



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA E GEOCIÊNCIAS
BACHARELADO EM SISTEMAS DE INFORMAÇÃO**

LEANDRO DE OLIVEIRA DOS SANTOS

**ALGORITMO DE BUSCA POR ACELERAÇÃO: UM NOVO MÉTODO
POPULACIONAL DE OTIMIZAÇÃO GLOBAL APLICADO A PROBLEMAS DE
OTIMIZAÇÃO RESTRITA E SISTEMAS DE EQUAÇÕES**

**SANTARÉM - PA
2024**

LEANDRO DE OLIVEIRA DOS SANTOS

**ALGORITMO DE BUSCA POR ACELERAÇÃO: UM NOVO MÉTODO
POPULACIONAL DE OTIMIZAÇÃO GLOBAL APLICADO A PROBLEMAS DE
OTIMIZAÇÃO RESTRITA E SISTEMAS DE EQUAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Sistemas de Informação, como pré-requisito para obtenção do título de Bacharel em Sistemas de Informação; Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Engenharia e Geociências.
Orientador(a): Dr. Raimundo Augusto Rodrigues Junior.

**SANTARÉM - PA
2024**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/ Ufopa

- S237a Santos, Leandro de Oliveira dos
Algoritmo de busca por aceleração: um novo método populacional de otimização global aplicado a problemas de otimização restrita e sistema de equações./ Leandro de Oliveira dos Santos – Santarém, 2024.
73 p.: il.
Inclui bibliografias.
- Orientador: Raimundo Augusto Rodrigues Junior.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Engenharia e Geociências, Curso Bacharelado em Sistemas de Informação.
1. Método de Hooke & Jeeves. 2. Metaheurística estocástica. 3. Modelagem computacional. I. Rodrigues Junior, Raimundo Augusto, *orient.* II. Título.

CDD: 23 ed. 005.1



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
COORD. DO CURSO DE BACHARELADO EM
SISTEMAS DE INFORMAÇÃO



ATA Nº 9 / 2024 - CBSI (11.01.09.14)

Nº do Protocolo: 23204.007579/2024-26

Santarém-PA, 18 de junho de 2024.

ATA DE DEFESA

No sexto dia do mês de março de 2024 o aluno Leandro de Oliveira dos Santos, regularmente matriculado no curso de Bacharelado em Sistemas de Informação da Universidade Federal do Oeste do Pará, defendeu o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado: ALGORITMO DE BUSCA POR ACELERAÇÃO: UM NOVO MÉTODO POPULACIONAL DE OTIMIZAÇÃO GLOBAL APLICADO A PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO RESTRITA E SISTEMAS DE EQUAÇÕES, como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Sistemas de Informação. Após a defesa pública, a Banca Examinadora, constituída pelos professores Dr. RAIMUNDO AUGUSTO REGO RODRIGUES JUNIOR (Presidente e Orientador); Me. MARTINHO DE SOUZA LEITE - IEG/UFOPA (Membro interno) e Dr. JOSECLEY FIALHO GOES - IEG/UFOPA (Membro interno) reuniu-se para avaliar e atribuir a aprovação com nota média de 9,5 do TCC.

(Assinado digitalmente em 19/06/2024 11:22)

JOSECLEY FIALHO GOES

IEG (11.01.09)
Matricula: ###809#5

(Assinado digitalmente em 19/06/2024 10:59)

MARTINHO DE SOUZA LEITE

CBSI (11.01.09.14)
Matricula: ###545#5

Visualize o documento original em <https://sipac.ufopa.edu.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: 9, ano: 2024, tipo: ATA, data de emissão: 18/06/2024 e o código de verificação: 641d72ed35

Aos meus pais, irmã, familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte suprema de toda sabedoria, cuja presença é inegável em minha jornada até este momento.

A minha mãe, Luzia Santos, à minha mãe e avó, Ivonete Santos, ao meu pai e avô, Natival Marinho, as minhas tias Núbia Santos, Sheila Soares, Charliana Santos e Silma Santos, a minha prima Jéssica Lima e a minha amada irmã, Larissa Santos, que sempre me incentivaram durante a trajetória acadêmica.

Ao meu orientador, o Professor Dr. Raimundo Augusto Rego Rodrigues Júnior, por sua paciência ao longo do desenvolvimento deste trabalho e por compartilhar seu vasto conhecimento comigo.

Aos meus amigos João Victor Nascimento, João Pedro Carvalho, Marcela Pio, João Vitor Lima e Iverson Moya, cujas amizades e apoios foram inestimáveis durante minha jornada acadêmica. A todos os outros colegas que de alguma forma contribuíram para que eu chegasse até aqui, meu muito obrigado. Também não posso deixar de expressar meu profundo apreço às minhas amigas, Carla Martins, Thais Silva, Jussiana Alcântara e Wanderléa Martins, cujos conselhos e encorajamento foram um suporte vital durante os momentos desafiadores.

Por fim, externo minha gratidão à Universidade Federal do Oeste do Pará, por me proporcionar a oportunidade de cursar o Ensino Superior nesta primorosa instituição de ensino.

“Portanto Dele, por Ele e para Ele são todas as coisas. A Ele seja a glória perpetuamente! Amém.” (Romanos 11:36)

RESUMO

Neste trabalho, uma nova metaheurística é proposta para ser utilizada na resolução de problemas de otimização restrita e sistemas de equações que podem ser representados por uma função objetivo de natureza unimodal ou multimodal. O Algoritmo de Busca por Aceleração (ABA) é um algoritmo estocástico inspirado no método de Hooke & Jeeves, que é um algoritmo de otimização por busca direta. O ABA, que é um método único, foi implementado em Linguagem de Programação C e testado em problemas de otimização com restrições e sistemas de equações presentes na literatura. Os resultados produzidos apontam que o algoritmo proposto consegue, por exemplo, resolver problemas de 256 dimensões com média de somente 523 iterações, além de encontrar soluções para sistemas de equações não lineares com média de apenas quinze iterações. Diante disto, pode-se concluir que o ABA provou ser eficiente, robusto, preciso e acurado, além de ser facilmente implementável.

Palavras-Chave: Método de Hooke & Jeeves; Metaheurística estocástica; Modelagem computacional.

ABSTRACT

In this work, a new metaheuristic is proposed to be used in solving restricted optimization problems and systems of equations that can be represented by an objective function of unimodal or multimodal nature. The Accelerated Search Algorithm (ABA) is a stochastic algorithm inspired by the Hooke & Jeeves method, which is a direct search optimization algorithm. ABA, which is a unique method, was implemented in C Programming Language and tested in optimization problems with constraints and systems of equations present in the literature. The results produced indicate that the proposed algorithm can, for example, solve 256-dimensional problems with an average of just 523 iterations, in addition to finding solutions for systems of non-linear equations with an average of just fifteen iterations. Given this, it can be concluded that ABA proved to be efficient, robust, precise and accurate, in addition to being easily implementable.

Key-words: Hooke & Jeeves Method; Stochastic Metaheuristics; Computational Modeling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 - DIFERENÇA ENTRE ÓTIMO LOCAL E ÓTIMO GLOBAL.....	24
FIGURA 2 - FLUXOGRAMA GERAL DE UM ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO.	28
FIGURA 3 - DESCRIÇÃO ESQUEMÁTICA DO ALGORITMO DE HOOKE & JEEVES.	31
FIGURA 4 - GRÁFICO DO PROBLEMA ALUFFI-PENTINI’S.....	44
FIGURA 5 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA ALUFFI-PENTINI’S.....	44
FIGURA 6 - GRÁFICO DO PROBLEMA BECKER AND LAGO.....	45
FIGURA 7 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA BECKER AND LAGO.	46
FIGURA 8 - GRÁFICO DO PROBLEMA BOHACHEVSKY 1.....	47
FIGURA 9 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA BOHACHEVSKY 1.....	47
FIGURA 10 - GRÁFICO DO PROBLEMA BOHACHEVSKY 2 PROBLEM.	48
FIGURA 11 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO BOHACHEVSKY 2 PROBLEM.	49
FIGURA 12 - GRÁFICO DO PROBLEMA CAMEL BACK–3 THREE HUMP.	50
FIGURA 13 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA CAMEL BACK–3 THREE HUMP.	50
FIGURA 14 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA DE JONG PROBLEM.....	51
FIGURA 15 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA ALUFFI-PENTINI’S.....	52
FIGURA 16 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA RASTRIGIN PROBLEM.	53
FIGURA 17 - GRÁFICO DO PROBLEMA ROTATED ELLIPSE 2.....	54
FIGURA 18 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA ROTATED ELLIPSE 2.	54
FIGURA 19 - GRÁFICO DO PROBLEMA SCHAFFER 1.....	55
FIGURA 20 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA ROTATED ELLIPSE 2.....	56
FIGURA 21 - GRÁFICO DO PROBLEMA SCHAFFER 2.....	57
FIGURA 22 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA ROTATED ELLIPSE 2.....	57
FIGURA 23 - GRÁFICO DO PROBLEMA SIX HUMP CAMEL.....	58
FIGURA 24 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA SIX HUMP CAMEL.....	59
FIGURA 25 - GRÁFICO SISTEMA 01.....	61
FIGURA 26 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO SISTEMA 01.	62
FIGURA 27 - GRÁFICO SISTEMA 02.....	63
FIGURA 28 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO SISTEMA 02.	63
FIGURA 29 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO SISTEMA 03.	64
FIGURA 30 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO SISTEMA 04.	65
FIGURA 31 - GRÁFICO SISTEMA 05.....	67
FIGURA 32 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO SISTEMA 05.	68
FIGURA 33 - GRÁFICO SISTEMA 06.....	69
FIGURA 34 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO SISTEMA 06.	69
FIGURA 35 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO SISTEMA 07.	70
FIGURA 36 - GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA DO SISTEMA 08.	71

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - RESULTADOS DAS FUNÇÕES DE TESTE	36
TABELA 2 - RESULTADOS DOS SISTEMAS LINEARES.....	37
TABELA 3 - RESULTADO DOS SISTEMAS NÃO LINEARES	37

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABA	<i>Algoritmo de Busca com Aceleração</i>
MIC	<i>Metaheuristic International Conference</i>

LISTA SÍMBOLOS

 β *Beta* α *Alpha*

SUMÁRIO

1. Introdução	15
2. Objetivos.....	17
2.1. Objetivo Geral	17
2.1.1 Objetivos Específicos.....	17
2.2. Justificativa	17
2.3. Organização do Trabalho	18
3. As Heurísticas	19
4. As Metaheurísticas	21
5. Otimização.....	23
5.1 Tipos de Otimização	25
5.1.1 Otimização Estocástica.....	25
5.1.2 Otimização Determinística.....	26
5.1.3 Otimização por busca direta.....	26
5.2 Critérios de parada.....	27
6. Algoritmo de Busca por Aceleração.....	30
6.1 Estratégia de inspiração: Método Hooke & Jeeves	30
6.2 Considerações	31
6.3 Pseudocódigo do Algoritmo	32
6.4 Metodologia Utilizada	34
7. Resultados	36
8. Conclusão e trabalhos futuros	38
Referências	39
Apêndice A – Funções de Teste	43
Apêndice B – Sistemas de Equações Lineares	60
Apêndice C – Sistemas de Equações Não Lineares	66

1. Introdução

O mundo tal como é conhecido na atualidade reflete, de certo modo, o quanto a humanidade evoluiu em áreas importantes para o conhecimento: filosofia, cultura, ciência e tecnologia. Desde os primórdios da raça humana, identificar problemas, sejam eles quais forem e independentemente de sua complexidade, e encontrar soluções, sempre foi um objetivo buscado, embora nem sempre seja possível alcançar os resultados esperados [4].

Nas áreas da computação e engenharias há problemas documentados desde meados dos anos 1950, e que desafiam matemáticos, engenheiros e cientistas da computação a encontrarem alguma solução. Em alguns casos os problemas até são solúveis, entretanto, ao passo que eles são resolvidos, outras perguntas a serem desvendadas emergem das soluções já encontradas [4]. Em situações como estas, ainda assim é importante encontrar uma boa solução viável que seja razoavelmente próxima da solução ótima [11].

Na engenharia civil, por exemplo, os métodos de otimização Algoritmos Genéricos, *Simulated Annealing* (em português, Recozimento Simulado) e a técnica de Otimização por Colônia de Partículas foram utilizados por SARAMANGO e STEFFEN JR para determinar a solução de um modelo físico simplificado do comportamento elástico de duas molas (problema direto) e na determinação dos parâmetros correspondentes à variação da rigidez de um prédio de três andares submetido a carregamentos extremos (problema inverso) [32].

Um exemplo de algoritmo de otimização na área de computação é o uso de procedimentos heurísticos para gerir recursos em computação em nuvem. O método proposto por MATOS foi projetado a partir de um problema de escalonamento de tarefas, e foi formulado para encontrar solução para o problema de particionamento de conjuntos, que teve como objetivo reduzir (minimizar) o número de máquinas virtuais para a execução de tarefas no ambiente de computação nas nuvens [33]. Diante disso, depreende-se que o uso das heurísticas e a proposição de novos métodos heurísticos são necessários, pois podem ser utilizados para uma vasta gama de problemas do cotidiano, nas mais variadas áreas do conhecimento.

Dentre as classificações das heurísticas estão as metaheurísticas, que são métodos de alto nível [9] que combinam estratégias de forma inteligente com objetivo de explorar espaços de busca para encontrar soluções eficientes [3] por meio do processo de otimização. Dentre os métodos de otimização existentes na literatura estão os estocásticos, determinísticos e por busca direta. O Algoritmo de Busca por Aceleração, que é o método proposto neste trabalho, é uma metaheurística do tipo estocástico, pois utiliza parâmetros aleatórios e baseados em

comportamentos sociais [1], como é o caso das populações que serão geradas no início da execução do algoritmo e se movimentarão a cada iteração, e é inspirado em um algoritmo de otimização por busca direta, o de Hooke & Jeeves, por realizar comparação entre dois pontos, o melhor indivíduo da população e o indivíduo que obteve melhor desempenho na movimentação atual, verificando qual deles é o menor [13] para encontrar o valor ótimo, considerando o critério de parada estabelecido.

2. Objetivos

2.1. Objetivo Geral

Apresentar estrutura, execução, estratégia aplicada, método de inspiração e pseudocódigo do Algoritmo de Busca por Aceleração. Ademais, também se faz presente no escopo deste trabalho apresentar os resultados de testes feitos em problemas de otimização e sistemas de equações presentes na literatura.

2.1.1 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- a) Propor um novo algoritmo de otimização global, o ABA;
- b) Apresentar os resultados obtidos mediante testes em problemas de otimização com restrições e sistemas de equações lineares e não lineares utilizando o ABA;
- b) Produzir uma análise dos dados produzidos nos testes realizados com o ABA a fim de atestar a robustez do novo método.

2.2. Justificativa

As metaheurísticas são importantes na resolução de problemas, pois definem as estratégias que serão utilizadas para que o ótimo global seja encontrado [11]. Embora não seja possível ter certeza quanto a eficiência desses métodos heurísticos, eles devem oferecer algumas garantias para que seu uso seja viabilizado. Quando são bem modelados, além de serem capazes de encontrar as soluções ótimas, estas estratégias também tendem a apresentar custo computacional aceitável [4], tornando possível o seu uso na resolução de problemas de otimização e sistemas de equações lineares e não lineares.

Com isso, pode-se afirmar que novas estratégias são bem-vindas, pois novos problemas poderão surgir, e irão requerer novos algoritmos que consigam alcançar seus valores ótimos. Diante desta realidade, propõe-se neste trabalho um novo método populacional de otimização global eficiente, que não exige tempo computacional em excesso ou grande capacidade de armazenamento de dados; robusto, que possua boa performance para uma grande quantidade

de problemas e obtém resultados razoáveis para quaisquer pontos de partida; preciso, sendo capaz de identificar a solução com precisão e pouco suscetível a erros nos dados e arredondamentos [1]; e acurado, onde a solução encontrada está próxima o suficiente do parâmetro, o ótimo global, capaz de ser aceita pelo critério de parada. Reitera-se que o ABA contempla as características apontadas.

2.3. Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado em 8 seções.

A primeira traz um contexto geral sobre os assuntos tratados neste trabalho, abordando a questão de forma mais filosófica, mas já apontando a importância do tema tratado. A seção atual visa definir quais os objetivos, geral e específicos, deste trabalho, além da forma como este foi organizado. A terceira seção traz os principais conceitos sobre as heurísticas, como elas podem ser utilizadas e quais as classificações. A quarta seção apresenta uma das classificações das heurísticas, citada na seção anterior, que são as metaheurísticas; a quinta seção apresenta os principais conceitos referentes à otimização e quais os tipos existentes, sendo eles o estocástico, determinístico e de busca direta, além de exemplos de cada um dos tipos; na sexta seção será apresentado primeiramente o algoritmo de inspiração para criação da nova estratégia que será apresentado neste trabalho, além do detalhamento do novo método, sendo este o ABA, as funções de teste, além dos sistemas. A sétima seção apresenta os resultados da execução do novo método. Por fim, a oitava seção encerra o trabalho com as considerações finais e proposições de trabalhos futuros.

3. As Heurísticas

Heurística é um termo originário da Grécia, vem da palavra grega “*heuriskein*”, que significa “encontrar/descobrir” [1] e faz referência às técnicas que tem como objetivo alcançar soluções aproximadas, não necessariamente ótimas, mas que podem ser obtidas de forma rápida até mesmo quando os problemas que necessitam ser resolvidos são bastante complexos [2].

Desde o início do século XX este já era um assunto presente em documentos científicos. Como exemplo disso, têm-se que no ano de 1905, ao ganhar o Prêmio Nobel, o físico alemão Albert Einstein utilizou o termo *heurística* no título de seu trabalho para indicar uma ideia que não estava totalmente concluída, fazendo referência ao conhecimento humano que, embora tenha limites, ainda assim é útil [6]. Estes limites fazem referência ao objetivo das heurísticas, que buscam encontrar a melhor solução possível, visando atingir o que alguns autores tratam como *otimalidade* [3, 9]. Com isso, conclui-se que as heurísticas têm suas limitações, mas ainda assim seu uso é bastante importante e necessário.

Pode-se destacar também que, nas últimas décadas, houve um avanço considerável do desenvolvimento de procedimentos heurísticos. Tal crescimento é perceptível devido ao grande número de artigos sobre o tema disponíveis na literatura. Como exemplo disso, destaca-se que em 1995 foi lançado o *Journal of Heuristics* (em português, *Jornal das Heurísticas*), que é um periódico existente até os dias atuais, dedicado exclusivamente à publicação de procedimentos heurísticos. Naquele mesmo ano também foi realizado o primeiro congresso de grande alcance sobre o tema, *Metaheuristic International Conference*, o MIC (em português, *Conferência Internacional de Metaheurísticas*), em Breckenridge, Colorado, nos Estados Unidos [10].

As heurísticas podem ser consideradas métodos geradores de soluções para problemas, mas que devem oferecer certas garantias para que seu uso seja viável [9], pois:

“Uma heurística é uma técnica computacional aproximativa que visa alcançar uma solução avaliada como aceitável para um dado problema que pode ser representado em um computador, utilizando esforço computacional considerado razoável, sendo capaz de garantir, em determinadas condições, a viabilidade ou a ‘otimalidade’ da solução encontrada (grifos do autor) [9].”

Esta técnica computacional remete ao conceito de algoritmo, definido como “qualquer procedimento computacional bem definido que toma algum valor ou um conjunto de valores como entrada e produz algum valor ou conjunto de valores como saída” [5]. Portanto, um algoritmo recebe dados, processa e apresenta o resultado do processamento.

Além da necessidade de encontrar boas soluções para problemas difíceis e em tempo razoável, os métodos heurísticos são comumente utilizados por serem mais flexíveis e possibilitarem a incorporação de condições difíceis de modelar. Também podem ser utilizados como parte de um procedimento global que permite encontrar a solução ótima de um problema com custo computacional aceitável, em que deve haver alta probabilidade de a solução estar próxima da ótima e baixa possibilidade de ser obter uma solução ruim, ou seja, muito distante da ideal [10, 9]. Diante do exposto, pode-se destacar que é importante, além dos problemas serem solúveis computacionalmente, que sejam modelados de forma que o custo tecnológico demandado para se chegar à solução permita a execução em tempo humanamente aceitável.

Dentre os métodos heurísticos existentes, há os métodos de buscas locais e os construtivos. A execução do primeiro começa encontrando alguma solução viável do problema e tenta melhorá-lo progressivamente. Cada etapa do procedimento realiza um movimento de uma solução para outra de melhor valor. O método termina quando, para uma solução, não há outra que a melhore. O segundo, presente na categoria dos métodos construtivos, envolve a criação de uma solução para o problema literalmente do zero e tende a se basear na melhor escolha em cada iteração. Os métodos construtivos e de busca local formam os fundamentos das metaheurísticas [10]. Entre as classificações possíveis das heurísticas, pode-se destacar as *metaheurísticas*, que são algoritmos adaptáveis usados na resolução de praticamente quaisquer problemas de otimização [4].

4. As Metaheurísticas

Também chamadas de heurísticas modernas [9], as metaheurísticas são métodos de resolução geral que fornecem tanto uma estrutura, quanto diretrizes de estratégias gerais para desenvolver um método heurístico que se ajuste a um tipo de problema particular [11]. São um processo de geração iterativo que orienta uma heurística subordinada combinando conceitos diferentes de forma inteligente para explorar os espaços de busca utilizando estratégias de aprendizado para estruturar informações a fim de encontrar soluções eficientes e quase ótimas [3].

A palavra metaheurística também é de origem grega, onde *meta*, quer dizer nível superior, e *heurística*, como já citado neste trabalho, propõe o sentido de encontrar. Sendo assim, esta etimologia sugere um método de alto nível para resolver problemas e encontrar soluções [9]. Pode-se afirmar, então, que as metaheurísticas não têm como objetivo atingir a solução exata dos problemas a que são submetidas, mas encontrar os valores mais próximos do que está sendo buscado, num processo de otimização. Ou seja, elas têm a função de otimizar os resultados obtidos a fim de melhorá-los.

Embora alguns autores afirmem que é possível oferecer garantias quanto ao desempenho dos métodos heurísticos [9], outros fazem ressalvas importantes, afirmando que não é possível oferecer garantia alguma sobre a qualidade da solução ótima que será encontrada, mas reiteram que uma metaheurística bem elaborada deve alcançar soluções que sejam pelo menos próximas da ótima, ou então afastar a possibilidade de essas soluções existirem [11]. Sendo assim, as metaheurísticas são utilizadas para determinar as estratégias aplicadas para resolver os problemas, além de ser um meio de diversificar uma possível solução dentre as soluções encontradas para se aproximar da solução ótima, em que a possibilidade de que o resultado encontrado esteja próximo da ótima seja como bastante provável, e o inverso seja improvável de acontecer [10].

Dependendo da forma como for modelada, os fatores citados acima podem tornar a execução dessas metaheurísticas bastante custosa computacionalmente, pois serão executadas num processo de exaustão, conforme será mostrado através dos resultados obtidos na execução da nova estratégia criada. Contudo, é necessário modelar a solução de forma que o custo computacional seja mensurável e aceitável [4]. As metaheurísticas são importantes aliadas no processo de otimização, pois propiciam a busca inteligente por soluções [4], explorando os espaços de busca a fim de encontrar soluções eficientemente próximas da ideal, onde é razoável

aceitar que, após um movimento bem-sucedido, deve-se conduzir os próximos movimentos a fim de melhorar ainda mais o resultado obtido [25].

5. Otimização

Os problemas de otimização utilizados neste trabalho estão na seguinte forma:

$$\min f(x_i)$$

sujeito à $a_i \leq x_i \leq b_i$,

sendo que $i = 1, \dots, n$.

Em que a_i e b_i são os limites do espaço de busca, sendo que o primeiro é a extremidade inferior e o segundo, a superior. Por fim, f representa a função objetivo que será otimizada e o x_i é o vetor de variáveis.

Todo problema que admite mais de uma solução viável dispara a busca da melhor das soluções: a solução ótima [27]. Otimização é o estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função real escolhendo sistematicamente os valores de variáveis reais ou inteiros dentro de um conjunto permitido [14], e a essência da otimização está em melhorar algo em um conjunto de alternativas disponíveis [9], onde na maioria das vezes o valor ótimo é difícil de ser encontrado quando realizado apenas um cálculo [1]. Por este motivo se faz necessário realizar novos cálculos a fim de melhorar o resultado obtido. No contexto deste trabalho, serão considerados somente problemas de minimização.

Independentemente do campo de aplicação, um problema de otimização sempre terá elementos padrão que poderão ser identificados em cada situação específica: as variáveis de decisão, os critérios e a função objetivo do problema. Por fim, problemas de otimização também possuem as restrições e região viável [27]. Na matemática, otimização se refere a busca por se chegar nos máximos e mínimos de uma função, ou seja, calcular o ponto [ou indivíduo, no caso do ABA] considerado “ótimo” [7], que atenda o critério de parada estabelecido. Esse e outros critérios de parada serão mais bem detalhados na seção 5.2. O processo de otimização se inicia determinando uma estimativa inicial x^0 , seguido de outras sequências de aproximação até encontrar o ponto mínimo [1].

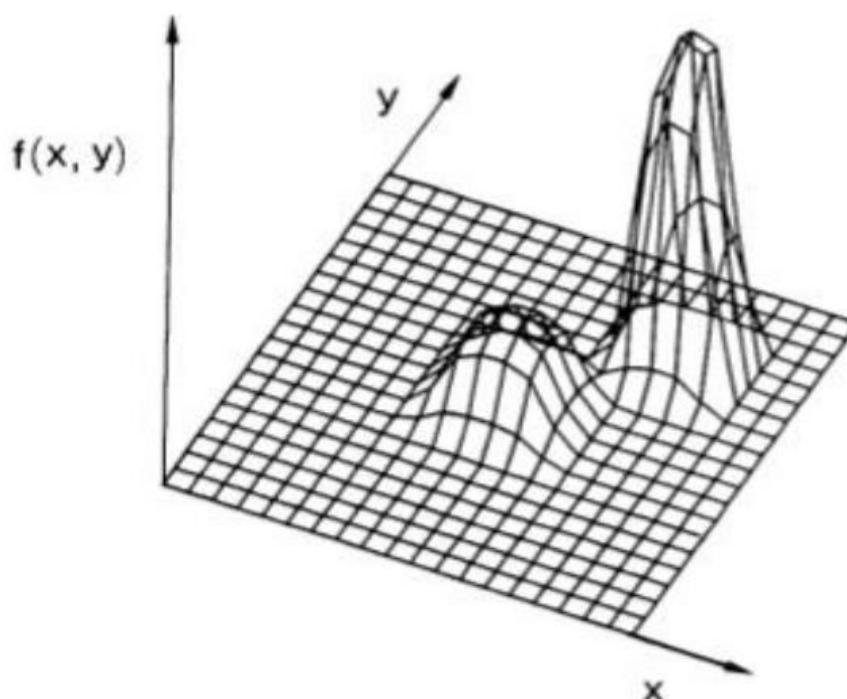


Figura 1 - Diferença entre ótimo local e ótimo global.

Fonte: Goldberg et. al [9].

Na Figura 01 a função objetivo é representada e o ponto mais alto da superfície é o ótimo global, já o ótimo local é representado pelo ponto mais baixo [9]. Esse exemplo ilustra de forma bastante concisa dois conceitos bastante importantes para o entendimento deste assunto, pois mostra a tentativa do ótimo local em alcançar o melhor resultado possível, rumo à chamada *otimalidade* (qualidade de ser ótimo), e se aproximar do ótimo global.

Uma das características mais fundamentais das metaheurísticas é a sua capacidade de diversificar o campo de soluções e “escapar” de um ótimo local. Ao atingir um ótimo local, a metaheurística realiza um processo de “fuga” para buscar uma solução melhor [11]. Os sucessos ou fracassos durante a execução dos testes influenciam a direção dos movimentos [25] tanto de forma positiva, aproximando do ótimo buscado, mas também negativamente, movendo o espaço de busca para o sentido contrário ao esperado.

Os bons algoritmos de otimização devem conter as seguintes propriedades [1]:

Robustez: devem ter uma boa performance para uma grande variedade de problemas e obter resultados razoáveis para quaisquer pontos de partida.

Eficiência: não devem exigir tempo computacional excessivo ou grande capacidade de armazenamento de dados.

Precisão: devem ser capazes de identificar a solução com precisão, sendo pouco sensíveis a erros nos dados ou arredondamentos numéricos quando o algoritmo é implementado no computador [1].

Outra propriedade que também deve estar nestes algoritmos é a Acurácia: a solução encontrada deve ter proximidade com seu parâmetro [31]. No caso do ABA, o parâmetro utilizado é o ótimo global.

Os métodos de otimização podem receber classificações.

5.1 Tipos de Otimização

Uma das formas de classificar os algoritmos de otimização é dividindo-os nos seguintes grupos: estocásticos, determinísticos e por busca direta. Cada classificação será detalhada nas seções seguintes:

5.1.1 Otimização Estocástica

Na otimização estocástica, também conhecida como otimização sob incertezas [12], é comum trabalhar com a indefinição de algumas variáveis e produzir algumas soluções que otimizam a performance esperada do modelo, geralmente utilizando parâmetros aleatórios e baseados em comportamentos sociais e processos naturais. Pode-se citar como exemplo os algoritmos Busca Tabu, Simulated Annealing (*Recozimento Simulado*), e os baseados em população (Algoritmos Genéricos, Evolução Diferencial, Otimização por Colônia de Formigas, Otimização por Bando de Pássaros etc.) [1]. Do ponto de vista pedagógico, a área de otimização estocástica é muito abrangente, pois utiliza resultados de programação linear, probabilidade e estatística [12].

Como estas técnicas costumam avaliar constantemente a função objetivo, isso as tornam custosas computacionalmente [1], todavia, como já citado neste trabalho, é necessário que, durante o processo de modelagem, esses métodos sejam elaborados de forma a garantir que o custo computacional requerido para execução seja considerado aceitável. O objetivo dos algoritmos de otimização estocástica é encontrar soluções que sejam admissíveis para todas as possíveis realizações das variáveis aleatórias que são parte da modelagem [12], que é quando se identifica os objetivos, variáveis e restrições de um problema [1].

5.1.2 Otimização Determinística

Os algoritmos de otimização determinística realizam poucas verificações à função objetivo, o que os tornam mais eficientes e menos custosos computacionalmente. Os melhores resultados encontrados em métodos deste tipo são para as funções contínuas, convexas e semi-modais [1].

Estes métodos se destacam por serem de fácil implementação e rápida convergência em direção à solução ótima. Ressalta-se que esses algoritmos não são dependentes de valores aleatórios, resultando em uma solução única a cada execução, utilizando o mesmo conjunto de valores gerados no início do procedimento. É necessário pontuar que esta solução obtida não é, necessariamente, um ótimo global. Isso se deve à sensibilidade desses algoritmos aos parâmetros iniciais, onde pequenas alterações nesses valores podem exercer influência significativa sobre a solução final [29].

Dentre os métodos de otimização determinística existentes na literatura, pode-se destacar os seguintes: Newton-Raphson, Quase-Newton, Langrangiano, Pontos Interiores e Programação Quadrática Sequencial [29].

5.1.3 Otimização por busca direta

O termo Busca Direta surgiu em 1961, para descrever análise das soluções encontradas, envolvendo comparação de cada solução experimental com a “melhor” obtida até então, e estava presente em um artigo dos pesquisadores Robert Hooke e T. A. Jeeves. O método de Hooke & Jeeves, além do *Pattern Search* (em português, Busca de Padrões) são exemplos de algoritmos de otimização por busca direta [6].

Busca direta se refere a um método iterativo em um conjunto de pontos que são testados a cada iteração, associado a uma estratégia que usa somente avaliadores da função f para definir a posição seguinte do minimizador. Nos algoritmos de minimização por busca direta pode haver a aproximação do gradiente da função por diferenças finitas ou interpolar a função por um polinômio, buscando atualizar a aproximação do minimizador para a iteração seguinte [24].

Vale a pena estudar e utilizar os métodos de otimização por busca direta pelas seguintes razões [25]:

- nos testes que eles realizaram, as soluções que usam como estratégia a otimização por busca direta encontraram soluções que ainda não haviam sido encontradas pelos métodos clássicos;
- prometem fornecer soluções de forma mais rápida que os métodos clássicos;

- podem ser bem adaptados para serem utilizados em computadores;
- fornecem constantemente soluções melhoradas; e
- permitem diferentes tipos de suposições sobre as funções envolvidas nos problemas.

Como exemplo de método clássico citado pelo autor, pode-se destacar o Method of Steepest Ascent – MSA (em tradução livre *Método de Ascensão Mais Íngreme*) [25].

Na otimização por busca direta não é necessário usar o valor da função nas operações do algoritmo, pois ocorre somente a comparação de dois pontos e há a verificação de qual deles tem o menor valor, considerando a função objetivo. Uma das formas de ocorrer essa verificação é pela busca padrão, onde a verificação da função objetivo do conjunto de pontos é realizada a cada iteração. Isso ocorre para que seja definido o conjunto de direções apropriadas para gerar um espaço de busca positivo e assim escolher a nova aproximação do minimizador [13].

5.2 Critérios de parada

Os critérios de parada são responsáveis por definir a solução ótima do problema [27]. Durante o processo de execução de um algoritmo de otimização, após gerada a população inicial, duas outras fases ocorrem: movimentação, seguida da verificação do critério de parada. Movimentações são efetuadas até que alguma solução que atenda ao critério de parada é encontrada, ou quando todas as possibilidades de movimentos são esgotadas e nenhum indivíduo obtém resultado satisfatório. Neste caso, o algoritmo encerra e evita que a execução do método entre num tipo de *loop* infinito. Esse processo pode ser mais bem visualizado na Figura 02.

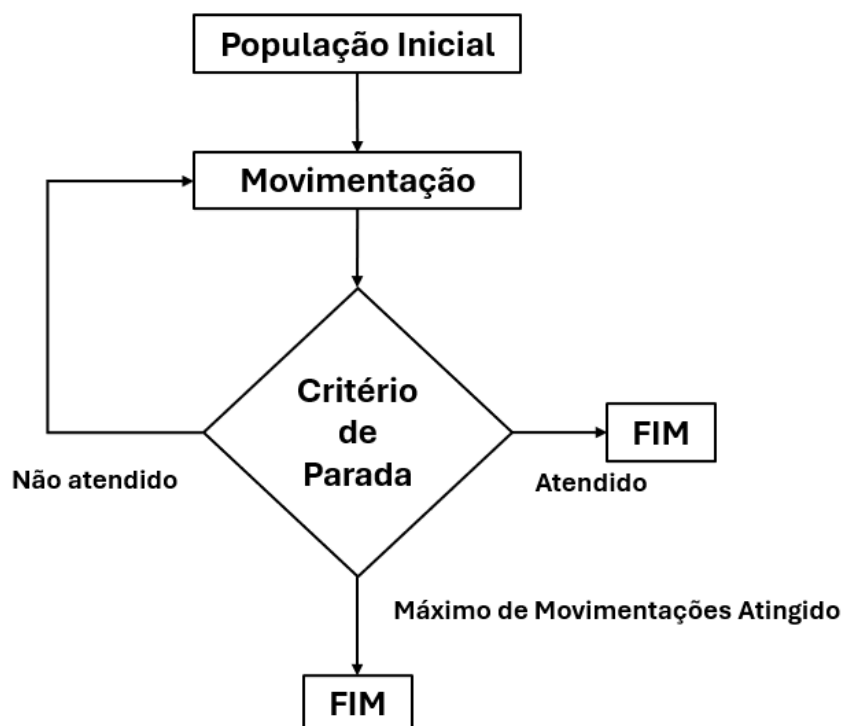


Figura 2 - Fluxograma geral de um algoritmo de otimização.

Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de [28].

Os autores DENNIS e SCHNABEL apontam o seguinte critério de parada, conforme a seguir [8]:

$$|\nabla f(x_+)| \leq \varepsilon$$

onde $\nabla f(x) \cong 0$ é considerada uma condição necessária e suficiente para que o x seja o minimizador local de f , e $\varepsilon = \varepsilon$ é o erro. Esta condição pode ser inadequada em alguns casos, pois depende fortemente das escalas de f e x . Quando, por exemplo, $\varepsilon = 10^{-3}$ onde f estiver em 10^{-5} , é provável que este valor de x satisfaça a condição. Todavia, se f estiver, por exemplo, em 10^5 pode ser inviável determinar quando o método deve parar a sua busca e o algoritmo pode ser taxado como ineficiente, sendo que ele está com um critério de parada inadequado.

Nos testes com o ABA foi adotado um critério de parada constante, que serviu para determinar quando a busca deveria se encerrar, considerando duas possibilidades: melhor solução encontrada e possível falha, sendo que o primeiro caso acontece quando o melhor indivíduo é capaz de satisfazer o critério de parada.

O critério de parada utilizado foi o seguinte:

$$|f(x) - f(m)| < \varepsilon$$

onde $f(x)$ é o valor da função objetivo, $f(m)$ é o valor da função objetivo na melhor solução encontrada numa movimentação específica, e ε é o erro, definido como 10^{-4} (ou 0.0001). Quando, por exemplo, $f(x) = 0$, e $f(m) = 0.000016$, o critério de parada será satisfeito, pois o resultado da função é menor que o erro. O mesmo acontece quando $f(x) = 2.1400$, e $f(m) = 2.140025$. Este critério de parada mostrou-se ser o mais adequado, pois sua efetividade não depende das escalas de f e x . Ou seja, independentemente do ótimo global a ser buscado, o critério de parada conseguirá ser efetivo. No caso do critério de parada acima o módulo é fundamental, pois garante que o resultado do cálculo da diferença entre $f(x)$ e $f(m)$ seja sempre positiva, tornando possível a comparação com o valor de ε .

Outro critério de parada utilizado neste método é o seguinte:

$$i == D$$

onde D é a quantidade máxima permitida de movimentações e i é a sequência da movimentação atual. Por exemplo, $D = 100.000$, em que se i iterar e ficar igual ao valor de D , o algoritmo encerra a busca. Este é o pior dos casos, pois indica que o método fracassou na busca por uma solução ótima que pudesse ser admitida pelo critério de parada. Os parâmetros de erro dos critérios de parada utilizados nos testes com o ABA foram definidos após testes, por terem apresentado resultados avaliados como satisfatórios. A seção a seguir apresentará o novo método de otimização global proposto neste trabalho.

6. Algoritmo de Busca por Aceleração

O ABA é uma metaheurística estocástica inspirada num algoritmo de otimização por busca direta, o Método de Hooke Jeeves, mais especificamente na fase de progressão.

6.1 Estratégia de inspiração: Método Hooke & Jeeves

Este método pode ser classificado como conceitualmente simples, de eficiência bastante razoável e de fácil implementação [27] e o algoritmo funciona através de buscas exploratórias e lineares [26]. São duas as fases utilizadas no cálculo da função até chegar ao ponto ótimo quando se utiliza o método Hooke-Jeeves: Exploração e Progressão:

Fase 01: Nesta fase ocorre o teste da Função Objetivo em pontos vizinhos à “base”, mediante pontos selecionados, na direção de cada variável de busca e nos sentidos negativo e positivo de cada direção. É necessário que o teste nestas duas direções aconteça para que a fase da exploração seja finalizada, pois este resultado indicará qual direção provável do ótimo que se busca encontrar. A base de busca do ótimo é deslocada para o sentido indicando a direção a ser considerada na progressão, encerrando o processo. Quando os pontos movimentados estiverem maiores que o critério de parada, eles são reduzidos e o processo de exploração é reiniciado, até que sejam menores que o critério de parada, pois neste caso a busca pode ser encerrada e o ponto ótimo é encontrado [27].

Fase 02: Na progressão ocorrem os testes na direção provável do ótimo que foi apontada na fase de exploração, após os testes nas duas direções possíveis de busca. Sempre que são registrados sucessos, ou seja, quando novos “pontos-base” são definidos, a progressão é executada. Entretanto, sempre que um insucesso ocorre, quando em uma movimentação dos incrementos não for possível encontrar uma direção satisfatoriamente boa, a exploração é novamente requisitada no processo de otimização para que novos testes sejam executados [27].

Como exemplo do exposto acima, tem-se a Figura 03. Inicialmente, a busca se concentra ao redor do ponto inicial (ponto 0), que está ao lado do menor ponto da função objetivo (ponto 1 em azul, a direita do 0). Nesta fase ocorre a exploração, onde é verificado para qual direção a busca irá se deslocar, onde é executado o processo de progressão, ou seja, o “ponto base” se

desloca. Após esta iteração, o menor ponto da função objetivo é deslocado (ponto 2 em azul). O algoritmo encerra a busca exploratória quando os valores da função objetivo forem todos maiores do que o ponto do qual ocorreu a busca exploratória [26]. Neste exemplo, a exploração apontou que a progressão deve correr em direção ao ponto 3 (em azul), encontrando o ponto mínimo que atenda o critério de parada determinado (ponto 4 em verde).

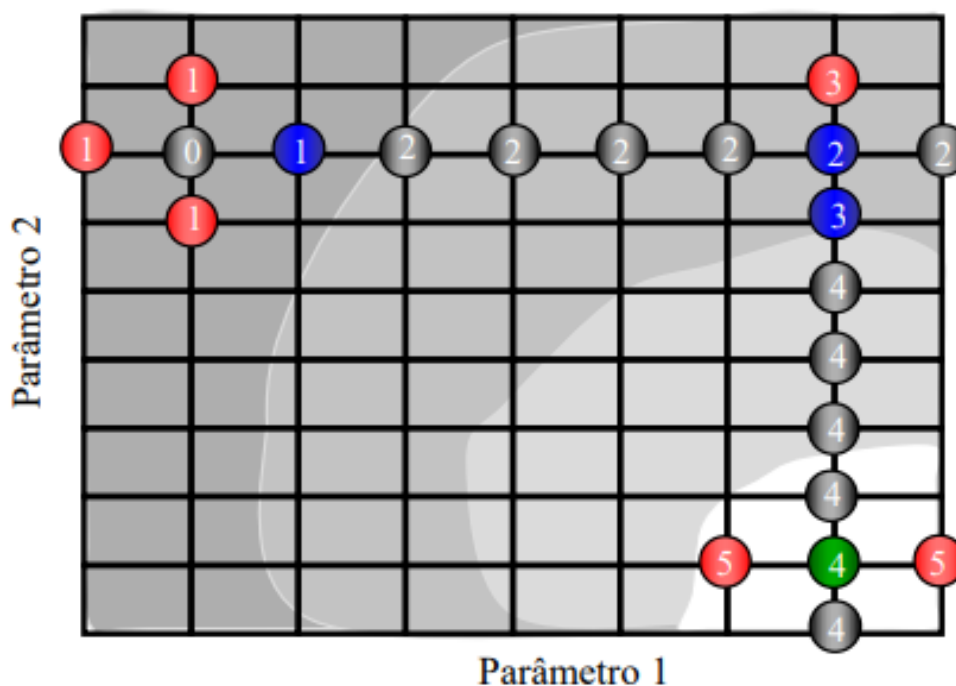


Figura 3 - Descrição esquemática do algoritmo de Hooke & Jeeves.

Fonte: MASCHIO e SCHIOZER [26].

6.2 Considerações

O ABA foi inspirado no método Hooke & Jeeves, mais especificamente na fase de Progressão que pode ser modelado pela seguinte equação

$$x_{k+2} = x_k + \alpha [x_{k+1} - x_k]$$

onde x_k é o ponto de partida x na iteração atual k , x_{k+1} é um ponto obtido na fase de Exploração bem-sucedida, ou seja, quando o ponto se movimenta, x_{k+2} é um candidato a novo ponto obtido na fase de Progressão e α é um número positivo chamado de *Fator de Aceleração* [30].

Considerando que o ABA é um método populacional, propõe-se a utilização da seguinte equação para atualização dos pontos ou indivíduos de uma população atual

$$y_{k+1}^i = x_k^i + \alpha_{[1.0,2.0]} [x_M - \beta_{[0.5,1.5]} x_k^i]$$

onde x_k^i é o i -ésimo indivíduo da população atual k , y_{k+1}^i é o i -ésimo candidato a novo indivíduo da próxima população, x_M é o melhor indivíduo da população atual, $\alpha_{[1.0,2.0]}$ é um número aleatório entre 1.0 e 2.0 que substitui o *Fator de Aceleração* e, por fim, $\beta_{[0.5,1.5]}$ é um número aleatório entre 0.5 e 1.5 que é um *Fator de Perturbação* para criar uma aleatoriedade ao redor do indivíduo x_k^i . Os intervalos dos Fatores foram escolhidos após testes, sendo que estes demonstraram ser os mais adequados dentre as opções analisadas. Ademais, quantidade e variedade de testes realizados em os problemas de otimização e sistemas de equações asseguram que a qualidade dos resultados obtidos pode ser reproduzida em outros testes.

Para esclarecer como a Equação acima será utilizada, todos os passos utilizados no Algoritmo são descritos na próxima seção.

6.3 Pseudocódigo do Algoritmo

Aqui é descrito o pseudocódigo utilizado para implementação dos passos do Algoritmo:

ABA

Passo 1. (Inicialização)

1.1 Defina $k = 0$ e gere a população inicial com n indivíduos $x_0^i = (x_0^1, \dots, x_0^n)$.

1.2 Selecione o melhor indivíduo da população inicial x_M e faça $fM = f(x_M)$.

Passo 2. Faça:

$$y_{k+1}^i = x_k^i + \alpha_{[1.0,2.0]} [x_M - \beta_{[0.5,1.5]} x_k^i]$$

Se $f(y_{k+1}^i) < f(x_k^i)$, faça

Se $f(y_{k+1}^i) < fM$, faça

$$x_M = y_{k+1}^i \text{ e } fM = f(y_{k+1}^i)$$

fim do se.

$$x_{k+1}^i = y_{k+1}^i$$

Senão, faça

$$x_{k+1}^i = x_k^i$$

fim do se.

Passo 3. Se $k \geq k_{max}$ ou $|fM - \text{mínimo}| < 10^{-4}$, pare.

Passo 4. Faça $k = k + 1$, e volte para o Passo 2.

É importante observar que o ABA será submetido a teste em problemas de otimização e sistemas de equações que contém restrições de espaço de busca. Sendo assim, faz-se necessário uma adequação do método de forma que evite que os indivíduos “fujam da caixa”, conforme pseudocódigo abaixo:

ABA Modificado

Passo 1. (Inicialização)

1.1 Defina $k = 0$, Min^i , Max^i e gere a população inicial com n indivíduos $x_0^i = (x_0^1, \dots, x_0^n)$.

1.2 Selecione o melhor indivíduo da população inicial x_M e faça $fM = f(x_M)$.

Passo 2. Faça:

$$y_{k+1}^i = x_k^i + \alpha_{[1.0,2.0]} [x_M - \beta_{[0.5,1.5]} x_k^i]$$

Se $y_{k+1}^i < Min^i$, faça

$$y_{k+1}^i = Min^i$$

senão, se $y_{k+1}^i > Max^i$, faça

$$y_{k+1}^i = Max^i$$

fim do se.

Se $f(y_{k+1}^i) < f(x_k^i)$, faça

Se $f(y_{k+1}^i) < fM$, faça

$$x_M = y_{k+1}^i \text{ e } fM = f(y_{k+1}^i)$$

fim do se.

$$x_{k+1}^i = y_{k+1}^i$$

Senão, faça

$$x_{k+1}^i = x_k^i$$

fim do se.

Passo 3. Se $k \geq k_{max}$ ou $|fM - \text{mínimo}| < 10^{-4}$, pare.

Passo 4. Faça $k = k + 1$, e volte para o Passo 2.

6.4 Metodologia Utilizada

O novo método proposto por este Trabalho foi desenvolvido a partir de um estudo na literatura sobre as metaheurísticas, além dos algoritmos de otimização, sobretudo os estocásticos, e é baseado no algoritmo de Hooke & Jeeves, sendo este um algoritmo por busca direta, que possui em sua estrutura um *fator de aceleração*, o que justifica o nome dado ao novo método criado: Algoritmo de Busca por Aceleração, ou ABA. O algoritmo considerado para os testes foi o ABA na versão modificada, considerando as restrições.

O processo de desenvolvimento do ABA se iniciou com a modelagem do algoritmo a ser desenvolvido, seguido da construção do pseudocódigo e somente então a codificação do novo método na Linguagem de Programação C, para somente então ser testado em problemas de otimização e sistemas.

Todos os testes foram realizados com população definida em 20 indivíduos, número máximo de movimentações em 10^5 e rodadas de teste em 100. Quanto ao critério de parada, os problemas e sistemas lineares com até duas incógnitas foram testados considerando o erro relativo em 10^{-4} , enquanto os sistemas de equações lineares com três ou mais incógnitas e todos os não lineares foram submetidos a teste considerando o erro relativo em 10^{-2} .

Os problemas de otimização e sistemas de equações submetidos ao ABA foram testados em um computador com as seguintes especificações técnicas:

- Sistema Operacional Windows 10 Pro;
- Processador AMD Ryzen 3 3200G;
- Memória RAM 8,00 GB;
- Arquitetura de 64 bits, com processador baseado em x64.

No Apêndice A estão alguns problemas de otimização encontrados na literatura que são comumente utilizados para atestar a robustez e eficiência de métodos heurísticos, além dos Sistemas de Equações Lineares, presentes no Apêndice B e os Não Lineares, dispostos no Apêndice C.

7. Resultados

A **Tabela 1** apresenta os resultados dos testes realizados com os problemas de otimização presentes na literatura, descritos no Apêndice A. A primeira coluna da tabela traz o nome do problema, seguido da quantidade de dimensões, ou seja, a quantidade de variáveis. A terceira coluna mostra a taxa de sucesso do método em cada problema. Por fim, a última coluna apresenta a média de iterações demandadas para se encontrar o ótimo global.

Tabela 1 - Resultados das Funções de Teste

Problema	Dimensões	Sucesso (%)	Média de Iterações
Aluffi-Pentini's Problem (AP)	2	100	34
Becker and Lago Problem (BL)	2	100	3.811
Bohachevsky 1 Problem (B1)	2	100	25
Bohachevsky 2 Problem (B2)	2	100	27
Camel Back-3 Three Hump Problem (CB3)	2	100	15
De Jong Problem (DJ)	256	100	523
Powell's Quadratic Problem (PWQ)	4	100	87
Rastrigin Problem (RG)	5	100	203
Rotated Ellipse 2 (RE2)	2	100	29
Schaffer 1 Problem (SF1)	2	100	371
Schaffer 4 Problem (SF4)	2	100	94
Six Hump Camel (SH)	2	100	111

As **Tabelas 2 e 3** apresentam os resultados dos testes realizados em Sistemas de Equações, sendo que a primeira traz os Lineares, descritos no Apêndice B, e a segunda os Não Lineares, disponíveis no Apêndice C. Os sistemas de equações testados são de duas ou três incógnitas, conforme disposto na segunda coluna da tabela. A terceira coluna apresenta a taxa de sucesso. Por fim, a última mostra a média de iterações necessárias para encontrar as soluções de cada sistema, que foram ajustados para possibilitar a resolução por meio de otimização.

Tabela 2 - Resultados dos Sistemas Lineares

Sistemas	Incógnitas	Sucesso (%)	Média de iterações
Sistema 01	2	100	3.908
Sistema 02	2	100	2.824
Sistema 03	3	100	96
Sistema 04	3	100	3.565

Tabela 3 - Resultado dos Sistemas Não Lineares

Sistemas	Incógnitas	Sucesso (%)	Média de iterações
Sistema 05	2	100	969
Sistema 06	2	100	44
Sistema 07	3	100	15
Sistema 08	3	100	345

Conforme apontado nas tabelas 01, 02 e 03, em todos os testes realizados nos problemas de otimização e sistemas de equações, o Algoritmo de Busca por Aceleração foi robusto, por ter conseguido obter taxa de 100% de sucesso até mesmo em problemas com 256 dimensões, como é o caso do De Jong Problem (DJ). Dito de outra forma, em todas as 100 populações geradas em cada teste realizado, o algoritmo conseguiu movimentar os indivíduos de forma adequada, fazendo-os alcançar uma posição admissível ao critério de parada.

O ABA também se mostrou eficiente, atingindo o grau máximo de sucesso com média de iterações baixa. Como exemplo disso, para o Salomon Problem foram necessários, em média, apenas 11 iterações/movimentos. Nos sistemas de equações, o Sistema 07 foi solucionado com apenas 15. O máximo de iterações médias necessárias foi identificado no Sistema 02, com 6.964. Diante desses excelentes resultados, depreende-se que o ABA pode ser considerado um ótimo algoritmo de otimização global, considerando os resultados obtidos nos testes realizados.

8. Conclusão e trabalhos futuros

Este Trabalho apresentou os resultados de uma proposta de algoritmo de otimização global aplicado a problemas de otimização restrita e sistemas de equações, o Algoritmo de Busca por Aceleração (ABA), que é uma metaheurística baseada no método de Hooke & Jeeves. O método, programado em Linguagem de Programação C, foi testado em 16 funções de teste, todas elas com seus ótimos globais e restrições de busca definidos em cada problema. Em todos os testes a população inicial foi de 25 indivíduos, que teriam a possibilidade de se movimentar por até 100.000 vezes, no pior caso. Os testes também ocorreram em sistemas de equações lineares e não lineares, que foram ajustados ao formato de problema de otimização. A quantidade de testes realizados e a complexidade dos problemas submetidos e sistemas utilizados possibilitaram algumas conclusões: O ABA conseguiu ser robusto em todos os testes apresentados neste trabalho e alcançou os valores desejados de cada problema ou sistema de equações com quantidade de movimentações relativamente baixa, confirmando que também é eficiente, e os resultados encontrados encontravam-se tão próximos do ótimo global que foram admitidos pelo critério de parada, confirmando que o ABA é acurado. Neste contexto também pode-se afirmar também que o Algoritmo de Busca por Aceleração é preciso, pois as soluções encontradas não apresentaram erros ou inconsistências relacionadas a arredondamentos numéricos.

Ademais, pode-se afirmar que este trabalho conseguiu atingir com sucesso os objetivos traçados durante a etapa de desenvolvimento do ABA, contribuindo com outros pesquisadores com um novo método que tem como características principais a fácil implementação, eficiência, robustez e custo computacional relativamente baixo. Como sugestão de trabalhos futuros, propõe-se comparar o ABA com métodos já existentes.

Referências

1. BRANDÃO, Milena Almeida Leite. Estudo de alguns métodos determinísticos de otimização irrestrita. Dissertação (Mestrado). UFU, 2010. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/16782/1/milena.pdf>>. Acesso em: 24 out. 2023.
2. REEVES, Colin R. Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems. London (UK): McGraw-Hill, 1995.
3. OSNAN, Ibrahim H.; KELLY, James P. Meta-heuristics: Theory & Applications. London (UK): KAP, 1996.
4. CARVALHO, Rafael Lima de; ALMEIDA, Tiago da Silva Almeida; ROCHA, Marcelo Lisboa. Introdução a Metaheurísticas. Palmas: EDUFT, 2020.
5. CORMEN, Thomas H; LEISERSON, Charles E.; RIVEST, Ronald L.; STEIN, Clifford Algoritmos – Teoria e Prática. 3ª Edição. Rio de Janeiro: GEN, 2009.
6. ENGEL, Christoph; GIGERENZER, Gerd. Law and Heuristics. Berlin (BE): Dahlen Workshop Reports, 2004.
7. NUNES, Evandro Barbosa. Otimização Matemática: cálculos dos extremos da função. Dissertação (Mestrado). UFGO, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.bc.ufg.br/teseserver/api/core/bitstreams/9918875b-82de-41f7-b4c7-a9266c51d7e1/content>>. Acesso em: 23 nov. 2023.
8. DENIS, John E; SCHNABEL, Robert B. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Washington (EUA). Siam, 1996.
9. GOLDBARG, Marco Cesar. GOLDBARG, Elizabeth Gouvea; LUNA, Henrique Pacca Loureiro. Otimização Combinatória e meta-heurísticas: algoritmos e aplicações. Rio de Janeiro: Elsevier, 2016.
10. MARTÍ, Rafael; REINELT, Gerhard. The Linear Ordering Problem: Exact and Heuristic Methods in Combinational Optmization. 1º Edição. Springer, 2011.
11. HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. Introdução à pesquisa operacional. 8. Ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.
12. BORTOLOSSI, Humberto José; PAGNONCELLI, Bernardo Kulmig. Uma Introdução a Otimização sob Incerteza. XI Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha. Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: < <http://bernardokp.uai.cl/otimizacao-sob-incerteza.pdf> >. Acesso em: 24 out. 2023.
13. BENATTI, Natalha Cristina da Cruz Machado. Métodos de busca direta para seleção de parâmetros de máquinas de vetores suporte. Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia. UFPR, 2017. Disponível em: <

- <https://eventos.ufpr.br/smne/SMNE2017/paper/viewFile/675/233> >. Acesso em: 25 out. 2023.
14. GABERE, Musa Nur. Simulated Annealing Driven Pattern Search Algorithms for Global Optimization. Universidade do Witwatersrand, 2007. Disponível em: < <https://wiredspace.wits.ac.za/server/api/core/bitstreams/b1e07e69-e41c-41a9-b679-790e6813cbfd/content>>. Acesso em: 23 nov. 2023.
 15. Yang, Xin-She. Flower Pollination Algorithm for Global Optimization. UCNC, 2012. pp 240-249. Disponível em: < <https://arxiv.org/pdf/1312.5673.pdf>>. Acesso em: 30 nov. 2023.
 16. N-D Test Functions S. Disponível em: < http://infinity77.net/global_optimization/test_functions_nd_S.html#go_benchmark.Sc_haffer03>. Acesso em 29 out 2023.
 17. N-D Test Functions R. Disponível em: <http://infinity77.net/global_optimization/test_functions_nd_R.html>. Acesso em: 29 out 2023.
 18. CARNEIRO, Wesley Santos. Sistemas Lineares e Determinantes. UEPB, 2016. Disponível em: <<https://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/12225/1/PDF%20-%20Wesley%20Santos%20Carneiro.pdf>>. Acesso em: 22 out. 2023.
 19. GROSAN, Crina; Abraham Ajith. Multiple solutions for a system of nonlinear equations. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, v. 4, n. 9, sept. 2008. Disponível em: <<https://www.softcomputing.net/ijicic08-ca.pdf>>. Acesso em: 22 out 2023.
 20. SILVA, Maurício Rodrigues. Algoritmo heurístico de busca direta para solução de problemas de programação não linear irrestrita com múltiplos ótimos. XLII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Bento Gonçalves-RS. Disponível em: <<https://www.din.uem.br/~ademir/sbpo/sbpo2010/pdf/72625.pdf>>. Acesso em: 22 out. 2023
 21. KEARFOTT, R. Baker. Abstract generalized bisection and a cost bound. Math. Comput. v. 49, n.179, 1987. Disponível em: <<https://www.ams.org/journals/mcom/1987-49-179/S0025-5718-1987-0890261-9/S0025-5718-1987-0890261-9.pdf>>. Acesso em 22 out. 2023.
 22. SANTOS, Tiara Martini dos. Um estudo sobre a resolução de sistemas não lineares: perspectivas teóricas e aplicações. UNICAMP, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.unicamp.br/Busca/Download?codigoArquivo=503794>>. Acesso em: 23 out. 2023.

23. LATHI, B. P. Sistemas e sinais lineares. Tradução Gustavo Guimarães Parma. 2ª Edição. Porto Alegre: Bookman, 2008.
24. PEDROSO, Lucas Garcia. Sobre o desempenho de métodos de busca direta para minimização irrestrita. UNICAMP, 2005. Disponível em: <<https://repositorio.unicamp.br/Busca/Download?codigoArquivo=502808>>. Acesso em: 31 out. 2023
25. HOOKE, Robert; JEEVES, T. A. "Direct Search" Solution of Numerical and Statical Problems. Pensylvania (EUA), 1960. Disponível em: <<https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/321062.321069>>. Acesso em: 31 out. 2023.
26. MASCHIO, Célio; SANTOS, Antônio Alberto dos; SCHIOZER, Denis J. Aplicação do método simplex no processo de ajuste histórico assistido. Rio Oil & Gas Expo and Conference 2006, UNICAMP, São Paulo. Disponível em: <https://www.unisim.cepetro.unicamp.br/publicacoes/ibp1343_06.pdf>. Acesso em 1º nov. 2023.
27. PERLINGEIRO, Carlos Augusto G. Engenharia de processos: Análise, simulação, otimização e síntese de processos químicos. 1ª Edição. São Paulo: Blucher, 2005.
28. BUENO, Fabrício. Métodos Heurísticos: Teoria e Implementações. IFSC, 2009. Disponível em: <https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/images/b/b7/Tutorial_m%C3%A9todos_heur%C3%ADsticos.pdf>. Acesso em: 02 nov. 2023.
29. MODESTI, Dandara. Algoritmo de otimização global baseado em estratégias de reinício aplicado a problemas com variáveis discretas e mistas. UFSC, 2022. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/242612/PECV1290-D.pdf?sequence=-1&isAllowed=y>>. Acesso em: 08 fev. 2024.
30. Chinneck, John.W. Practical optimization: a gentle introduction. Systems and Computer Engineering), Carleton University, Ottawa. Disponível em: <<https://www.optimization101.org/2020/12/welcome.html>>. Acesso em: 13 fev. 2024.
31. MIKHAIL, E.; ACKERMAN, F. Observations and Least Squares. University Press of America, 1976. 497 p.
32. SARAMANGO, Simone Pereira; STEFFEN JR, Valder. Técnicas Heurísticas de otimização aplicadas em engenharia. UFU, 2009. Disponível em: <<https://seer.ufu.br/index.php/horizontecientifico/article/view/4425/3225>>. Acesso em: 31 mar. 2024.
33. MATOS, Jocksam Gonçalves de. Meta-Heurística e algoritmo estático para o escalonamento de tarefas em computação em nuvens. Dissertação Mestrado UERH/UFERSA, 2015. Disponível em: <<https://ppgcc.ufersa.edu.br/wp-content/uploads/sites/42/2014/09/meta-heur%C3%8dstica-e-algoritmo->

est%3%81tico-para-o-escalonamento-de-tarefas-em-computa%3%87%c3%83o-nas-nuvens.pdf>. Acesso em: 31. mar 2024.

Apêndice A – Funções de Teste

1. Funções de Teste

Os problemas de otimização descritos nesta seção foram utilizados nos testes do ABA, e serão apresentados na seguinte forma: primeiro será descrito a função do problema, que contém também a restrição do espaço de busca, seguido da quantidade de mínimos locais e a indicação da localização do ótimo global. Por fim, nos casos de problemas que possuem até 2 dimensões, é apresentado o gráfico da função objetivo. O gráfico de convergência de todas as funções também é apresentado, sendo que o eixo y traz o logaritmo do valor da aproximação dos melhores candidatos em relação ao ótimo global, e o x apresenta a quantidade de movimentações realizadas para que algum indivíduo alcance desempenho que seja admitido pelo critério de parada estabelecido. Os valores considerados para elaboração dos gráficos de convergência são referentes ao primeiro teste de cada problema de otimização ou sistema de equação.

1.1 Aluffi-Pentini's Problem (AP)

$$\begin{aligned} \min f(x) &= 0.25x_1^4 - 0.5x_1^2 + 0.1x_1 + 0.5x_2^2, \\ \text{sujeito a } &-10 \leq x_1, x_2 \leq 10. \end{aligned}$$

Esta função possui dois mínimos locais, um deles é o global com $f(x^*) \approx -0.3523$ localizado em $(-1.0465, 0)$ [14]. O gráfico da função objetivo é exibido a seguir:

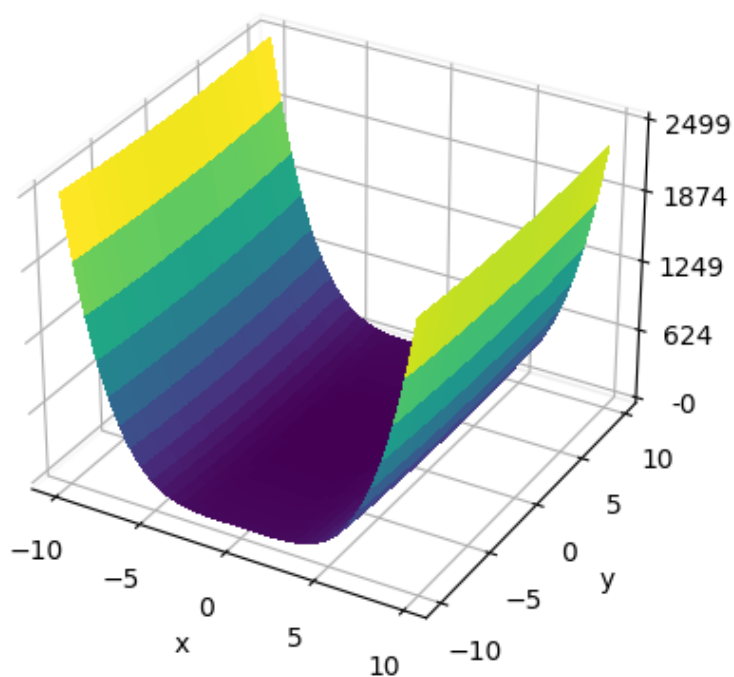


Figura 4 - Gráfico do problema Aluffi-Pentini's.

Fonte: O autor, 2023.

O gráfico de convergência da função objetivo é exibido a seguir:

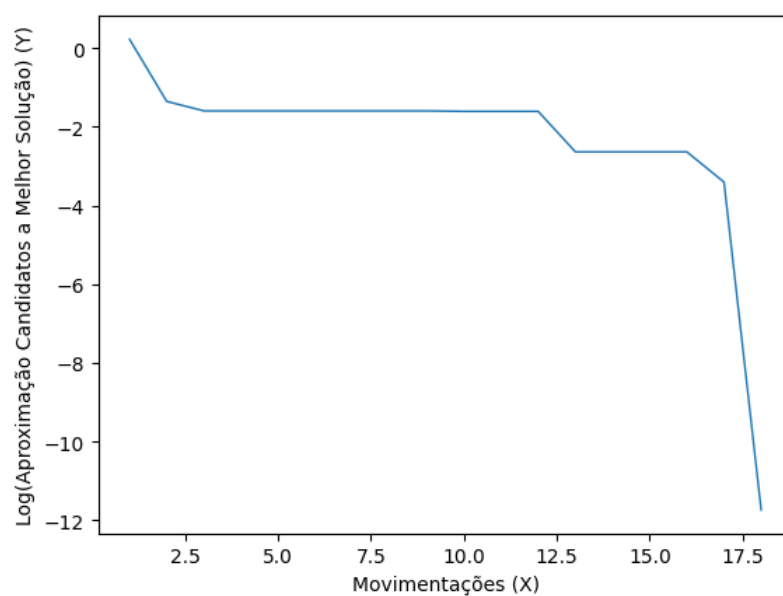


Figura 5 - Gráfico de convergência do problema Aluffi-Pentini's.

Fonte: O autor, 2024.

1.2 Becker and Lago Problem (BL)

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (|x_1| - 5)^2 + (|x_2| - 5)^2, \\ \text{sujeito a } &-10 \leq x_1, x_2 \leq 10. \end{aligned}$$

Nesta função, o número de mínimos locais é desconhecido, mas o mínimo global é encontrado em $x^* = (0, 0)$ com $f(x^*) = 0$ [14]. O gráfico da função objetivo é exibido a seguir:

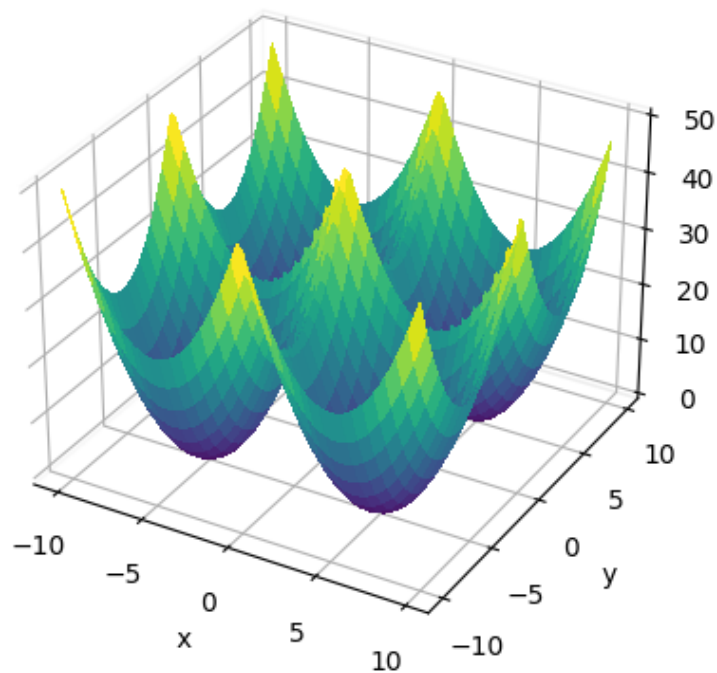


Figura 6 - Gráfico do problema Becker and Lago.

Fonte: O autor, 2023.

O gráfico de convergência da função objetivo é exibido a seguir:

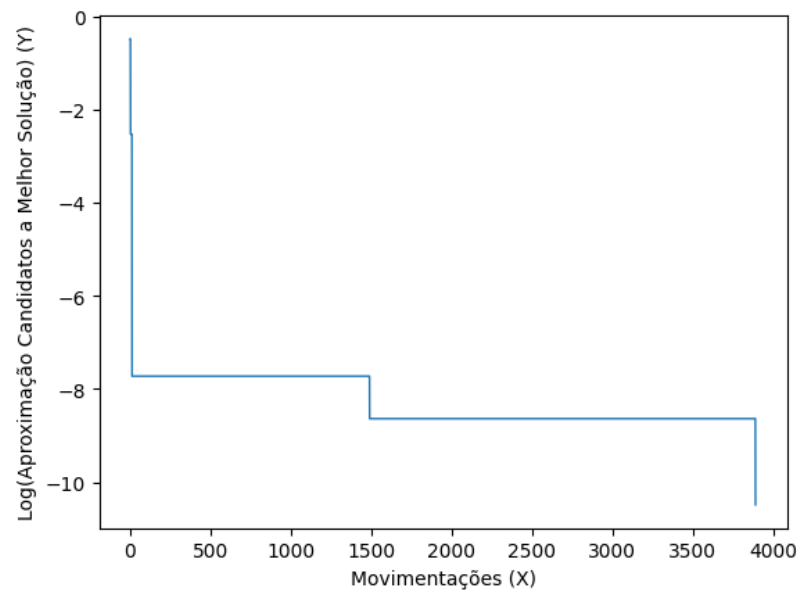


Figura 7 - Gráfico de convergência do problema Becker and Lago.

Fonte: O autor, 2024.

1.3 Bohachevsky 1 Problem (B1)

$$\min f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 0.3 \cos(3\pi x_1) - 0.4 \cos(4\pi x_2) + 0.7,$$

sujeito a $-50 \leq x_1, x_2 \leq 50$.

Nesta função, o número de mínimos locais é desconhecido, mas o mínimo global é encontrado em $x^* = (0, 0)$ com $f(x^*) = 0$ [14]. O gráfico da função objetivo é exibido a seguir:

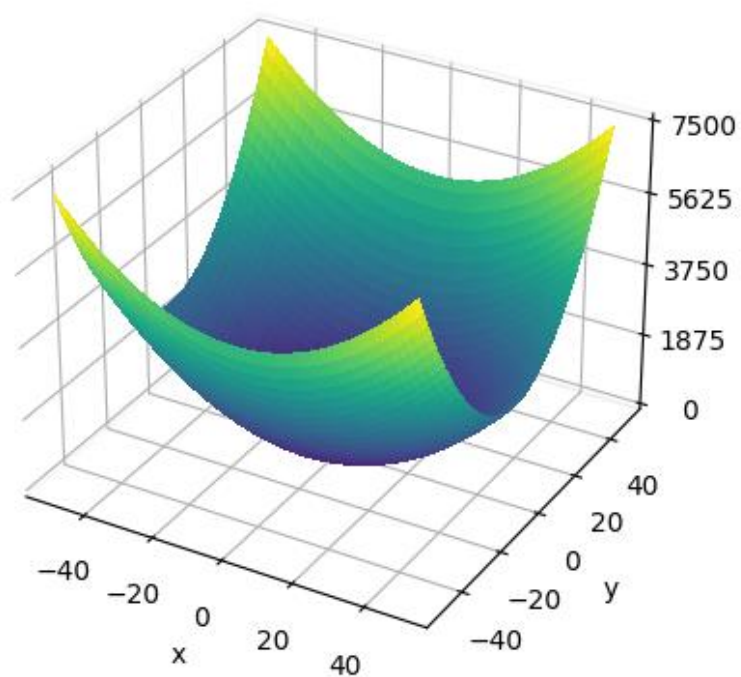


Figura 8 - Gráfico do problema Bohachevsky 1.

Fonte: O autor, 2023.

O gráfico de convergência da função objetivo é exibido a seguir:

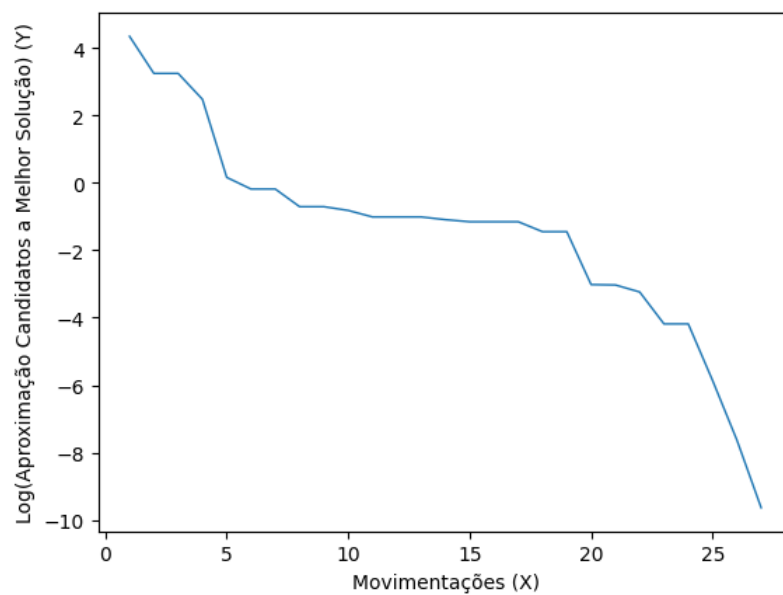


Figura 9 - Gráfico de convergência do problema Bohachevsky 1.

Fonte: O autor, 2024.

1.4 Bohachevsky 2 Problem (B2)

$$\min f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 0.3 \cos(3\pi x_1) \cos(4\pi x_2) + 0.3,$$

sujeito a $-50 \leq x_1, x_2 \leq 50$.

Nesta função, o número de mínimos locais é desconhecido, mas o mínimo global é encontrado em $x^* = (0, 0)$ com $f(x) = 0$ [14]. O gráfico da função objetivo é exibido a seguir:

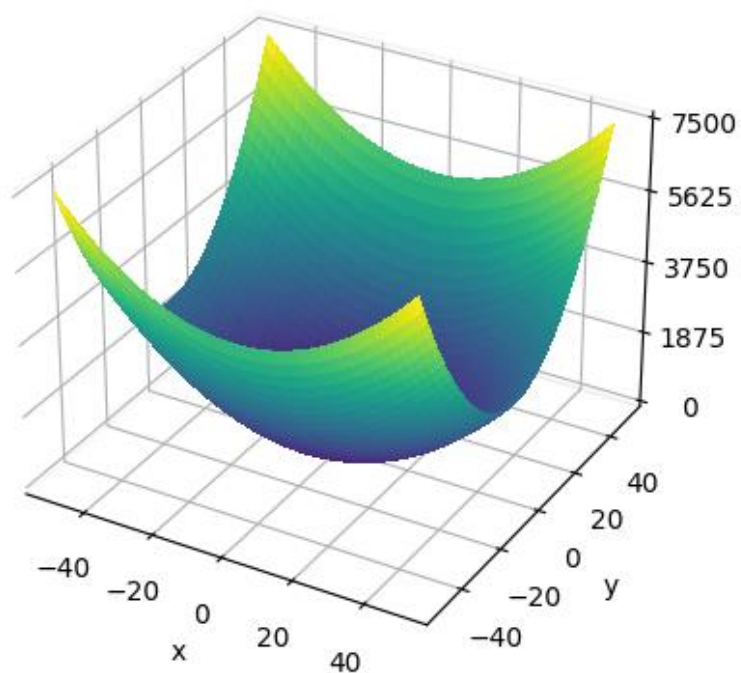


Figura 10 - Gráfico do problema Bohachevsky 2 Problem.

Fonte: O autor, 2023.

O gráfico de convergência da função objetivo é exibido a seguir:

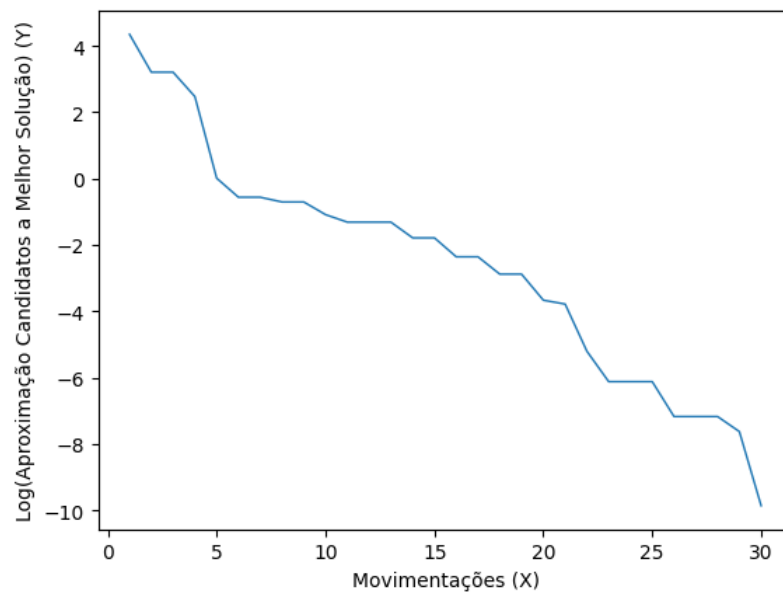


Figura 11 - Gráfico de convergência do Bohachevsky 2 Problem.

Fonte: O autor, 2024.

1.5 Camel Back–3 Three Hump Problem (CB3)

$$\min f(x) = 2x_1^2 - 1.05x_1^4 + \frac{1}{6}x_1^6 + x_1x_2 + x_2^2,$$

sujeito a $-5 \leq x_1, x_2 \leq 5$.

Esta função possui três mínimos locais, um deles é o global encontrado em $x^* = (0, 0)$ com $f(x^*) = 0$ [14]. O gráfico da função objetivo é exibido a seguir:

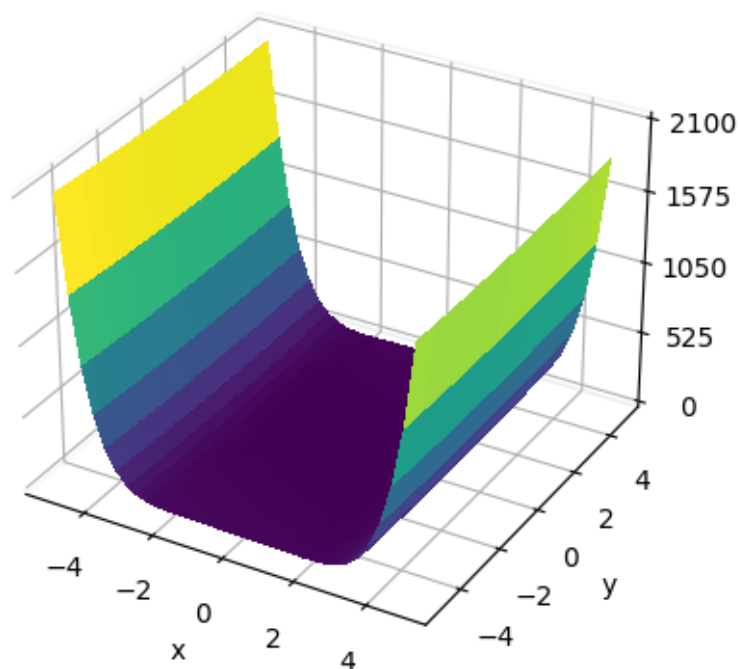


Figura 12 - Gráfico do problema Camel Back-3 Three Hump.

Fonte: O autor, 2023.

O gráfico de convergência da função objetivo é exibido a seguir:

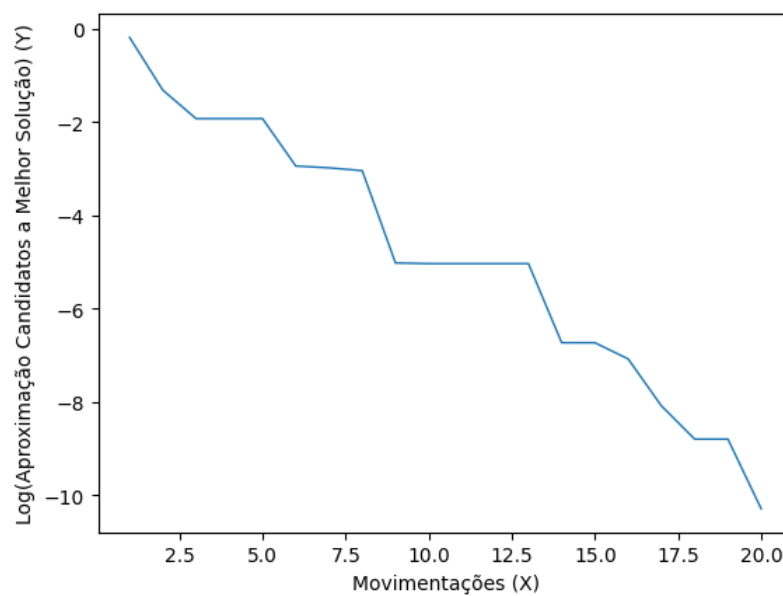


Figura 13 - Gráfico de convergência do problema Camel Back-3 Three Hump.

Fonte: O autor, 2024.

1.6 De Jong Problem (DJ)

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^d x_i^2,$$

sujeito a $-5.12 \leq x_i \leq 5.12, i \in \{1, 2, \dots, d\}$,
testes realizados com $d = 256$.

Esta função possui o mínimo global localizado em $x^* = (0, 0, \dots, 0)$ com $f(x) = 0$ [15]. O gráfico de convergência da função objetivo é exibido a seguir:

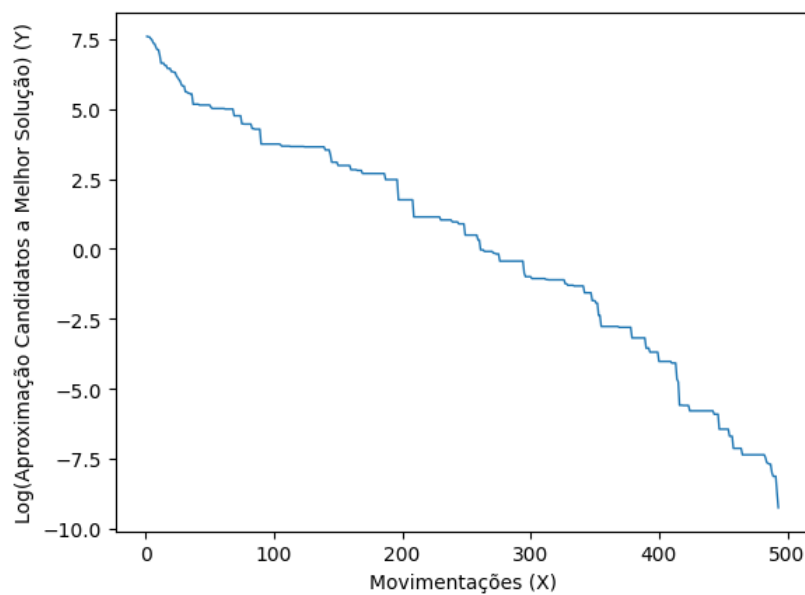


Figura 14 - Gráfico de convergência do problema De Jong Problem.
Fonte: O autor, 2024.

1.7 Powell's Quadratic Problem (PWQ)

$$\min f(x) = (x_1 + 10x_1)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$$

sujeito a $-10 \leq x_i \leq 10, i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Esta função é unimodal, onde o mínimo global é encontrado em $x^* = (0, 0, 0, 0)$ com $f(x) = 0$ [14]. O gráfico de convergência da função objetivo é exibido a seguir:

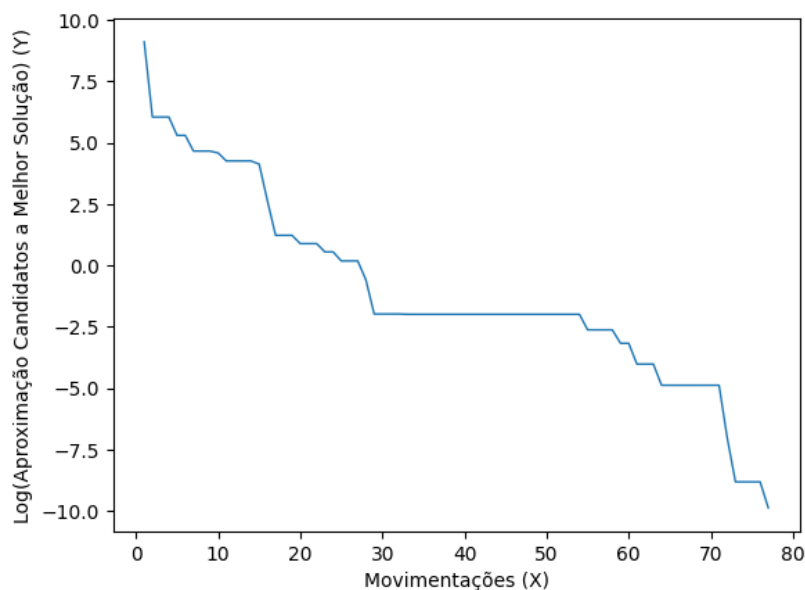


Figura 15 - Gráfico de convergência do problema Aluffi-Pentini's.

Fonte: O autor, 2024.

1.8 Rastrigin Problem (RG)

$$\min f(x) = 10d + \sum_{i=1}^d [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)]$$

sujeito a $-5.12 \leq x_i \leq 5.12, i \in \{1, 2, \dots, d\}$,
testes realizados com $d = 5$.

Esta função possui o mínimo global localizado em $x^* = (0, 0, \dots, 0)$ com $f(x) = 0$ [14]. O gráfico de convergência da função objetivo é exibido a seguir:

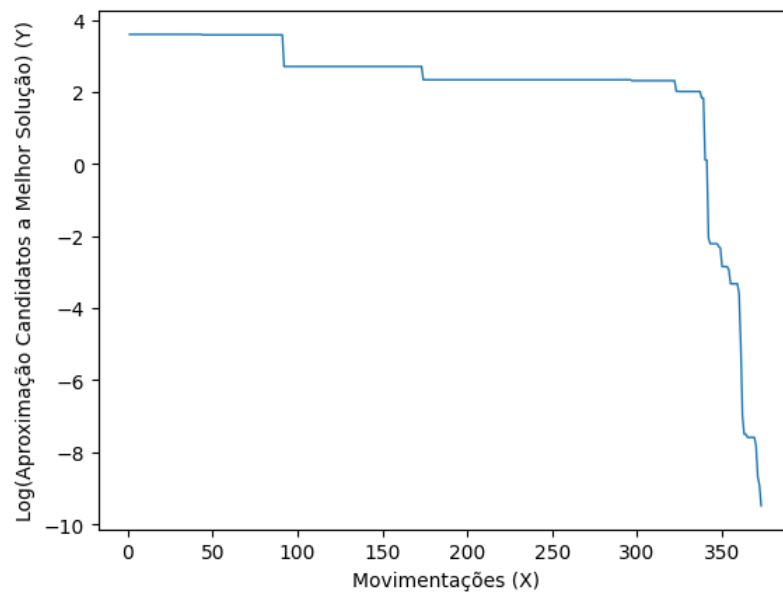


Figura 16 - Gráfico de convergência do problema Rastrigin Problem.

Fonte: O autor, 2024.

1.9 Rotated Ellipse 2 (RE2)

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2, \\ \text{sujeito a } &-500 \leq x_1, x_2 \leq 500. \end{aligned}$$

Nesta função, o número de mínimos locais é desconhecido, mas o mínimo global é encontrado em $x^* = (0, 0)$ com $f(x) = 0$ [17]. O gráfico da função objetivo é exibido a seguir:

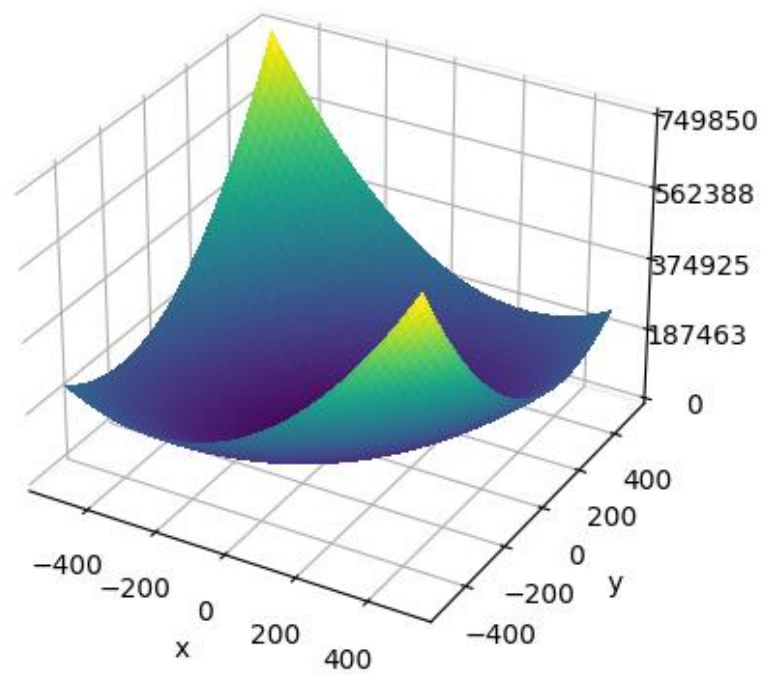


Figura 17 - Gráfico do problema Rotated Ellipse 2.

Fonte: O autor, 2023.

O gráfico de convergência da função objetivo é exibido a seguir:

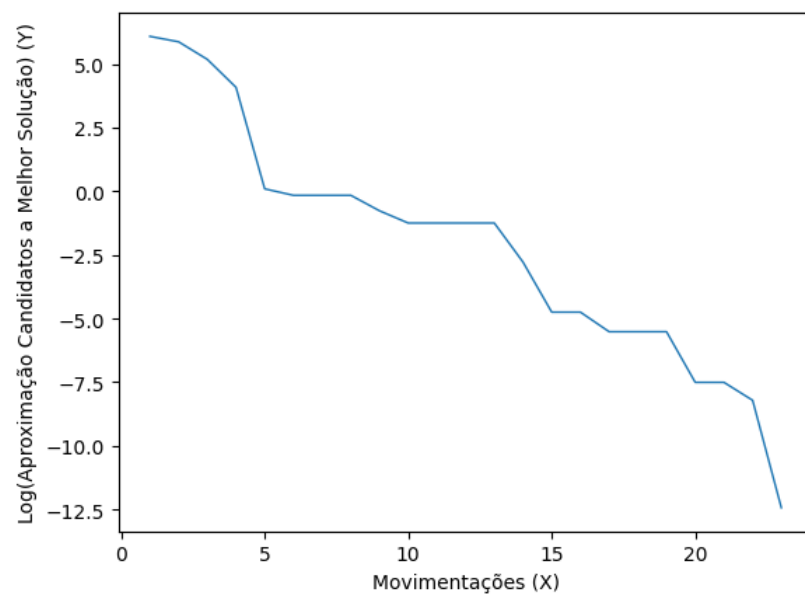


Figura 18 - Gráfico de convergência do problema Rotated Ellipse 2.

Fonte: O autor, 2024

1.10 Schaffer 1 Problem (SF1)

$$\min f(x) = 0.5 + \frac{\left(\sin\sqrt{x_1^2 - x_2^2}\right)^2 - 0.5}{\left(1 + 0.001(x_1^2 + x_2^2)\right)^2},$$

sujeito a $-100 \leq x_1, x_2 \leq 100$.

Nesta função, o número de mínimos locais é desconhecido, mas o mínimo global é encontrado em $x^* = (0, 0)$ com $f(x) = 0$ [14]. O gráfico da função objetivo é exibido a seguir:

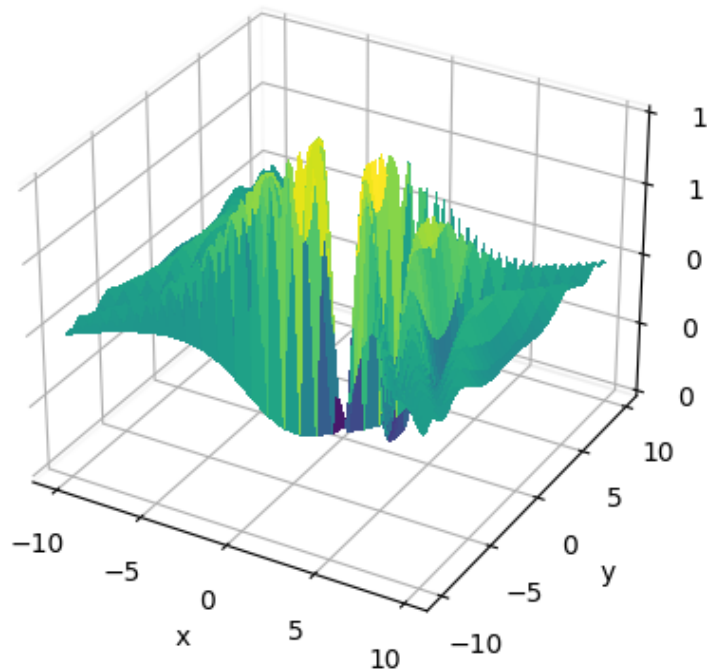


Figura 19 - Gráfico do problema Schaffer 1.

Fonte: O autor, 2023.

O gráfico de convergência da função objetivo é exibido a seguir:

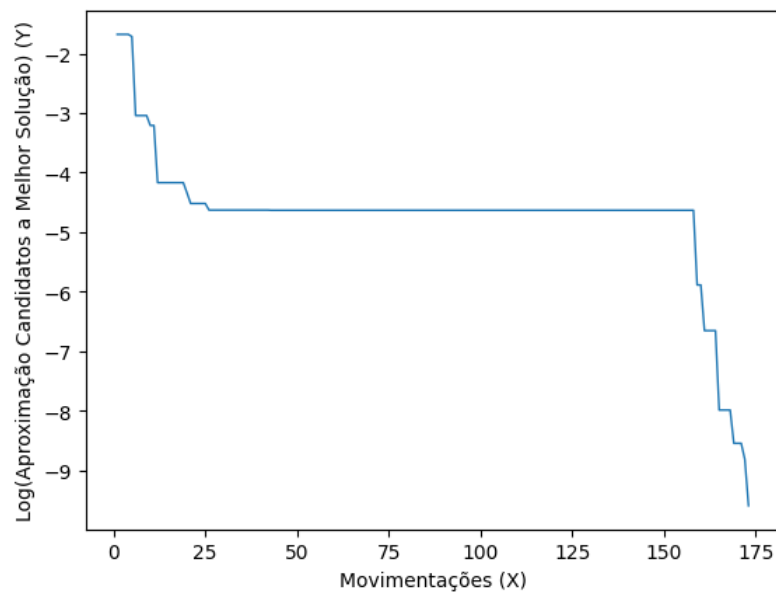


Figura 20 - Gráfico de convergência do problema Rotated Ellipse 2.

Fonte: O autor, 2024

1.11 Schaffer 4 Problem (SF4)

$$\min f(x) = 0.5 + \frac{\cos^2(\sin(x_1^2 + x_2^2)) - 0.5}{(1 + 0.001(x_1^2 + x_2^2))^2},$$

sujeito a $-100 \leq x_1, x_2 \leq 100$.

Nesta função, o mínimo global está localizado em $x^* = (0, 1.2531)$, com $f(x) = 0.2925$ [16].
O gráfico da função objetivo é exibido a seguir:

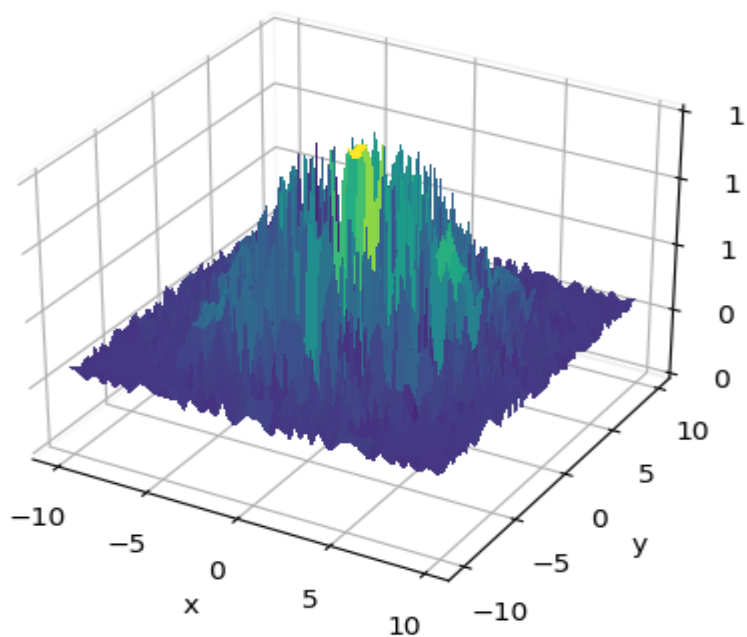


Figura 21 - Gráfico do problema Schaffer 2.

Fonte: O autor, 2023.

O gráfico de convergência da função objetivo é exibido a seguir:

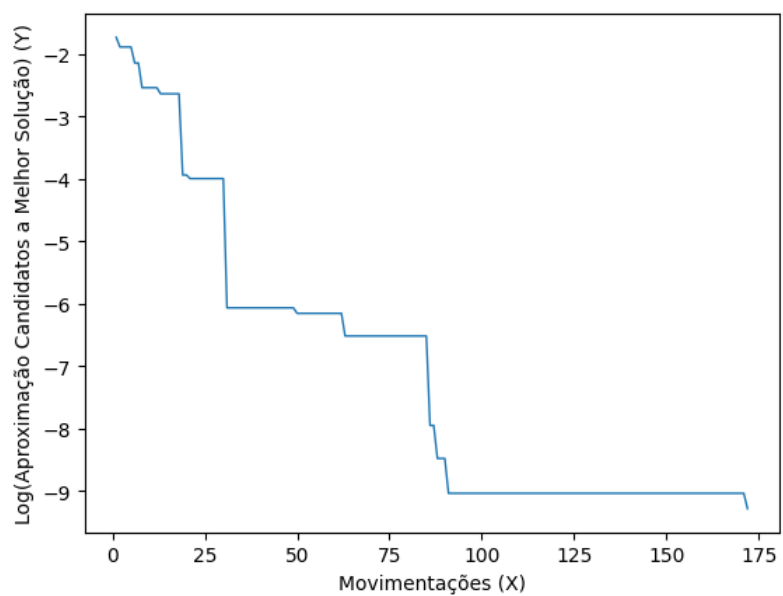


Figura 22 - Gráfico de convergência do problema Rotated Ellipse 2.

Fonte: O autor, 2024

1.12 Six Hump Camel (SH)

$$\min f(x) = 4x_1^2 + x_1x_2 - 4x_2^2 - 2.1x_1^4 + 4x_2^4 + \frac{1}{3}x_1^6,$$

sujeito a $-5 \leq x_1, x_2 \leq 5$.

Nesta função, o ótimo global está localizado em $x^* = (0.0898, -0.7126)$, com $f(x) = -1.0316$

[16]. O gráfico da função objetivo é exibido a seguir:

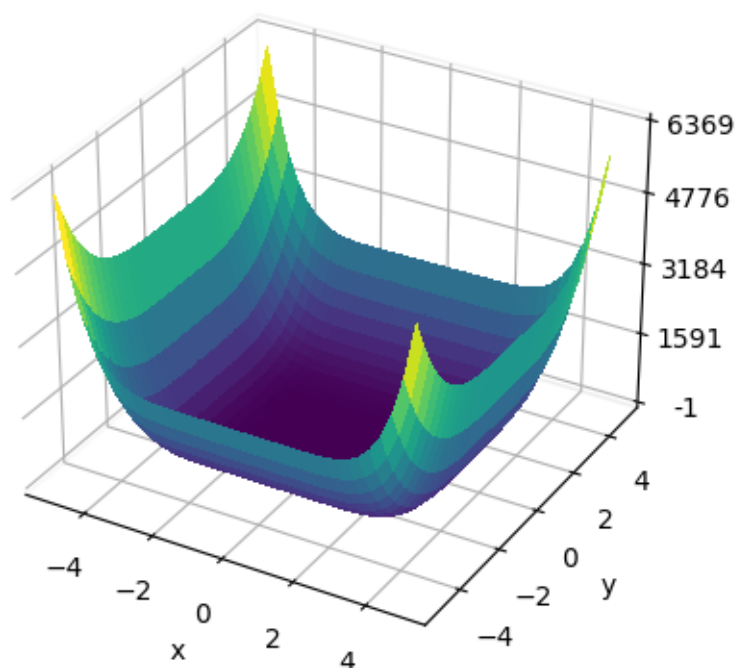


Figura 23 - Gráfico do problema Six Hump Camel.

Fonte: O autor, 2023.

O gráfico de convergência da função objetivo é exibido a seguir:

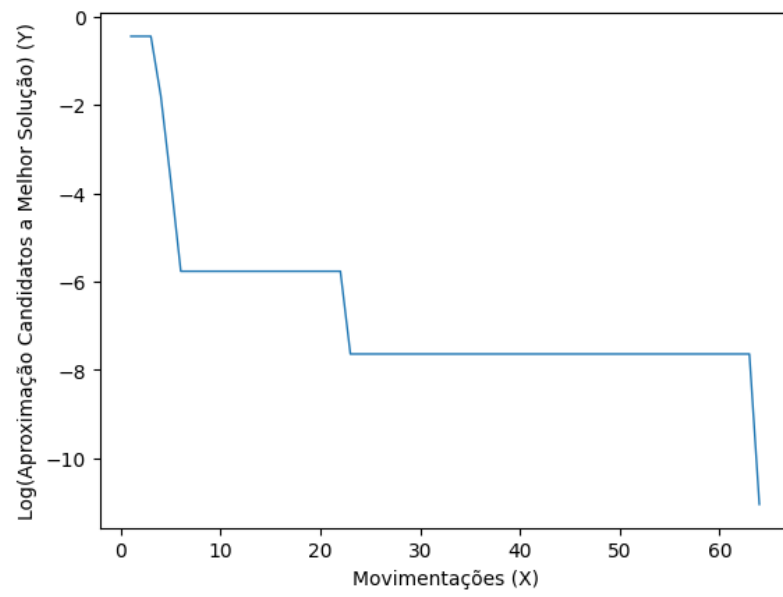


Figura 24 - Gráfico de convergência do problema Six Hump Camel.

Fonte: O autor, 2024

O gráfico que representa este sistema em formato de problema de otimização será apresentado a seguir:

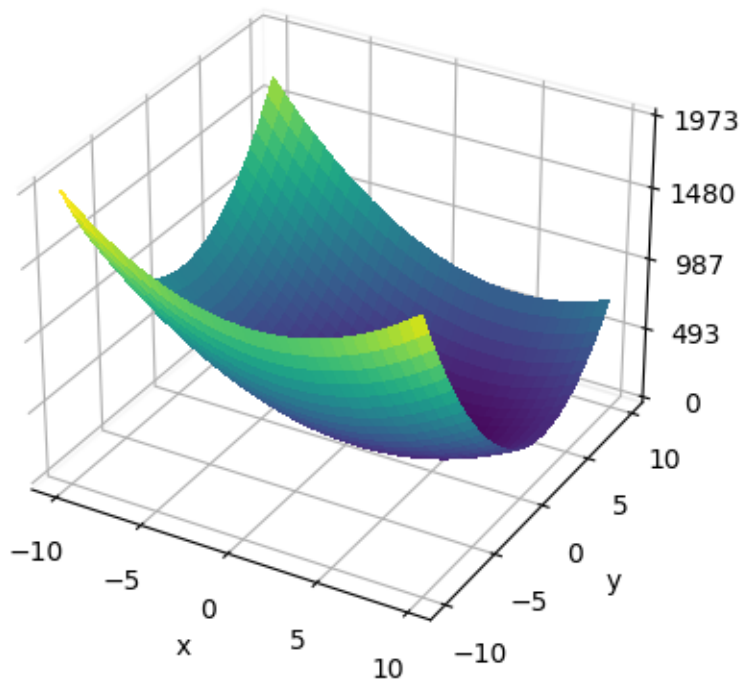
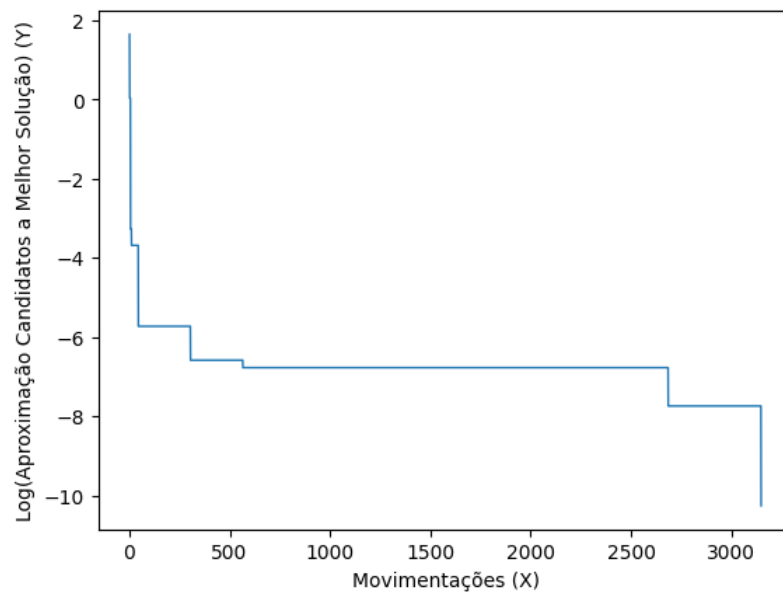


Figura 25 - Gráfico Sistema 01.

Fonte: O autor, 2023.

O gráfico de convergência do sistema em formato de problema de otimização é exibido a seguir:



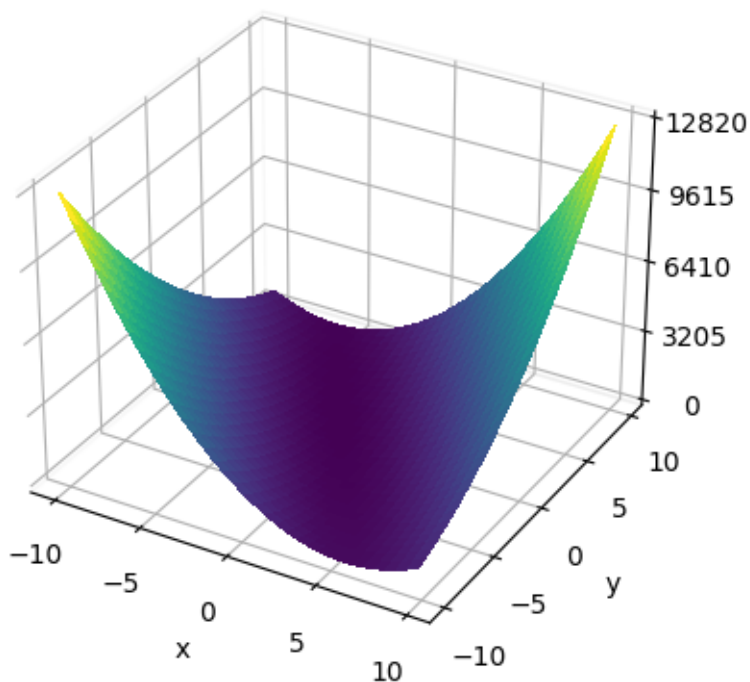


Figura 27 - Gráfico Sistema 02.

Fonte: O autor, 2023.

O gráfico de convergência do Sistema de Equação Linear em formato de problema de otimização é exibido a seguir:

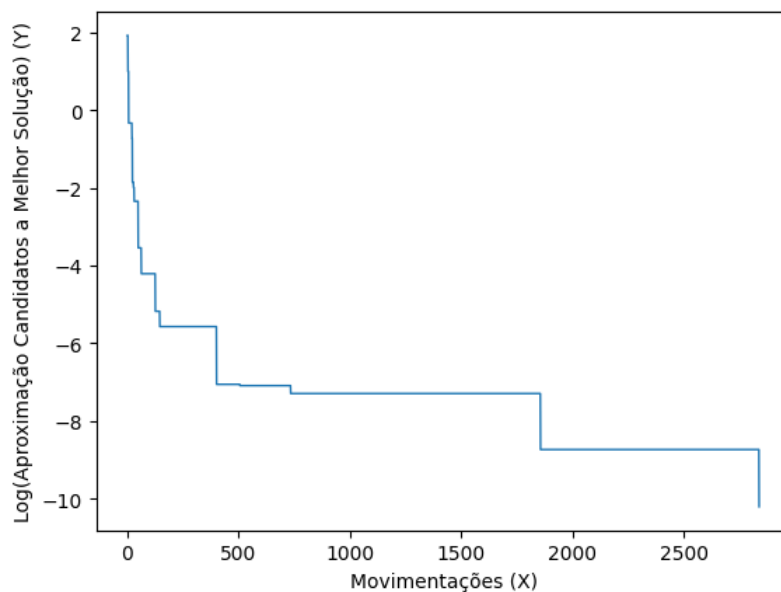


Figura 28 - Gráfico de convergência do Sistema 02.

Fonte: O autor, 2024.

1.3 Sistema 03

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad [18]$$

O Sistema de Equação Linear acima foi convertido para um problema de otimização, representado pela função objetivo a ser minimizada:

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3)^2 + (3x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (x_1 + 5x_2 - 2x_3)^2$$

O gráfico de convergência do Sistema de Equação Linear em formato de problema de otimização é exibido a seguir:

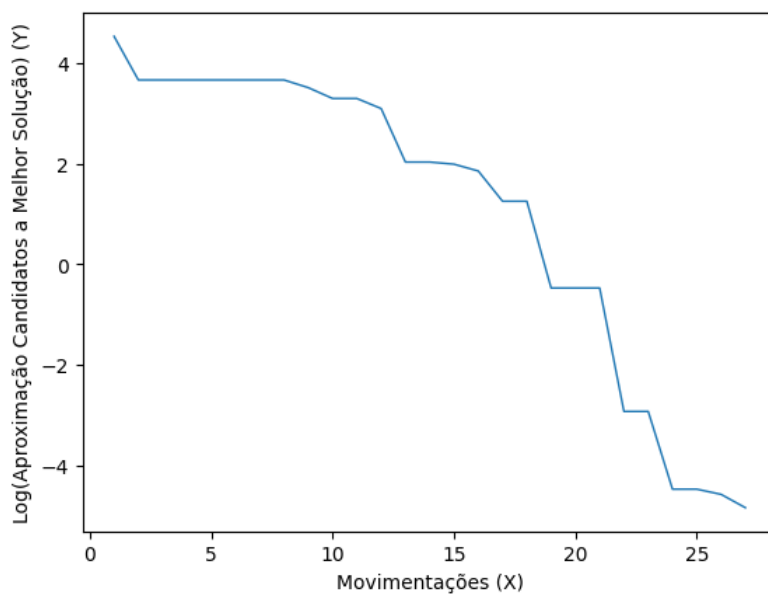


Figura 29 - Gráfico de convergência do Sistema 03.

Fonte: O autor, 2024.

1.4 Sistema 04

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad [18]$$

O Sistema de Equação Linear acima foi convertido para um problema de otimização, representado pela função objetivo a ser minimizada:

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (x_1 - 3x_2 - 2x_3)^2 + (2x_1 - x_2 - x_3)^2$$

O gráfico de convergência do Sistema de Equação Linear em formato de problema de otimização é exibido a seguir:

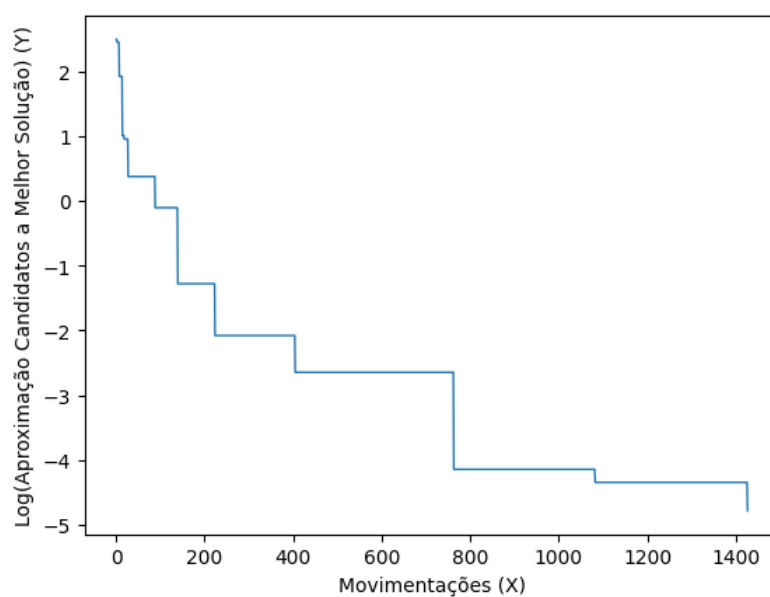


Figura 30 - Gráfico de convergência do Sistema 04.

Fonte: O autor, 2024.

Apêndice C – Sistemas de Equações Não Lineares

1. Sistemas de Equações Não Lineares

Quando em um sistema não for possível atender a propriedade da homogeneidade, em que para um número real ou imaginário k , se uma entrada aumentar k vezes, seu efeito também aumentará k vezes, este pode ser considerado um sistema não linear. A análise de sistemas deste tipo tende a ser mais difícil e pode aparecer de tantas maneiras que descrevê-los de uma única forma matemática torna-se quase impossível [23]. Os sistemas lineares podem ter apenas uma, duas ou mais soluções, mas em uma quantidade finita de soluções [18]. Em síntese, os sistemas não lineares seguem o mesmo padrão dos sistemas lineares, entretanto, os valores de saída não são proporcionais aos de entrada.

1.1 Sistema 05

$$\begin{cases} 4x_1^3 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 42x_1 - 14 = 0 \\ 4x_2^3 + 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 26x_2 - 22 = 0 \end{cases} \quad [19]$$

O Sistema de Equação Não Linear acima foi convertido para um problema de otimização, representado pela função objetivo a ser minimizada:

$$\min f(x_1, x_2) = (4x_1^3 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 42x_1 - 14)^2 + (4x_2^3 + 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 26x_2 - 22)^2$$

O gráfico que representa este Sistema de Equação Não Linear em formato de problema de otimização será apresentado a seguir:

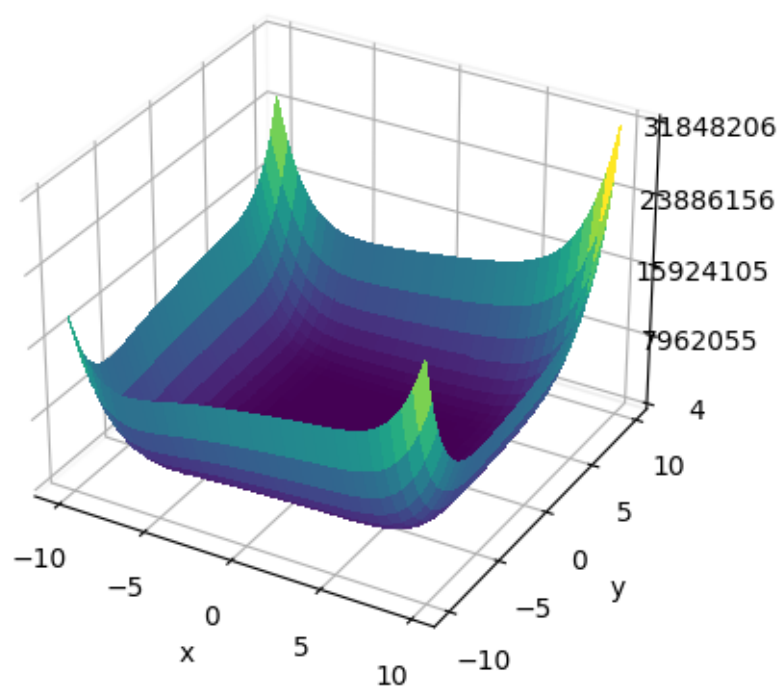


Figura 31 - Gráfico Sistema 05.

Fonte: O autor, 2023.

O gráfico de convergência do Sistema de Equação Não Linear em formato de problema de otimização é exibido a seguir:

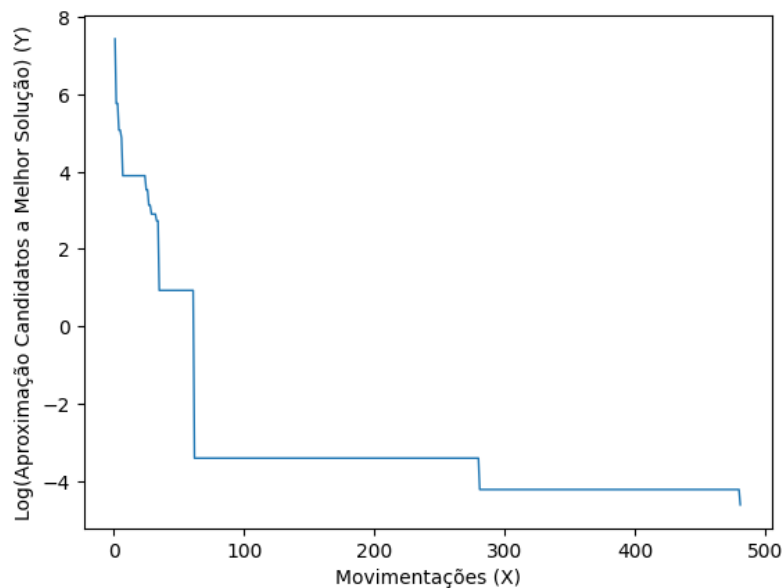


Figura 32 - Gráfico de convergência do Sistema 05.

Fonte: O autor, 2024.

1.2 Sistema 06

$$\begin{cases} x_1^3 - 3x_1^2 - x_2 = -2 \\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4 \end{cases} [20]$$

O Sistema de Equação Não Linear acima foi convertido para um problema de otimização, representado pela função objetivo a ser minimizada:

$$\min f(x_1, x_2) = (x_1^3 - 3x_1^2 - x_2 + 2)^2 + ((x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4)^2$$

O gráfico que representa este sistema em formato de problema de otimização será apresentado a seguir:

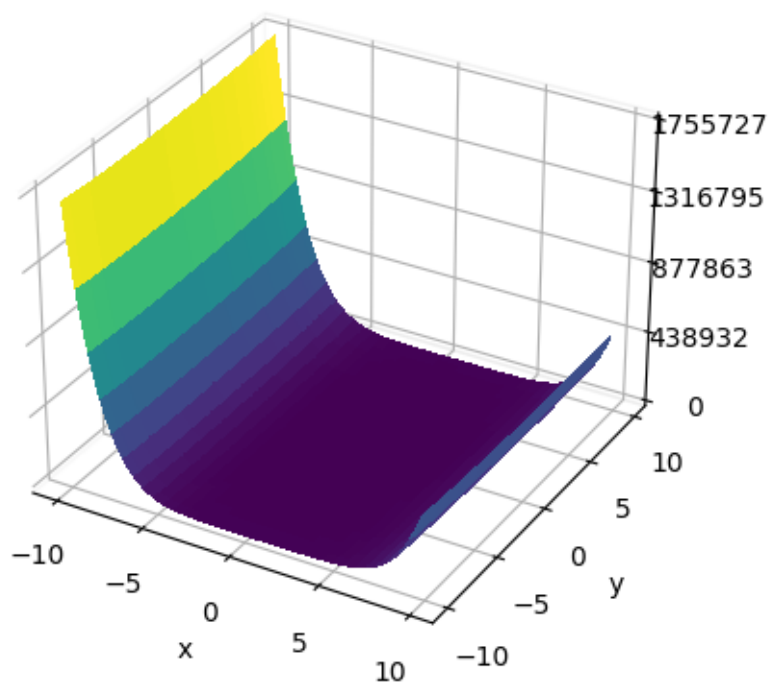


Figura 33 - Gráfico Sistema 06.

Fonte: O autor, 2023.

O gráfico de convergência do Sistema de Equação Não Linear em formato de problema de otimização é exibido a seguir:

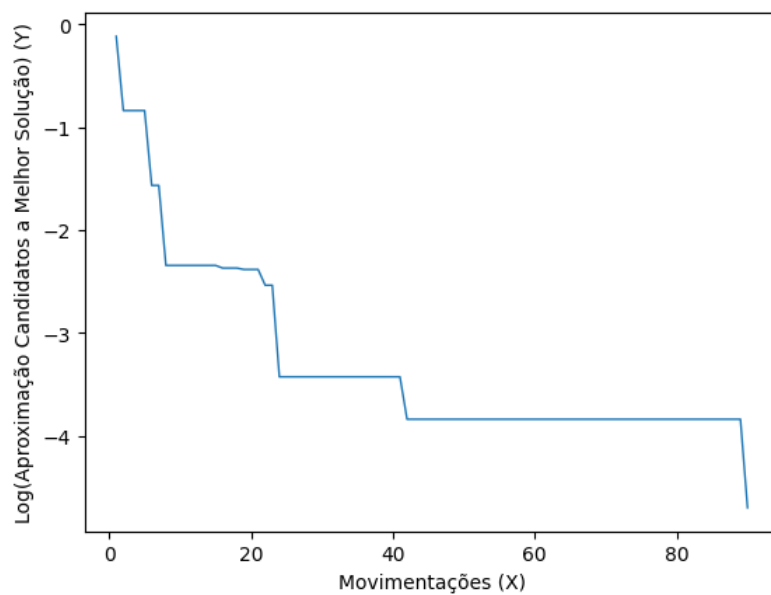


Figura 34 - Gráfico de convergência do Sistema 06.

Fonte: O autor, 2024.

1.3 Sistema 07

$$\begin{cases} 5x_1^9 - 6x_1^5x_2^2 + x_1x_2^4 + 2x_1x_3 = 0 \\ -2x_1^6x_2 + 2x_1^2x_2^3 + 2x_2x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 0.2656 = 0 \end{cases} \quad [21]$$

O Sistema de Equação Não Linear acima foi convertido para um problema de otimização, representado pela função objetivo a ser minimizada:

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = (5x_1^9 - 6x_1^5x_2^2 + x_1x_2^4 + 2x_1x_3)^2 + (-2x_1^6x_2 + 2x_1^2x_2^3 + 2x_2x_3)^2 + (x_1^2 + x_2^2 - 0.2656)^2$$

O gráfico de convergência do Sistema de Equação Não Linear em formato de problema de otimização é exibido a seguir:

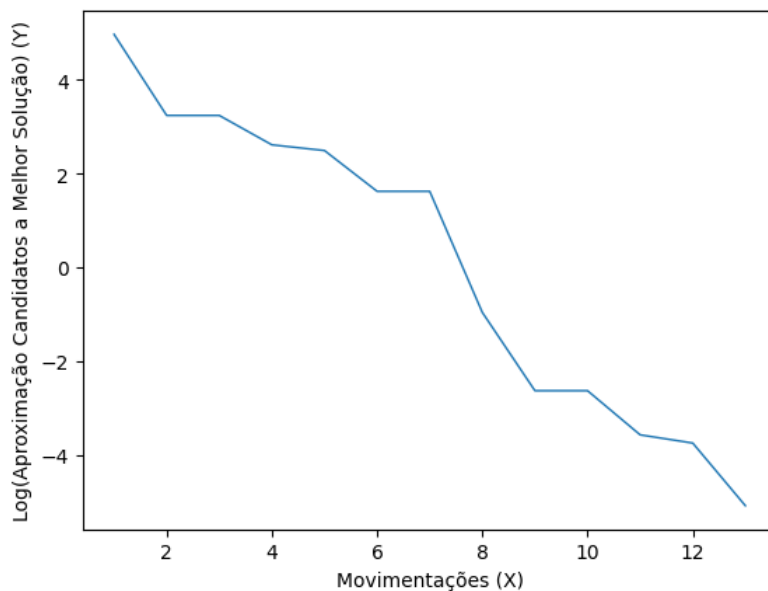


Figura 35 - Gráfico de convergência do Sistema 07.

Fonte: O autor, 2024.

1.4 Sistema 08

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - 0.5 = 0 \\ x_1^2 - 81 + (x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 = 0 \\ \exp(-x_1x_2) + 20x_3 + \frac{(10\pi-3)}{3} \end{cases} [22]$$

O Sistema de Equação Não Linear acima foi convertido para um problema de otimização, representado pela função objetivo a ser minimizada:

$$\min f(x_1, x_2, x_3,) = (3x_1 - \cos(x_2x_3) - 0.5)^2 + (x_1^2 - 81 + (x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06)^2 + \left(\exp(-x_1x_2) + 20x_3 + \frac{(10\pi-3)}{3}\right)^2$$

O gráfico de convergência do Sistema de Equação Não Linear em formato de problema de otimização é exibido a seguir:

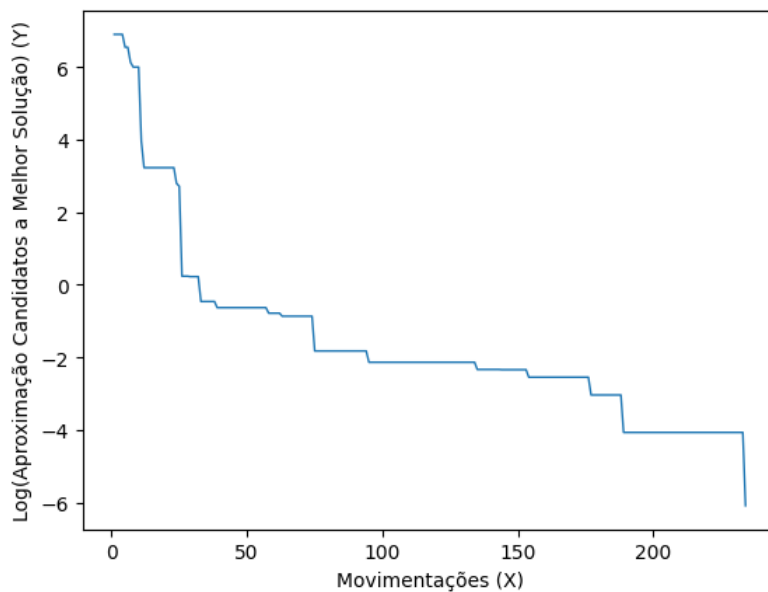


Figura 36 - Gráfico de convergência do Sistema 08.

Fonte: O autor, 2024.

