UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS

JOILSON SENA DE SOUSA

ÁLGEBRA BOOLEANA: HISTÓRICO E APLICAÇÕES

Santarém-Pará
2018

JOILSON SENA DE SOUSA

ÁLGEBRA BOOLEANA: HISTÓRICO E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Ciências Exatas para obtenção do título de Licenciado em Matemática e Física; Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação.

Orientador: Prof. Dr. Cassio André Sousa da Silva

Santarém-Pará
2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFOPA

S725a Sousa, Joilson Sena de

Álgebra booleana: histórico e aplicações / Joilson Sena de Sousa. – Santarém, 2018.

35 f.

Inclui bibliografias.

Orientador Cassio André Sousa da Silva.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Ciências Exatas, Curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, Santarém, 2018.

1. Álgebra Booleana. 2. Circuitos lógicos. 3. Lógica simbólica e matemática. I. Silva, Cassio André Sousa da, *orient*. II. Título.

CDD: 23 ed. 511.324

Bibliotecário-Documentalista: Mayco Ferreira Chaves – CRB/2-1357

JOILSON SENA DE SOUSA

ÁLGEBRA BOOLEANA: HISTÓRICO E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Ciências Exatas para obtenção do título de Licenciado em Matemática e Física; Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação.

Orientador: Prof. Dr. Cassio André Sousa da Silva

Monografia defendida e aprovada em 05/12/18 pela comissão julgadora:

Cassio André Sousa da Silva

Prof. Dr. Cassio André Sousa da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Oeste do Pará

Mario Tanaka Filho

Prof. Dr. Mário Tanaka Filho
Universidade Federal do Oeste do Pará

Miguel Angelo Moraes de Sousa

Prof. Me. Miguel Angelo Moraes de Sousa
Universidade Federal do Oeste do Pará

Dedico a Deus e à minha família.

AGRADECIMENTOS

** À Deus por conceder saúde e força para concluir mais este capítulo de minha vida*.

** À minha família pelas orações e apoio durante todo o percurso.*

** À minha esposa Maria Ivanubia pelos dias em que se fez meu alicerce e porto seguro.*

** À meu amigo Dennison Carvalho por me incentivar a ingressar na faculdade quando eu acreditava ser tarde demais.*

** À minha amiga Krisna de Jesus por me fazer desistir de desistir quando me senti fraco frente as dificuldades do caminho.*

** Ao meu ilustre professor doutor Cássio André Sousa da Silva que me orientou neste trabalho e serviu de exemplo durante todo o curso.*

** Um agradecimento especial à todos os professores que colocaram a minha formação a frente de seus egos.*

** E por fim agradeço ao instituto ICED e ao PCE da Universidade Federal do Oeste do Pará como um todo por me proporcionar a oportunidade de concluir um curso de graduação a nível superior.*

RESUMO

Este trabalho apresenta um breve histórico da álgebra booleana e como ela pode ser aplicada buscando a automatização de máquinas e sistemas digitais. Para isso, mostra-se com Sócrates, Platão e Aristóteles, a origem da Lei do pensamento que fundamentou os estudos de George Boole, em seguida é apresentado, de forma simples, o desenvolvimento da linguagem própria da álgebra booleana com a utilização das variáveis lógicas 0 e 1, dos conectivos lógicos, das propriedades que geram as funções booleanas, das portas lógicas que descrevem os comandos através de circuitos lógicos e exemplos da utilização da álgebra booleana em situações do dia a dia.

Para mostrar a simplicidade e eficácia da álgebra booleana adota-se uma sequência hereditária com explicações e demonstrações passo a passo da base de seu desenvolvimento buscando uma melhor apresentação que permita ao leitor percorrer toda a sequência sem perder o entendimento sobre a lógica booleana. O trabalho também apresenta, a forma com que o desejo de George Boole em descrever um pensamento humano como equação matemática transformou a lei do pensamento em álgebra, a álgebra em Circuitos lógicos, os circuitos lógicos em comandos que permitem que as máquinas e sistemas digitais excutem ações pré-programadas e como essas ações são aplicadas em máquinas e sistemas digitais.

PALAVRAS – CHAVE: George Boole. Álgebra Booleana. Circuitos Lógicos.

ABSTRACT

This paper presents a brief history of Boolean algebra and how it can be applied for the automation of digital machines and systems. For this, it was shown with Socrates, Plato and Aristotle, the origin of the Law of thought that founded the studies of George Boole, then is presented, in a simple way, the development of the language proper of Boolean algebra with the use of logical variables 0 and 1, the logical connectives, the properties that generate the Boolean functions, the logic gates that describe the commands through logic circuits and examples of the use of Boolean algebra in day-to-day situations.

To show the simplicity and effectiveness of Boolean algebra, a hereditary sequence was adopted with explanations and step-by-step demonstrations of the basis of its development, seeking a better presentation that allows the reader to traverse the whole sequence without losing understanding about Boolean logic. The paper also presents how George Boole's desire to describe a human thought as a mathematical equation has transformed the law of thought into algebra, algebra in Logical Circuits, logical circuits in commands that allow digital machines and systems to execute preprogrammed actions and how these actions are applied in digital machines and systems.

KEYWORDS: George Boole. Boolean Algebra. Logical Circuits.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 A lógica antes de George Boole

O reconhecimento de uma verdade absoluta foi um tema enfrentado pelo filósofo Sócrates (469-399 a.C) na Grécia antiga, enfrentamento esse que contribuiu para sua morte visto que ele desafiava os sábios da época buscando mostrar-lhes que nenhum deles, nem mesmo o próprio Sócrates, detinha o conhecimento absoluto sobre o que era certo ou errado em relação a temas como amor, justiça, política, virtude e muitos outros temas que regiam o convívio de uma sociedade. (LOURENÇO et al., 2007, p. 47).

O que Sócrates questionava eram as afirmações sem qualquer tipo de análise ou investigação, afirmações dadas como verdadeiras simplesmente pelo mérito ou posição de quem as afirmava. Sócrates percebia a necessidade de caminhos que demonstrassem que uma afirmação era verdadeira ou falsa baseada em características da própria afirmação e essa necessidade foi atendida por seu discípulo Platão (428-348 a.C) que escreveu diálogos de contraposição de pensamentos entre personagens diferentes e aplicou nesses contextos o método de investigação sugerido por Sócrates para identificar a afirmação verdadeira entre várias afirmações discutidas. (ibid., p.47)

Os diálogos escritos por Platão apresentavam o método de investigação Socrático, mas não resolviam por completo a questão de como identificar se uma afirmação é totalmente verdadeira, quem conseguiu simplificar essa questão, se utilizando dos diálogos de Platão, foi Aristóteles (384-322 a.C). Aristóteles observou que somente a partir de hipóteses verdadeiras se pode chegar a uma afirmação verdadeira sem risco de contradição, exemplificando, ele afirma que se $A = B$ e $B = C$ são afirmações verdadeiras, então uma conclusão afirmativa verdadeira sem risco de contradição é $A = C$, ao pensamento utilizado para se chegar a essa conclusão Aristóteles deu o nome de “Lógica”, a lei do pensamento. (ibid., p. 48-49).

1.2 A álgebra Booleana

A álgebra Booleana iniciou com os estudos de George Boole no século XIX baseada na lógica do pensamento que era regida por três leis, Lei da identidade que diz que toda proposição é igual a ela mesma, lei da não contradição que diz que um elemento não pode assumir dois valores opostos ao mesmo tempo e lei do terceiro excluído que diz que cada proposição pode assumir somente dois valores e nunca um terceiro valor. A álgebra de Boole, diferentemente da álgebra tradicional, apresenta a característica de possuir dois valores operacionais qualitativos, o ‘0’ que representa o valor falso "F" e o ‘1’ que representa o valor verdadeiro "V". Essa característica foi fundamental para abertura de um modelo impensável de automatização que foi descoberto somente no século seguinte. (TOCCI; WIDMER; MOSS, 2011, p.49)

Nascido no dia 02 de novembro de 1815 na cidade de Lincoln (Inglaterra), George Boole se tornou um mestre da matemática e é diretamente responsável pela transformação nos sistemas de automatização eletrônica ocorrida durante a transição do século XX / XXI .

Buscando entender o mecanismo de pensamento do cérebro humano, George Boole transformou a lógica dos pensamentos em equações matemáticas se utilizando de um princípio básico do ser humano, a resposta afirmativa "sim" ou a resposta negativa "não", que ele representou como "verdadeiro" para sim e "falso" para não.

Posteriormente, as afirmações ganharam uma representação numérica e o "F" de falso passou a ser representado pelo número "0", e o "V" de verdadeiro passou a ser representado pelo número "1". E assim surgiu uma leitura numérica de um pensamento humano, se sim escrevo 1, se não escrevo 0.

Essa representação simples foi o início de uma série de representações numéricas criadas por George Boole, com o desenvolvimento, elas ficaram cada vez maiores e mais complexas necessitando de outras formas mais compactas de representa-las, com isso se fez necessário a minimização de funções Booleanas que será apresentado neste trabalho.

Foi no século XX, 100 anos após sua morte, que a álgebra de Boole foi descoberta como base fundamental dos sistemas elétricos e digitais. Aqui vale destacar que Claude Elwood Shannon (1916-2001) foi o primeiro a aplicar na década de 1930 a álgebra booleana nos circuitos elétricos. Com o uso das portas lógicas, que representam uma função Booleana, é possível partir de vários comandos e se chegar a um único resultado. A sistemática é simples, a função booleana é representada através de uma tabela denominada "tabela verdade" e essa tabela verdade é transformada em uma nova representação gráfica denominada "porta lógica" que tem como característica principal, a possibilidade que haja varias linhas de entrada mas apenas uma linha de saída, por fim, tem-se a união das portas lógicas em um único sistema lógico gerando o Circuito lógico que descreverá o funcionamento automatizado de máquinas e programas digitais, este processo é apresentado no decorrer deste trabalho. (ibid., p.49)

Um sim ou não, representado através de 0 e 1, foi o primeiro passo para que hoje tenhamos um mundo paralelo a realidade que foi descrito como "Mundo digital" onde sistemas executam ações com base em análise similar ao pensamento humano. Neste trabalho, de forma rasa e sucinta, é apresentado como a álgebra Booleana contribuiu para a construção deste mundo e mostrar algumas das aplicações desta álgebra para melhor compreende-la.

1.3 Motivação

Nos dias atuais é muito comum a automatização de tarefas. Já se vê no noticiário carros que andam sem a necessidade de motorista, robôs destinados a substituir a secretária do lar, aviões não tripulados que servem de espiões para governos hostis e até mesmo a robô Sophia que é capaz de conceder entrevistas à jornais e revistas.

Em um primeiro momento, se deparar com uma máquina que executa ações, comunica-se com humanos e com outras máquinas, analisa variáveis e toma decisões precisas sobre o que está acontecendo, pode parecer algo surreal visto que a máquina parece pensar e agir igual à um ser humano.

A principal motivação para este trabalho é o desejo de conhecer a origem e entender o grau de complexidade da "inteligência" apresentada pelas máquinas no momento de tomar decisões e executar ações sem prévia programação. Porém, isso tudo tem origem em um sistema simples, binário, composto por três operações básicas e dois valores lógicos que podem ser compreendidos e replicados por qualquer estudante do ensino médio, desde que este tenha acesso à informação de como tudo começou.

1.4 Objetivos

- Apresentar como a álgebra booleana contribuiu para a automatização das máquinas e sistemas.

- Apresentar as propriedades da álgebra booleana;

- Mostrar através de aplicações, como essa álgebra contribui para os sistemas digitais e automatização de máquinas e equipamentos eletrônicos.

1.5 Estrutura do Trabalho.

No primeiro capítulo deste trabalho é apresentado a introdução contendo uma breve história sobre a lógica e a Álgebra Booleana, motivação e objetivos.

No segundo capítulo é apresentado a Álgebra Booleana em linguagem própria com proposições, conectivos e valores lógicos das proposições, operações, tabelas-verdade, funções booleanas, propriedades da álgebra de Boole, Princípio da Dualidade e Teoremas de Morgan.

No terceiro e último capítulo é apresentado as portas lógicas e circuitos lógicos, exemplos de aplicações da Álgebra Booleana no cotidiano e conclusão do trabalho.

2 ÁLGEBRA DE BOOLE

O primeiro passo para compreender a álgebra booleana é conhecer o significado de sua linguagem, conectivos, valores lógicos de suas proposições, operações, tabela-verdade, funções e propriedades; estes significados traduzem como esta álgebra consegue descrever, operar e aplicar a lei do pensamento em forma de comandos e ações. A transformação da lei do pensamento em Álgebra Booleana está aqui, ordenada, mostrando o que tornou possível que um pensamento humano seja reproduzido através de uma programação digital, algo impensado até o século $XVIII$. Para que isso ocorra é necessário a utilização de linguagem, conectivos e propriedades próprias do sistema binário, recursos que serão apresentados neste capítulo.

Proposição: Chama-se proposição todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo. (ALENCAR FILHO, 2002, p.11)

2.1 Conectivos Lógicos e valores Lógicos das Hipóteses.

George Boole (1815-1864 d.C) se empenhou em desenvolver uma equação que descrevesse o pensamento humano e para isso partiu das duas condições afirmativas possíveis que podemos atribuir a uma hipótese inicial, verdadeira ou falsa, analisando as variações possíveis para que se obtivesse uma afirmação lógica verdadeira. O resultado deste trabalho foi primeiramente apresentado em 1848 com a publicação do livro "*The Mathematical Anaysis of Logic*" (A Análise Matemática da Lógica), e em 1854 com "*An Investigation of the Laws of Thought*" (Uma Investigação das Leis do Pensamento), este segundo trabalho trata os resultados como uma nova forma algébrica, a Álgebra de Boole, baseada no sistema binário do verdadeiro e falso. George Boole desenvolveu três operações lógicas básicas apresentadas abaixo, os exemplos apresentados operam com apenas duas hipóteses iniciais para facilitar a compreensão.

Operação $E\ (AND)$: a operação E trata da situação em que para que tenhamos uma conclusão lógica verdadeira seja necessário que as duas hipóteses iniciais sejam verdadeiras.

Hipótese A: Todo paraense é brasileiro

Hipótese B: Joilson é paraense

Conclusão lógica S : Joilson é brasileiro

Note que para que a conclusão lógica seja uma afirmativa verdadeira obrigatoriamente as hipóteses iniciais precisam ser verdadeiras, se a hipótese A ou a hipótese B for falsa então não podemos afirmar que a conclusão lógica S é verdadeira.

Operação OU (OR): a operação OU trata da situação em que para que tenhamos uma conclusão lógica verdadeira seja necessário que apenas uma (ou as duas) hipótese inicial seja verdadeira.

Hipótese A: Joilson tem um filho

Hipótese B: Joilson tem uma filha

Conclusão lógica S : Joilson é pai

Note que para que a conclusão lógica seja uma afirmativa verdadeira basta que qualquer uma das hipóteses iniciais seja verdadeira, se a hipótese A ou a hipótese B ou ambas as hipóteses forem verdadeiras podemos afirmar que a conclusão lógica S é verdadeira. No caso da operação OU somente quando as duas hipóteses iniciais são falsas podemos afirmar que a conclusão lógica não é verdadeira.

Operação $NÃO$ (NOT): a operação $NÃO$, também conhecida como operação inversora trata da situação em que é necessário negar uma afirmação obtida, é aplicada diretamente na conclusão lógica modificando sua afirmação.

Supondo S_1: Joilson é brasileiro, uma conclusão lógica.

Então,

Conclusão lógica: $NÃO$ S_1: Joilson não é brasileiro

Da mesma forma, supondo S_2: Joilson não é pai, uma conclusão lógica.

Então,

Conclusão lógica $NÃO$ S_2: Joilson é pai

Obs.: Note que a operação ‘ $NÃO$ ’ tem o objetivo de negar o sentido da afirmação anterior.

George Boole classificou as hipóteses iniciais como variáveis lógicas de entrada e as conclusões lógicas como variáveis lógicas de saída, e simbolizou as condições de cada variável lógica com os símbolos 0 (zero) e 1(um), ou seja, sempre que uma variável lógica ou conclusão lógica é verdadeira é atribuído a ela o símbolo 1 e sempre que uma variável lógica ou conclusão lógica é falsa é atribuído a ela o símbolo 0, chama-se 0 e 1 de símbolos pelo fato de que na álgebra de Boole esses algarismos não representam valores quantitativos e sim qualitativos chamados de constantes lógicas. O uso das variáveis lógicas e dos símbolos possibilita que a lógica possa ser apresentada através de uma tabela de variáveis lógicas denominada de tabela-verdade.

Neste momento a lógica passa a ser trabalhada como Álgebra Booleana, para isso não serão mais utilizados os termos hipótese inicial e conclusão lógica, sendo substituídos respectivamente por variável de entrada e variável de saída tendo como resultado de cada operação uma constante lógica, 0 ou 1.

2.2 Tabela-verdade.

O resultado de uma operação lógica pode ser apresentado através de uma tabela-verdade, que serve para analisar o comportamento dos dados. Para apresentar uma operação lógica da álgebra de Boole através de uma tabela-verdade é necessário que todas as combinações possíveis para as variáveis de entrada estejam presentes na tabela, a quantidade de linhas da tabela-verdade será igual à quantidade de combinações possíveis para as variáveis de entrada, como estas podem assumir apenas dois valores, verdadeiro ou falso (0 e 1), podemos encontrar a quantidade de combinações possíveis ou quantidade de linhas da tabela-verdade através da equação $L = 2^n$ onde L é o número de linhas da tabela-verdade, 2 é o número de valores possíveis atribuídos as variáveis de entrada e n é a quantidade de variáveis de entrada. A quantidade de colunas da tabela será determinada pela quantidade de variáveis presentes na operação, ficando as variáveis de entrada posicionadas nas colunas da esquerda e as variáveis de saída posicionadas na coluna da direita da tabela-verdade.

Para demonstrar, vejamos a operação $E\ (AND)$.

Utilizando a operação com duas variáveis de entrada, A e B, aplicando a equação $L = 2^n$ conclui-se que a tabela terá quatro linhas. Somando as variáveis de entrada A e B à variável de saída S conclui-se que a tabela terá três colunas. Após definir a quantidade de linhas e colunas da tabela pode-se fazer a distribuição dos valores possíveis.

Quadro 2.1- Tabela verdade operação $E\ (AND)$ com duas variáveis.

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fonte: Próprio autor

A operação E (AND) apresentada, mostra que a variável de saída S assume o valor verdadeiro (1) somente se as duas variáveis de entrada A e B apresentarem o valor verdadeiro (1). Se qualquer uma (ou as duas) variável de entrada apresentar o valor falso (0), então a variável de saída S também apresentará o valor falso (0).

Repetindo o processo desenvolvemos a Tabela-verdade da operação OU (OR).

Quadro 2.2 - Tabela Verdade operação OU (OR) com duas variáveis.

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Fonte: Próprio autor

Na operação OU, em que a variável de saída apresenta o valor verdadeiro (1) se qualquer uma (ou as duas) variável de entrada apresentar o valor verdadeiro (1), ou seja, se A ou B apresentar um valor verdadeiro (1), então S apresentará um valor verdadeiro (1), somente se as duas variáveis de entrada apresentarem um valor falso (0) é que a variável de saída S apresentará um valor falso (0) conforme apresentado na tabela acima.

No caso da operação $NÃO$ a tabela-verdade terá duas linhas, visto que se trata de uma negação de valor para uma única variável, a variável de saída; e duas colunas por conter a variável de saída apresentada e a variável de saída negada conforme exemplo abaixo.

Quadro 2.3 - Tabela Verdade operação $NÃO$ (NOT).

S	NÃO S
1	0
0	1

Fonte: Próprio autor

Note que neste caso a operação ‘ $NÃO$ ’ apenas nega (inverte) o valor da variável de saída invertendo seu valor.

Até aqui as operações algébricas foram apresentadas de forma textual sendo $E\ (AND)$ nas situações em que duas variáveis de entrada precisam ser verdadeiras (A e B) para que a variável de saída S seja verdadeira, $OU\ (OR)$ nas situações em que apenas uma variável de entrada precisa ser verdadeira (A ou B) para que a variável de saída S seja verdadeira, e ‘ $NÃO$ ’ (NOT) nas situações em que a variável de saída terá seu valor invertido. A partir deste momento não serão mais utilizados os termos textuais, as operações da Álgebra Booleana serão representadas por símbolos conforme tabela abaixo. Este recurso permite que se desenvolvam as funções booleanas que veremos a seguir.

Quadro 2.4 - Símbolos e significados das operações

DESCRIÇÃO TEXTUAL	SÍMBOLO	SIGNIFICADO
E (AND)	$\otimes$ / $\cup$	SOMA OU UNIÃO
OU (OR)	$\ominus$ / $\cap$	PRODUTO OU INTERSEÇÃO
NÃO (NOT)	‘ / -	NEGAÇÃO, INVERSÃO OU COMPLEMENTO

Fonte: Próprio autor

Apresentando simbolicamente os resultados das operações, pode-se substituir a variável de saída S das operações apresentadas anteriormente nas respectivas tabelas-verdade ficando a nova apresentação das tabelas na seguinte forma.

Quadro 2.5 - Operações $E\ (AND)$, $OU\ (OR)$ e $NÃO\ (NOT)$.

A	B	$A\otimes B$	$A\ominus B$	$(A\otimes B)'$	$(A\ominus B)'$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0

Fonte: Próprio autor

Este foi o caminho que George Boole percorreu ao partir de hipóteses lógicas iniciais até chegar à definição de tabela-verdade, variáveis lógicas de entrada, variáveis lógicas de saída, constantes lógicas e operações lógicas. Estes elementos compõem a Álgebra Booleana e as expressões lógicas que os operam chama-se de função booleana.

2.3 Funções Booleanas.

Nesta seção abordaremos as definições importantes da álgebra booleana que serão úteis nos capítulos seguintes. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar Daghlian (2008).

Considere β uma Álgebra de Boole e sejam $a_i,\ i=1,\dots,n$ variáveis pertencentes a β.

Definição 1.1: Chama-se Função Booleana de n variáveis a uma aplicação $f:\beta^n \to \beta$ satisfazendo as seguintes regras:

i. Se $\forall a_i$, $f(a_i)=a$, com $a \in \beta$, então f é dita uma função booleana constante.

ii. Se $\forall a_i$, $f\ (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n) = a_i$, para algum $i\ (i=1,\ldots\ldots,n)$, então f é chamada uma projeção.

iii. Se f e g são aplicações de $\beta^n \to \beta$ e $g(a_i) = f(a_i)'$ para todo a_i então *f* e *g* são funções booleana chamadas duais, isto é, trocam mutualmente seus conectivos e valores lógicos.

iv. Se f e g são aplicações de $\beta^n \to \beta$, então existem aplicações h e k de $\beta^n \to \beta$, tais que $h(a_i) = f(a_i) \oplus g(a_i)\ \forall i$ e $k(a_i) = f(a_i) \otimes g(a_i)\ \forall i$. Onde os operadores $\oplus$ e $\otimes$ são os operadores $\cap$ e $\cup$ definidos no Quadro 2.4 respectivamente.

Das regras apresentadas temos que uma função booleana pode ser uma função constante, uma função projeção, uma função resultante da união de funções booleanas e uma função resultante da interseção entre funções booleanas, sempre limitadas por um número finito de operações ($\oplus$, $\otimes$, ‘).

Considere A, B e S funções booleanas, das operações apresentadas anteriormente, pelos itens i), ii) e iii) da Definição 1.1 temos que $(A \oplus B)$, $(A \otimes B)$ e S' são funções booleanas, pela quarta regra temos que $(A \oplus B) \oplus (A \otimes B) \oplus S'$ e $(A \oplus B) \otimes (A \otimes B) \otimes S'$ também são funções booleanas, ou seja, a operação de união, interseção e negação quando operadas entre elementos ou funções pertencentes à álgebra booleana resulta em uma outra função booleana, neste caso $(A \oplus B)$, $(A \otimes B)$ e S' são os termos da nova função booleana. Quando as funções booleanas estão na forma de soma ou produto de outras funções booleanas sua extensão pode parecer complexa e de difícil solução, nestes casos, as propriedades, postulados e teoremas facilitam a resolução dando como alternativa a simplificação de funções que serão apresentadas posteriormente.

As funções booleanas podem se apresentar na forma normal a n variáveis, forma normal disjuntiva, forma normal conjuntiva, forma normal binária e forma decimal.

Forma normal a n variáveis: quando apresenta todas as variáveis envolvidas ou suas complementares.

Forma normal disjuntiva: em uma operação de união, em todos os termos da função aparecem todas as variáveis envolvidas ou seus complementares**.**

Forma normal conjuntiva: em uma operação de interseção, em todos os termos da função aparecem todas as variáveis envolvidas ou seus complementares.

Forma binária: quando as variáveis forem substituídas pelas constantes lógicas.

Forma decimal: quando sua representação se dá pela classificação numérica dos valores resultantes em 1 na tabela verdade.

Neste trabalho não será utilizado a forma binária e decimal por não ser relevante ao tema do mesmo.

2.4 Propriedades da Álgebra de Boole.

Como a álgebra booleana tem origem no pensamento humano, se fez necessário o desenvolvimento de propriedades (regras) operacionais que possibilitassem uma operação com infinitas variáveis de entrada sem que a característica binária de uma única variável de saída se perdesse no processo, esse desenvolvimento fez uso de conhecimentos sobre noção de conjuntos, elemento de um conjunto e relação de pertinência.

Uma breve revisão: O universo da álgebra booleana possui apenas dois elementos, 0 e 1, isso permite afirmar que um elemento é complementar do outro, quando se faz união de elementos complementares tem-se como resultado o conjunto inteiro, quando se faz uma interseção de dois elementos complementares tem-se como resultado o conjunto vazio, trabalhando o conjunto inteiro como 1 e o conjunto vazio como 0 compreende-se as propriedades a seguir. (LIPSCHUTZ, 1963, p.27).

De acordo com o quadro 2.4 que apresenta os símbolos e significados das operações, é usual utilizar tanto a simbologia de $\otimes$ e $\oplus$ como também $\cup$ e $\cap$, as propriedades serão demonstradas utilizando $\cup$ e $\cap$ sem que isso altere o sentido da operação, para a operação de inversão será utilizado o símbolo **'** e Para demonstrar a propriedade distributiva será utilizado três variáveis lógicas.

2.4.1 Propriedades Booleanas:

i) Elemento identidade em relação à $\cup$ *e* $\cap$*;*

$a \cup 0 = a \quad e \quad a \cap 1 = a$

ii) Comutatividade;

$a \cup b = b \cup a \quad e \quad a \cap b = b \cap a$

iii) Distributividade;

$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \; e \; a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$

iv) Associatividade;

$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c \; e \; a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

iv) Operando com o elemento complementar tem-se que.

$a \cup a' = 1 \; e \; a \cap a' = 0$

Estas propriedades são utilizadas para demonstrações e simplificações algébricas que facilitam a aplicação da Álgebra Booleana, segue demonstrações:

Seja ***a*** elemento de um conjunto booleano.

Demonstração 2.1: Prove que $a \cup a = a$ e $a \cap a = a$

$(a \cup a)$

$= (a \cup a) \cap 1$ (propriedade da identidade)

$= (a \cup a) \cap (a \cup a')$ (propriedade do elemento complementar)

$= a \cup (a \cap a')$ (propriedade da distributividade)

$= (a \cup 0)$ (propriedade do elemento complementar)

$= a$ (propriedade da identidade)

$a \cap a$

$= (a \cap a) \cup 0$ (propriedade da identidade)

$= (a \cap a) \cup (a \cap a')$ (propriedade do elemento complementar)

$= a \cap (a \cup a')$ (propriedade da distributividade)

$= (a \cap 1)$ (propriedade do elemento complementar)

$= a$.　　　　(propriedade da identidade)

Demonstração 2.2: *Prove que* $a \cup 1 = 1$ *e* $a \cap 0 = 0$

$(a \cup 1)$

$= 1 \cap (a \cup 1)$　　　　(propriedade da identidade)

$= (a \cup a') \cap (a \cup 1)$　　　　(propriedade do elemento complementar)

$= a \cup (a' \cap 1)$　　　　(propriedade da distributividade)

$= (a \cup a')$　　　　(propriedade da identidade)

$= 1$.　　　　(propriedade do elemento complementar)

$(a \cap 0)$

$= 0 \cup (a \cap 0)$　　　　(propriedade da identidade)

$= (a \cap a') \cup (a \cap 0)$　　　　(propriedade do elemento complementar)

$= a \cap (a' \cup 0)$　　　　(propriedade da distributividade)

$= (a \cap a')$　　　　(propriedade da identidade)

$= 0$.　　　　(propriedade do elemento complementar)

Demonstração 2.3: $a \cup (a \cap b) = a$ *e* $a \cap (a \cup b) = a$

$a \cup (a \cap b)$

$= (a \cap 1) \cup (a \cap b)$　　　　(propriedade da identidade)

$= a \cap (1 \cup b)$　　　　(propriedade da distributividade)

$= (a \cap 1)$　　　　(Demonstração 2.2)

$= a$.　　　　(propriedade da identidade)

$a \cap (a \cup b)$

$= (a \cup 0) \cap (a \cup b)$　　　　(propriedade da identidade)

$= a \cup (0 \cap b)$　　　　(propriedade da distributividade)

$= (a \cup 0)$　　　　(Demonstração 2.2)

$= a$.　　　　(propriedade da identidade)

Note que para fazer as demonstrações 2.1 e 2.2 foram utilizadas as propriedades já enunciadas, a demonstração 2.3 fez uso da demonstração 2.2 que é derivada das propriedades, assim a Álgebra Booleana foi se desenvolvendo e novos teoremas e postulados foram sendo descobertos e publicados como o Princípio da Dualidade e Teoremas de Morgan.

2.4.2 Princípio da Dualidade

O princípio da dualidade diz que qualquer teorema dedutível das propriedades de uma Álgebra Booleana permanece válido quando os símbolos das operações e os símbolos das constantes 0 e 1 são trocados de lugar entre sí.

$$a \cup 0 = a$$

Se a operação $\cup$ for substituída pela operação $\cap$ e a constante 0 for substituída pela constante 1 temos:

$$a \cap 1 = a$$

Note que o valor da sentença permanece o mesmo.

2.4.3 Teoremas de Morgan: os Teoremas de Morgan fazem duas afirmações principais,

Uma delas é Lei da absorção que diz que

$a \cup (a \cap b) = a \cap (a \cup b) = a$.

Veja demonstração 2.3.

A outra afirmação diz que:

$(a \cap b)' = a' \cup b'$ ***e*** $(a \cup b)' = a' \cap b'$

A propriedade do elemento complementar diz que a soma de um elemento com seu complementar é igual a 1, ou seja, $x' \cup x = 1$.

Considerando $x = a \cap b$ e $x' = a' \cup b'$, tem se que:

$(a' \cup b') \cup (a \cap b)$

$= (a' \cup b' \cup a) \cap (a' \cup b' \cup b)$ (propriedade distributiva)

$= (1 \cup b') \cap (a \cup 1)$ (propriedade do elemento complementar)

$= (1 \cap 1)$ (Demonstração 2.2)

$= 1$. (propriedade do elemento identidade)

Considerando $y = a \cup b$ e $y' = a' \cap b'$, tem se que:

$(a \cup b) \cup (a' \cap b')$

$= (a \cup b \cup a') \cap (a \cup b \cup b')$ (propriedade distributiva)

$= (1 \cup b) \cap (a \cup 1)$ (propriedade do elemento complementar)

$= (1 \cap 1)$ (Demonstração 2.2)

$= 1$. (propriedade do elemento identidade)

O princípio de dualidade, os teoremas de Morgan e as propriedades da álgebra booleana formam um conjunto de técnicas que permitem uma utilização simples e prática da

Álgebra de Boole, elas permitem que as resoluções algébricas das funções booleanas sejam simplificadas economizando tempo e recursos financeiros no ato de sua aplicação, veja.

Considere a função $f(\beta) = (a \oplus b) \oplus (a \otimes b) \oplus s'$ como função booleana, utilizando as técnicas de simplificação é possível minimizar a função antes mesmo de substituir os valores.

$$
\begin{aligned}
&(a \oplus b) \oplus (a \otimes b) \oplus s' \\
&= (a \oplus b \oplus a) \otimes (a \oplus b \oplus b) \oplus s' \\
&= (a \oplus b) \otimes (a \oplus b) \oplus s' \\
&= a \oplus b \oplus s'
\end{aligned}
$$

Quadro 2.6 - Análise entre funções

A	B	S	$A \otimes B$	$A \oplus B$	S'	$(A \oplus B) \oplus (A \otimes B) \oplus S'$	$A \oplus B \oplus S'$
0	0	0	0	0	1	**1**	**1**
0	0	1	0	0	0	**0**	**0**
0	1	0	0	1	1	**1**	**1**
0	1	1	0	1	0	**1**	**1**
1	0	0	0	1	1	**1**	**1**
1	0	1	0	1	0	**1**	**1**
1	1	0	1	1	1	**1**	**1**
1	1	1	1	1	0	**1**	**1**

Fonte: Próprio autor

Observe no quadro 2.6 que o resultado da função minimizada $A \oplus B \oplus S'$ é igual ao resultado da função na forma original $(A \oplus B) \oplus (A \otimes B) \oplus S'$, ou seja, no ato da aplicação de uma função booleana em um sistema lógico a função $(A \oplus B) \oplus (A \otimes B) \oplus S'$ ou a função $A \oplus B \oplus S'$ apresentará o mesmo resultado, ficando a escolha de quem está montando o sistema lógico escolher qual função lhe parece mais simples e econômica a ser utilizada.

3 APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA BOOLEANA

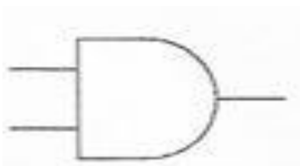
A aplicação da Álgebra de Boole se dá por meio de automação de sistemas. Como foi apresentada anteriormente, sua origem consiste no desejo de transformar o pensamento humano em uma equação matemática. É correto afirmar que George Boole alcançou o objetivo almejado, visto que a automação pode ser descrita como a capacidade de um sistema analisar variáveis e decidir qual ação tomar a partir desta análise, é admissível afirmar que isto é uma forma de pensamento acompanhado de uma decisão semelhante ao de um cérebro humano. Este capítulo apresenta as portas lógicas, circuitos lógicos e exemplos de sistemas automatizados, comuns em qualquer sociedade, que demonstram a contribuição da álgebra booleana à criação de sistemas elétricos e digitais.

3.1 Portas Lógicas

O funcionamento da álgebra booleana acontece através de sistemas lógicos que são utilizados para desenvolver circuitos elétricos e sistemas digitais, até este momento foram apresentadas duas formas de analisar suas operações, a tabela-verdade e as funções booleanas, usadas somente para analisar as operações e auxiliar o desenvolvimento dos sistemas lógicos que permitem sua aplicação. Um sistema lógico é a junção dos conteúdos apresentados até este momento, sua função é mostrar o melhor caminho possível para que um conjunto de variáveis de entrada apresente uma única variável de saída respeitando no decorrer do processo as leis que regem a álgebra booleana. Para desenvolver os sistemas lógicos se fez necessário outra forma de representar as operações, nomeadas como “Portas Lógicas”, essa representação permite identificar uma operação através da figura apresentada. A forma da figura representa qual operação está sendo executada, as variáveis de entrada são representadas pelos eixos posicionados a esquerda da figura podendo ser de quantidade infinita e as variáveis de saída são representadas pelos eixos posicionados a direita da figura limitando-se a um único eixo, sempre respeitando as leis desta álgebra.

A porta lógica da operação E (AND) é representada pela figura 3.1

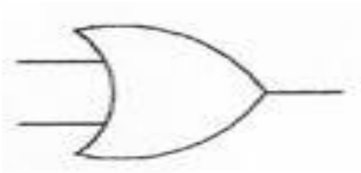
Figura 3.1 - Porta Lógica E



Fonte: Próprio autor

A porta lógica da operação OU (OR) é representada pela figura 3.2

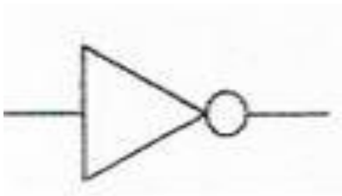
Figura 3.2 - Porta Lógica OU



Fonte: Próprio autor

A porta lógica da operação $NÃO$ (NOT) é representada pela figura 3.3

Figura 3.3 - Porta Lógica $NÃO$

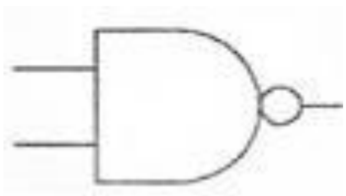


Fonte: Próprio autor

Note que a figura que representa a porta lógica da operação $NÃO$, tem um pequeno círculo posicionado na base do eixo que representa a variável de saída, quando se faz necessário negar uma operação booleana através da representação de portas lógicas é utilizado o mesmo recurso aplicando diretamente na figura da operação que se deseja negar.

A porta lógica que nega a operação E (AND) é representada pela figura 3.4 e é denominação de porta lógica $NÃO-E$.

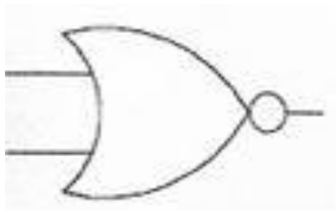
Figura 3.4 - Porta Lógica $NÃO-E$



Fonte: Próprio autor

A porta lógica que nega a operação OU (OR) é representada pela figura 3.5 e é denominada como porta lógica $NÃO-OU$.

Figura 3.5 - Porta Lógica $NÃO-OU$



Fonte: Próprio autor

.

Estes são os modelos de portas lógicas que representam a base dos sistemas lógicos da álgebra booleana. A utilização da Álgebra de Boole através das portas lógicas automatizaram os circuitos elétricos e sistemas digitais fazendo com que a presença de uma pessoa acompanhando a execução de um processo funcional não seja necessária visto que o próprio sistema pode decidir que ação executar a partir da análise das variáveis de entrada. A seguir será apresentado os circuitos lógicos e exemplos reais de como ocorre essa automação.

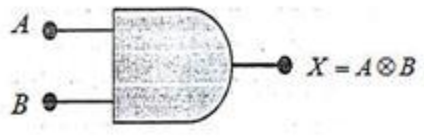
3.2 Circuitos lógicos

Circuito lógico é um conjunto de operações, portas lógicas, que estão interligadas e ordenadas de modo que representem a sequência de resolução de uma função booleana. Utilizando as três operações básicas da álgebra booleana; porta $AND(\otimes)$, $OR(\oplus)$ e $NOT(\circ)$ é possível descrever qualquer circuito lógico, do simples ao mais complexo, apenas seguindo a ordem de resolução que é comum entre a álgebra booleana e a álgebra tradicional. Em uma função booleana se resolve em primeiro lugar a operação que está entre parênteses, em seguida a que está entre colchetes e por fim a que se encontra entre chaves. Na situação em que a função booleana apresente operações $AND(\otimes)$ e $OR(\oplus)$ sem a presença de parênteses, primeiramente se resolve a operação $AND(\otimes)$ e em seguida se resolve a operação $OR(\oplus)$.

A relação entre função e porta lógica que resulta em circuito lógico está apresentada a seguir através de expressões e imagens.

Função booleana $X = A \otimes B$, operação $AND(\otimes)$ com duas variáveis.

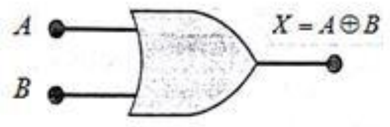
Figura 3.6 - Circuito lógico $X = A \otimes B$



Fonte: Próprio autor

Função booleana $X = A \oplus B$, operação OR ($\oplus$) com duas variáveis.

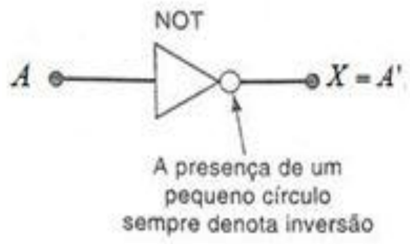
Figura 3.7 - Circuito lógico $X = A \oplus B$.



Fonte: Próprio autor

Função booleana $X = A'$, operação NOT (').

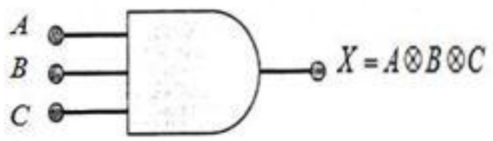
Figura 3.8 - Circuito lógico $X = A'$.



Fonte: Próprio autor

Função booleana $X = A \otimes B \otimes C$, operação $AND(\otimes)$ com três variáveis

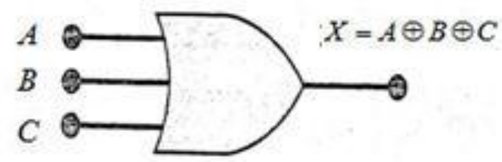
Figura 3.9 - Circuito lógico $X = A \otimes B \otimes C$



Fonte: Próprio autor

Função booleana $X = A \oplus B \oplus C$, operação $OR(\oplus)$, com três variáveis.

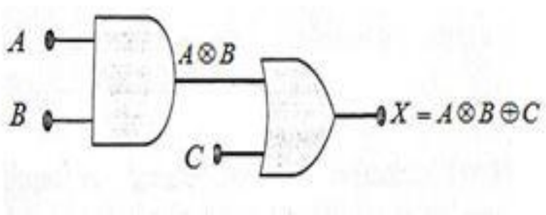
Figura 3.10 - Circuito lógico $X = A \oplus B \oplus C$



Fonte: Próprio autor

Função booleana $X = A \otimes B \oplus C$, operação $AND(\otimes)$ seguida da operação $OR(\oplus)$.

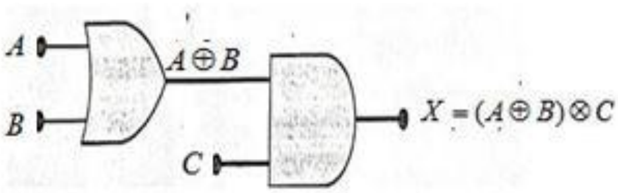
Figura 3.11 - Circuito lógico $X = A \otimes B \oplus C$



Fonte: Próprio autor

Função booleana $X = (A \oplus B) \otimes C$,operação $OR(\oplus)$ seguia da operação $AND(\otimes)$.

Figura 3.12 - Circuito lógico $X = (A \oplus B) \otimes C$.

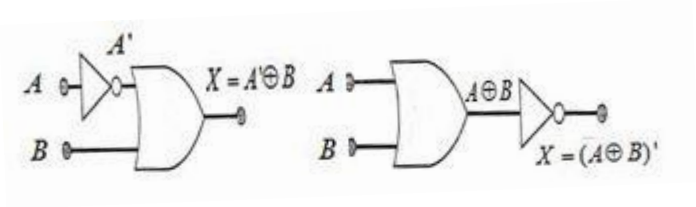


Fonte: Próprio autor

Note que a operação OR está antecedendo a operação AND, como isso contraria a hierarquia de resoluções, é necessário a utilização de parênteses na descrição da função para indicar que neste caso a operação OR precisa ser executada antes da operação AND.

Função booleana $X = A' \oplus B$ e $X = (A \oplus B)'$, operação NOT em momentos distintos.

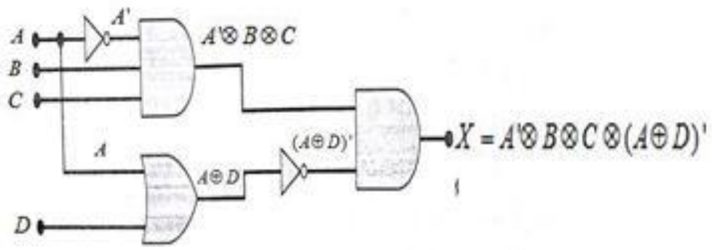
Figura 3.13 - Circuito lógico $X = A' \oplus B$ e $X = (A \oplus B)'$



Fonte: Próprio autor

Função booleana $X = A' \otimes B \otimes C \otimes (A \oplus D)'$.

Figura 3.14 - Circuito lógico $X = A' \otimes B \otimes C \otimes (A \oplus D)'$



Fonte: Próprio autor

3.3 Álgebra Booleana no cotidiano.

3.3.1 Acendimento automático da iluminação pública.

Descrevendo o acendimento automático das lâmpadas dos postes como uma álgebra booleana tem-se que:

Variável de entrada A: Luminosidade do tempo

Variável de saída S: Acendimento da lâmpada do poste

Para luminosidade do tempo considere o valor verdadeiro 1 e para a falta de luminosidade do tempo considere o valor falso 0 e fazendo o mesmo para o poste com luz acesa considere o valor verdadeiro 1 e para o poste com luz apagada considere o valor falso 0, tem-se que a variável de saída é inversa à variável de entrada, observe na tabela abaixo.

Quadro 3.1 - Tabela verdade do sistema de iluminação pública

A	S
1	0
0	1

Fonte: Próprio autor.

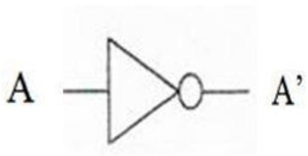
Logo, a função booleana do sistema é descrito na forma de:

$$S = A'$$

Onde a variável de saída assume o valor inverso do valor da variável de entrada.

O sistema lógico que representa a função do sistema de iluminação pública está representada pela figura 3.15.

Figura 3.15 - Circuito lógico do sistema de iluminação pública



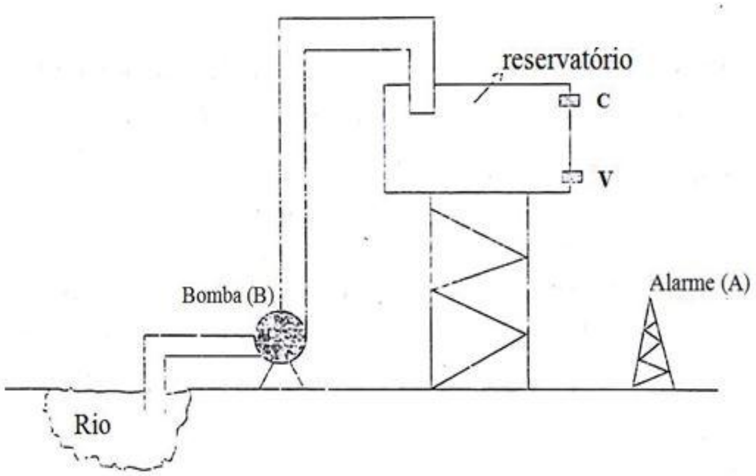
Fonte: Próprio autor

Durante o processo de funcionamento desse sistema não existe a influência humana, somente conceitos lógicos que são pré-programados por um ser humano através da álgebra booleana.

3.3.2 Automatização do abastecimento de água.

O controle do estoque de água de um reservatório com capacidade para $20.000L$ que abastece uma comunidade se dá por meio de circuito lógico, este é responsável por acionar a bomba d'água quando o reservatório está vazio e desligar a bomba d'água assim que o reservatório estiver cheio, fazendo com que não aconteça a falta de água na comunidade e nem transborde a água do reservatório. veja figura 3.16.

Figura 3.16 - Sistema de abastecimento de água do reservatório.



Fonte: Próprio autor

Analisando a situação pode-se classificar o reservatório de água com duas hipóteses, cheio e vazio, o mesmo se pode fazer para a bomba d’água, ligada e desligada, e ainda se pode adicionar um alarme sonoro também com duas hipóteses, ligado e desligado, para avisar a comunidade quando a bomba d’água apresentar mau funcionamento.

Classificando as variáveis do sistema.

Variáveis de entrada:

$C =$ Reservatório cheio (sensor instalado na altura em que o volume do reservatório é de $18.000L$)

$V =$ Reservatório vazio (sensor instalado na altura em que o volume do reservatório é de $3.000L$)

Obs: os sensores apresentarão valor 1 sempre que submersos e valor 0 sempre que acima do nível da água.

Variáveis de saída:

$B =$ Bomba d’água (valor 1 para bomba ligada e valor 0 para bomba desligada)

$A =$ Alarme (valor 1 para alarme ligado e valor 0 para alarme desligado)

Quadro 3.2 - Tabela verdade sistema de abastecimento de água.

C	V	B	A
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	x	x
1	1	0	0

Fonte: Próprio autor

Obs: a terceira linha da tabela verdade apresenta uma situação impossível de ocorrer visto que não tem como o nível da água está abaixo do sensor de V e acima do sensor C. Nestes casos aos valores para variável de saída atribui-se o valor zero pois podem ser desconsiderados.

A função booleana que descreve o acionamento da bomba d’água é dada por:

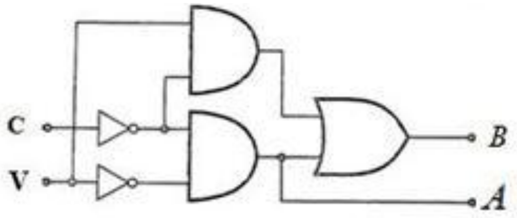
$B = C' \otimes V' \oplus C' \otimes V$.

A função booleana que descreve o acionamento do alarme é dada por:

$A = C' \otimes V'$.

O sistema lógico que descreve as funções relacionadas ao funcionamento do sistema de abastecimento de água está representado pela figura 3.17

Figura 3.17 - Circuito lógico sistema de abastecimento de água



Fonte: Próprio autor

As funções booleanas $B = C'\otimes V'\oplus C'\otimes V$ e $A = C'\otimes V'$ são passíveis de simplificação.

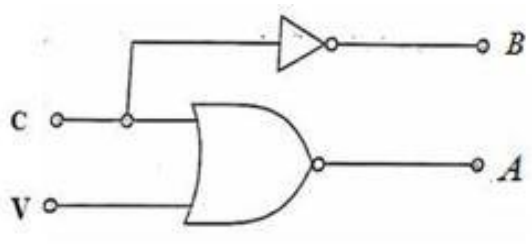
Fazendo simplificação de B através das propriedades da álgebra booleana temos que: $C'\otimes V'\oplus C'\otimes V = C'$.

Fazendo simplificação de A através do teorema De Morgan temos que:

$C'\otimes V' = (C\oplus V)'$.

Com isso, tem-se a função booleana $B = C'$ e a função boolena $A = (C\oplus V)'$, ficando o sistema lógico do sistema de abastecimento de água representado de forma simplificada na figura 3.18

Figura 3.18 - Circuito lógico simplificado sistema de abastecimento de água.



Fonte: Próprio autor

4 CONCLUSÃO

Este trabalho teve por objetivo apresentar como a álgebra booleana contribuiu para a automatização de máquinas e sistemas digitais, nele foi apresentado a origem da lógica com Sócrates, Platão e Aristóteles, grandes filósofos que contribuíram com o entendimento básico da Lei do pensamento que fundamentou os estudos de George Boole. Foi apresentado de forma simples o desenvolvimento da linguagem própria da álgebra booleana, os conectivos lógicos que facilitam sua operação, as propriedades que permitem a sintonia perfeita entre as funções booleanas, as portas lógicas que descrevem os comandos através de circuitos lógicos e exemplos da utilização da álgebra booleana em situações comuns a vida de qualquer pessoa.

Para apresentar a simplicidade e eficácia da álgebra booleana adotou-se uma sequência hereditária com explicações e demonstrações passo a passo da base de seu desenvolvimento, buscando uma melhor apresentação que permita ao leitor percorrer toda a sequência sem perder o entendimento sobre a lógica que à fundamenta. Este trabalho apresenta como surgiu a Lei do pensamento, como o desejo de George Boole de descrever um pensamento humano em equação matemática transformou essa lei em álgebra, como essa álgebra gera Circuitos lógicos, como esses circuitos permitem que as máquinas e sistemas digitais excutem ações pré-programadas e como essas ações são aplicadas em nosso dia a dia.

Portanto, é correto afirmar que o objetivo deste trabalho foi atingido de forma satisfatória visto que a leitura do mesmo permite a compreensão simples da importante contribuição da álgebra booleana à automatização das máquinas e sistemas digitais.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. *Iniciação a lógica matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

AYRES JR, Frank. Coleção *Schaum: Álgebra Moderna.* Tradução de Mario Carvalho de Matos. São Paulo- Rio de Janeiro: McGraw-Hill do Brasil, 1965.

DAGHLIAN, Jacob. *Lógica e álgebra de Boole.* 3. ed. São Paulo: Atlas S.A, 2008.

LIPSCHUTZ, Seymour. Coleção *Schaum: Teoria dos conjuntos.* Tradução de Fernando Vilain Heusi. 1.ed. São Paulo- Rio de Janeiro: McGraw-Hill do Brasil, 1963.

LOURENÇO et al. *Circuitos Digitais.* 9. ed.São Paulo: Érica, 2007.

TOCCI, Ronald J.; WIDMER, Neal S.; MOSS, Gregory L. *Sistemas Digitais: Princípios e Aplicações*. 11.ed. São Paulo: Pearson, 2011.