



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA E GEOCIÊNCIA
BACHARELADO EM GEOFÍSICA**

ISAAC MATHEUS BARROSO ARAÚJO

**INVERSÃO 2D DO MÉTODO ELETROMAGNÉTICO A
MULTIFREQUÊNCIA COM A MATRIZ JACOBIANA CALCULADA
COM O MÉTODO AUTO-ADJUNTO**

SANTARÉM-PA

2025

ISAAC MATHEUS BARROSO ARAÚJO

**INVERSÃO 2D DO MÉTODO ELETROMAGNÉTICO A
MULTI-FREQUÊNCIA COM A MATRIZ JACOBIANA CALCULADA
COM O MÉTODO AUTO-ADJUNTO**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Curso de Bacharelado em Geofísica do Instituto de Engenharia e Geociências da Universidade Federal do Oeste do Pará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Geofísica.

Orientador: Prof. Dr. Anderson Almeida da Piedade

**SANTARÉM-PA
2025**

ISAAC MATHEUS BARROSO ARAÚJO

INVERSÃO 2D DO MÉTODO ELETROMAGNÉTICO A
MULTI-FREQUÊNCIA COM A MATRIZ JACOBIANA CALCULADA
COM O MÉTODO AUTO-ADJUNTO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Bacharelado em Geofísica do Instituto de Engenharia e Geociências da Universidade Federal do Oeste do Pará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Geofísica.

Orientador: Prof. Dr. Anderson Almeida da Piedade

Conceito:

Data de Aprovação ____/____/_____

Dr. Anderson Almeida da Piedade - Orientador
Universidade Federal do Oeste do Pará

Dra. Cíntia Rocha da Trindade
Universidade Federal do Oeste do Pará

Dra. Nayara Safira da Silva Caldas
Universidade Federal do Oeste do Pará

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/UFOPA

- A663i Araújo, Isaac Matheus Barroso
 Inversão 2D do método eletromagnético a multifrequência com a matriz jacobiana calculada com o método auto-adjunto. / Isaac Matheus Barroso Araújo. - Santarém, 2025.
 33 p. : il.
 Inclui bibliografias.
- Orientador: Anderson Almeida da Piedade.
 Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Engenharia e Geociências, Bacharel em Geofísica.
1. Inversão. 2. Custo computacional. 3. Matriz de sensibilidade. 4. Método auto-adjunto. I. Piedade, Anderson Almeida da, *orient.* II. Título.


CDD: 23 ed. 622.154




UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA E GEOCIÊNCIAS
CURSO DE BACHARELADO EM GEOFÍSICA

ATA DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO


Aos quatorze dias do mês de março de dois mil e vinte e cinco, às dez horas da manhã, de maneira presencial, no LESSAM (sala 212 do NTL), reuniu-se a Comissão Avaliadora do Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado em Geofísica, intitulado **Inversnao 2D do Método Eletromagnético a Multi-Frequência Com a Matriz Jacobiana Calculada com o Método Auto Adjunto**, elaborado pelo discente Isaac Matheus Barroso Araújo. Compuseram a banca examinadora as professoras Profa. Dra. Cíntia Rocha de Trindade, Profa. Dra. Nayara Safira da Silva Caldas e o Prof. Dr. Anderson Almeida da Piedade (orientador). Após a leitura e ciência dos pareceres, anexos a esta ATA, decidiram aprovar com nota 8,6, o referido TCC. A banca examinadora deu um prazo de dez dias para o aprovado entregar a versão final do texto com as correções que foram sugeridas. Para constar, redigi a presente Ata, assinada por mim, orientador, e pelos demais membros da reunião.

Documento assinado digitalmente
 **ANDERSON ALMEIDA DA PIEDADE**
Data: 02/04/2025 14:53:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Anderson Almeida da Piedade (Orientador)

Documento assinado digitalmente
 **CINTIA ROCHA DA TRINDADE**
Data: 02/04/2025 13:34:52-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Cíntia Rocha da Trindade (Membro)

Documento assinado digitalmente
 **NAYARA SAFIRA DA SILVA CALDAS**
Data: 14/03/2025 14:38:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Nayara Safira da Silva Caldas (Membro)

*Este trabalho é dedicado a Deus e à família,
em especial ao meu pai,
José Felipe Araújo.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sempre me responder, ainda que de formas inesperadas. Pedi força, e Ele me deu dificuldades para enfrentar. Pedi sabedoria, e Ele me deu problemas para solucionar. Pedi paciência, e Ele me deu situações desafiadoras para superar. Pedi amor, e Ele me deu pessoas difíceis de lidar, para que eu aprendesse a verdadeiramente amar.

Aos meus familiares, pelo apoio e carinho. Aos meus colegas, que estiveram comigo nos momentos de dificuldade e alegria. Ao meu grupo de RPG, que me permitiu escapar da realidade por pelo menos uma noite na semana, trazendo diversão e grandes aventuras.

Um agradecimento especial aos meus professores, em especial à professora Safira, que sempre me apoiou e me fez gostar ainda mais de cálculo. Ao meu orientador, professor Anderson, pela paciência, dedicação e disposição para esclarecer minhas dúvidas, ajudando-me a crescer significativamente no meio acadêmico.

Agradeço à UFOPA, que me proporcionou a oportunidade de estudar em uma instituição com boa infraestrutura e excelentes professores. Sou grato também à PROCCE, que me permitiu participar do projeto de extensão universitária de introdução ao cálculo (CIC).

Ao meu pai, cuja ajuda financeira tornou possível esta jornada.

A Deus, toda honra e glória.

RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se a inversão de dados do Método Eletromagnético a Multi-Frequência (EMMF) com a comparação entre duas técnicas de cálculo da matriz de sensibilidades, extremamente necessária para o problema inverso e é responsável por um maior custo computacional. Para isso, foram criados modelos sintéticos bidimensionais para a geração dos dados a serem invertidos e no problema inverso foram geradas malhas de modelo interpretativo com diferentes discretizações. Neste estudo, buscou-se na literatura uma abordagem matemática alternativa para otimizar o cálculo da matriz de sensibilidades, ou jacobiana, devido ao alto custo computacional gerado ao se utilizar o método perturbativo. O método escolhido foi o auto-adjunto, por conta de características numéricas da solução por elementos finitos do problema direto, que utiliza métodos diretos para a solução do sistema linear associado. Esta técnica mostrou-se bastante superior ao método perturbativo. Em modelos simples, a redução do tempo de processamento foi de pelo menos duas vezes, enquanto em modelos mais complexos essa redução foi ainda maior. Além disso, foram criados dois outros modelos para estudar a inversão dos dados EMMF: O primeiro com dois corpos condutivos e outro com um corpo resistivo e condutivo. Os resultados obtidos no modelo com corpos condutivos foram bastante satisfatórios, identificando bem a região de presença de ambos. Já no modelo com um corpo resistivo e outro condutivo, o resultado não identificou bem o corpo resistivo, essa limitação decorre da própria natureza do método EMMF que é de natureza indutiva.

Palavras-chave: Inversão, Custo Computacional, Matriz de Sensibilidade, Método Auto-Adjunto.

ABSTRACT

This work presents the inversion of Multi-Frequency Electromagnetic (EMMF) method data, comparing two techniques for calculating the sensitivity matrix, which is crucial for the inverse problem and is responsible for a higher computational cost. For this purpose, two-dimensional synthetic models were created to generate the data to be inverted, and in the inverse problem, interpretive model meshes with different discretizations were generated. In this study, an alternative mathematical approach was sought in the literature to optimize the calculation of the sensitivity matrix, or Jacobian, due to the high computational cost generated when using the perturbative method. The chosen method was the self-adjoint method, due to numerical characteristics of the finite element solution of the direct problem, which uses direct methods to solve the associated linear system. This technique proved to be significantly superior to the perturbative method. In simple models, the reduction in processing time was at least twofold, while in more complex models, this reduction was even greater. In addition, two other models were created to study the inversion of EMMF data: the first with two conductive bodies and the other with one resistive and one conductive body. The results obtained in the model with conductive bodies were quite satisfactory, clearly identifying the region of presence of both. In the model with one resistive and one conductive body, the result did not clearly identify the resistive body; this limitation stems from the very nature of the EMMF method, which is inductive.

Keywords: Inversion, Higher Computational, The Sensitivity Matrix, Self-Adjoint Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 -	Esquema do levantamento de dados do método EMMF. A fonte está localizada em um ponto fixo, e os receptores são dispostos ao longo de uma linha contínua no eixo x.	14
Figura 2 -	Fazenda Alegre: resultados referentes ao processamento da modelagem bidimensional do método EMMF. (a) Pseudoseção de resistividade aparente e (b) parâmetro de polarização. Obtido na linha FAL-36.	15
Figura 3 -	Campo São Mateus: resultados referentes ao processamento da modelagem bidimensional do método EMMF, (a) Pseudoseção de resistividade aparente, (b) parâmetro de polarização e (c) seção sísmica. Obtido na linha SM-02.	16
Figura 4 -	Esquema do arranjo do método EMMF para meios 2D, onde ρ representa diferentes valores de resistividade e E corresponde à espessura das camadas plano-paralelas. A espira circular atua como fonte, enquanto as setas indicam a posição dos receptores e o corpo em amarelo representa a estrutura a ser observada pela modelagem direta.	17
Figura 5 -	Imagem representativa do modelo 1 de comparação. Nele há a presença de um corpo condutivo em um semiespaço resistivo.	22
Figura 6 -	Imagem representativa da delimitação da área de inversão para recuperação do alvo condutivo.	23
Figura 7 -	Resultados obtidos do modelo inverso com menos células, (a) auto-adjunto (b) força bruta.	24
Figura 8 -	Resultados extraídos do modelo inverso com mais células, (a) auto-adjunto (b) força bruta.	25
Figura 9 -	Imagem representativa do modelo com dois blocos condutivos.	27
Figura 10 -	Imagem representativa do modelo da delimitação da área de inversão dos dois blocos condutivos.	27
Figura 11 -	Resultado obtido a partir da inversão dos dois blocos condutivos. ...	28
Figura 12 -	Imagem representativa do modelo com bloco resistivo e condutivo. ...	29
Figura 13 -	Imagem representativa do modelo da delimitação da área de inversão com bloco resistivo e condutivo.	29
Figura 14 -	Resultado obtido da inversão dos blocos condutivo e resistivo.	30

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Principais informações dos computadores para o processamento dos dados... ..	21
Tabela 2 - Tempo referente aos resultados do processamento do método auto-adjunto e método força	26

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	METODOLOGIA	13
2.1	Método Eletromagnético a Multifrequência	13
2.2	A modelagem 2D do método EMMF	17
2.3	A modelagem inversa	18
2.4	Regularizador de Suavidade Global	20
3	RESULTADOS	20
3.1	Características gerais dos modelos	21
3.2	Modelo de comparação	21
3.2.1	Modelagem inversa com poucos parâmetros	23
3.2.2	Modelagem inversa com mais parâmetros	24
3.2.3	Comparação de tempo entre as metodologias	26
3.3	Modelo com dois blocos condutivos	26
3.4	Modelo com bloco resistivo e condutivo	28
4	CONCLUSÕES	31
	REFERÊNCIA	32

1 INTRODUÇÃO

Na Geofísica, é comum a utilização de métodos eletromagnéticos indutivos na investigação das propriedades geoeletricas da subsuperfície terrestre. Dentre esses, alguns utilizam bobinas como fonte indutiva para determinar feições geológicas. Esses métodos são amplamente aplicados em diversas áreas, como prospecção mineral, exploração de água subterrânea, até na exploração de hidrocarbonetos (MACHADO 2009).

Um método em desenvolvimento é o Método Eletromagnético de Multifrequências (EMMF), que tem como fonte indutiva uma espira quadrada de grandes dimensões, com até 600 metros de lado, que opera em uma faixa de frequência de 0,1 Hz a 1000 Hz. Em síntese, o método baseia-se em uma tabela denominada Ábaco, construída com a parte real e imaginária da componente radial do campo magnético resultante da interação do campo da fonte com o meio geológico, sendo estas funções de duas variáveis: o número de indução e o parâmetro de polarização (DIAS, 1968). As medidas do componente magnético radial são realizadas até dez quilômetros, partindo do centro da bobina. Para métodos indutivos, é incomum ter essas distâncias entre fonte-receptor.

O método EMMF foi proposto pelo pesquisador Dr. Carlos Alberto Dias teve suas contribuições pioneiras nos trabalhos de Dias (1968) e Sato (1979), nos quais foram desenvolvidas técnicas instrumentais, bem como o aparato teórico. Estudos dos trabalhos (SILVA, 2012; NUNES, 2014; PIEDADE, 2014a), expandiram o entendimento e as aplicações do métodos. Em Silva (2012), foi desenvolvida a modelagem bidimensional dos campos da bobina em meios 2D. Em seu estudo, fez-se uma descrição detalhada dos métodos numéricos utilizados para determinar os campos da bobina, bem como uma análise do comportamento dos campos para alguns modelos, com a finalidade de reproduzir os dados EMMF, que são compostos pela parte real e imaginária da componente radial do campo magnético \mathbf{H} da bobina.

Em Nunes (2014), estudou a influência da topografia nas medidas dos campos, novamente dando ênfase à componente radial do campo magnético. Neste estudo analisou-se a influência de morros e vales nas medidas dos campos, algum comum em terrenos com algum tipo de relevo. Para isso, utilizou-se a modelagem 2.5D pelo método dos elementos finitos (EF).

No trabalho de Piedade (2014a), foi feita a primeira inversão 1D e 2D de dados do método EMMF, em que para o problema inverso utilizou-se o método de Gauss-Newton modificado com a estratégia de Marquardt (MARQUARDT, 1963). A matriz de sensibilidades ou jacobiana foi calculada utilizando o método perturbativo com programação paralela. Apesar de todos os esforços, o cálculo da jacobiana mostrou-se pouco eficiente no caso da inversão 2D, pois pelo método perturbativo o problema direto é executado a quantidade de vezes igual ao número de células de inversão, o que tornou a obtenção de resultados bastante demorada.

A problemática deste trabalho consiste em reduzir o tempo computacional da modelagem inversa EMMF. A dificuldade surge porque a modelagem do método EMMF é feita por Elementos Finitos (EF), o que gera sistemas lineares de grandes dimensões. A solução desses sistemas consome muito tempo computacional, portanto, evita-se resolver o problema direto muitas vezes.

O trabalho tem como objetivo reduzir o tempo de processamento da modelagem inversa dos dados do método EMMF. Para isso, será implementado o cálculo da matriz jacobiana pelo método auto-adjunto, conforme descrito por Grayver (2013). Dessa forma, compararemos o tempo de processamento da modelagem inversa entre método perturbativo, apresentado em Piedade (2014a), e o método auto-adjunto. Além disso, será analisado o desempenho da modelagem inversa do método EMMF para múltiplos corpos condutivos e resistivos.

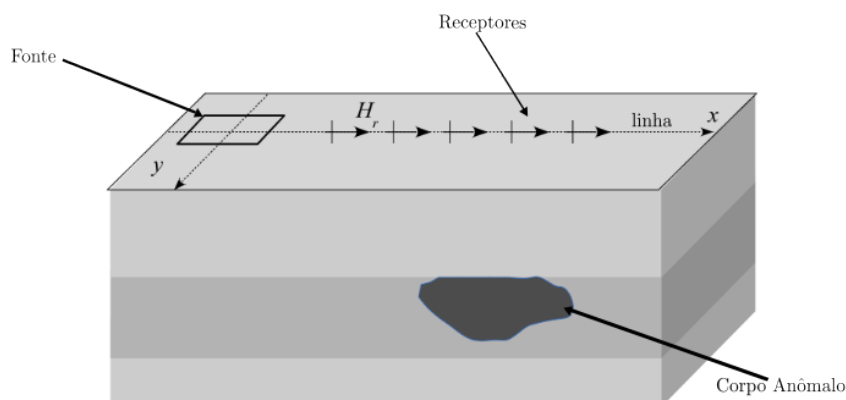
Este trabalho visa, além de contribuir para a implementação de uma nova abordagem matemática para solucionar a matriz jacobiana da modelagem inversa, também enriquecer a literatura geofísica sobre o tema. Isso se deve à baixa quantidade de trabalhos relacionados ao método EMMF. Embora as obras sobre métodos eletromagnéticos sejam amplamente conhecidas e pesquisadas, o método EMMF ainda conta com poucas pesquisas e não é amplamente reconhecido.

2 METODOLOGIA

2.1 Método Eletromagnético a Multifrequência

O método EMMF consiste em medir, em superfície, as componentes do campo magnético \mathbf{H} gerado a partir da interação de um campo magnético de um *loop* quadrado de grandes dimensões, com os lados podendo chegar a algumas centenas de metros. Os receptores são dispostos em uma linha que passa no centro do *loop* e podem estar distantes de até 10 km do centro da espira (podendo ser uma espira circular ou quadrada, desde que as equações de Maxwell sejam solucionadas). A fonte opera em uma faixa de frequência que vai de 0,1 Hz a 1000 Hz. Devido a natureza do tipo de dados do método, este responde melhor a efeitos indutivos na subsuperfície. Na Figura 1, é possível observar o esquema de aquisição de dados do método EMMF, onde são apresentadas a fonte e a disposição dos receptores durante a aquisição.

Figura 1 – Esquema do levantamento de dados do método EMMF. A fonte localizada em um ponto fixo e os receptores são dispostos ao longo de uma linha contínua no eixo x.



Fonte: (PIEDADE, 2014a)

Ao longo da história do método EMMF, três protótipos se destacaram. O primeiro, de 1973, consistia em uma espira circular horizontal de 10 voltas a 15 cm do solo, operando em baixa frequência e com profundidade de exploração de cerca de 300 m. Os modelos subseqüentes utilizaram espiras quadradas de 200 a 600 m de lado, operando em faixas de frequência mais amplas. O segundo modelo, de 2001, atingia uma profundidade de exploração de 1,2 km, enquanto o terceiro, de 2008, opera em frequências ainda mais baixas, alcançava entre 2,8 km e 3 km a exploração de hidrocarbonetos (DIAS, 2012). O método tenta solucionar problemas de estruturas geoeletricas na subsuperfície por um processo de busca não linear para gerar seções de resistividade aparente e outro parâmetro de polarização induziada denominado parâmetro de polarização (DIAS, 1968). Esse método EMMF é uma boa ferramenta para interpretações de reservatórios de hidrocarbonetos e tem excelentes resultados no Brasil.

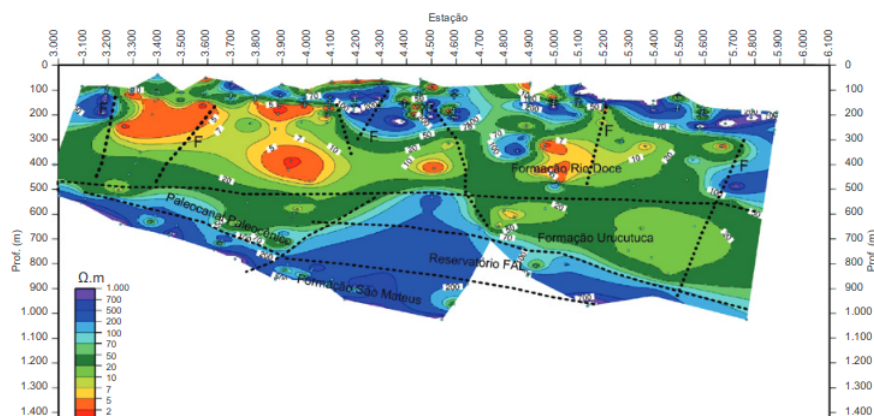
Na Bacia do Espírito Santos, houve a exploração de hidrocarbonetos com emprego do método EMMF, e também foram utilizados dados da Petrobrás, Geofísico e Geológico. Os levantamentos ocorreram em duas áreas: Fazenda Alegre e Campos São Mateus, onde foram obtidos os pseudoseções bidimensionais de resistividade aparente e parâmetro de polarização da subsuperfície geológica. Na Fazenda Alegre, foram utilizados além do método EMMF, informações geológicas e geofísicas cedidas pela Petrobras, para assim conseguir determinar a presença de hidrocarbonetos nas rochas (DIAS, 2012). Na Figura 2 são mostrados os dados do método EMMF, calculados a partir das componentes do campo magnético.

Na bacia do Espírito Santo, houve a exploração de hidrocarbonetos com o emprego do método EMMF, correlacionado os resultados com dados geológicos e geofísicos da Petrobrás (DIAS, 2012). Os levantamentos ocorreram em duas áreas: a Fazenda Alegre e no Campos São Mateus, ambos localizada na região emersa da Bacia do Espírito Santo,

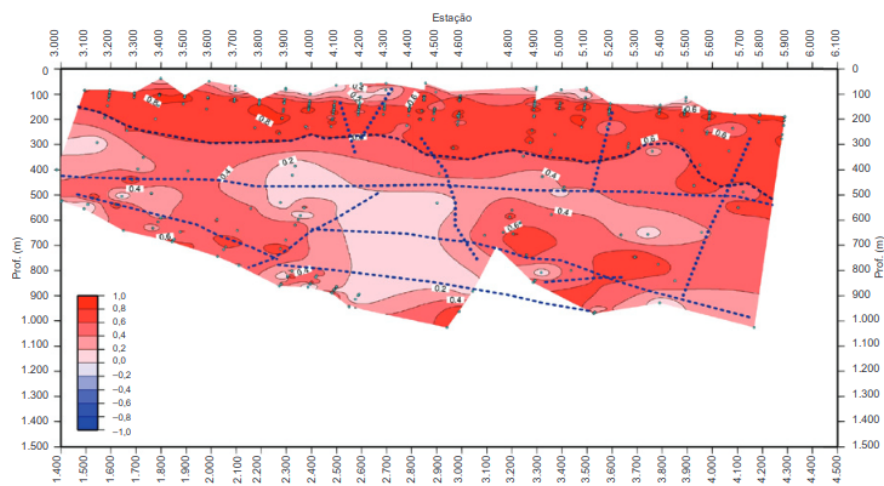
município de São Mateus, Estado do Espírito Santos, onde foram obtidos dados EMMF das pseudoseções de resistividade aparente e parâmetro de polarização. Na Fazenda Alegre e no Campo São Mateus, foi identificada a presença de hidrocarbonetos (DIAS 2012). Além disso, as informações geofísicas e geológicas cedidas pela Petrobras confirmaram os resultados obtidos em ambas as áreas. Nela são mostrados na Figura 2 a) pseudoseção de resistividade aparente e b) Parâmetro de polarização, resultado da Fazenda Alegre. No Campo São Mateus, para a interpretação dos resultados EMMF, utilizou dados obtidos pela Petrobras, incluindo sísmica de refração e outros dados geofísicos (DIAS, 2012), e assim como na Fazenda Alegre, foi possível determinar a presença de hidrocarbonetos. A Figura 3 é apresentado dados obtido do processamento do método EMMF do Campo São Mateus com a adição da seção sísmica de refração: a) pseudoseção de resistividade aparente ,b) Parâmetro de polarização e c) seção sísmica.

Figura 2 – Fazenda Alegre: resultados referentes ao processamento da modelagem bidimensional do método EMMF, a) Pseudoseção de resistividade aparente e b) Parâmetro de polarização. Obtido na linha FAL-36.

(a) Resistividade Aparente



(b) Parâmetro de Polarização

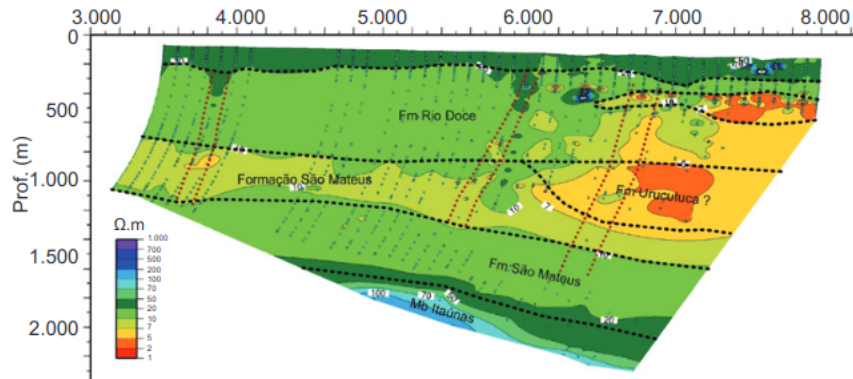


Fonte: (DIAS, 2012)

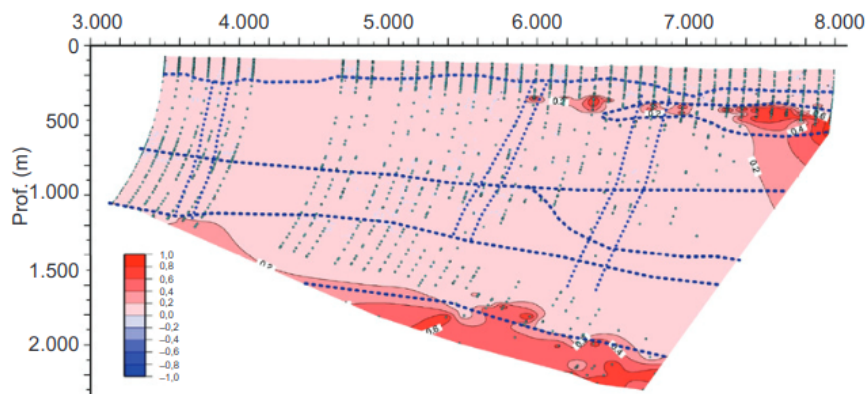
Campos São Mateus,

Figura 3 – Campo São Mateus: resultados referentes ao processamento da modelagem bidimensional do método EMMF, a) Pseudoseção de resistividade aparente, b) parâmetro de polarização e c) seção sísmica. Obtido na linha SM-02.

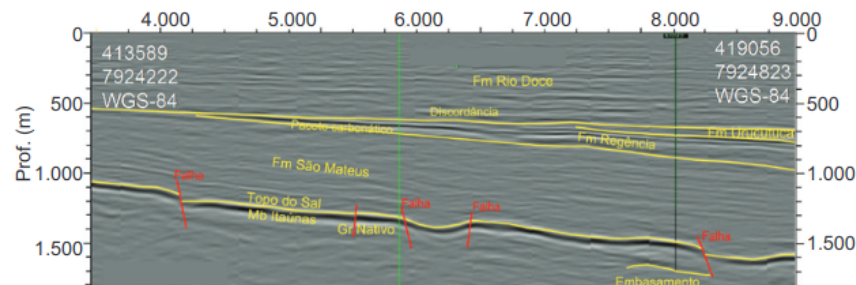
(a) Resistividade Aparente



(b) Parâmetro de Polarização



(c) Sísmica de Refração



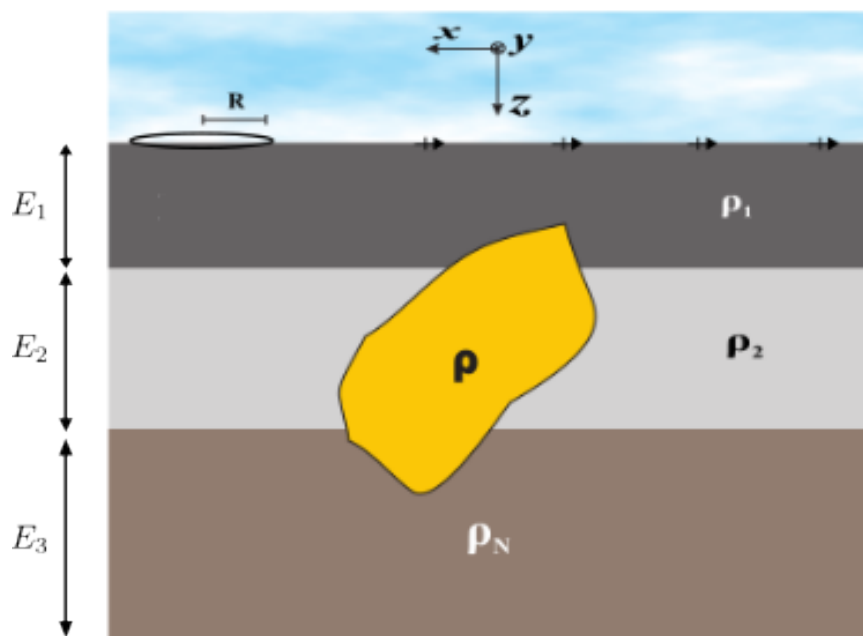
Fonte: (DIAS, 2012)

A seção sísmica de São Mateus, da linha SM-02 (DIAS, 2012), serviu de base para confirmar as informações interpretadas pelo método EMMF. Isso garante que, quando aplicado com outros métodos geofísicos, o método EMMF tem grande potencial para a exploração de hidrocarbonetos (DIAS, 2012).

2.2 A modelagem 2D do método EMMF

No modelo direto dos dados EMMF para meios 2D, as equações de Maxwell são solucionadas para o modelo analisado na figura 4. Esse modelo é composto por camadas plano-paralelas homogêneas e isotrópicas em relação à resistividade elétrica, além de corpos com resistividades elétricas anômalas em relação às das camadas. Tanto as camadas quanto esses corpos são infinitos na direção cartesiana y . Os corpos de resistividade anômala causam variação lateral dessa propriedade, além da variação vertical, por estarem inseridos nas camadas. Por essa razão, esse tipo de meio é chamado de 2D. Os campos eletromagnéticos são obtidos por alguma técnica numérica, geralmente o método de Elementos Finitos, que obtém as componentes dos campos eletromagnéticos em alguns pontos do modelo discretizado (JIN, 2014).

Figura 4 – Esquema do arranjo do método EMMF para meios 2D, onde ρ representa diferentes valores de resistividade e E corresponde à espessura das camadas plano-paralelas. A espira circular atua como fonte, enquanto as setas indicam a posição dos receptores e o corpo em amarelo representa a estrutura a ser observada pela modelagem direta.



Fonte: (PIEIDADE 2014a)

O código de modelagem direta dos dados EMMF, utilizados neste trabalho, foram criados na dissertação de mestrado de Nunes (2014), e modificados para a utilização no problema inverso em Piedade e Régis (2014b). Os campos calculados através do código cedidos são as componentes magnéticas H_r e H_z , proveniente de uma espira circular, semelhante ao modelo analisado da Figura 1 para várias frequências e também posições de medidas (SILVA, 2012).

2.3 A modelagem inversa

Em síntese, o problema inverso consiste em estimar uma causa a partir de um efeito, o que, na Geofísica, se traduz na inversão de parâmetros da subsuperfície com base em dados geofísicos (ZHDANOV 2009). Este tipo de problema geralmente é mal-posto e tem soluções não únicas, conforme descrito por Hadamard (1907), que caracteriza um problema mal-posto, por não obedecer ao menos uma das condições:

- (i) Existência de solução,
- (ii) Unicidade de solução,
- (iii) Estabilidade da solução,

uma das formas de contornar isso é reduzir a demanda de informações da subsuperfície ou inserir informações a priori em relação aos parâmetros que se quer estimar, utilizando regularizadores, que transformam o problema mal-posto em bem-posto no processo de inversão (ZHDANOV 2009). O programa de inversão do método EMMF, utilizado neste trabalho, foi desenvolvido no trabalho de Piedade (2014a), que aplica o método Gauss-Newton modificado com a estratégia de Marquardt (MARQUARDT, 1963), para minimizar o funcional de ajuste dos dados

$$\phi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N (y_i - f_i(\mathbf{p}))^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{p})\|^2, \quad (1)$$

sujeito ao funcional regularizador

$$\phi_{SG}(\mathbf{p}) = \|\mathbf{S}\mathbf{p}\|^2, \quad (2)$$

em que y_i é o i -ésimo dado geofísico (dados EMMF), $f_i(\mathbf{p})$ representa um modelo matemático responsável por fazer a i -ésima estimativa dos dados, e \mathbf{p} é um vetor de parâmetros a serem estimados, que neste caso, corresponde à resistividade elétrica da subsuperfície do modelo. O funcional regularizador adiciona informação ao problema inverso, buscando uma solução que minimize a diferença entre os valores dos parâmetros. Esse regularizador é conhecido como suavidade global. Em resumo, neste problema, considera-se apenas a minimização do funcional.

$$\phi(\mathbf{p}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{p})\|^2 + \alpha \|\mathbf{S}\mathbf{p}\|^2, \quad (3)$$

em que α é denominado parâmetro de regularização, que impõe a importância do regularizador na solução do problema inverso.

Com a técnica de Gauss-Newton para a minimização de eq. (3), é possível encontrar a equação normal

$$\mathbf{H}\Delta\mathbf{p} = -\mathbf{g}, \quad (4)$$

em que \mathbf{H} é a matriz hessiana, $\Delta\mathbf{p}$ o incremento da estimativa dos parâmetros a serem estimados e \mathbf{g} o vetor gradiente. A matriz hessiana é aproximada pela equação

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}^T \mathbf{J}, \quad (5)$$

em que \mathbf{J} é a matriz de sensibilidade dos dados com relação aos parâmetros, ou seja, cada componente desta matriz tem a forma

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{p}_j}, \quad (6)$$

sendo f_i o i -ésimo dado e p_j o j -ésimo parâmetro. Esta matriz é uma das etapas de maior demanda computacional e uma das formas de calculá-la é

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{f_i(\mathbf{p}_j + \Delta\mathbf{p}_j) - f_i(\mathbf{p}_j)}{\Delta\mathbf{p}_j}, \quad (7)$$

denominada de **método perturbativo** e que foi a maneira utilizada no trabalho de [Piedade \(2014a\)](#), onde para cada parâmetro p_j o modelo matemático que gera as observações é chamado. Embora esta seja uma fácil e prática, o seu custo computacional elevado, pois a modelagem direta tem que ser chamada ' np ' vezes, para cada iteração do problema inverso, isto quer dizer que quanto maior a quantidade de parâmetro da inversão, maior é o tempo gasto para calcular a matriz jacobiana a cada iteração.

A solução encontrada para otimizar o cálculo desta matriz e utilizar método auto-adjunto proposto por [Grayver \(2013\)](#). Resumidamente, podemos descrevê-lo da seguinte forma: Na obtenção dos campos pela modelagem direta 2D, por elementos finitos, é gerado um sistema linear

$$\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (8)$$

em que \mathbf{G} é a matriz global do sistema, \mathbf{u} o vetor solução que guarda informações dos campos e \mathbf{f} o vetor fonte que tem informações do campo primário do modelo ([SILVA, 2012](#)). Derivando esta equação com relação aos parâmetros é possível encontrar a seguinte equação

$$\mathbf{J}_{ij} = Q_i^T \mathbf{G}^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_j} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{p}_j} \right), \quad (9)$$

onde Q_i^T é um operador matricial gerado a partir das posições onde se quer medir os campos. Esta equação é vantajosa quando o sistema linear de elementos finitos é resolvido por métodos diretos, como por exemplo por decomposição LU, pois permite calcular a jacobiana para várias posições de medida e diferentes parâmetros com uma única fatoração da matriz global, que representa o maior custo computacional do processo. Com essa abordagem, espera-se uma redução significativa no tempo de cálculo da jacobiana.

2.4 Regularizador de Suavidade Global

O vínculo de suavidade global (SG) é um dos mais simples e práticos vínculos na inversão de dados geofísicos. Segundo [Piedade \(2014a\)](#) o vínculo SG faz com que as diferenças entre os valores dos parâmetros sejam as menores possíveis e que essa solução ainda ajuste os dados. Matematicamente esse funcional é expresso por

$$\phi_{SG}(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{Nd} |(p_i - p_j)_k|^2, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, np, \quad (10)$$

ou na forma matricial eq. [\(2\)](#), Nd é o número de diferenças entre os parâmetros, Np é o número de parâmetros e a norma euclidiana ao quadrado, do vetor resultante do produto $\mathbf{S}\mathbf{p}$, por exemplo

$$(\mathbf{S}\mathbf{p})^T = [P_1 - P_2, P_2 - P_3, P_3 - P_4, P_4 - P_5, P_5 - P_{n+1}]. \quad (11)$$

A matriz \mathbf{S} guarda as informações dos parâmetros que são relacionados vinculados e no caso de vínculo de parâmetros adjacentes essa matriz tem a seguinte forma

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -(n+1) \end{pmatrix} \quad (12)$$

a matriz hessiana e o vetor do gradiente do funcional SG, são obtidos com as seguintes equações [\(PIEDADE, 2014a\)](#):

$$\mathbf{g}_{SG} = \nabla_P \phi_P = 2\mathbf{S}^T \mathbf{S}\mathbf{p}, \quad (13)$$

$$\mathbf{H}_{SG} = \nabla_P \nabla_P^T \phi_S(P) = 2\mathbf{S}^T \mathbf{S}, \quad (14)$$

3 RESULTADOS

Neste tópico, apresenta-se os resultados obtidos nos processamentos dos dados partir dos modelos inversos. Para obtenção dos dados foram utilizados os seguintes computadores descritos na tabela [1](#)

Tabela 1 – Principais informações dos computadores para o processamento dos dados.

	Computador I	Computador II
Processador	Intel i7-7500 @ 2.70GHz	Intel i5-6500 @ 3.2GHz
Núcleos	6	6
Físicos	2	2
Virtuais	4	4
Memória Ram (GB)	20	8

Fonte: Autor (2024)

Para o resultado do modelo de comparação com menos células, utilizou-se o Computador I. No segundo resultado, referente ao modelo de comparação com mais células, foi utilizado o Computador II. Já os outros resultados foram processados exclusivamente no Computador I. Em todos os processamentos, foi utilizada a paralelização do programa, dividindo o problema nas CPUs disponíveis em cada computador, onde houve a utilização de aproximadamente apenas 2 GB de memória RAM nos dois computadores.

3.1 Características gerais dos modelos

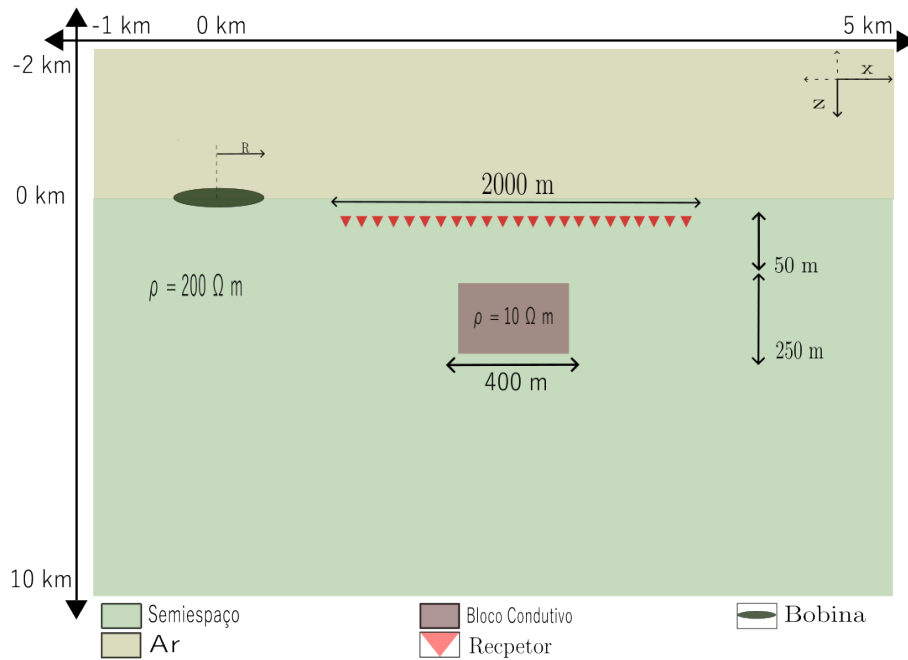
De maneira geral, a malha de elementos finitos dos modelos apresentados neste capítulo abrangem 90 quilômetros nas direções x e y , e 110 quilômetros na direção z . O modelo de comparação possui 51 receptores que estão dispostos entre 3,4 km e 5,4 km do centro da boina circular, que possui um raio de 340 m e está localizada no centro do modelo. Já nos outros modelos os receptores estão dispostos de 3,2 km a 5,6 km do centro da fonte. Em todos os modelos, os dados foram gerados para de 9 frequências, sendo elas: 3, 5, 10, 17, 31, 56, 100, 117, 316 Hz, esses modelos são visualizados nas Figuras [5](#), [9](#) e [7](#).

Em todos os modelos, os corpos resistivos e condutivos que serão recuperados na inversão, estão inseridos em um semiespaço de resistividade $\rho = 200 \Omega m$. No primeiro modelo, de comparação, e no segundo com dois blocos condutivos, a resistividade utilizada para os corpos anômalos foi de $\rho = 10 \Omega m$. Para o modelo com um corpo resistivo, as resistividades foram $\rho = 500 \Omega m$ e $\rho = 10 \Omega m$, também vista nas Figuras.

3.2 Modelo de comparação

Nesta seção é apresentado o primeiro modelo, que será usado na comparação de tempo de processamento da inversão, com o método auto-adjunto e com o perturbativo. Para gerar os dados que serão invertidos, criou-se o modelo da Figura [5](#). Nesse modelo de comparação o corpo a ser investigado está situado entre 4,2 km e 4,6 km no eixo x . No eixo z , encontra-se entre 50 m e 300 m de profundidade. Suas propriedades físicas e outras informações podem ser visualizadas na figura do modelo.

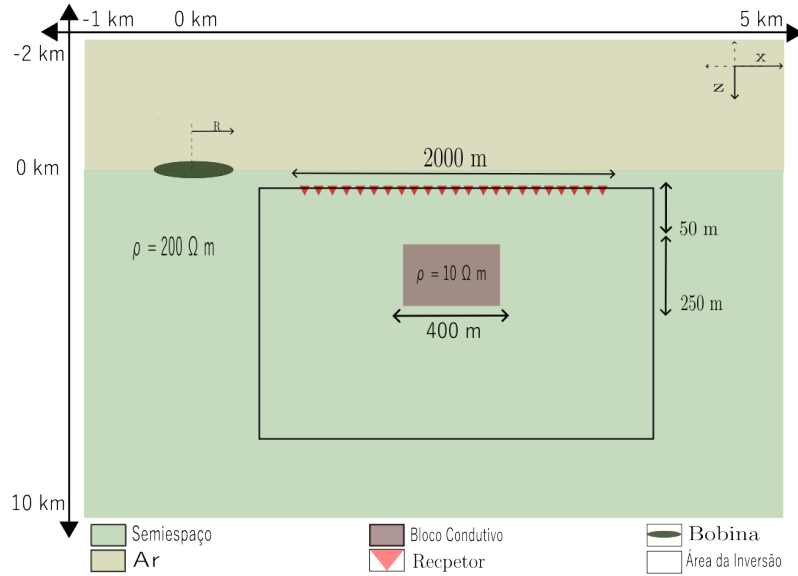
Figura 5 – Imagem representativa do modelo 1 de comparação. Nele há a presença de um corpo condutivo em um semiespaço resistivo.



Fonte: Autor (2024)

Para gerar o modelo interpretativo de inversão, foi necessário delimitar uma área no modelo que gerou os dados (modelo direto) a fim de recuperar o alvo condutivo do modelo. A delimitação da região do grid de inversão começa em 3,2 km e termina em 5,6 km no eixo x. No eixo z, inicia em 10 m e finaliza em 500 m. A Figura 6 ilustra a delimitação da área onde será criado o modelo inverso.

Figura 6 – Imagem representativa da delimitação da área de inversão para recuperação do alvo condutivo.



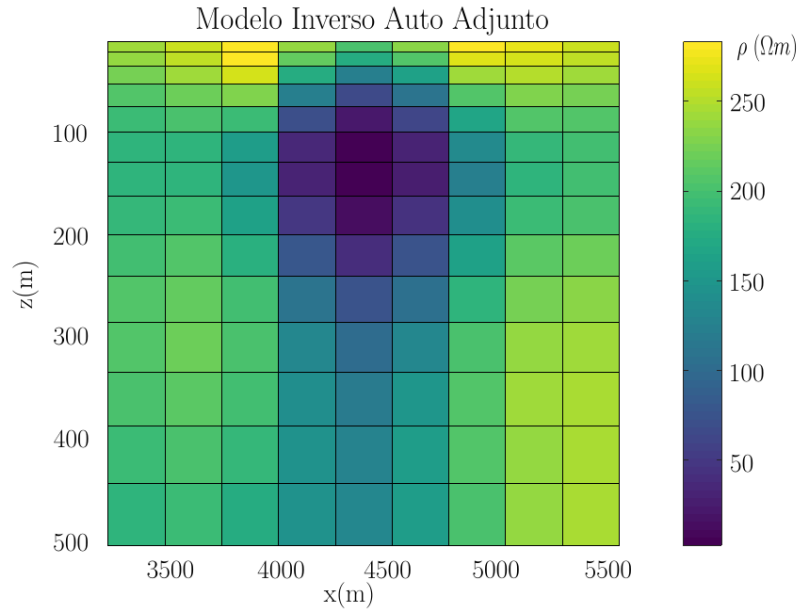
Fonte: Autor (2024)

3.2.1 Modelagem inversa com poucos parâmetros

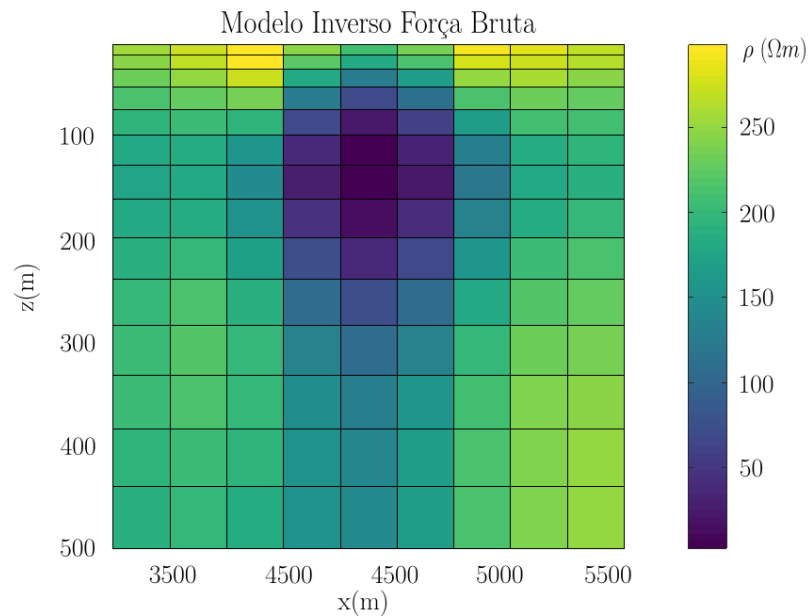
Com os dados gerados pelo método apresentado na Figura 5 foram realizadas inversões tanto com o método auto-adjunto quanto pelo método perturbativo, com o objetivo de determinar a diferença de tempo de processamento da inversão entre as metodologias. Os resultados indicaram que o método auto-adjunto foi, no mínimo, duas vezes mais rápido para a inversão do modelo com menos células e até quatro vezes mais eficiente na inversão do modelo maior. A quantidade de células no grid do modelo menor foi de 15 na horizontal e 10 na vertical, totalizando 150 células. A Figura 7 mostra os resultados de inversão com as duas metodologias. É importante notar que os resultados são praticamente idênticos.

Figura 7 – Resultados obtidos do modelo inverso com menos células, (a) auto-adjunto (b) força bruta.

(a) Auto-Adjunto



(b) Força Bruta



Fonte: Autor (2024)

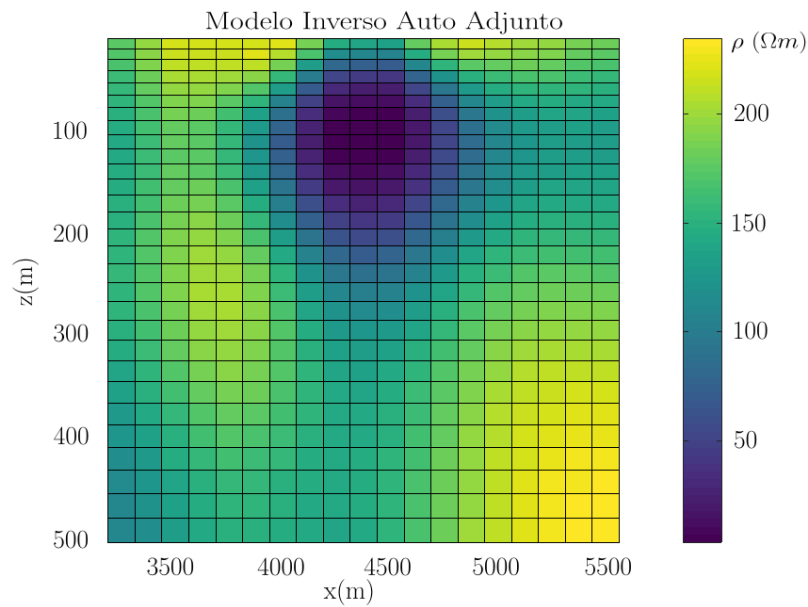
3.2.2 Modelagem inversa com mais parâmetros

Foi feita também a inversão para o mesmo modelo anterior, mas com a adição de mais células no grid, pois, conforme foi discutido, quanto mais células o grid de inversão tiver, maior será o tempo de cálculo da matriz jacobiana pelo método perturbativo. Na

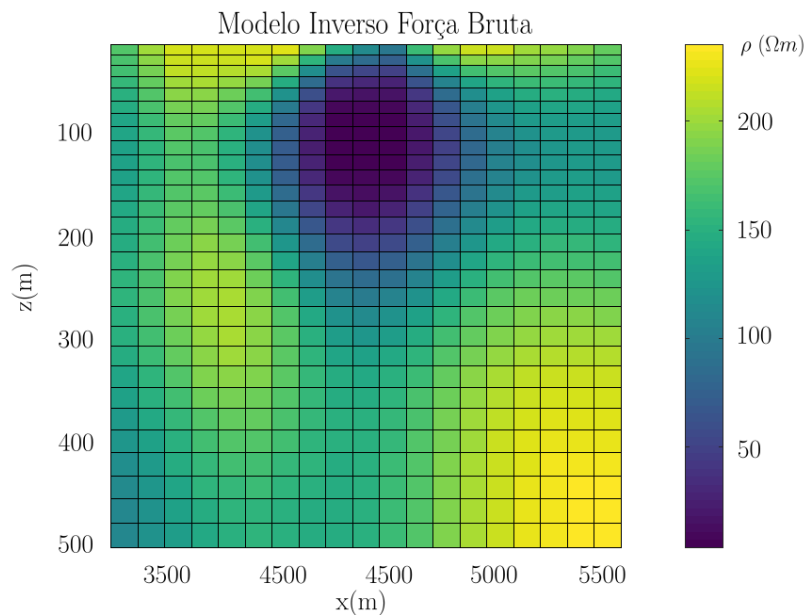
Figura 8, são mostrados os resultados do método auto-adjunto e do força bruta. Neste modelo, a quantidade de células do grid é de 30 na horizontal e 20 na vertical, totalizando 600 células, que é mais que o dobro da quantidade de células do modelo anterior. Os resultados também são bastante semelhantes, como era esperado.

Figura 8 – Resultados extraído do modelo inverso com mais células, (a) auto-adjunto (b) força bruta.

(a) Auto-Adjunto



(b) Força Bruta



Fonte: Autor (2024)

O método auto-adjunto também apresenta uma pequena vantagem em termos

de fidelidade ao modelo de comparação, pois se aproxima com maior exatidão dos dados originais, conforme observado nas Figura [7](#) e [8](#)

3.2.3 Comparação de tempo entre as metodologias

Conforme previsto, o método auto-adjunto é computacionalmente mais eficiente em comparação ao método força bruta no cálculo da matriz jacobiana e, consequentemente, no tempo total de processamento da inversão. Os resultados dos experimentos da modelagem inversa neste trabalho mostram a superioridade do método auto-adjunto em relação ao método força bruta em termos de processamento. No modelo com menor quantidade de células, o tempo do método perturbativo foi de 9 horas e 10 minutos; em contrapartida, o método auto-adjunto durou apenas 4 horas e 32 minutos, ou seja, representa uma redução de aproximadamente 50% no tempo total. Já no modelo inverso com maior quantidade de células, o método perturbativo exigiu 32 horas e 27 minutos, enquanto o auto-adjunto conseguiu um resultado semelhante em apenas 6 horas e 17 minutos, resultando em uma redução de tempo de aproximadamente 80%. Isso indica que, quanto maior a quantidade de células, maior é a eficiência do método auto-adjunto. Na Tabela [2](#), são apresentados os tempos de processamento.

Tabela 2 – Tempo referente aos resultados do processamento do método auto-adjunto e método força bruta.

	Auto adjunto	Perturbativo
Menos células	4h : 32m	9h : 10m
Mais células	6h : 17m	32h : 27m

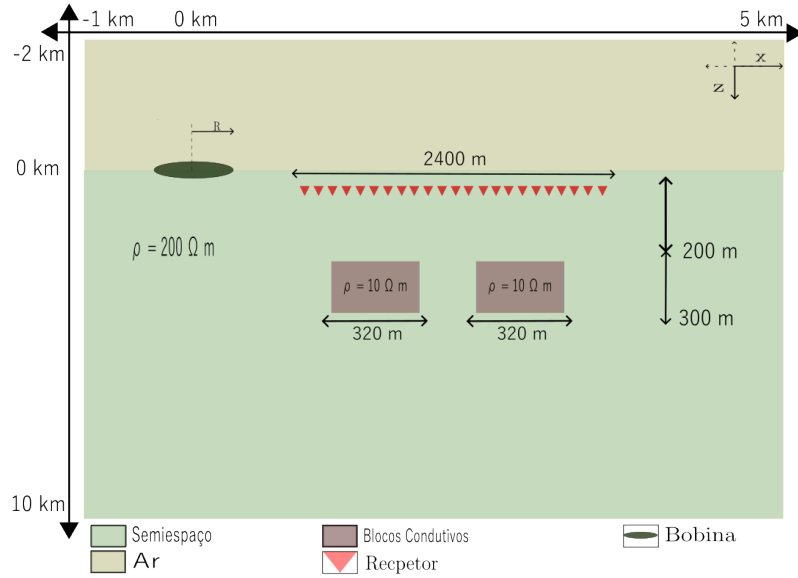
Fonte: Autor (2024)

Os resultados que seguir, foram utilizado exclusivamente com o método auto-adjunto.

3.3 Modelo com dois blocos condutivos

O segundo modelo estudado é constituído de dois blocos condutivos, o primeiro está localizado entre 3,6 km e 3,92 km, no eixo x, e o segundo está entre 4,88 km e 5,2 km, também na mesma direção. No eixo z, ambos os corpos situam-se entre 200 m e 300 m de profundidade. Na Figura [9](#) é possível observar outras características do modelo.

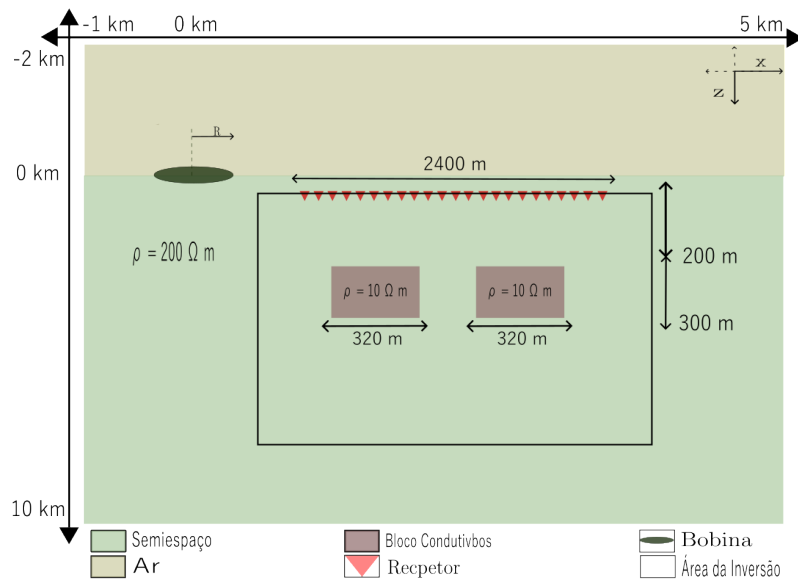
Figura 9 – Imagem representativa do modelo com dois blocos condutivos.



Fonte: Autor (2024)

Para o modelo inverso, a delimitação da área do modelo interpretativo corresponde ao intervalo de 20 m a 900 m no eixo z, e no eixo x começa em 3,1 km e termina em 5,7 km. Na Figura [10](#) é apresentada visualmente a delimitação da área do modelo inverso que contém os dois blocos condutivos.

Figura 10 – Imagem representativa do modelo da delimitação da área de inversão dos dois blocos condutivos.

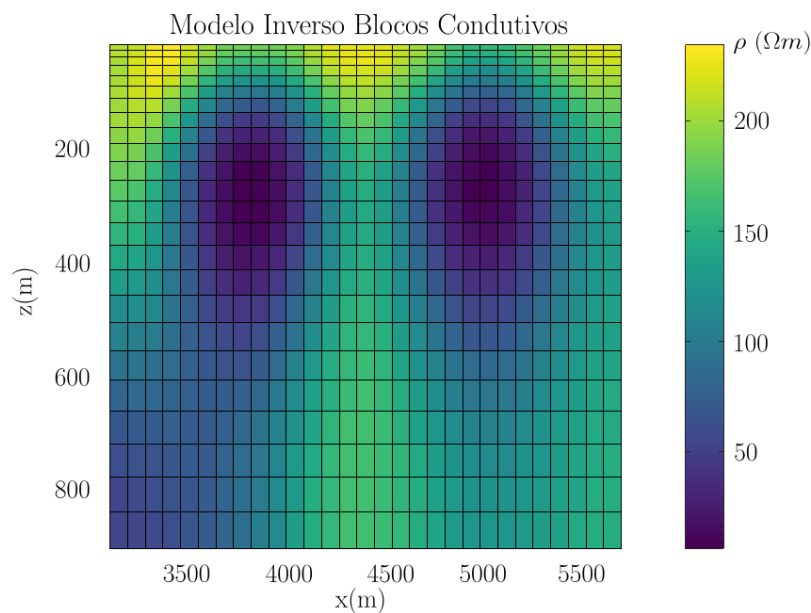


Fonte: Autor (2024)

Os dois corpos investigados possuem resistividade igual a $\rho = 10 \Omega m$.

Os resultados de inversão com os dados do modelo anteriormente apresentado na Figura 10 são bastante satisfatórios, pois é possível visualizar claramente as regiões onde os corpos condutivos estão presentes, conforme mostrado na figura Figura 11. Como foi utilizado o regularizador de suavidade global, o resultado obtido não delimita exatamente as dimensões dos corpos que se querem encontrar, porém dá um indicativo da região de presença deles. A quantidade de células do grid nesse modelo foi de 30 na horizontal e 20 na vertical, totalizando 600 células e o tempo de processamento foi de 6 horas e 41 minutos.

Figura 11 – Resultado obtido a partir da inversão dos dois blocos condutivos.

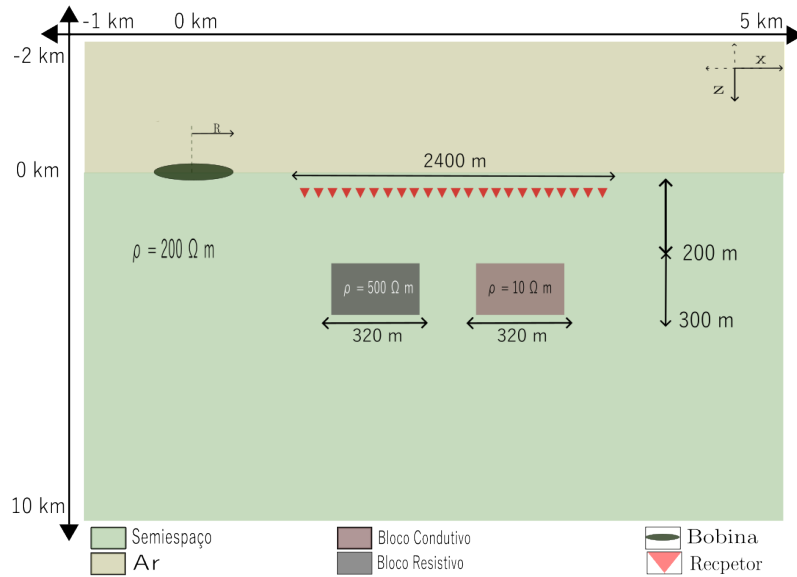


Fonte: Autor (2024)

3.4 Modelo com bloco resistivo e condutivo

O modelo estudado nesta seção é bastante semelhante ao anteriormente estudado, sendo que a única diferença é a resistividade do bloco da esquerda, que agora possui $\rho = 500 \Omega m$. A figura 12 ilustra essa nova configuração, onde a região em cinza escura, à esquerda, representa o corpo de alta resistividade e o da direita o de baixa $\rho = 10 \Omega m$. O estudo deste modelo se faz necessário para saber se é possível identificar alvos resistivos com os dados EMMF.

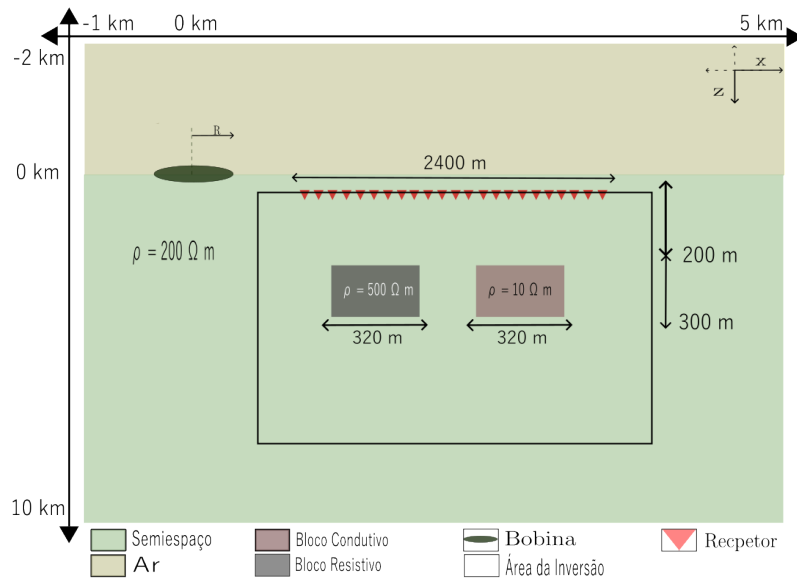
Figura 12 – Imagem representativa do modelo com bloco resistivo e condutivos.



Fonte: Autor (2024)

Assim como o modelo com dois blocos condutivos, a restrição da área de inversão do modelo com bloco resistivo e condutivo segue a mesma configuração. Na Figura 13, é ilustrada a delimitação do modelo interpretativo de inversão.

Figura 13 – Imagem representativa do modelo da delimitação da área de inversão com bloco resistivo e condutivo.

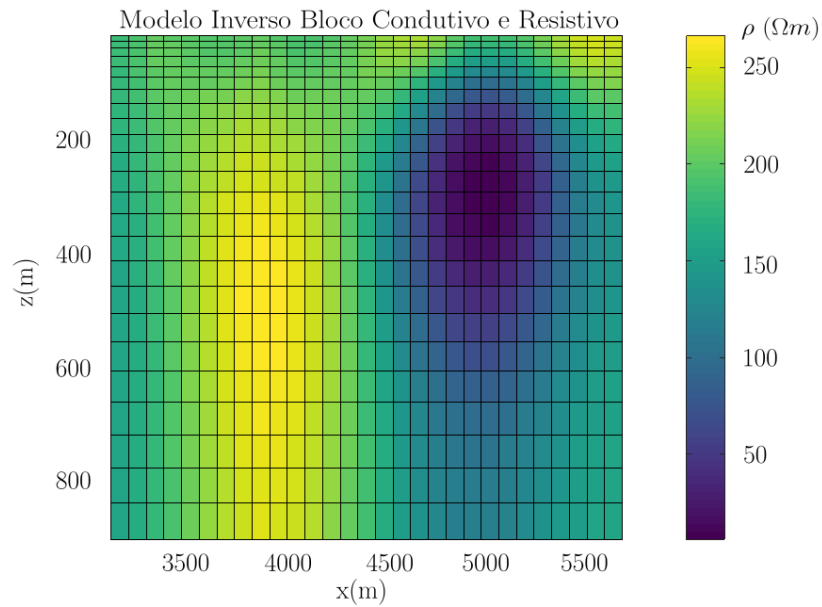


Fonte: Autor (2024)

O corpo resistivo possui a resistividade de $\rho = 500 \Omega m$ e o condutivo $\rho = 10 \Omega m$, que corresponde uma boa diferença do semiespaço onde estão presentes. O resultado de inversão do modelo apresentado não conseguiu recuperar bem o alvo resistivo. Essa

deficiência é esperada devido à natureza do método EMMF que é puramente indutivo. O resultado pode ser visualizado na figura Figura 11. A quantidade de células do grid nesse modelo foi de 30 na horizontal e 20 na vertical, totalizando 600 células e o tempo de processamento foi de 4 horas e 50 minutos.

Figura 14 – Resultado obtido da inversão dos blocos condutivo e resistivo.



Fonte: Autor (2024)

4 CONCLUSÕES

Um dos principais desafios desta pesquisa é identificar a metodologia mais eficiente para reduzir o tempo de processamento da inversão 2D do método EMMF. Para isso, foi realizada uma pesquisa na literatura e o método auto-adjunto mostrou-se uma solução viável.

O método auto-adjunto demonstrou-se ser bem mais eficaz no tempo de processamento da inversão se comparado com o método perturbativo, pois apresentou uma considerável diferença de tempo de processamento para um resultado bem semelhante ao do método perturbativo, que é bem mais demorado.

O objetivo desta pesquisa foi acelerar o processo de análise de inversão dos dados EEMF com uma nova metodologia de cálculo da matriz jacobiana. Embora ainda em desenvolvimento, o método demonstra um grande potencial para otimizar a resolução de problemas complexos, contribuindo significativamente para o avanço da área. A busca por otimização no tempo de processamento e pela melhoria da precisão nas análises é um passo fundamental para o avanço nas pesquisas na área, tornando-as mais acessíveis e aplicáveis a cenários de dados reais.

Referências

DIAS, C. A. **A mon-grounded method for measuring electrically induced polarization and conductivity**. [S.l.]: University of California, Berkeley, 1968.

DIAS, C. a. Avaliação do uso do método eletromagnético à multifrequência na exploração e no imageamento de reservatórios de hidrocarbonetos. **Boletim de Geociências da Petrobras**, v. 20, n. 2, p. 165–192, 2012. Disponível em: <https://bgp.petrobras.com.br/bgp/article/view/65>. Acesso em: 06. out. 2024.

GRAYVER, A. V. **Three-Dimensional controlled-source electromagnetic inversion using modern computational concepts**. 2013. 144 f. Tese (Doutorado) — Fachbereich Geowissenschaften, Freien Universität Berlin, Berlin, 2013.

HADAMARD, M. Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles. **J. Phys. Theor. Appl.**, v. 6, n. 1, p. 202–241, 1907.

JIN, J.-M. **The finite element method in electromagnetics**. Third edition. John Wiley e Sons, 2014. ISBN 9781118571361,1118571363. Disponível em: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=369ae8db13820b7ca497b01760fa1145>

MACHADO, M. V. B. **Estudo analítico e aplicação do método eletromagnético a multi-frequência ao mapeamento e identificação de fluidos e reservatórios continentais de petróleo**. 2009. 140 f. Tese (Doutorado) — Laboratório de Engenharia e Exploração de Petróleo, Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Macaé, 2009.

MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. **Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics**, SIAM, v. 11, n. 2, p. 431–441, 1963. Disponível em: <http://doi.org/10.1137/0111030>. Acesso em: 17. out. 2024.

NUNES, C. M. B. **Modelagem 2,5D por elementos finitos dos efeitos da topografia do terreno sobre dados obtidos com o método eletromagnético a multifrequência**. 2014. 2014 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade federal do Pará, Belém, Belém, 2014.

PIEDADE, A. A. da. **Inversão 1D e 2D de dados do Método Eletromagnético a Multi-Frequência – EMMF**. 2014. 52 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade federal do Pará, Belém, 2014a.

PIEDADE, A. A. da; RÉGIS, C. Inversion of data from the multifrequency electromagnetic method–emmf. In: **SEG Technical Program Expanded Abstracts 2014**. Society of Exploration Geophysicists, 2014b. p. 808–812. Disponível em: <https://doi.org/10.1190/segam2014-1576.1>

SATO, H. K. **Método eletromagnético para interpretação de polarização induzida resistividade, usando o protótipo de um sistema eletromagnético a multi-frequência**. 1979. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Bahia, Salvador, 1979.

SILVA, V. da Silva e. **Modelagem 2,5D dos campos usados no método eletromagnético a multi-frequência - EMMF**. 2012. 66 f. Tese (Doutorado) — Universidade federal do Pará, Belém, 2012.

ZHDANOV, M. **Geophysical electromagnetic theory and methods**. [S.l.]: Elsevier, 2009.