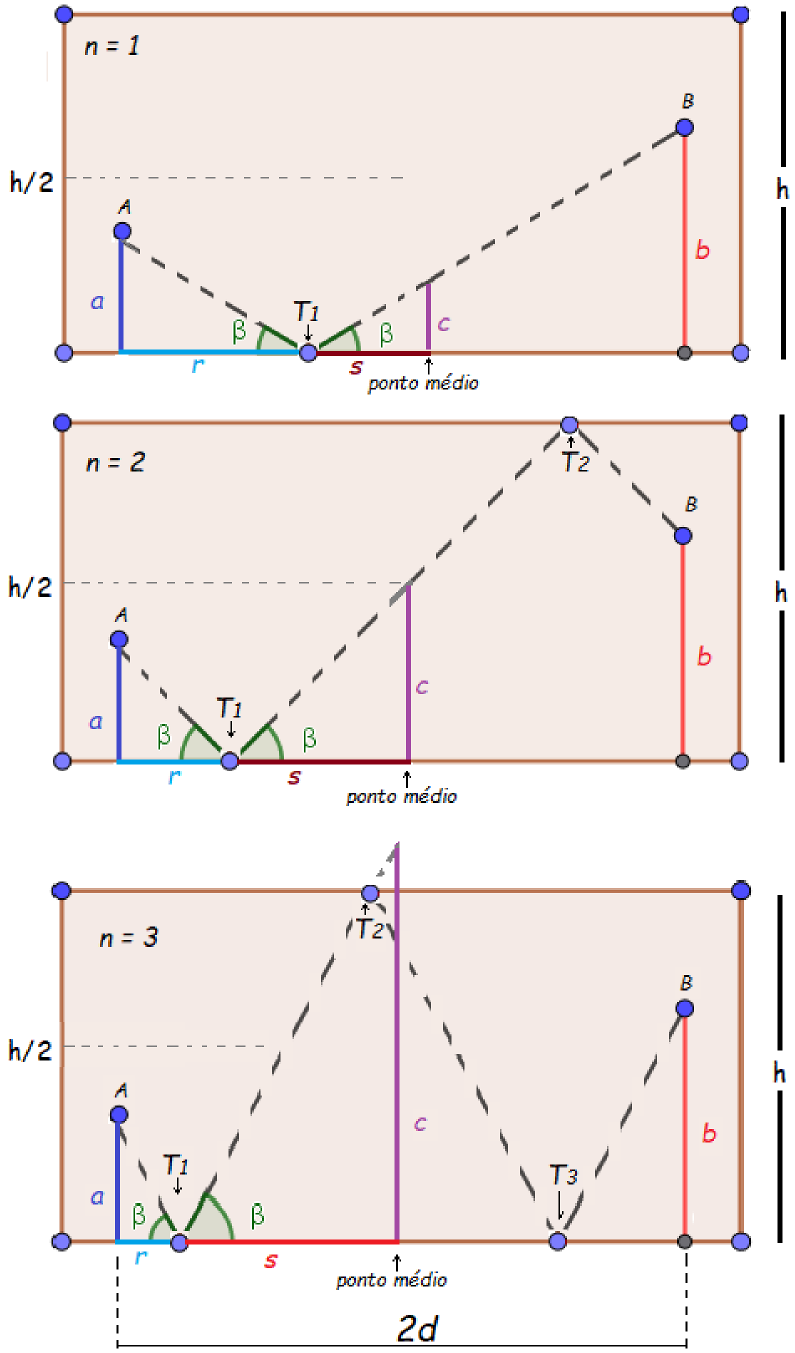
No segundo momento, a situação *adidática* ocorre por meio da ação em que o aluno se propõe a resolver o problema apresentado, e a situação de formulação, em que os alunos usam seus conhecimentos e se envolvem em um debate (De Souza Farias; Meira Filho; Santos Kamassury, 2021).

O aluno se torna o protagonista nesse momento (Jorge *et al.* 2013). Ele deve refletir sobre o *milieu* e propor soluções, enquanto o professor faz a mediação por meio do material didático apresentado ao aluno. Esse material consiste no manual e nas construções no GeoGebra.

Brousseau chama a atenção para o “contrato didático” entre professor e aluno com finalidade de possibilitar, ao discente, um saber em vias de constituição. O trabalho do discente aponta para um trabalho científico e de conhecimento efetivo (Jorge *et al.* 2013).

É importante destacar que, nesse momento, a metodologia de ensino é ativa, incentivando o aluno a adotar uma abordagem crítica na apropriação dos conhecimentos de Geometria e Cálculo. O professor deve questionar o aluno sobre os resultados numéricos apresentados nas tabelas e as conexões com a geometria contextualizada no cenário do jogo de bilhar.

Figura 2 - Representação de uma situação com *n* = 1, 2 e 3 tabelas.



Fonte: Autor (2025)

Na Figura 2 (caso $n = 1$), temos $tg\beta = \frac{a}{r} = \frac{c}{s}$, sabendo que $c = \frac{b-a}{2}$ e $r + s = d$, a partir dessas relações, temos:

$$r = \frac{2ad}{a+b}. \quad (01)$$

Recomenda-se que os alunos façam testes, usando uma planilha eletrônica, e verifique a construção no GeoGebra e no Python para obter mais valores, de modo que ele possa se familiarizar com tecnologias que ajudam no aprendizado de ciências naturais. Sugerimos, também, que os alunos verifiquem empiricamente, por meio do produto educacional, a tabela a seguir:

Tabela 1 - Exemplo de valores para verificar *c* no caso de n = 1, 2 e 3.

Linha	h	a	b	$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{b-a}}{2}, \boldsymbol{n} = \mathbf{1}$	$\boldsymbol{c} = \frac{\mathbf{h}}{2} + \frac{\mathbf{h-b-a}}{2}, \boldsymbol{n} = \mathbf{2}$	$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{h} + \frac{\boldsymbol{b-a}}{2}, \boldsymbol{n} = \mathbf{3}$
$\mathbf{L_1}$	6	2	4	1	3	7
$\mathbf{L_2}$	6	1	4	1,5	3,5	7,5
$\mathbf{L_3}$	6	2	3	0,5	3,5	6,5

Fonte: Autor (2025)

O caso $n = 1$ exige que o aluno conheça as relações do triângulo retângulo e a Álgebra Básica, portanto, pode ser colocado nas aulas de Geometria e Trigonometria do Ensino Fundamental. Normalmente, os alunos têm pouca experiência com o caso de uma tabela $n = 1$ mas podem verificar os resultados com pouco esforço. Se a dinâmica for aplicada no Ensino Superior em componentes curriculares como Pré-Cálculo ou revisão de Trigonometria, espera-se que o aluno tenha desenvoltura sem a presença do professor, mas se for aplicada no Ensino Médio, a orientação do professor é necessária.

De acordo com a tabela 1, para o caso $\mathrm{n} = 1$, temos $a + b = h$, (linha L_1) e assim $c = \frac{h}{2}$ e para $a + b \neq h$, (linhas L_2 e L_3). Temos que $c = \frac{h}{2} + \frac{h-b-a}{2}$ para $n = 2$ e $c = \mathrm{h} + \frac{\mathrm{b-a}}{2}$ para $n = 3$. É possível que alguns alunos precisem do professor nesse momento da situação de ensino.

Observando a figura 2 $(\mathrm{n} = 2)$, vemos imediatamente que: *i)* $tg\beta = \frac{a}{r} = \frac{c}{r}$, porque se o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, então a mesma igualdade ocorre para seus complementos. Também temos que *ii)* $c = \frac{h}{2} + \frac{h-b-a}{2}$, com a distância *c* cortando perpendicularmente a borda na metade de $2d$, e *iii)* $s + r = d$, então temos:

$$r = d\left(\frac{2a}{2h + a - b}\right). \qquad (02)$$

O sinal de *c*, na equação (02), depende muito de $2h$, por exemplo, $se\, a = 2, b = 3, d = 8\, e\, h = 1$, temos $c = -24$, que é um cenário irreal (a e $b >\ h$) para as dimensões das mesas de bilhar. Outro exemplo é $a = 3, b = 5, d = 9\, e\, h = 3$, temos $c = -4{,}5$, também irrealista. De acordo com a equação (02), $2h \neq a - b$, por exemplo: $a = 2, b = 6,\ d = 9\, e\, h = 2$, o que é irreal. Não há limitação devido a $2h + b \neq a$, já que em cenários reais: $h \geq b\, e\, h \geq a$.

Compreender o resultado c da equação (02) depende da compreensão da relação $c = \frac{h}{2} + \frac{h-b-a}{2}$, que pode ser realizada empiricamente com o suporte numérico da tabela 1.

Como no caso anterior $(\mathrm{n} = 2)$, sugerimos que os alunos verifiquem empiricamente, por meio do produto educacional, que a tabela a seguir foi criada com *2d* = 10

De acordo com a tabela 1, para $\mathrm{n} = 3$, podemos verificar facilmente que $c = h + \frac{(b-a)}{2}$ nas três linhas. É possível que alguns alunos precisem do professor nesse momento da situação de ensino. A Figura 2 com $\mathrm{n} = 3$ mostras que a bola é refletida nas duas tabelas, que estão nos pontos $T_1,\ T_2$ e T_3.

Conforme mostrado na figura 2 para $\mathrm{n} = 3$, observamos que a $tg\beta = \frac{a}{r} = \frac{c}{s}$. Além disso, a distância c, que corta perpendicularmente a borda no ponto médio de 2d, pode ser descrito pela relação $c = h + \frac{b-a}{2}$. Além disso, temos a condição $s + r = d$. Combinando essas relações, podemos deduzir as equações necessárias para analisar a configuração geométrica, obtendo a equação (03).

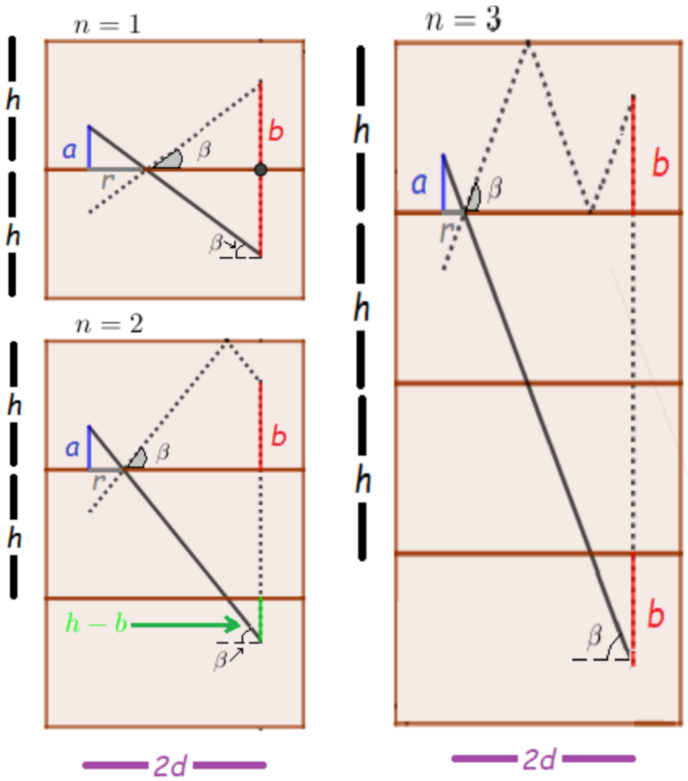
$$r = d\left(\frac{2a}{2h + a + b}\right). \tag{03}$$

Assim como na equação (02), na equação (03) o sinal de *c* depende fortemente de *2h*. A condição para o sinal de c ocorre somente na equação (01).

2.2 Generalização - Geometria Plana

É possível encontrar as equações (01), (02) e (03) como casos particulares da forma generalizada. Para isso, continuaremos a usar o princípio de Fermat, mas agora por meio de expansões da mesa de bilhar, conforme ilustrado na figura 03:

Figura 3 - Representação dos casos n = 1, n = 2 e n = 3 por meio da expansão da tabela.



Fonte: Autor (2025)

Sabendo que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão (β), temos que: i) para $\mathrm{n} = 1 \therefore \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{a}} = \frac{2\mathrm{d}}{\mathrm{a+b}}$; ii) $\mathrm{n} = 2 \therefore \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{a}} = \frac{2\mathrm{d}}{\mathrm{a + 2h - b}}$ e iii) $\mathrm{n} = 3 \therefore \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{a}} = \frac{2\mathrm{d}}{\mathrm{a+2h+b}}$, deixamos como exercício verificar: iv) $\mathrm{n} = 4 \therefore \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{a}} = \frac{2\mathrm{d}}{\mathrm{a+4h-b}}$. Assim, podemos inferir que:

$$\frac{r}{a} = \frac{2d}{a + b + (n-1)h} \qquad \text{para } n \text{ impar;}$$

$$\frac{r}{a} = \frac{2d}{a - b + nh} \qquad \text{para } n \text{ par,}$$

Também sabemos que $r \ + s = \ d$, daí segue que:

$$r = d\left(\frac{2a}{a+b+(n-1)h}\right) \quad \text{para } n \text{ impar;} \tag{04.a}$$

$$r = d\left(\frac{2a}{a-b+nh}\right) \quad \text{para } n \text{ par,} \tag{04.b}$$

ou melhor,

$$r = d\left(\frac{2a}{a+(n-1)h+\left[\frac{h}{2}+(-1)^n\left(\frac{h}{2}-b\right)\right]}\right) \quad \text{para } n \text{ qualquer.} \tag{04.c}$$

Se n for ímpar, então $(-1)^n$ = -1, com $\frac{h}{2}-\left(\frac{h}{2}-b\right)=b$, que transforma (04.*c*) em (04.*a*). Se *n* for par, então$(-1)^n$ = 1, com $\frac{h}{2}+\left(\frac{h}{2}-b\right)=h-b$, o que transforma (04.*c*) em (04.*b*).

É importante observar que a equação (04.*c*) otimiza significativamente o algoritmo, pois sintetiza tudo em uma única equação. A generalização obtida por meio do refinamento da modelagem leva a um ganho computacional devido à otimização do algoritmo. O aluno precisa entender que os esforços por meio de melhorias matemáticas resultam em ganhos para a modelagem.

2.3 Cálculo Diferencial

Uma abordagem alternativa para o caso $n = 1$, que pode ser incluída em cursos de cálculo diferencial e integral, consiste em construir a função de caminho mais curto a partir da primeira derivada da função de caminho ($\zeta(c)$)[13]. O princípio de Fermat é um princípio variacional, portanto, está alinhado com a relação: $\frac{d\zeta(c)}{dc}=0$

De acordo com a figura 1, as distâncias: a, r e T_1A formam um triângulo retângulo, as distâncias $b, (s + d)$ e T_1B formam outro triângulo retângulo congruente ao anterior. A soma das hipotenusas dos triângulos retângulos mencionados acima forma a função de caminho $\zeta(r)$, em que a primeira hipotenusa é dada por ξ_1 e a hipotenusa da segunda é ξ_2.

A função de caminho é dada por $\zeta(r) = |\xi_1| + |\xi_2|$, com $r + s = d$, consequentemente:

$$\zeta(r) = \sqrt{a^2 + r^2} + \sqrt{b^2 + (2d - r)^2},$$

e, por meio de cálculo diferencial, temos que os pontos mínimo e máximo são obtidos em $\frac{d\zeta(r)}{dc} = 0$, consequentemente:

$$\frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} - \frac{2d - r}{\sqrt{b^2 + (2d - r)^2}} = 0 \therefore r^2(a^2 - b^2) - ada^2 r + 4d^2 a^2 = 0\,,$$

para que:

$$r = 2ad\left[\frac{a \pm b}{a^2 - b^2}\right].$$

O caso $\frac{a-b}{a^2-b^2}$ leva à relação (01) que é, portanto, um ponto mínimo. Casos com $n\ \geq 2,$ para $n \in \mathbb{N}$ levam a polinômios $\zeta(r)$ de grau maior ou igual a 4.

2.4 Momento 03 - Momento Da Validação

O momento de validação na TSD é um momento didático em que os alunos se esforçam para validar a modelagem, mas também é possível que o professor (mediador) permita que o aluno aja de forma autônoma (*adidática*). É interessante que, nesse momento, o professor exerce a dialogicidade por meio de práticas pedagógicas horizontalizadas.

O momento de validação deve promover o diálogo por meio da situação didática (problematização em ciências naturais) de forma horizontal, ou seja, o professor deve conversar sem se colocar em uma posição de superioridade, sendo acessível ao diálogo. O procedimento investigativo contextualizado na sequência didática deve levar à *práxis*, que consiste nas ações das pessoas sobre o mundo para transformá-lo (Farias; Mafra, 2023).

O procedimento cético, baseado na experimentação, está alinhado com a criticidade da linguagem demonstrativa. As afirmações devem ser vistas com desconfiança para fortalecê-las. Esse comportamento, baseado em testes de lógica e validação, leva à aceitação não imediata das informações, dificultando a manipulação do aluno.

2.5 Momento 04 - Momento de Institucionalização

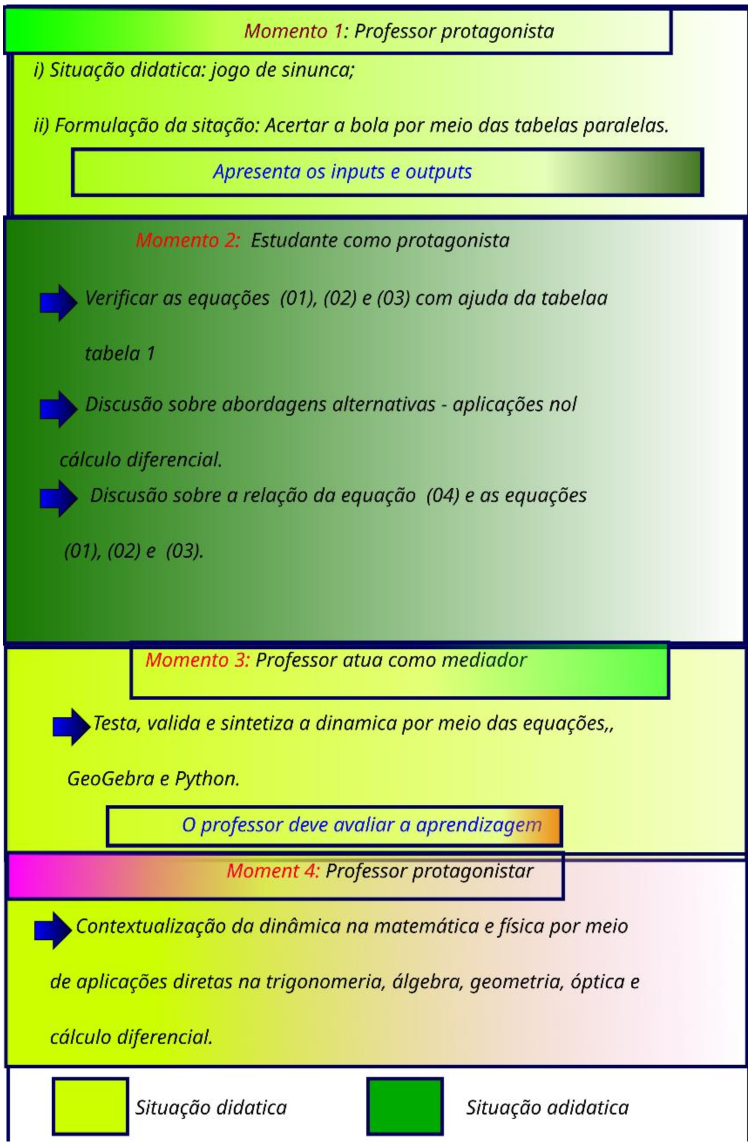
É interessante que o conteúdo de Física e Matemática relacionado ao problema seja revisitado no momento final. O conhecimento deve ser reforçado após o uso das tecnologias, e isso deve ocorrer em um ambiente em que haja diálogo entre o professor e o aluno.

O caso de uma única tabela $n = 1$ pode ser aplicado no Ensino Fundamental e médio, e pode até ser suportado pelo GeoGebra e pelo Python. Vale a pena observar que o programa é simples. A discussão gira em torno do conceito de $inputs, outputs$ e como um programador lida com essas variáveis. Por outro lado, o caso resolvido por meio de Cálculo Diferencial pode ser aplicado em cursos de cálculo de variável única e Mecânica Clássica.

O PF é amplamente discutido em textos de Mecânica Clássica e Analítica (JAMES M. GERE; BARR J. GOODNO, 2017)mas não é incluído em textos básicos de Física para discutir óptica geométrica. A aplicação do PF na reflexão leva à verificação da igualdade entre os ângulos de incidência e reflexão, bem como à lei de Snell para o caso da refração.

A dinâmica da situação didática proposta consiste na construção de momentos dentro da TSD e na elaboração de um texto para uso na dinâmica. Os momentos ocorrem com o protagonismo do aluno e dialogicamente entre professor e aluno, além da preocupação com a práxis social por meio do momento de institucionalização. A Figura 4 resume a sequência didática proposta:

Figura 4 - Proposta de sequência didática.



Fonte: Autor (2025)

2.6 Metodologia Pedagógica

A situação didática foi aplicada em uma universidade da região amazônica a um público de cinco alunos do programa de Licenciatura Integrada em Matemática e Física (LIMF) por meio de um workshop presencial de dezesseis horas, complementado com materiais de vídeo acessíveis remotamente.

Vale ressaltar que os alunos que participaram da oficina são alunos que iniciaram seus estudos durante a pandemia da COVID-19, de modo que cursaram muitas Componentes Curriculares remotamente. Durante o workshop, ficou claro que era necessário começar com uma revisão para relembrar o conteúdo relevante e criar pontes cognitivas.

O conjunto de práticas para a aprendizagem na dinâmica proposta consistiu inicialmente em uma avaliação dos conhecimentos básicos de geometria, trigonometria, álgebra elementar, noções preliminares de algoritmos e aplicação de diferenciação. Em seguida, no Momento 01 da sequência, o *milieu* foi apresentado por meio da proposta de modelagem da reflexão em um jogo de sinuca com uma, duas, três e a generalização para n *tabelas*, juntamente com a aplicação do cálculo diferencial à função de caminho para o caso de uma reflexão $n = 1$.

Para ilustrar o grau de dificuldade, no teste diagnóstico 1, das 12 (doze) perguntas, uma das perguntas propostas foi:

"Um feixe de luz incide em um espelho plano, formando um ângulo de 45 graus com a normal à superfície do espelho. Sabendo que o feixe percorre uma distância de 3 metros do ponto de incidência, verticalmente, até um ponto na parede refletida e 2 metros horizontalmente longe do espelho, qual é a altura em que o feixe atinge a parede após a reflexão?"

No segundo teste diagnóstico, além das perguntas numéricas, foram adicionadas perguntas em que o aluno descrevia verbalmente a dinâmica. Um exemplo de pergunta discursiva foi:

"A dinâmica proposta em relação à construção do algoritmo pode ajudar na compreensão de trigonometria, álgebra básica e noções preliminares de algoritmos?"

Na situação *adidática*, o público foi convidado a analisar e discutir o desenvolvimento e a construção do algoritmo por meio dos conhecimentos matemáticos e físicos envolvidos. Nesse momento, foi observado o desempenho de cada aluno em cada grupo, bem como o debate entre todos os integrantes, em que se destacou a capacidade de aplicar o conhecimento em diferentes contextos. Um dos objetivos era introduzir os conceitos de geometria, trigonometria e álgebra que permitiriam aos alunos calcular a distância c com base nas distâncias a, b, d e h. Para atingir esse objetivo, os alunos foram incentivados a discutir os problemas propostos em situações contextualizadas.

Na situação *adidática*, os alunos foram convidados a revisitar o primeiro teste diagnóstico por meio da situação construída para o desenvolvimento do algoritmo proposto.

No teste diagnóstico 2, com questões semelhantes ao primeiro foi aplicado para avaliar se houve ganho de aprendizado em relação aos conhecimentos básicos de geometria, trigonometria, álgebra elementar, noções preliminares de algoritmos e aplicação de diferenciação. Além disso, buscou-se avaliar os possíveis ganhos com a aplicação da dinâmica no âmbito da teoria das situações didáticas, bem como os possíveis benefícios da modelagem e do uso de tecnologias de ensino aplicadas por meio de um questionário para análise discursiva.

A estratégia didática proposta visa ao desenvolvimento de habilidades e competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com foco nos domínios da Física e da Matemática. Em Física, destaca-se a modelagem de situações-problema com base nas leis do movimento e das interações (EM13CNT104). Em Matemática, enfatizam-se: (i) o uso de representações algébricas e geométricas para resolução de problemas (EM13MAT101); (ii) a interpretação de gráficos e tabelas em processos decisórios (EM13MAT106); e (iii) a aplicação da geometria em contextos diversos (EM13MAT108). A proposta também valoriza a investigação científica e a compreensão crítica das relações entre ciência, tecnologia e sociedade (BRASIL, 2018).

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Segundo o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), a média de desempenho dos estudantes brasileiros entre 2000 e 2015 foi de 369 pontos em matemática e 394 em ciências, sem dados divulgados para 2018 e 2022. Em 2015, o Brasil ocupou a 66ª posição entre 70 países avaliados (OCDE, 2016). No Norte do país, o quadro é agravado por fatores como desigualdade socioeconômica, infraestrutura precária, evasão escolar, acessibilidade limitada e descontinuidade de políticas públicas (Bento et al., 2013).

Na região amazônica, observa-se dificuldade de parte dos discentes em construir conhecimentos sem a mediação docente. Diante disso, propõe-se a utilização das aprendizagens essenciais da BNCC como referência avaliativa (BRASIL, 2018).

A análise geral acerca dos dois testes diagnósticos (TD) indica um desempenho variado entre os participantes. Observa-se que questões envolvendo cálculos diretos de trigonometria e proporção (semelhança de triângulos) apresentaram maior índice de acerto. Em contrapartida, problemas que exigiam uma interpretação mais aprofundada ou a aplicação de múltiplos conceitos, como os de otimização (Questão 8 do TD1) e física óptica (Questão 11 do TD1), foram os que mais geraram respostas em branco ou incorretas.

Tabela 2 – Análise comparativa entre TD1 e TD2

Participante	Acertos TD1	Acertos TD2	Evolução
Participante 1	3/12	3/5	Positiva
Participante 2	2/12	2/5	Estável
Participante 3	6/12	3/5	Estável
Participante 4	6/12	2/5	Negativa

Fonte: Autores (2025)

3.1 Análise Comparativa: Teste Diagnóstico 1 vs. Teste Diagnóstico 2

O teste diagnostico 2 (TD2) foi composto por 5 questões idênticas a algumas do teste diagnostico 1 (TD1). A intenção, provavelmente, era verificar a aprendizagem ou a fixação do conteúdo.

- Questões Reaplicadas: As questões 2, 3, 5, 11 e 12 do TD1 foram reaplicadas no TD2.
- Evolução:
    - Participante 1: Mostrou melhora significativa, acertando no TD2 questões que havia errado ou deixado em branco no TD1 (Questões 1 e 2 do TD2).
    - Participante 2: Manteve o padrão, acertando a questão sobre semelhança de triângulos em ambas as ocasiões, mas persistindo no erro ou na falta de resposta nas demais.
    - Participante 3: Demonstrou consistência nos acertos e conseguiu resolver uma questão (Questão 4 do TD2, sobre óptica) que havia deixado em branco anteriormente.

- Participante 4: Acertou as mesmas questões em ambos os questionários, mas não respondeu a algumas no TD2 que havia respondido no TD1.

A repetição de questões se mostrou uma ferramenta útil para medir a evolução em um curto espaço de tempo, especialmente para os participantes 1 e 3.

3.2 Análise Detalhada por Questão (Pontos Críticos)

Tabela 3 – Análise comparativa entre TD1 e TD2

Teste Diagnóstico (TD)	Tópico	Análise de Dificuldade
Q3 & Q11	Física (Óptica Geométrica)	Alta Dificuldade. A maioria dos alunos deixou em branco ou errou. A Questão 3 foi respondida corretamente por alguns no Q2, sugerindo alguma aprendizagem. A Questão 11, mais complexa, permaneceu sem solução para quase todos.
Q7	Geometria (Triângulo Isósceles)	Dificuldade Média. Apenas os participantes 3 e 4 acertaram. O erro no gabarito (que indicava 65° para os ângulos da base, quando o correto seria 50° para ∠BCA e 80° para ∠BAC) pode ter confundido, mas os participantes que acertaram chegaram à resposta correta de forma independente.

Q8	Cálculo (Otimização)	Alta Dificuldade. Nenhum participante conseguiu resolver o problema de minimização do perímetro. A abordagem requer o uso de derivadas, um conceito que pode não ter sido dominado por eles.
Q9	Algoritmos	Dificuldade Baixa. A maioria entendeu que se tratava de um algoritmo de soma, com exceção do Participante 3 que o confundiu com a Sequência de Fibonacci.
Q10	Lógica Matemática	Dificuldade Média. As respostas foram divergentes e com alguns erros, indicando dificuldade na interpretação da fórmula com expoente $(-1)n$.
Q12	Geometria Analítica/Óptica	Alta Dificuldade. Apenas o Participante 1 tentou uma resposta no Q2, mas incorreta. O conceito de reflexão simétrica em um plano cartesiano não foi bem compreendido.

Fonte: Autores (2025)

Os resultados da dinâmica acerca dos apontamentos da Base Nacional Comum Curricular, foram:

Questão 1: Ângulo de inclinação do avião

- Habilidade BNCC: EM13MAT106

- Análise dos Alunos: Todos os quatro participantes acertaram a questão, demonstrando proficiência em aplicar a trigonometria básica para modelar e resolver o problema.
- Conclusão: Habilidade consolidada pelo grupo.

Questão 2: Altura do poste (Sombras)

- Habilidades BNCC: EM13MAT101, EM13CNT104
- Análise dos Alunos:
  - ✓ Participante 1: Errou no TD1, mas acertou no TD2, mostrando evolução.
  - ✓ Participante 2: Acertou no TD2, usando regra de três.
  - ✓ Participante 3 e 4: Acertaram a questão, montando a proporção corretamente.
- Conclusão: Habilidade bem desenvolvida pela maioria, demonstrando a compreensão da proporcionalidade.

Questão 3: Reflexão do feixe de luz

- Habilidades BNCC: EM13CNT104, EM13MAT106
- Análise dos Alunos:
  - ✓ A maioria dos participantes errou, tentando aplicar a tangente com a distância horizontal em vez de usar o conceito físico da reflexão.
  - ✓ Apenas o Participante 4 acertou no TD1, justificando corretamente com base na congruência de triângulos, mas errou no TD2.
- Conclusão: Dificuldade em aplicar um conceito da Física (EM13CNT104) para simplificar um problema matemático.

Questão 8: Minimização da cerca

- Habilidade BNCC: EM13MAT108
- Análise dos Alunos: Nenhum participante conseguiu resolver o problema. As tentativas foram incipientes ou inexistentes.
- Conclusão: Habilidade deficitária. A resolução de problemas de otimização que exigem cálculo diferencial mostrou-se um grande desafio para todos.

Questão 11: Altura da lâmpada na poça d'água

- Habilidades BNCC: EM13CNT104, EM13MAT106
- Análise dos Alunos:
  - ✓ A maioria não respondeu.

- ✓ O Participante 3, no TD2, foi o único que rascunhou cálculos e se aproximou de uma linha de raciocínio viável, mostrando progresso.
- Conclusão: A complexidade da modelagem matemática e física tornou a questão muito difícil para o grupo.

Questão 12: Colisão na mesa de bilhar

- Habilidades BNCC: EM13CNT104, EM13MAT106
- Análise dos Alunos: Poucos tentaram resolver. O Participante 2 se aproximou da resposta, encontrando o valor x = 45, mas se confundiu ao expressar as coordenadas.
- Conclusão: Dificuldade em aplicar o conceito de simetria para resolver um problema de geometria analítica.

Com base na análise, as seguintes abordagens se fazem necessárias:

1. Revisão de Conceitos Fundamentais: Reforçar os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo e semelhança de triângulos, que foram bem aplicados por alguns, mas não por todos.
2. Aulas Focadas em Tópicos Críticos:
   - ✓ Óptica Geométrica: Dedicar aulas específicas para a lei da reflexão, espelhos planos e a formação de imagens, utilizando diagramas e exemplos práticos. A dificuldade nas questões 3 e 11 indica uma lacuna significativa nessa área.
   - ✓ Otimização com Derivadas: Introduzir ou revisar o conceito de derivadas para encontrar pontos de máximo e mínimo. A Questão 8 pode ser usada como um exemplo-guia.
3. Interdisciplinaridade Explícita: Conectar explicitamente os conceitos de Matemática e Física. Mostrar como a trigonometria é usada para resolver problemas de óptica (ângulo de incidência/reflexão) e como a geometria analítica pode modelar a trajetória de objetos (Questão 12).
4. Resolução de Problemas em Etapas: Incentivar os alunos a quebrar problemas complexos em partes menores. Por exemplo, na Questão 11, primeiro desenhar o diagrama, depois identificar os triângulos e, por fim, aplicar as relações trigonométricas.
5. Correção e Feedback Detalhado: Corrigir os questionários com os alunos, mostrando os diferentes métodos de resolução e esclarecendo os erros mais comuns. Isso é crucial para que a avaliação seja uma ferramenta de

aprendizagem.

Por fim os resultados da dinâmica acerca do questionário para análise discursiva para os quatro participantes (P1, P2, P3 e P4) foram:

Categoria 1: Validação da Dinâmica

Respostas que que afirma eficácia da oficina

Q6. A dinâmica proposta acerca da construção do algoritmo pode ajudar no entendimento de trigonometria, álgebra básica e noções preliminares de algoritmos?

Q7. A dinâmica proposta acerca da construção do algoritmo pode ajudar no entendimento de modelagem matemática?

Tabela 3 - Respostas que confirmam a eficácia da atividade.

	Questão	Resposta
P1	Q6	"Sim, pois, conseguimos entender um pouco sobre a matemática por trás dos programas que usamos. Aprender sobre os scripts, ajuda a entender os algoritmos e conceitos matemáticos."
	Q7	"Sim, é possível interpretar conceitos matemáticos e modelar cálculos utilizando algoritmos e programação."
P2	Q6.	"Sem dúvida alguma, a dinâmica do algoritmo é muito interessante para entendimento desses conhecimentos. No meu caso, como a minha base matemática é bastante deficiente e fazia tempo que eu não via os conceitos, tive um pouco de dificuldade para assimilar o conteúdo, mas acredito que alguém da área terá mais facilidade."
	Q7	"Sim, o professor até explicou o que era modelagem matemática, e para quem tem uma certa base matemática é de bastante ajuda."
P3	Q6	"Pode sim, e além disso, também pode ajudar no entendimento de noções básicas de geometria plana, tais como: ponto, reta tangente, retas paralelas e perpendiculares."
	Q7	"Sim, pois a modelagem matemática surge a partir de algum problema, que no caso da oficina, vem relacionado ao jogo de bilhar."
P4	Q6	"Sim, pois auxilia na intuição visual do problema, como por exemplo, mudar os valores iniciais (imputs) do problema e testar o programa."

	Q7	"Creio que o uso do GeoGebra ajudou a entender como chegar na modelagem, pois me permitiu achar o valor desejado por de argumentos geométricos."

Fonte: Autor (2025)

Categoria 2: Compreensão Conceitual

Menções sobre o entendimento de conceitos (matemáticos, de programação, etc.).

Q6. A dinâmica proposta acerca da construção do algoritmo pode ajudar no entendimento de trigonometria, álgebra básica e noções preliminares de algoritmos?

Q7. A dinâmica proposta acerca da construção do algoritmo pode ajudar no entendimento de modelagem matemática?

Q8. Qual a importância em fazer modelagem matemática?

Tabela 4 - Menções sobre o entendimento de conceitos (matemáticos, de programação, etc.).

	Questão	Resposta com Destaque
P1	Q6.	"Sim, pois, conseguimos entender um pouco sobre a matemática por trás dos programas que usamos. Aprender sobre os scripts, ajuda a entender os algoritmos e conceitos matemáticos."
	Q7.	"Sim, é possível interpretar conceitos matemáticos e modelar cálculos utilizando algoritmos e programação."
P2	Q8.	"A modelagem matemática é extremamente importante para transmitir problemas do mundo real em problemas matemáticos, e os interpretar utilizando conceitos do mundo real."
P3	Q6.	"Pode sim, e além disso, também pode ajudar no entendimento de noções básicas de geometria plana, tais como: ponto, reta tangente, retas paralelas e perpendiculares."
	Q8.	"Tive a disciplina de Modelagem Matemática, porém, aplicada ao ensino. Mas pelo que vi na oficina, não diverge tanto da modelagem aplicada à programação. No geral, é importante para pensarmos em problemas, seja na natureza, na sociedade, economia, etc."

P4	Q6.	"Sim, pois auxilia na intuição visual do problema, como por exemplo, mudar os valores iniciais (imputs) do problema e testar o programa."

Fonte: Autor (2025)

Categoria 3: Potencial das Ferramentas *(*Comentários específicos sobre GeoGebra e Python.)

Q9. A aplicação de tecnologias com GeoGebra e Python pode motivar nos estudos de Ciências Naturais? e Q7. A dinâmica proposta acerca da construção do algoritmo pode ajudar no entendimento de modelagem matemática?

Comentários específicos sobre GeoGebra e Python.

Tabela 5 - Menções sobre o entendimento de conceitos (matemáticos, de programação, etc.).

	Questão	Resposta com Destaque
P1	Q9.	"Sim, ir para a prática, seja modelando por meio do GeoGebra ou programando pelo Python, promove a interdisciplinaridade, sendo possível relacionar matemática, tecnologia com o cotidiano."
P2	Q9.	"Com certeza. A utilização dessas ferramentas permite a visualização de uma forma diferente do habitual. No GeoGebra podemos visualizar, até mesmo em 3D, funções e equações, enquanto que no Python podemos quebra-los em várias etapas, de modo a entender melhor o seu funcionamento."
P3	Q9.	"Sinceramente, acho que sim. Mas trazendo essa abordagem para o ensino básico, fica complicado devido a alguns fatores, tais como: infraestrutura escolar, falta de conhecimento em tecnologias pelos professores, além do modelo ultrapassado de ensino que é passado nas escolas."
P4	Q7.	"Creio que o uso do GeoGebra ajudou a entender como chegar na modelagem, pois me permitiu achar o valor desejado por de argumentos geométricos."
	Q9.	"Sim, pois permite compreender dados numéricos para constatar a validade de leis por exemplo."

Fonte: Autor (2025)

Categoria 4: Dificuldades e Barreiras

Obstáculos enfrentados pelos participantes ou apontados por eles.

Q6. A dinâmica proposta acerca da construção do algoritmo pode ajudar no entendimento de trigonometria, álgebra básica e noções preliminares de algoritmos?

Q7. A dinâmica proposta acerca da construção do algoritmo pode ajudar no entendimento de modelagem matemática?

Q9. A aplicação de tecnologias com GeoGebra e Python pode motivar nos estudos de Ciências Naturais?

Tabela 6 - Obstáculos enfrentados pelos participantes ou apontados por eles.

	Questão	Resposta com Destaque
P2	Q6.	"Sem dúvida alguma, a dinâmica do algoritmo é muito interessante para entendimento desses conhecimentos. No meu caso, como a minha base matemática é bastante deficiente e fazia tempo que eu não via os conceitos, tive um pouco de dificuldade para assimilar o conteúdo, mas acredito que alguém da área terá mais facilidade."
P3	Q7. Q9.	"Sim, o professor até explicou o que era modelagem matemática, e para quem tem uma certa base matemática é de bastante ajuda." "Sinceramente, acho que sim. Mas trazendo essa abordagem para o ensino básico, fica complicado devido a alguns fatores, tais como: infraestrutura escolar, falta de conhecimento em tecnologias pelos professores, além do modelo ultrapassado de ensino que é passado nas escolas."

Fonte: Autor (2025)

Categoria 5: Sugestões de Melhoria

Recomendações diretas para aprimorar a oficina.

Q10. Aponte melhorias para a dinâmica proposta

Tabela 7 - Recomendações diretas para aprimorar a oficina.

	Questão	Resposta com Destaque
P1	Q10.	"Fazer a parte do GeoGebra (modelagem) com toda a turma passo a passo. Se possível fazer a sinuca na prática."
P2	Q10.	"A dinâmica poderia apresentar melhor as bases matemáticas, de maneira que pessoas como eu, que tem deficiência no ensino, pudessem acompanhar de forma mais satisfatória os assuntos perpassados."
P3	Q10.	"Acho que poderia ser um pouco mais extensa, deu pra entender sobre modelagem matemática aplicada a programação, porém, faltou mais tempo para explorar no Python."
P4	Q10.	"Aumentar o tempo da oficina e dos testes. Discutir mais a geometria utilizada."

Fonte: Autor (2025)

4 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou uma proposta didática inovadora, fundamentada na Teoria das Situações Didáticas (TSD), com o objetivo de promover a aprendizagem significativa por meio da interdisciplinaridade entre Física e Matemática. A escolha do jogo de sinuca como *milieu* pedagógico revelou-se eficaz para contextualizar o Princípio de Fermat e os conceitos associados à geometria plana e à óptica geométrica.

A sequência didática, composta por momentos didático, adidático, de validação e de institucionalização, permitiu aos discentes não apenas aplicar conhecimentos previamente adquiridos, mas também reconstruí-los por meio da modelagem matemática e da experimentação com ferramentas como GeoGebra e Python. A análise comparativa entre os testes diagnósticos evidenciou avanços na compreensão conceitual, ainda que heterogêneos entre os participantes, destacando ganhos especialmente em conteúdos relacionados à proporcionalidade e à representação geométrica.

As respostas ao questionário discursivo indicaram que os discentes reconheceram o potencial da dinâmica para facilitar o entendimento de conteúdos matemáticos e físicos, além de apontarem as tecnologias educacionais como facilitadoras do processo de aprendizagem. Contudo, as dificuldades relatadas também sinalizam a necessidade de reforço conceitual prévio e de maior tempo de oficina para aprofundamento das ferramentas computacionais.

Conclui-se que a proposta de integração entre teoria, prática e tecnologia, ancorada em uma abordagem didática participativa e crítica, constitui uma alternativa viável e promissora para o ensino interdisciplinar das ciências naturais. Recomenda-se sua replicação e adaptação em diferentes contextos educacionais, bem como a continuidade da pesquisa com grupos mais amplos, a fim de avaliar seus impactos em larga escala na formação de professores e no desempenho discente.

REFERÊNCIAS

A, Akbari Yash. Head first python. **International Journal of Engineering in Computer Science**, v. 3, n. 1, p. 12–15, 1 jan. 2021.

ALTINO FILHO, Humberto Vinício; NUNES, Célia Maria Fernandes; FERREIRA, Ana Cristina. METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: O QUE DIZEM AS PESQUISAS? **Pensar Acadêmico**, v. 18, n. 1, p. 172, 24 mar. 2020.

BENTO, Maria Aparecida da Silva *et al.* A EDUCAÇÃO NA REGIÃO NORTE: APONTAMENTOS INICIAIS. **Amazônica - Revista de Antropologia**, v. 5, n. 1, p. 140, 9 set. 2013.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29 abr. 2025.

DE SOUZA FARIAS, S. A.; MEIRA FILHO, Damiao Pedro; SANTOS KAMASSURY, J. K. Didactical situations to treat Lorentz and Galileo transformations in theoretical physics. **Revista Mexicana de Física E**, v. 19, n. 1 Jan-Jun, 22 nov. 2021.

FARIAS, Sérgio Antônio de Souza; MAFRA, José Ricardo e Souza. CONTEXTUALIZANDO O DEBATE (E O COMBATE) NECESSÁRIO À UMA EDUCAÇÃO ANTIDIALÓGICA. **Revista Communitas**, v. 7, n. 17, 2023.

JAMES M. GERE; BARR J. GOODNO. **Mecânica dos materiais - Tradução da 8ª edição norte americana**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning Brasil, 2017.

JORGE, Paulo *et al.* Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. 2013.

MOZENA, Erika Regina; OSTERMANN, Fernanda. UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE A INTERDISCIPLINARIDADE NO ENSINO DAS CIÊNCIAS DA NATUREZA. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 16, n. 2, p. 185–206, ago. 2014.

OCDE. **PISA 2015 Results (Volume I)**. *[S.l.]*: OECD, 2016.

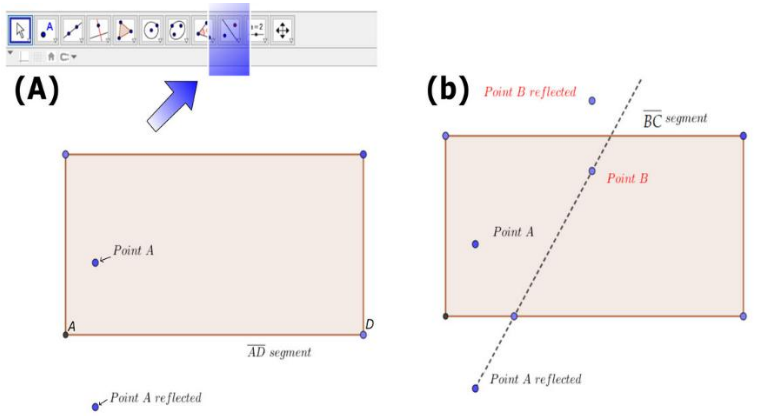
STUDART, Nelson. Complexidade na Física e seu Ensino: Apresentação da Edição Especial. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 43, n. suppl 1, 2021.

ZIATDINOV, Rushan; VALLES, James R. Synthesis of Modeling, Visualization, and Programming in GeoGebra as an Effective Approach for Teaching and Learning STEM Topics. **Mathematics**, v. 10, n. 3, p. 398, 27 jan. 2022.

APÊNDICE A - Produtos Educacionais

A modelagem do princípio de Fermat é realizada no GeoGebra por meio da reflexão de um ponto em torno de uma reta, repetindo-a de acordo com o número de tabelas. A primeira reflexão é o ponto A, conforme ilustrado na figura (5.A), e a segunda reflexão é o ponto B, conforme ilustrado na figura (5.B) abaixo:

Figura 5 - Produtos educacionais



(c)

```
n = int(input("Enter the number of tables (1, 2, or 3): "))

# Read the variables a, b, and d as real numbers
a = float(input("Enter the value of a: "))
b = float(input("Enter the value of b: "))
d = float(input("Enter the value of d: "))

# Calculate the value of c based on n
if n == 1:
     r = (2*a*d)/(a+b)
elif n == 2:
     h = float(input("Enter the value of h: "))
     r = (2*a*d)/(2*h+a-b)
elif n == 3:
     h = float(input("Enter the value of h: "))
     r = (2*a*d)/(2*h+a+b)
else:
     print("Invalid value of n! Choose 1, 2, or 3.")
     exit()

# Display the result formatted to two decimal places
print(f"The value of r is: {r:.2f}")
```

Fonte: Autor (2025)

Os pontos refletidos restantes são gerados a partir de pontos nas linhas que representam as trajetórias da bola. É necessário colocar pontos na linha e refleti-los novamente em relação à borda. A próxima reflexão ocorre com relação a distância BC, onde o ponto *B* é refletido, conforme mostrado na figura (05.B). Isso é feito de acordo com o número de reflexões estudadas.

A Figura 05.c mostra o algoritmo em Python com *entradas em float(input):* a, b, d e n em *int(input).* O algoritmo calcula a distância c para cada caso n e mostra o resultado usando o comando print.

Teste Diagnóstico 01

Oficina: Teoria de Situação Didática – Interdisciplinaridade Física e Matemática

Comissão: Gabriel P. Coelho; Sebastian Mancuso e Sérgio A. de S. Farias

Discente(s):____

Matrícula(s):____ Data:_____________

01 - Um avião está se aproximando a um aeroporto na direção da pista de aterrissagem do mesmo e sua altitude é de 3.000 metros em relação ao solo. O piloto precisa alinhar a aeronave com a pista de pouso e no início dela, que está a 3 km de distância na horizontal do ponto em que ele está. Qual é o ângulo de inclinação θ (em graus) que o piloto precisa fazer em relação ao solo para alinhar o avião com a pista de pouso no início dela? Despreze a curvatura da terra.

02 - Uma pessoa de 1,8 metros de altura está de pé em um dia ensolarado. Sua sombra projetada no chão mede 2,4 metros de comprimento. Ao lado, há um poste que projeta uma sombra de 8 metros de comprimento. Supondo que o ângulo de inclinação dos raios solares é o mesmo para ambos, qual é a altura do poste?

03 - Um feixe de luz incide em um espelho plano, formando um ângulo de 45^0 em relação à normal à superfície do espelho. Sabendo que o feixe percorre uma distância que está a 3 metros do ponto de incidência, na vertical, até um ponto na parede refletida e 2 metros de distância horizontal do espelho, qual é a altura em que o feixe atinge a parede após a reflexão?

04 - Uma rampa está posicionada de forma que forma um ângulo θ com o solo. A altura da rampa (*h*) e base (*b*). Se o comprimento da base é dado por *b* = 10 metros e a altura é *h* = 6 metros, determine o valor de θ e, em seguida, o valor de $tan^2(\theta) + 2\tan(\theta) + 1$

05 - Você foi contratado para criar um algoritmo que calcula a média aritmética de três números fornecidos pelo usuário. No entanto, o cliente destacou que é essencial exibir os números digitados antes de mostrar o resultado da média, para que o usuário possa verificar se os valores estão corretos.

Considere as seguintes etapas para o algoritmo:

1. Solicitar os três números ao usuário (*input*).
2. Exibir os números digitados (*output*).
3. Calcular a média aritmética.
4. Mostrar o resultado da média (*output*).

Pergunta: Por que é importante realizar a etapa 2 antes da etapa 3 no algoritmo, e o que pode acontecer se essa etapa for omitida?

Alternativas:

a. Para garantir que o usuário forneça números válidos, evitando erros no cálculo da média.
b. Para que o algoritmo valide automaticamente os números inseridos, sem necessidade de outra etapa.
c. Para permitir que o usuário confirme os valores inseridos, evitando resultados incorretos caso algum número tenha sido digitado errado.
d. Não é necessário realizar a etapa 2 antes da etapa 3, pois o cálculo da média não depende dessa verificação.

06 - Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 10 m, e um dos ângulos agudos é de 30^0. Qual é o comprimento do lado oposto a esse ângulo?

07- No triângulo ABC, os lados AB e AC são congruentes, tornando o triângulo isósceles. Sabendo que o ângulo $\angle ABC = 50^0$, determine o valor dos ângulos $\angle BAC$ e $\angle BCA$.

08 - Um fazendeiro deseja cercar um campo retangular que possui uma área de 500 m^2. Ele quer minimizar o comprimento total da cerca necessária. Sabendo que o perímetro da cerca é dado por: $P = 2x + 2y$, e que a área do campo é dada por: $A = x{\cdot}y$, em que x é o comprimento e y é a largura do retângulo, determine o valor de x que minimiza o perímetro.

09- Explique do que se trata a seguinte sequência:

1. Início
2. Solicite o primeiro número ao usuário e armazene-o como a.
3. Solicite o segundo número ao usuário e armazene-o como b.
4. Some os dois números: soma = $a + b$.
5. Exiba o resultado da soma.
6. Fim

____

____

10-Considere a sequência $S(n)$ definida da seguinte forma:

- Para n ímpar: $S(n) = n^2 + 1$,
- Para n par: $S(n) = n^2 - 1$.

Com base nessas definições, coloque verdadeiro (V) ou falso (F) para $S(n)$, válida para qualquer número natural n?

Alternativas:

1. $S(n) = n^2 + (-1)^n$; ( )
2. $S(n) = n^2 + 1$; ( )
3. $S(n) = n^2 - (-1)^n$; ( )
4. $S(n) = n^2 + (-1)^{n+1}$. ( )

11-Um homem, sentado num banco, olha numa poça de água perto dele, com o olho a uma altura de 1 metro em relação à água observa a imagem de uma lâmpada na água numa direção que faz um ângulo de 45º com a horizontal e, ao olhar diretamente à lâmpada, a observa sob um ângulo de 30º em relação à horizontal. Determine a altura da lâmpada em relação à água.

12 - Um jogador de bilhar, sem imperfeições nas bordas, deseja acertar a bola 1 (branca) na bola 2 (vermelha), que está posicionada próxima a uma das bordas da mesa. Para realizar essa jogada, o jogador decide usar a técnica de reflexão, fazendo a bola branca colidir na borda da mesa antes de atingir a bola vermelha.

Dados:

- A bola branca está inicialmente a 0.7 m da borda inferior (eixo horizontal).
- A bola vermelha está inicialmente, também, a 0.7 m da borda inferior.
- A posição inicial da bola branca é (0 cm;70 cm).

- A posição inicial da bola vermelho é (90 *cm*;70 *cm*).

Pergunta: Determine as coordenadas do ponto onde a bola branca deve colidir para que, após a reflexão, ela atinja a bola vermelha.

Teste Diagnóstico 02

Oficina: Teoria de Situação Didática – Interdisciplinaridade Física e Matemática

Comissão: Gabriel P. Coelho; Sebastian Mancuso e Sérgio A. de S. Farias

Discente(s):____

Matrícula(s):____ Data:_____________

01 - Uma pessoa de 1,8 metros de altura está de pé em um dia ensolarado. Sua sombra projetada no chão mede 2,4 metros de comprimento. Ao lado, há um poste que projeta uma sombra de 8 metros de comprimento. Supondo que o ângulo de inclinação dos raios solares é o mesmo para ambos, qual é a altura do poste?

02 - Um feixe de luz incide em um espelho plano, formando um ângulo de 45^0 em relação à normal à superfície do espelho. Sabendo que o feixe percorre uma distância que está a 3 metros do ponto de incidência, na vertical, até um ponto na parede refletida e 2 metros de distância horizontal do espelho, qual é a altura em que o feixe atinge a parede após a reflexão?

03 - Você foi contratado para criar um algoritmo que calcula a média aritmética de três números fornecidos pelo usuário. No entanto, o cliente destacou que é essencial exibir os números digitados antes de mostrar o resultado da média, para que o usuário possa verificar se os valores estão corretos.

Considere as seguintes etapas para o algoritmo:

5. Solicitar os três números ao usuário (*input*).
6. Exibir os números digitados (*output*).
7. Calcular a média aritmética.
8. Mostrar o resultado da média (*output*).

Pergunta: Por que é importante realizar a etapa 2 antes da etapa 3 no algoritmo, e o que pode acontecer se essa etapa for omitida?

Alternativas:

e. Para garantir que o usuário forneça números válidos, evitando erros no cálculo da média.
f. Para que o algoritmo valide automaticamente os números inseridos, sem necessidade de outra etapa.
g. Para permitir que o usuário confirme os valores inseridos, evitando resultados incorretos caso algum número tenha sido digitado errado.
h. Não é necessário realizar a etapa 2 antes da etapa 3, pois o cálculo da média não depende dessa verificação.

04-Um homem, sentado num banco, olha numa poça de água perto dele, com o olho a uma altura de 1 metro em relação à água observa a imagem de uma lâmpada na água numa direção que faz um ângulo de 45º com a horizontal e, ao olhar diretamente à lâmpada, a observa sob um ângulo de 30º em relação à horizontal. Determine a altura da lâmpada em relação à água.

05 - Um jogador de bilhar, sem imperfeições nas bordas, deseja acertar a bola 1 (branca) na bola 2 (vermelha), que está posicionada próxima a uma das bordas da mesa. Para realizar essa jogada, o jogador decide usar a técnica de reflexão, fazendo a bola branca colidir na borda da mesa antes de atingir a bola vermelha.

Dados:

- A bola branca está inicialmente a 0.7 *m* da borda inferior (eixo horizontal).
- A bola vermelha está inicialmente, também, a 0.7 *m* da borda inferior.
- A posição inicial da bola branca é (0 *cm*;70 *cm*).
- A posição inicial da bola vermelho é (90 *cm*;70 *cm*).

Pergunta: Determine as coordenadas do ponto onde a bola branca deve colidir para que, após a reflexão, ela atinja a bola vermelha.

Questionário para Análise Discursiva

06 – A dinâmica proposta acerca da construção do algoritmo pode ajudar no entendimento de trigonometria, álgebra básica e noções preliminares de algoritmos?

____
____
____
____
____

07 – A dinâmica proposta acerca da construção do algoritmo pode ajudar no entendimento de modelagem matemática?

____
____
____
____
____

08 – Qual a importância em fazer modelagem matemática?

____
____
____
____
____

09 – A aplicação de tecnologias com GeoGebra e Python pode motivar nos estudos de Ciências Naturais?

____
____
____
____
____

10 – Aponte melhorias para a dinâmica proposta

____
____
____

Oficina: Teoria de Situação Didática – Interdisciplinaridade Física e Matemática

Comissão: Gabriel P. Coelho; Sebastian Mancuso e Sérgio A. de S. Farias

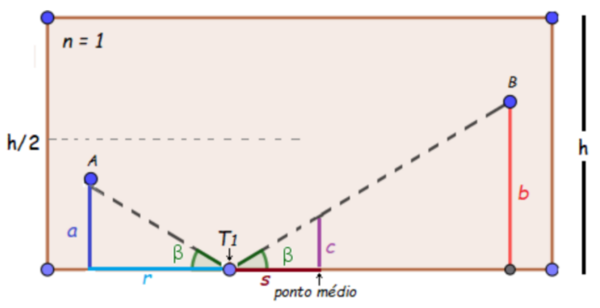
Discente(s):____

Matrícula(s):_________________________________ Data:__________

Na situação adidática o discente deve discutir e explicar os seguintes pontos:

01 - Caso uma tabela (n = 1)

Fig. 01: Representação de uma situação com uma tabela



Sabendo que: $i)$ $tg\beta = \frac{a}{r} = \frac{c}{s}$, $ii)$ $r + s = d$, e que $iii)$ $c = (b - a)/2$ como podemos verificar na tabela abaixo ($2d$ = 10):

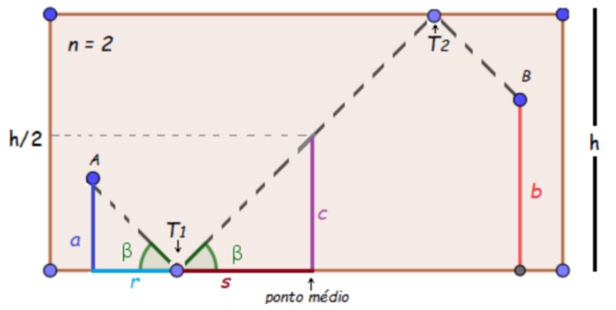
Linha	h	a	b	c = (b - a)/2
L1	6	h/3 = 2	2h/3 = 4	1
L2	6	2h/3 = 4	h/3 = 2	-1
L3	6	h/h = 1	2h/3 = 4	1.5
L4	6	h/3 = 2	h/2 = 3	0.5

Mostre que:

$$r = \frac{2ad}{a + b}.$$

<u>02 - Caso duas tabelas (*n* = 2)</u>

Fig. 02: Representação de uma situação com duas tabelas



A figura ao lado mostra que a bola sofre reflexão nas duas tabelas: T_1 e T_2.

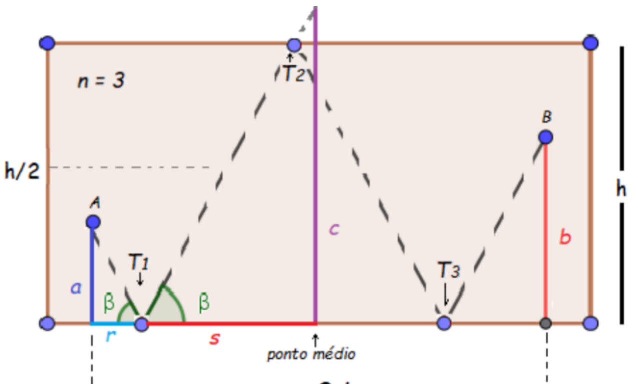
Sabendo que : *i*) $)\ tg\beta = \frac{a}{r} = \frac{c}{r}$, *ii*) $r + s = d$ e *iii*) $c = \frac{h}{2} + \frac{h-b-a}{2}$, como verificado na tabela abaixo ($2d = 10$):

Linha	h	a	b	c
L1	6	h/3 = 2	2h/3 = 4	h/2 = 3
L2	6	2h/3 = 4	h/3 = 2	h/2 = 3
L3	6	h/h = 1	2h/3 = 4	h/2 + 1/2
L4	6	h/3 = 2	h/2 = 3	h/2 + 1/2

Moste que: $r = d\left(\frac{2a}{2h+a-b}\right)$

<u>03 – Caso três tabelas (*n* = 3)</u>

Fig. 03: Representação de uma situação com três tabelas



A figura 03 mostra que a bola sofre reflexão em três tabelas: T_1, T_2, e T_3.

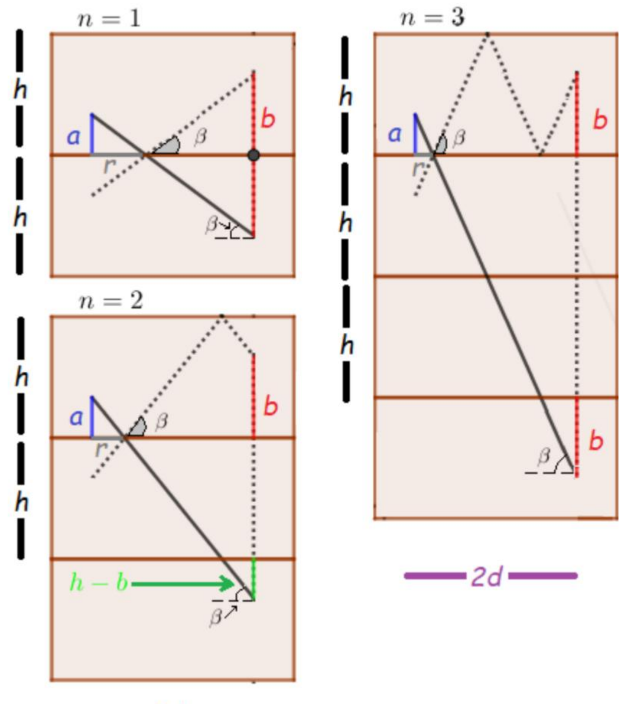
Sabendo que: *i*) $tg\beta = \frac{a}{r} = \frac{c}{s}$, *ii*) $r + s = d$ e *iii*) $c = h + (b - a)/2$, como verificado na tabela abaixo ($2d = 10$):

Linha	h	a	b	c = h +(b - a)/2
L1	6	h/3 = 2	2h/3 = 4	7
L2	6	2h/3 = 4	h/3 = 2	5.0
L3	6	h/h = 1	2h/3 = 4	7.5
L4	6	h/3 = 2	h/2 = 3	6.5

Moste que: $r = d\left(\frac{2a}{2h+a+b}\right)$

04 – Caso generalização

Fig. 04: Representação dos casos $n = 1$, $n = 2$ and $n = 3$



Sabendo que: i) para $n = 1 \therefore \frac{r}{a} = \frac{2d}{a+b}$; $ii)$ $n = 2 \therefore \frac{r}{a} = \frac{2d}{a+2h-b}$ e $iii)$ $n = 3 \therefore \frac{r}{a} = \frac{2d}{a+2h+b}$, discuta: $iv)$ $n = 4 \therefore \frac{r}{a} = \frac{2d}{a+4h-b}$. Mostre que:

$$\frac{r}{a} = \frac{2d}{a+b+(n-1)h} \qquad para\ n\ ímpar;$$

$$\frac{r}{a} = \frac{2d}{a-b+nh} \qquad para\ n\ par,$$

sabemos, também, que $r + c = d$, mostre que

$$c = d\left(\frac{b-a+(n-1)h}{a+b+(n-1)h}\right) \qquad para\ n\ ímpar;$$

$$c = d\left(\frac{-b-a+nh}{a-b+nh}\right) \qquad para\ n\ par,$$

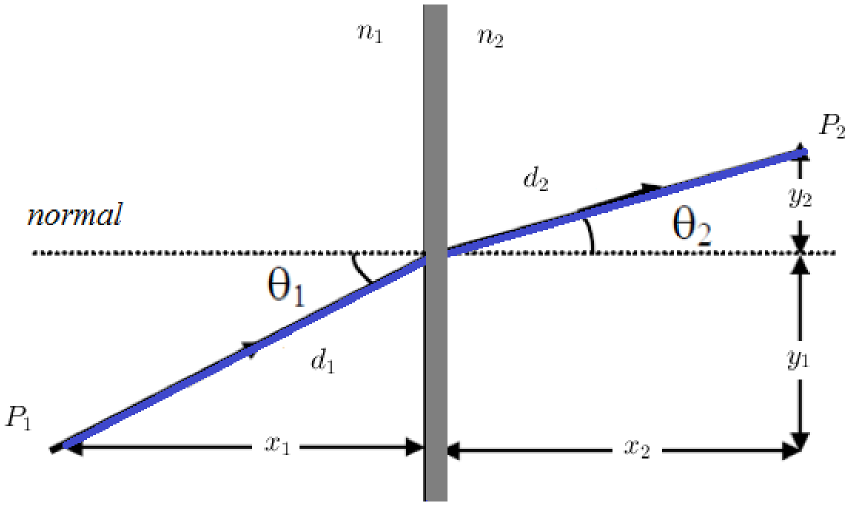
e

$$r = d\left(\frac{2a}{a+(n-1)h+\left[\frac{h}{2}+(-1)^n\left(\frac{h}{2}-b\right)\right]}\right) \text{para } n \text{ qualquer.}$$

Lei de Snell

Seja agora um feixe de luz que parte de um dado meio com índice absoluto de refração $n_1 = \frac{c}{v_1}$ em direção a um dado meio com índice absoluto de refração $n_2 = \frac{c}{v_2}$, como ilustrado na figura abaixo:

Figura 5 – Representação da refração



Fonte: Autor(2025)

O tempo total para executar o percurso de P_1 até P_2 é dado por:

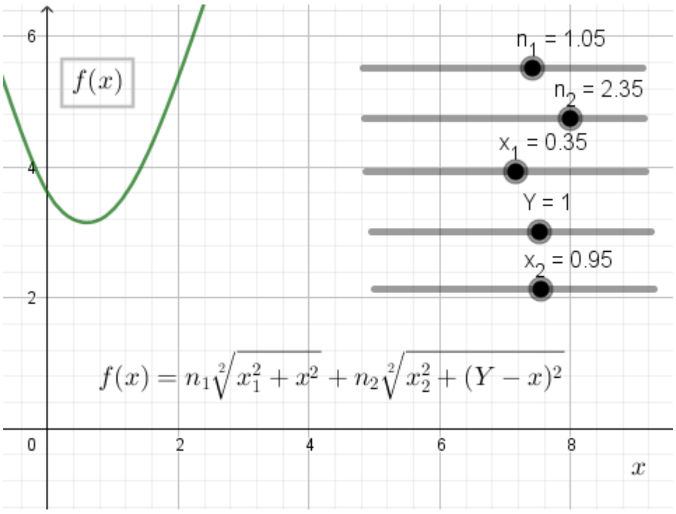
$$t = \sum_i t_i = \sum_i \frac{d_i}{v_i} = \frac{1}{c}\sum_i n_i d_i \ ,$$

a última equação expressa o princípio de Fermat. Temos para a situação apontada na figura 06 que:

$$ct = n_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + n_2\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = n_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + n_2\sqrt{x_2^2 + (\mathrm{Y} - y_1)^2}$$

A função $ct = f(y_1)$ pode ser plotado por meio de softwares livres, a figura 07 mostra $ct = f(y_1)$ plotada por meio do GeoGebra:

Figura 6 – Modelagem dos coeficientes para a refração



A figura 06 mostra que o menor tempo ocorre no ponto de mínimo, logo:

$$\frac{df(y_1)}{dy_1} = \frac{n_1 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{n_2(\mathrm{Y} - y_1)}{\sqrt{x_2^2 + (\mathrm{Y} - y_1)^2}} = 0,$$

de outra forma:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2,$$

que consiste da lei de Snell.