SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ – UFOPA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO – ICED
PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS - PCE
LICENCIATURA INTEGRADA EM MATEMÁTICA E FÍSICA

ADRIANO ARAQUEM BAIA MENEZES

MODELAGEM MATEMÁTICA: O Ensino de Probabilidade por meio do Ilusionismo

SANTARÉM/PA
2022

ADRIANO ARAQUEM BAIA MENEZES

MODELAGEM MATEMÁTICA: O Ensino de Probabilidade por meio do Ilusionismo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Ciência da Educação, ao Programa de Ciências Exatas da Universidade Federal do Oeste do Pará, como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática e Física.

Orientador: Prof. Dr. Mário Tanaka Filho.

SANTARÉM/PA
2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/ UFOPA

M543m Menezes, Adriano Araquem Baia
Modelagem matemática: o ensino de probabilidade por meio do ilusionismo. / Adriano Araquem Baia Menezes. – Santarém, 2022.
92 p.: il.
Inclui bibliografias.

Orientador: Mário Tanaka Filho.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Ciências Exatas, Licenciatura Integrada em Matemática e Física.

1. Matemática - Ensino. 2.Jogos matemáticos. 3. Modelagem matemática. 4. Probabilidade. 5. Engenharia didática. I. Tanaka Filho, Mário, *orient*. II. Título.

CDD: 23 ed. 510.8

Bibliotecária – Documentalista: Zélia Alves Gonçalves CRB-2/821

ADRIANO ARAQUEM BAIA MENEZES

MODELAGEM MATEMÁTICA: O ENSINO DE PROBABILIDADE POR MEIO DO ILUSIONISMO FUNDAMENTADO MATEMATICAMENTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Ciência da Educação, ao Programa de Ciências Exatas da Universidade Federal do Oeste do Pará, como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática e Física.
Orientador: Profº. Dr. Mário Tanaka Filho.

Conceito:

Data de Aprovação 08 / 07 / 2022

Mario Tanaka Filho
Prof.º. Dr. Mário Tanaka Filho.
Universidade Federal do Oeste do Pará

Lenilson Moreira Araujo
Prof.º. Dr. Lenilson Moreira Araújo
Universidade Federal do Oeste do Pará

Miguel Angelo Moraes de Sousa
Prof.º Me. Miguel Angelo Moraes de Sousa
Universidade Federal do Oeste do Pará

Dedico com toda a minha gratidão e amor aos meus pais Adrião Araquem Ribeiro Menezes e Maria Eleonila Pimentel Baia, e a minha querida esposa Kédna Syuianne Quintas Melo.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Adrião Araquem Ribeiro Menezes e Maria Eleonila Pimentel Baia, pelo preciosos ensinamentos, sem os quais eu não formaria meu caráter, por todas as qualidades genéticas e adquiridas por sua total dedicação, pelas repreensões que sempre me fizeram refletir e procurar ser uma boa pessoa para o mundo, por todo carinho que suavizaram minha jornada, motivaram meu caminhar, fortaleceram e incentivaram minhas conquistas, por absolutamente tudo que consegui até aqui, meus mais sinceros agradecimentos.

A minha esposa, Kédna Syuianne Quintas Melo, pelo companheirismo que motivaram minha jornada acadêmica e profissional, pelo carinho e amor dedicados que inspiram minhas atitudes positivas frente as mais diversas situações do cotidiano, pelo apoio que alicerça meus sonhos, possibilitando a concretização de cada objetivo traçado em prol da nossa felicidade.

Ao meu orientador Profº. Dr. Mário Tanaka Filho, por sua sapiência e generosidade nesta orientação acadêmica, fundamentais para a construção de um conhecimento sólido, por toda sua paciência e compreensão frente aos desafios que enfrentei para elaborar e concretizar a pesquisa, por me motivar elucidar e desenvolver cada vez mais a metodologia aplicada na pesquisa, de forma a apresentar uma pesquisa devidamente fundamentada. Os meus mais sinceros agradecimentos por toda a orientação ao longo dessa jornada.

Aos meus alunos, que me inspiram a buscar aperfeiçoamento profissional e educacional, a ser a cada dia um ser humano melhor e um professor mais eficiente e realizado dentro do que sonhou para o presente e futuro, muito obrigado por tudo o que me ensinam a cada dia.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização e concretização desta pesquisa, meus mais sinceros agradecimentos.

Nós só podemos ver um pouco do futuro, mas o suficiente para perceber que há muito a fazer.

Alan Turing.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA...12

SEÇÃO 1 – REFERENCIAL TEÓRICO 15

1.1. A Modelagem Matemática 15

1.2. A Mágica e suas aplicações em sala de aula 18

1.3. Sequências Didáticas (SD)... 21

SEÇÃO II – METODOLOGIA..25

2.1 Tipo de Estudo 25

2.2. Local do Estudo e Participantes da Pesquisa:.. 27

SEÇÃO III – ANÁLISES PRELIMINARES...28

3.1. Análises Preliminares sobre o uso de Truques de Mágica no Ensino de Matemática 28

SEÇÃO IV - PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISES A PRIORI 33

4.1. Parte 01: Sorteio Mágico 33

4.1.2 Revelando o truque de mágica da parte 01.. 36

4.1.3 Análise a Priori da Parte 01.. 41

4.2 Parte 02: Loteria Mágica.. 43

4.2.1. O Truque de Mágica da Parte 02: Loteria Mágica...................................... 44

4.2.2 Revelando o truque de mágica da parte 02.. 45

4.2.3 Análise a Priori da Parte 02.. 51

4.3 Parte 03: Desafio Mágico... 52

4.3.1 O Truque de Mágica da Parte 03: Mágico Vs Gambler 54

4.3.2. Revelando o Truque de Mágica da Parte 03 54

4.3.3 Análise a Priori do Encontro 03 61

SEÇÃO V - EXPERIMENTAÇÃO DA SEQUENCIA DIDÁTICA 63

5.1. Experimentação da Parte 01... 63

5.2. Experimentação da Parte 02... 70

5.3 Experimentação da Parte 03.. 76

CAPÍTULO VI – RESULTADOS E ANÁLISE A POSTERIORI 81

6.1 Análise a Posteriori da Parte 01: Sorteio Mágico 81

6.2 Análise a Posteriori da Parte 02: Loteria Mágica... 83

6.3 Análise a Posteriori da Parte 03 85

CONSIDERAÇÕES FINAIS..87

REFERÊNCIAS 88

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MDC – Máximo Divisor Comum

MOD – Módulo

SD – Sequência Didática

UARC-2 - Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de Segunda Geração

I_r – Intervenção Reflexiva

I_i – Intervenção Inicial

I_e – Intervenção Exploratória

I_a – Intervenção Avaliativa

IA_a - Intervenções Avaliativas Aplicativas

IA_r – Intervenção Avaliativa Restrita

I_f – Intervenção Formalizante

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Apresentação do baralho e do Ás de espadas. 36
Figura 2 - Break 37
Figura 3 - Carta na segunda posição do baralho 37
Figura 4 - Primeira etapa da embaralhada falsa 38
Figura 5 - Segunda etapa da embaralhada falsa 39
Figura 6 - Terceira fase da embaralhada falsa 39
Figura 7 - Carta de volta à posição inicial 40
Figura 8 - Revelação da carta 40
Figura 9 – Cartas usadas 46
Figura 10 - Force 1 (parte 1) 46
Figura 11 - Force 1 (parte 2) 47
Figura 12 - Segundo force 48
Figura 13 - Terceiro Force 49
Figura 14 - Quarto force 50
Figura 15 - Exposição final do truque 50
Figura 16 - Preparação do truque Mágico vs Gambler 55
Figura 17 - Primeiro passo do double lift 55
Figura 18 - Segundo passo do double lift 56
Figura 19 - Finalização da exposição do primeiro rei 56
Figura 20 - Conduzindo uma carta do topo para a base do baralho (parte 1) 57
Figura 21 - Conduzindo uma carta do topo para a base do baralho (parte 2) 57
Figura 22 - Conduzindo uma carta do topo para a base do baralho (parte 3) 58
Figura 23 - Conduzindo duas cartas da base para o topo do baralho (parte 1) 59
Figura 24 - Conduzindo duas cartas da base para o topo do baralho (parte 2) 59
Figura 25 - Conduzindo duas cartas da base para o topo do baralho (parte 3) 60
Figura 26 - Revelando as cartas 60
Figura 27 - Grupos 63
Figura 28 - Resposta do G1 a 2ª Ir da parte 01 64
Figura 29 - Resposta do G2 a 2ª Ir da parte 01 64
Figura 30 - Resposta do G3 a 2ª Ir da parte 01 65
Figura 31 - Resposta do G4 a 2ª Ir da parte 01 65
Figura 32 - Respostas dos grupos para a 3ª Ir da parte 01 66
Figura 33 - Resposta do Grupo 1 a 4ª I_r. 66
Figura 34 - Resposta do Grupo 2 a 4ª I_r. 67
Figura 35 - Resposta do Grupo 3 a 4ª Ir 67
Figura 36 - Resposta do Grupo 1 a 4ª Ir 68
Figura 37 - Intervenção Avaliativa da parte 01: Grupo 01. 68
Figura 38 - Intervenção Avaliativa da parte 01: Grupo 02. 69
Figura 39 - Intervenção Avaliativa da parte 01: Grupo 03. 69
Figura 40 - Intervenção Avaliativa da parte 01: Grupo 04. 69
Figura 41 - Resposta do grupo 2 a 2º Intervenção Reflexiva da parte 02 72
Figura 42 - Resposta do grupo 4 a 2º intervenção reflexiva da parte 02 72
Figura 43 - Resposta do grupo 1 a 2º intervenção reflexiva da parte 02 74
Figura 44 - Resposta do grupo 3 a 2º intervenção reflexiva da parte 02 74
Figura 45 - Resposta do grupo 2 e 4 a 3º intervenção reflexiva da parte 02 75

Figura 46 - Resposta do grupo 2 e 4 a 4º intervenção reflexiva da parte 02 76
Figura 47 - Resposta do Grupo 1 sobre a 2ª Intervenção Reflexiva da parte 03 77
Figura 48 - Resposta do Grupo 2 sobre a 2ª Intervenção Reflexiva da parte 03 77
Figura 49 - Resposta do Grupo 3 sobre a 2ª Intervenção Reflexiva da parte 03 77
Figura 50 - Resposta do Grupo 4 sobre a 2ª Intervenção Reflexiva da parte 03 78
Figura 51 - Resposta do grupo 1, 2 e 3 a 3º intervenção reflexiva da parte 03 79
Figura 52 - Resposta do grupo 1 a 4º intervenção reflexiva da parte 03 80

RESUMO

A matemática é notavelmente uma das disciplinas com maior nível de rejeição por parte dos alunos, existindo diversos fatores que contribuem para essa problemática. Tais fatores perpassam desde a falta de aptidão na área, e se prolongam até problemas do âmbito socioeconômico dos estudantes, falta de estrutura do local de estudo, aulas tradicionalistas, e etc. Sabe-se, portanto, que uma única estratégia pedagógica não consegue contrapor toda essa complexidade do processo de ensino, todavia, as tendências de Ensino em Matemática e os Recursos Lúdicos aplicados ao Ensino, visam diminuir a lacuna entre os conceitos matemáticos e os alunos. Dessa maneira, o objetivo deste trabalho é propor, aplicar e validar uma Sequência Didática (SD), associando Truques de Mágicas como recurso lúdico e os processos de Ensino investigativo da Modelagem Matemática. Como metodologia de pesquisa e análise de dados, propormos a utilização da Engenharia Didática e suas quatro fases, sendo elas: 1- análises preliminares, 2- concepção e análise a priori, 3- aplicação de uma sequência didática e 4- análise a posteriori e avaliação. Como resultado deste estudo, temos uma Sequência Didática utilizando truques de mágicas voltadas para o ensino de Probabilidade, sendo este assunto escolhido devido a sua fácil relação com Truques de Mágica. Ao aplicar a SD, tivemos uma ótima participação dos alunos e conseguimos desenvolver a grande maioria dos conceitos propostos nas atividades, tendo como um de nossos grandes empecilhos o tempo de aplicação que fizemos uso (80 minutos).

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Truques de mágica; Modelagem Matemática; Probabilidade; Engenharia Didática.

ABSTRACT

Mathematics is notably one of the subjects with the highest level of rejection by students, and there are several factors that contribute to this problem. These factors range from lack of aptitude in the area, to socioeconomic problems of the students, lack of structure of the place of study, traditionalist classes, etc. It is known, therefore, that a single pedagogical strategy cannot counteract all this complexity in the teaching process; however, the trends in Mathematics Teaching and the Ludic Resources applied to Teaching aim to reduce the gap between mathematical concepts and the students. Thus, the objective of this work is to propose, apply, and validate a Didactic Sequence (DS), associating Magic Tricks as a ludic resource and the investigative teaching processes of Mathematical Modeling. As a research methodology and data analysis, we propose the use of Didactic Engineering and its four phases, which are: 1- preliminary analysis, 2- design and a priori analysis, 3- application of a didactic sequence and 4- a posteriori analysis and evaluation. As a result of this study, we have a Didactic Sequence using magic tricks aimed at teaching Probability, this subject being chosen due to its easy relationship with Magic Tricks. When applying the DS, we had a great participation from the students and were able to develop most of the proposed concepts in the activities, having as one of our biggest problems the application time that we used (80 minutes).

Keywords: Mathematics Teaching; Magic Tricks; Mathematical Modeling; Probability; Didactic Engineering.

INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

No Brasil, percebe-se que as aulas de Matemática, tanto no ensino básico quanto no ensino superior, ocorrem de maneira expositiva, sendo quase inexistente a oportunidade de autonomia dos alunos bem como a presença de debates em sala, acarretando na memorização de fórmulas matemáticas para a aplicação em exercícios (BATISTA; FUSINATO, 2015)

Sabe-se que a Matemática é um dos componentes curriculares mais importantes da jornada estudantil de qualquer pessoa, sua importância vai além da ideia de acumular ferramentas para a resolução de exercícios. O entendimento deste componente é uma questão de cidadania, pois uma pessoa que não entende, no mínimo, as quatro operações fundamentais (soma, subtração, multiplicação e divisão), não goza de plena inserção na sociedade. Esse fato gera discussões sobre como a Matemática está sendo ensinada (NÓBREGA, 2014).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o ensino da Matemática deve fazer com que o aluno consiga aplicar seus conhecimentos matemáticos em diversas situações do cotidiano, propiciando o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, formulação de hipóteses e seleção estratégicas para a resolução de problemas.

Nesse cenário, em busca de contornar o método tradicional de ensino, as tendências de pesquisa em Matemática (Etnomatemática, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas, História da Matemática) possuem um importante papel, pois nelas os estudantes tornam-se sujeitos ativos no processo de ensino (SIQUEIRA, 2007).

Outro elemento importante que também visa tornar as aulas menos tradicionalistas é a utilização de recursos lúdicos (jogos, brincadeiras e etc). Este recurso, mesmo tornando as aulas mais divertidas, deve ser usado com planejamento, para que assim não haja uma camuflagem do método tradicional (MENEZES, et al. 2019). Essa problemática pode ser notada em um âmbito local, nas escolas da Cidade de Santarém - PA, no qual Santos e Silva (2017) tiveram relatos de alunos que entendem a importância de estudar Matemática e mesmo assim a consideram como uma disciplina de difícil entendimento. Esses relatos ocorreram após utilização de jogos lúdicos em sala de aula nos quais aconteciam de maneira isolada, sem contextualizações ou aplicações diretas com o cotidiano, evidenciando a necessidade de se trabalhar cuidadosamente a utilização desses recursos no ensino.

Nesse sentido, o Objetivo deste estudo é de propor, aplicar e validar uma Sequência Didática para o ensino de Probabilidade, aliando as dinâmicas lúdicas de Truques de Mágicas com os processos investigativos proporcionados pela Modelagem Matemática. Escolhemos a probabilidade pois os conceitos que a envolvem podem mais facilmente se relacionar com truques de mágicas.

O Ilusionismo, conhecido popularmente como Truque de Mágica, é uma forma de manifestação artística que encanta e intriga pessoas, fazendo acontecer fatos impossíveis bem diante delas, como por exemplo, fazer uma cadeira flutuar, uma moeda desaparecer, adivinhar uma carta de baralho escolhida por uma pessoa e etc. É importante ressaltar que todos esses acontecimentos possuem explicação lógica, não abrindo margens para comparações com misticismos e/ou práticas sobrenaturais.

A Modelagem Matemática por sua vez, segundo Barbosa (2004) "é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade" (BARBOSA, 2004, p.4). Existem cinco motivos básicos para o uso da Modelagem Matemática, sendo eles: facilitar a aprendizagem, motivar os alunos, preparar os estudantes para o uso da Matemática em diversas áreas do conhecimento, propiciar a compreensão do papel sociocultural da Matemática e, por fim, proporcionar o desenvolvimento de habilidades gerais de exploração (BARBOSA, 2004).

Como a modelagem matemática busca a criação de modelos matemáticos a partir de situações reais e as mágicas têm como foco principal a realização de fatos impossíveis ou pouco prováveis de acontecer na vida real, temos a princípio uma relação paradoxal entre os dois campos. Entretanto, com os devidos conhecimentos de mágica, é possível a criação de diversos truques que possuam relação direta com situações que envolvam a Matemática na vida das pessoas, pois todos os truques de mágicas podem ser realizados em conjuntos com discursos e pequenas histórias comumente inventadas em apresentações, facilitando a contextualização com uma problemática real.

Assim, o estudo proporciona a realização de debates e o aprofundamento do conhecimento sobre as possibilidades de atrelar a Modelagem Matemática com diversos recursos, neste caso o ilusionismo. A pesquisa também se torna importante por servir como uma introdução ao mundo da mágica, visando a autonomia de ideias dos professores para a criação de truques utilizando técnicas ensinadas nesta pesquisa, propiciando assim a criação de mágicas tanto para o ensino de Matemática quanto para a aplicação em outras áreas do conhecimento.

Além disso, o estudo também contribui para a divulgação científica do uso de mágicas como um recurso lúdico promissor para o ensino de Probabilidade, pois, segundo Lesser e Glickman (2009) há muitos trabalhos publicados sobre o uso desse recurso como material de apoio ao ensino de álgebra, entretanto, são poucos os trabalhos que relacionam isso aos conceitos de probabilidade ou estatística. Os autores ficam surpresos com essa falta de estudos, pois as mágicas são criadas para o acontecimento de fatos improváveis, e suas análises podem contribuir para aumentar a compreensão acerca da probabilidade. Assim, na Sequência Didática faremos uso de truques de mágicas com caráter profissional como recurso lúdico e atrativo para expor situações

Este trabalho está dividido na presente introdução, em seis seções e por fim nas considerações finais. A primeira delas o Referencial Teórico onde será exposto os principais autores que discutem as temáticas do trabalho (Modelagem Matemática, Truques de Mágica no Ensino de Matemática e Sequências Didáticas). A segunda seção é a Metodologia da Pesquisa no qual discutiremos quais os recursos metodológicos que foram seguidos para a construção deste trabalho, sobretudo a engenharia didática e suas quatro fases: Análises Preliminares, Análises a Priori, Aplicação de uma Sequência Didática e Análises a Posteriori.

A Terceira seção é onde colocamos em prática a primeira fase da Engenharia Didática, no qual realizamos uma breve revisão bibliográfica afim de elucidar a maneira com a qual os truques de mágicas estão sendo utilizados para auxiliar o ensino de Matemática. Na quarta seção, após as análises preliminares terem sido executadas, expomos nossa proposta de Sequência Didática para o ensino de Probabilidade usando Truques de Mágica. A SD está divida em três partes, e para cada parte fazemos sua Análise a Priori (segunda fase da Engenharia Didática)

A quinta seção é onde apresentamos como se deu a aplicação da Sequência Didática (terceira fase da Engenharia Didática) e todos seus principais pontos e dados coletados. Por fim, a sexta seção trata-se dos resultados e Análise a Posteriori, no qual confrontaremos as análises realizadas na fase 2 da engenharia didática com os resultados obtidos da experimentação, com intuito de validar a SD.

SEÇÃO 1 – REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta primeira seção estaremos discutindo as ideias dos principais autores das três principais abordagens que alicerçam a pesquisa, sendo elas: Modelagem Matemática, A Mágica e suas aplicações em sala de aula e por fim sobre as Sequências Didáticas.

1.1 A Modelagem Matemática

Propomos que nos truques de mágicas utilizados na Sequência Didática e em sua aplicação, sejam utilizadas a Modelagem Matemática, objetivando um ensino mais significativo e coerente com situações do cotidiano do aluno, desencadeando um processo de busca no qual o estudante seja mais participativo.

Bassanezi (2011), discute sobre essa visão a respeito da Matemática. Segundo o autor, os professores devem assumir uma nova postura de valorização do que está sendo ensinado, tornando o conhecimento interessante devido às suas possibilidades de uso e ao mesmo tempo estimulante devido à possibilidade de gerar prazer. Essa nova perspectiva é a modelagem, que por sua vez, possibilita a transformação de problemas do cotidiano em problemas matemáticos com soluções na linguagem do mundo real, possibilitando ainda relacionar a Modelagem com aspectos lúdicos da Matemática, uma vez que o autor afirma que nesse processo, a Matemática pode ser encarada como um jogo no qual o vencedor é aquele que consegue se divertir.

O autor propõe algumas fases para a realização do processo de Modelagem Matemática, sendo elas: 1 – Experimentação: Realização de experimentos laboratoriais para a obtenção de dados com seus procedimentos definidos, em geral, pela natureza do experimento; 2 – Abstração: “É o processo que deve levar a formulação dos modelos Matemáticos.” (BASSANEZI, 2011, p. 27), processo que inclui a seleção de variáveis, a “problematização ou formulação aos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando” (BASSANEZI, 2011, p.28); a formulação de hipóteses e a simplificação; 3 – Resolução: É o processo de tradução da linguagem natural de um determinado problema em linguagem Matemática; 4 – Validação: É processo pelo qual o modelo proposto é aceito ou não para o problema em questão. Isso é realizado por meio de testes e comparações das soluções e previsões com os dados que podem ser obtidos na realidade; 5 – Modificação: É a reformulação dos modelos obtidos ou a criação de novos, pois nenhum modelo é definitivo, sendo sempre passível de erros.

Na aplicação em sala de aula, Bassanezi (2011) acredita ser importante que os alunos escolham o tema gerador, mas no final a escolha definitiva deve ser orientada pelo professor, sendo ainda possível a escolha de mais de um tema. As atividades devem ser desenvolvidas em grupos pequenos, sendo necessário a formulação de uma situação problema inovadora e interessante, que o autor cita como sendo uma das maiores dificuldades dos professores.

A Modelagem Matemática na concepção de Barbosa (2001), mostra-se como:

> Uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento. Os conceitos e ideias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade. (BARBOSA, 2001, p.5).

Barbosa destaca ainda três possibilidades para se trabalhar com a modelagem. No primeiro caso, o professor é o encarregado de propor e descrever uma situação problema do cotidiano dos alunos bem como todos os dados necessários para a solução da problemática e formulação de modelos. No segundo caso, o professor também propõe a situação problema, todavia, cabe aos alunos investigar e coletar dados e informações para a resolução. Já no terceiro caso há uma maior participação dos alunos, que diferentemente dos casos anteriores, formulam e resolvem problemas a partir de temas não matemáticos. Cabe aos alunos também o processo de investigação e coleta de dados. Nos três casos, o professor atua como coparticipante, dialogando e orientando os alunos acerca dos processos de investigação.

Para Biembengut (1999) a modelagem Matemática deve ser desenvolvida de acordo com o currículo escolar por meio da exploração do conteúdo programático, devendo ser desenvolvida continuamente a cada ano. A autora discute que é natural do ser humano a criação de modelos que propiciem a interpretação de fenômenos naturais e sociais, e que há a criação de modelos em todas as áreas, como por exemplo em artes, moda, economia, literatura, Matemática, história e outras.

Biembengut e Hein (2003) destacam a necessidade de alguns procedimentos para que haja a interação entre esses modelos, sendo eles a Interação, a Matematização e o Modelo Matemático. Na interação acontece o reconhecimento e a familiarização com a situação problema, na Matematização há a formulação do problema bem como a elaboração de modelos que o solucionem, e no Modelo Matemático há a etapa final da solução do problema e a validação dos modelos propostos. No ensino básico, há cinco passos para a implementação da Modelagem Matemática segundo Biembengut e Hein (2003), sendo eles: diagnóstico, escolha do tema, desenvolvimento do conteúdo, orientações de modelagem e avaliação do processo.

Burak (1992) diz que:

> A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões (BURAK, 1992, p.62)

O autor discute sobre as fases do processo de modelar, das quais a primeira consiste na identificação de um problema, que nem sempre se mostra de fácil percepção no mundo real, pois muito envolve habilidades não relacionadas com a Matemática. É então importante a interação com pessoas que atuem na área da situação problema, mas que não são matemáticos e ainda é preciso "escrever qualquer literatura relevante" (BURAK, 1992, p. 64).

Após essa etapa e até mesmo durante ela, Burak (1992) afirma que é preciso identificar os aspectos essenciais do problema para simplificá-lo, pois em geral há aspectos muito importantes e também há outros irrelevantes que pouco contribuem com a investigação. Após isso, esses aspectos devem ser traduzidos em entidades Matemáticas e correlacionados para a constituição de um Modelo que deve estar consistente com a lógica Matemática e com as leis. Uma vez constituído o modelo, adentra-se a fase de validação, que consiste em confrontar as equações e relações Matemáticas com o problema inicial.

Para a aplicação disso em sala de aula, Klüber e Burak (2008) sugerem 5 etapas que podem ser seguidas: Escolha do tema – O professor e/ou os alunos sugerem temas que podem gerar interesses, os quais não necessariamente precisam estar ligados diretamente com a Matemática, mas sim que os alunos queiram investigar. Desde essa etapa, o professor deve assumir a posição de mediador e atuar na orientação dos alunos; Pesquisa exploratória – Após a escolha do tema, os alunos devem procurar informações e bases teóricas que tenham noções prévias sobre o que se está propondo a estudar; Levantamento dos problemas – Com as pesquisas realizadas e com os materiais obtidos, incentiva-se os alunos a buscar tudo o que se possa relacionar com a Matemática e elaborar problemas que possibilitem aplicar conteúdos de Matemática. O professor deve sempre trabalhar na orientação do processo; Resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema – Com os problemas propostos, os alunos devem buscar resolvê-los com a ajuda de conteúdos matemáticos. A abordagem pode ser em linguagem mais acessível para posteriormente ser realizada uma sistematização e formalização. O caminho percorrido nessa etapa é contrário ao recorrente nas salas de aula, aqui, os conteúdos são ensinados e discutidos dada a sua necessidade para contribuir na solução dos problemas; Análise crítica das soluções **–** É a etapa de julgamento das relações Matemáticas e modelos quanto de outros aspectos como a viabilidade e a adequação das soluções aos problemas. Nesta etapa busca-se a reflexão sobre os resultados e como podem afetar a percepção do cotidiano contribuindo com a tomada de decisões para formar cidadãos ativos na sociedade.

Para a utilização da Modelagem em sala de aula, o autor destaca ainda a existência de duas premissas, a primeira é sobre o interesse do grupo de pessoas envolvidas, visto que as ações das pessoas são motivadas pelos interesses. E a segunda premissa é de que os dados a serem coletados devem ter como ambiente o local onde tem-se o interesse das pessoas envolvidas. (BURAK, 1992)

1.2 A Mágica e suas aplicações em sala de aula

Segundo Barbieri (2019), as apresentações de mágicas têm seu primeiro registro por volta de 1500 a 1700 a.C. com números de decapitação e ressurreição realizados por uma pessoa chamada Dedi[1]. Posteriormente com a ascensão do catolicismo, os fatos que não eram explicados ou aprovados pela igreja eram considerados demoníacos, ou seja, ligados a práticas ocultistas, acarretando assim na perseguição dos que praticavam mágica/ilusionismo pois ligavam suas ações a pactos com o diabo. A respeito disso, escritores ingleses publicaram trabalhos desvendando alguns truques e provando que a mágica e o ilusionismo nada têm envolvimento com misticismo.

Garat et. al (2005) afirmam que a mágica se difere da magia, de superstições populares e cultos religiosos, pois ela se mostra na forma de truques com o qual o mágico ou ilusionista objetiva ludibriar, seduzir, encantar e iludir o público, provocando uma surpresa criada pelo jogo lúdico a fim de mostrar algo inexplicável.

Lesser e Glickman (2009) destacam a mágica como uma das 20 modalidades lúdicas que podem ser utilizadas para motivar os alunos em cursos de estatísticas e probabilidade. Desse modo, existem inúmeros truques de mágica alicerçados a conceitos matemáticos que envolvem situações divertidas e desafiadoras, oportunizando assim discutir e aprender esses conteúdos (OLIVEIRA, et. al. 2013).

Esses truques de mágica pautados na Matemática são conhecidos como Matemágicas, e a partir desses recursos, os estudantes se sentem desafiados a descobrir o funcionamento do truque e a explicação Matemática que o torna possível. Uma vez dominado os segredos

[1] Mágico sob o qual se tem os registros mais antigos de ilusionismo.

matemáticos dos truques, em poucos passos os alunos se tornam capazes de executa-los e até mesmo ficam aptos a criar suas próprias matemágicas (SILVA *et al*, 2016).

Nesse sentido, temos o exemplo de Gaudio (2015) que faz a utilização de vídeos de mágica como material didático em sala de aula, e segundo ele, as atividades com mágicas são mais proveitosas quando realizadas em apenas uma aula, devendo a mágica ser revelada aos alunos no mesmo encontro, pois posteriormente os alunos poderão investigar na internet o segredo da mágica e assim perder o interesse na aula. A aula deve ser muito bem planejada e a escolha do truque deve potencializar o estudo do assunto em questão, mesmo que o processo que componha a mágica não se relacione diretamente com os assuntos.

Falcão (2013) faz uso de mágicas em suas aulas, e atesta positivamente quanto à eficácia deste. Segundo ele, crianças que diziam não gostar da Matemática passaram a gostar de brincar com os números por meio da mágica. Ainda segundo o autor, a mágica possibilita facilmente abordar conceitos de probabilidade, matrizes, teoria dos conjuntos e vários outros tópicos e subtópicos, de maneira efetiva, desde que os alunos sejam incluídos nos processos e não apenas telespectadores. As mágicas Matemáticas consistem em um campo de estudo ainda pouco explorado, mas muito rico devido à dinamicidade de inventar novos truques fantásticos com princípios de fácil entendimento.

Barbieri (2019) discute ainda que a mágica se divide em várias categorias, sendo uma delas a Cartomagia, que consiste na realização de truques com baralhos que derivam em inúmeras as possibilidades de efeitos com o uso desse instrumento. Gardner (2014) faz a utilização de várias mágicas com cartas e destaca que essas possuem 5 mecanismos que possibilitam e facilitam a criação de mágicas e o processo de logística em relação à sua apresentação em aula. O primeiro é a possibilidade de usar as cartas como um recurso de contagens, sem fazer referências aos valores impressos nas cartas, da mesma maneira como poderia ser feito com palitos de fósforos ou pedaços de papéis em branco.

O segundo é a existência de valores numéricos nas cartas, utilizando o Ás como sendo o número 1, o valete como sendo o número 11, a Rainha como 12 e o Rei como 13. O terceiro elemento faz referência à divisão em quatro naipes diferentes, sendo ainda dois na cor vermelha e dois na cor preta. O quarto fator é que as cartas possuem frente e verso, sendo que os versos são todos iguais. O último elemento é referente a sua compactação e tamanho, possibilitando a organização de tipos de séries, conjuntos e arranjos que podem ser feitos e desfeitos por meio de embaralhamentos. (GARDNER, 2014).

Como exemplo disso, em 1860, Charles Pierce elaborou uma série de truques com cartas, sendo que um deles foi baseado no Pequeno Teoremas de Fermat que diz que: *Se* $a, p \in \mathbb{Z}$*, com* p *primo e MDC* $(a, p) = 1$*, então* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (OLIVEIRA, p.13. 2019).

Pierce, embora tenha dito executar o truque de maneira interessante, o efeito final da mágica é tão fraco se comparado com todo o processo de desenvolvimento do truque, que as pessoas que assistissem, estariam entediadas quando o truque terminasse (GARDNER, 2014). Caso o leitor queira conhecer melhor este truque criado por Charles Pierce, recomendamos a leitura do trabalho de Diaconis e Graham (2017), intitulado de: "*The Magic of Charles Sanders Peirce".*

Para Ogren (2014) há duas razões importantes que justificam o uso de mágicas no ensino. A primeira é o envolvimento dos alunos com consequente aprendizagem. O segundo motivo é o de tornar os alunos espécies de ilusionistas, ~~e~~ para que aprendam a aplicar mágicas em áreas diversas do conhecimento. O autor remonta que geralmente os professores, ao utilizarem esse recurso, buscam primeiramente realizar algum truque de mágica, com o intuito de trazer o lúdico ao cenário e estabelecer pontos de referências investigativas, sobretudo em Ciências e Matemática.

A mágica em sala de aula desencadeia a ludicidade e o prazer de maneira semelhante ao uso de jogos no ensino. Dessa maneira, a análise dos processos psicológicos que permeiam os alunos quando se usam os jogos são aproximações importantes para compreender os efeitos da mágica em sala de aula (PEREIRA, 2017).

Para Vygotsky (1984), os jogos incentivam a autoconfiança e a curiosidade, tecendo relações com o que o autor chama de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que se divide em desenvolvimento real (atividades que a criança consegue desenvolver sozinha) e desenvolvimento potencial (atividades que a criança necessita de ajuda). Essas fases estão em constante mudanças, pois a criança aprende rapidamente uma atividade que antes era tido como desenvolvimento potencial passando a ser agora uma atividade de desenvolvimento real, não precisando mais de auxílio para executá-la. O autor ainda diz que:

> É na interação das atividades que envolvem simbologia e brinquedos que o educando aprende a agir numa esfera cognitiva. Na visão do autor a criança comporta-se de forma mais avançada do que nas atividades da vida real, tanto pela vivência na situação imaginária, quanto pela capacidade de subordinação às regras (VYGOTSKY, 1984, p.27).

Ainda em meio ao campo das análises psicológicas, Macknik e Martinez-Conde (2011) discutem sobre os processos neurais que possibilitam que uma mágica aconteça e a sua fixação na memória das pessoas. Eles dizem que o ser humano age de acordo com aquilo que ele espera que aconteça, baseando-se em suas experiências e lembranças, e caso não aconteça o que se espera, o cérebro pode demorar para processar o que está acontecendo. Isso significa que as pessoas pensam estar no controle do que está acontecendo, bloqueando assim boa parte do que realmente está acontecendo ao seu redor. A mágica faz uso dessa fragilidade das pessoas, usando a mente delas contra elas mesmas, fazendo uso de noções falsas de profundidades, uso de ângulos convenientes, dos mecanismos da visão humana, da luz e do contexto criado para um determinado truque.

1.3 Sequências Didáticas (SD)

Como parte integrante de uma Engenharia Didática é a elaboração e aplicação de um Sequência Didática, abordaremos aqui o que é uma sequência didática e seus processos de elaboração. Para isso, faremos uso em grande parte do livro de Cabral (2017)

Primeiramente, segundo Batista et. al (2016, apud ZABALA, 1998, p.18), Sequência Didática (SD) é definida como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos."

Cabral (2017) destaca que sequência didática não se caracteriza como um tipo de sinônimo de plano de aula, pois a SD admite o planejamento de aplicação durante vários dias bem como a utilização de diferentes estratégias para o processo de ensino e aprendizagem. Assim, a SD também pode ser entendida como um conjunto de atividades e intervenções que devem ser planejadas passo a passo objetivando trabalhar os objetos de estudo, e cada etapa deve estar articulada com outra etapa subsequente. Para essas concepções, destacam-se quatro fases de execução, sendo a primeira a apresentação de situação de ensino, seguida da produção inicial, posteriormente têm-se os módulos e, por fim, a produção final.

Cabral (2017), ao exercer sua profissão como docente nos cursos de licenciatura, sempre esteve preocupado que seus alunos ensinassem a Matemática por meio de interações reflexivas para que seus futuros alunos compreendessem a necessidade do estabelecimento de generalizações. O autor vem propor a concepção que "se fundamenta numa analogia da reconstrução conceitual de um objeto matemático com o procedimento adotado para se determinar a medida da área de uma superfície a partir de uma unidade previamente definida" (CABRAL, 2017, p. 39). Deste modo, para realizar a reconstrução deste conceito (a superfície S) é apresentada uma segunda superfície "s", a qual será utilizada como uma unidade de medida. A primeira dessas unidades recebe a denominação Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de Primeira Geração (UARC-1). De acordo com o autor:

> Nosso ponto de partida é que não necessita ser exatamente um problema como de um modo geral é recomendado. É como se estivéssemos revestindo um piso com placas de área unitária. Podemos começar por uma variedade de posições dentro de S. Denomino de UARC-1 (CABRAL, 2017, p.39).

Cabral (2017) enfatiza que essa primeira escolha depende de diversos fatores como a disponibilidade e a experiência conceitual e de didática do docente. Quando o docente realiza a primeira escolha (UARC-1), a segunda escolha será condicionada, pois o docente:

> Não poderá escolher uma unidade qualquer dentro de S. Em minha analogia deverá tomar uma peça unitária imediatamente ligada à primeira a qual denominei de UARC-2 (unidade articulável de reconstrução conceitual de segunda geração) (CABRAL, 2017, p.39).

Deste modo, para a definição das demais UARC's de gerações superiores o mesmo método é utilizado, e para melhor compreensão de como elas são construídas, Cabral (2017) os descreveu em seis categorias que:

> Materializam o texto de uma SD de acordo com o que eu concebi em suas adaptações necessárias para o ensino e aprendizagem da Matemática nos níveis fundamentais e médio, são elas: Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva (Ir), Intervenção Exploratória (I_e), Intervenção Formalizante (I_f), Intervenção Avaliativa Restrita (IA_r) e, finalmente, as Intervenções Avaliativas Aplicativas (IA_a) (CABRAL, 2017, p. 40).

A Intervenção Inicial (I_i) serve como contribuição para que o professor estimule o aluno a entender de forma empírica e intuitiva as regularidades funcionais de um conceito. Para Cabral:

> Intervenção Inicial é, na verdade, o primeiro elemento de um jogo discursivo dirigido pelo professor com a intenção definida de estimular os aprendizes à percepção de alguma verdade do pensamento matemático e que, associada com outras percepções articuladas a essa primeira, pode exercer um papel facilitador na reconstrução conceitual pretendida (CABRAL, 2017, p.40).

A Intervenção Reflexiva (I_r) é realizada por meio de questionamentos que possuem relação com um ou mais pontos do conceito objeto de reconstrução. Mesmo que tais questionamentos não possuam um sentido para o aluno, as ideias envolvidas são capazes de facilitar a reconstrução final do objeto em jogo pois o aluno é instigado durante todo o período do jogo a refletir sobre o que ele está fazendo e “as consequências desse fazer em outros aspectos da atividade que se desenvolve” (CABRAL, 2017, p. 41).

Já a Intervenção Exploratória (I_e) possui como principal objetivo realizar um aprofundamento sobre o que o aluno conseguiu compreender a partir das respostas obtidas na Intervenções Reflexivas (Ir), que, de acordo com Cabral (2017):

> Não serão dadas por meio de questionamentos, mas a partir da solicitação da execução de certos procedimentos por parte dos alunos. Aqui, os alunos são convidados para fazerem simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e observações (CABRAL, 2017, p.41).

Na Intervenção Formalizante (I_f) é realizada uma reelaboração do que foi descoberto pelos alunos com os moldes da formalidade Matemática, esta intervenção é executada a partir das generalizações feitas pelas Intervenções Reflexivas e Exploratórias. Após as Intervenções Formalizantes (I_f) o professor poderá começar a trabalhar as Intervenções Avaliativas Restritas (IA_r) as quais correspondem a:

> Uma espécie de “primeiros passos” para se checar os rudimentos do conceito em tese apreendido. A ênfase nesse momento é para as implicações conceituais do objeto reconstruído e para as propriedades operacionais com a manipulação de algoritmos envolvidos (CABRAL, 2017, p. 43).

Por último, temos as Intervenções Avaliativas Aplicativas (IA_a) que possuem como objetivo a resolução de problemas de aplicação. Está intervenção é caracterizada como o nível mais elevado de avaliação neste processo, pois:

> O aluno precisa ser capaz de mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes (algoritmos) em situações que envolvam resolução de problemas aplicados aos diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino (CABRAL, 2017, p. 43).

Cabral (2017) ainda idealizou uma modalidade com a finalidade de que todas as intervenções aqui já supracitadas fossem consolidadas em uma Sequência Didática para o ensino dos conteúdos de Matemática para o ensino fundamental e médio. Tal modalidade recebeu o nome de Exploração Potencial (I_i– EP), que é utilizada para a materialização da Intervenção Inicial. Através da Exploração Potencial (I_i – EP) o professor poderá:

> (...) desencadear, a partir de diversos questionamentos aos alunos, uma série de procedimentos investigativos, simulações, conjecturas, hipóteses, analogias empíricas, que são procedimentos típicos de construção do saber matemático (CABRAL, 2017, p. 46)

Cabral (2017) ainda enfatiza que ao adotar uma Intervenção Inicial o professor deve tratá-la como uma espécie de “caixa de pandora” aplicada ao processo de ensino-aprendizagem, pois, uma vez que esta caixa é aberta pela curiosidade ela terá como consequência “uma série de desdobramentos relacionais que culminam com a redescoberta, por parte do aluno, de alguma verdade Matemática” (CABRAL, 2017, p. 46).

SEÇÃO II – METODOLOGIA

Neste capítulo descrevemos a metodologia utilizada durante a presente investigação, contendo aqui o tipo de pesquisa, classificação quanto aos seus objetivos, coleta de dados, bem como suas análises.

2.1 Tipo de Estudo

Este estudo parte de uma perspectiva qualitativa na qual é utilizada para o entendimento de acontecimentos peculiares de caráter social e cultural, mediante definições, interpretações e comparações, desconsiderando o aspecto numérico (FONTELLES, et. al., 2009). Na abordagem qualitativa o pesquisador tem o ambiente natural como meio para a coleta de dados, pois o que é importante é a interação entre o mundo real e o sujeito, o mundo objetivo e a subjetividade. A pesquisa qualitativa tem como base a interpretação de fenômenos com atribuição de significados, onde, em geral, o pesquisador analisa os dados indutivamente (SILVA, MENEZES, 2011). Esse delineamento justifica-se porque investigamos as interações dialógicas entre estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental com situações problemas encaminhados pela Sequência Didática.

Classificamos ainda o estudo quanto aos seus objetivos como uma Pesquisa Exploratória. Uma pesquisa exploratória é aquela que se caracteriza pelo desenvolvimento e esclarecimento de ideias, com objetivo de oferecer uma visão panorâmica, uma primeira aproximação a um determinado fenômeno que é pouco explorado. Esse tipo de estudo também é denominado "pesquisa de base", pois oferece dados elementares que dão suporte para a realização de estudos mais aprofundados sobre o tema (GONSALVES, 2003).

Nosso estudo caracteriza-se também como um estudo de campo. Esse tipo de pesquisa se justifica neste trabalho devido a aplicação da Sequência Didática por meio do Ilusionismo, proposta essa aplicada com alunos 9º ano do Colégio Batista de Santarém – Cooperativa Sóstenes.

Como metodologia de desenvolvimento e análise da proposta didática, fizemos uso da Engenharia Didática de Artigue (1996), fazendo uso de todas as suas fases como forma de estruturação e validação de nossa proposta. A Engenharia Didática objetiva elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática. Pais (2011) faz a analogia da engenharia didática com o trabalho de um engenheiro no que diz respeito às concepções, ao planejamento e à execução, acrescentando que no caso do educador, diferentemente do engenheiro, um modelo teórico não é o suficiente para suprimir todos os desafios da complexidade do Objeto Educacional, pois no âmbito educacional, o processo se inicia desde os vislumbres das primeiras ideias até a execução em sala de aula.

Para Artigue (1996), a engenharia didática como metodologia de pesquisa que se caracteriza por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. Dessa maneira, ela propicia então o estudo dos processos de ensino e aprendizagem no âmbito da Matemática, de modo a estabelecer articulações entre os conhecimentos da didática e os conhecimentos matemáticos, abrindo portas para que as experiências vividas em sala de aula possam ser traduzidas em pesquisas de ensino de Matemática, ou seja, ampliar a prática docente para uma investigação científica (LOPES et al. 2018).

A Engenharia Didática se desdobra pela execução de quatro fases: "análises preliminares, concepção e análise a priori, aplicação de uma sequência didática e análise a posteriori e avaliação." (PAIS, 2011. p.101). A seguir, descrevemos cada uma dessas fases.

- **Fase 1 - Análises preliminares:** são realizadas análises preliminares por meio de investigação da abordagem dos assuntos em documentos oficiais, de pesquisas relacionadas aos aprendizados e dificuldades em relação à temática. Isso possibilita a elaboração de hipóteses sobre o que se pode esperar na aplicação das sequências didáticas bem como a elaboração de soluções para dificuldades e entraves que possam vir a surgir (LIMA e FREITAS, 2014).
- **Fase 2 - Concepção e análise a priori**: utilizará os dados obtidos na etapa 1 para a realização de uma análise das sequências didáticas, elaborando possíveis soluções, estratégias e dificuldades que possam surgir no decorrer da fase 3 (LIMA e FREITAS, 2014).
- **Fase 3 - Aplicação de uma sequência didática:** é a própria aplicação da sequência para com os alunos.
- **Fase 4 - Análise a posteriori e validação:** com base nos dados coletados na fase 3, serão realizadas análises confrontando-as com as hipóteses da fase 2 (LIMA e FREITAS, 2014).

2.2 Local do Estudo e Participantes da Pesquisa:

O estudo foi realizado no Colégio Batista de Santarém com uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental. A escolha desse local se deu pelo fato de o autor deste estudo trabalhar nesta escola, conhecendo então suas dinâmicas e materiais pedagógicos usados em sala de aula, facilitando assim comparações e análises a serem realizadas na SD.

O Colégio Batista de Santarém, é uma escola confessional, tem como mantenedora a Cooperativa de Educação e Trabalho Sóstenes Pereira de Barros, oferta a educação básica, nas etapas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Escolhemos uma turma de 9º ano devido ao fato deles estarem adentrando ao período do bimestre reservado para se trabalhar probabilidade, coincidindo assim com o assunto que iriamos aplicar na SD. A turma na qual a pesquisa foi realizada possui 24 alunos com idades entre 13 e 16 anos, e com um total de 6 aulas semanais, sendo as aulas agrupadas de duas em duas aulas em dias diferentes. Esse fato colaborou para a escolha desta turma, visto que as demais turmas de 9º ano possuíam horários não tão agrupados que dificultariam a aplicação da SD. A aplicação da SD foi realizada em uma semana, sendo cada dia a aplicação de uma parte da pesquisa que se divide em 3: Parte 01: Sorteio mágico, Parte 02: Loteria Mágica, Parte 03: Mágico vs Glambler.

SEÇÃO III – ANÁLISES PRELIMINARES

Para estabelecer um panorama e uma base de comparação a respeito de como os truques de mágicas estão sendo utilizados para o ensino de Matemática, faremos aqui a Fase 1 da Engenharia Didática, ou seja, as Análises Preliminares, discutindo alguns trabalhos publicados sobre a temática, e o modo como estes foram aplicados em sala de aula. Em seguida mostraremos nossa proposta de sequência Didática.

3.1 Análises Preliminares sobre o uso de Truques de Mágica no Ensino de Matemática

Mostraremos primeiramente duas dissertações de Mestrado acerca da temática, a dissertação de Soares (2017) intitulada de Mágicas e Matemáticas, e a dissertação de Cavalcante (2017) intitulada de Roteiro e Aplicação - Feira Matemágica: Curiosidades e Desafios no Âmbito Social da Educação Básica.

O trabalho de Soares (2017) foi aplicado em uma turma do 1º ano do Ensino Médio e teve como proposta a utilização de cinco mágicas Matemáticas com cartas (mágicas no qual seus segredos são embasados matematicamente), usando-as como uma sequência didática estruturada por meio da Engenharia Didática. Em relação aos truques, a mágica 1 nomeada de “Reorganizando às cartas” é voltada ao ensino de Potenciação, a mágica 2 chamada de “às últimas três cartas” e é voltada a ao ensino de Progressão Aritmética, a Mágica de número 3 intitulada “Número de cartas no monte do meio” tem o foco em expressões algébricas, a Mágica número 4 chamada de “A carta sorteada”, visa trabalhar Equação do Primeiro Grau e a Mágica número 5 chamada de “O coração das cartas” é direcionada a equação do 1º Grau com duas variáveis.

Para facilitar o entendimento de cada truque, o autor disponibiliza vídeos na plataforma YouTube com a apresentação dos truques e com a revelações dos segredos de alguns. Para a aplicação da sequência Didática, o autor dividiu os alunos em grupos para o debate visando a explicação de como os truques foram feitos e em como expressar os segredos de maneira Matemática. A apresentação de cada truque foi realizada de maneira direta, uma ou duas vezes, e conseguiu captar bastante a atenção, gerando uma grande participação dos alunos. Dessa maneira, os palpites e explicações dos alunos foram sendo utilizadas e administradas pelo autor para moldar a explicação Matemática do truque.

Em geral, os alunos gostaram da forma com que a aula foi conduzida, relatando ter ficado mais fácil o aprendizado, consolidando um resultado positivo para o uso de truques de mágica em sala de aula. Como produto final do trabalho, o autor criou um blog chamado "Mágicas e Matemáticas" para disponibilizar mais vídeos e orientações a respeito dos truques, seus segredos e abordagens Matemáticas, podendo ser acessado pelo link: *http://magicasematematica.blogspot.com/*.

O trabalho de Cavalcante (2017) expõe a aplicação e propõe um roteiro para aplicação de um projeto intitulado de Feira Matemágica nas escolas da educação Básica. Esse projeto visa o uso de truques mágicas para trabalhar os seguintes assuntos: álgebra, aritmética, geometria, probabilidade. A primeira etapa da aplicação do projeto consiste na realização, por parte do professor, de algumas mágicas para a turma, a segunda etapa consiste em uma leitura de mundo, ou seja, confrontar os conhecimentos prévios dos alunos com o que foi exposto, buscando motivar os alunos a se tornarem "alunos mágicos". Na terceira etapa o professor distribui então roteiros para os alunos contendo diferentes atividades e perguntas, estes roteiros auxiliam os alunos a realizarem pesquisas de conceitos matemáticos que ajudam a compreender os procedimentos dos truques de mágica.

O quarto passo consiste em uma mediação por parte do professor no processo de pesquisas e de entendimento de conceitos, tornando assim o aluno o ator principal do processo de ensino aprendizagem. A quinta passo se trata do planejamento coletivo com os alunos, definindo datas de atendimentos do professor com os alunos, encontros esses focados em tirar dúvidas e entre outros questionamentos. O autor orienta que deve ser somente dois encontros de atendimento com os grupos, um no início das atividades e outro próximo a data de finalização das atividades.

No sexto passo há a definição de um tempo de 30 dias ou mais para a realização das apresentações dos alunos, sendo este, segundo o autor, um tempo hábil para que os alunos tenham um amadurecimento cognitivo. Por fim, o sétimo passo, que se trata da apresentação das atividades pelos alunos, necessitando locais de apresentação com a presença de um quadro para que os alunos façam as devidas explicações sobre as atividades.

Cavalcante (2017) propõe em seu trabalho um total de quinze truques de mágicas, as habilidades e competências abordados em cada um, o passo a passo para a realização dos truques e os segredos matemáticos que os permeiam. Um exemplo das mágicas trabalhadas foi a "Mágica da Descoberta do número do Sapato e da Idade", no qual o mágico instrui uma pessoa a usar uma calculadora fazendo algumas operações com o número do sapato da pessoa e também com seu ano de nascimento, resultado assim em um número de quatro dígitos que revelará nos dois primeiros dígitos o número do sapato da pessoa e nos dois últimos a idade que a pessoa tem ou que irá fazer.

Nesse truque, o objetivo é trabalhar expressões numéricas, álgebra e números/relações. Como resultado do estudo, o autor obteve que a “Feira Matemágica” gerou um ambiente social entusiasmante e alegre, despertando o interesse dos alunos em aprender, e de fato proporcionou a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Alguns outros trabalhos escolhidos para discutir nessa etapa foram os de Ferreira e Santos (2019), Yokoyama *et. al*. (2019), Falcão *et. al* (2013), Almeida e Alves (2013), sendo todos estes publicados no ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática).

Os trabalhos de Ferreira e Santos (2019) consiste na apresentação da *Matemágica*[2] como tipos de jogos lúdicos voltados ao ensino de Matemática. O trabalho ocorreu com a apresentação de mágicas Matemáticas que possibilitassem a discussão sobre a forma com a qual elas poderiam ser utilizadas em sala de aula. Segundo os autores, as mágicas consistem em mecanismos com potencial para desenvolver investigações sobre os conteúdos de Matemática.

O artigo de Yokoyama *et. al*. (2019) tem como foco mostrar o papel do prazer na aprendizagem por meio da apresentação do ensino hibrido utilizando a Rotação por estações e a Aprendizagem baseada em Problemas. Em meio às dinâmicas apresentadas, os autores propõem o uso de uma mágica afim de propiciar o estudo de paridade, e segundo os autores, “A Mágica tem um efeito surpreendente e desperta a curiosidade dos espectadores de imediato” (YOKOYAMA *et. al*, 2019, p.5)

Falcão *et. al* (2013), apresenta também um minicurso que por meio da ludicidade e da descontração causada com a apresentação de mágicas (nesse caso, mágicas Matemáticas), busca explicar os princípios matemáticos que alicerçam o acontecimento do truque. As mágicas propostas nesse minicurso envolvem a utilização de baralhos, cartões, mágicas por meio de cálculos, ligas, moedas e papeis, afim de proporcionar o debate sobre a utilização delas em sala de aula.

O artigo de Almeida e Alves (2013) é uma proposta metodológica para o ensino de Matemática, sendo possível trabalhar nessas propostas o ensino das operações básicas, as propriedades de Aritmética, geometria Euclidiana e raciocínio lógico. A proposta consiste na utilização de recursos lúdicos como mecanismos auxiliadores no ensino, mais precisamente o uso da mágica como recurso lúdico.

Em busca de ampliar a visão a respeito da temática, foi pesquisado também alguns artigos internacionais sobre o ensino por meio de truques de mágicas. Paul Kohlmiller em seu artigo *Using Magic to Teach Science* aborda o uso de truques de mágicas para as aulas de

[2] Mágicas que possuem base matemática.

ciências, todavia, não com caráter de realização de análises cientificas da elaboração de truques ou possíveis conceitos envolvidos, o autor aborda de modo a estimular as percepções investigativas dos alunos. Primeiro ele trabalha a diferença entre as mágicas e as ciências como sendo contrárias, pois na ciência se frisa um caráter de reprodutividade, no qual qualquer fato cientifico deve ter seus procedimentos descritos de modo que permitam serem refeitos por outras pessoas afim de constatar seus resultados. Entretanto, nas mágicas, seus procedimentos são ocultados, pois caso seja revelado o segredo do truque, este não causará mais tanta surpresa. Isso pode ser utilizado em sala de aula, inicialmente, com a demonstração de um experimento e de um truque, é possível mostrar aos alunos a diferença entre feitos científicos e feitos ilusórios de caráter não cientifico. Kohlmiller (2010) faz em seu trabalho uma breve descrição de alguns truques de mágica salientando que os alunos podem indagar sobre como foi possível acontecerem.

Ogren (2014) diz que em suas atividades na sala de aula busca além de ensinar os conteúdos, mais sim ensinar os alunos a serem mágicos, incluindo-os no processo de ensino exercendo papel fisioterapêutico quando uma criança com dificuldades de mobilidade pratica mágicas e encenações, o autor diz que em uma de suas primeiras experiências ajudou um aluno com deficiência motora a trabalhar suas habilidades, e defende que é possível também ajudar alunos retraídos e tímidos a atuar e falar em público. O autor propõe então um workshop *“Why you should use magic in your classroom!”* que visa descrever maneiras de como fazer uso desses recursos bem como sua importância.

O trabalho de Elder et al (2020) busca investigar se o uso de mágicas agrega valor para a aprendizagem dos alunos. A pesquisa mostra que há também trabalhos direcionados para ajudar em tratamentos de saúde para a reabilitação psicossocial, e em sala de aula contribui com o estabelecimento de conexões entre professor e aluno, trabalha a auto estima da criança, ajuda a ver o mundo a sua volta de várias perspectivas, e pode ser utilizada para avaliar dificuldades no aprendizado, assim como possibilita a resolução de situações problemas, entretanto, deve-se ter cuidado para que o truque não se sobressaia em relação ao que se quer ensinar, além de que o professor deve estudar a arte do ilusionismo por meio de livros, deve selecionar mágicas que estão ao seu nível e deve buscar aprender com outros mágicos.

Blasco et al (2016) utiliza truques de mágicas em uma perspectiva de jogos e discute os jogos como uma ferramenta poderosa ao ensino, assim como os truques de mágica. Os autores constataram que truques contribuíam para o entendimento de alguns conceitos matemáticos, decidindo então ampliar a proposta. Eles afirmam que as mágicas estão interligadas com o surgimento de novas tecnologias, exemplificando que em o ilusionista Robert Houdin acendia lâmpadas dizendo estar ascendendo velas, o que na época da apresentação, isso se passava como mágica devido a não existência de energia elétrica nas grandes maiorias das casas. Outro artefato tecnológico que contribui até os dias atuais para a execução de mágicas são controles remotos. Os autores fazem então a utilização de truques para expor conceitos científicos em seu projeto *"From the Science of Magic to the Magic of Science"*, que acontecem por meio de oficinas, workshops e palestras em escolas e museus, bem como no âmbito informal afim de expandir a divulgação cientifica para a comunidade, assim o projeto trabalha em diferentes níveis de ensino.

Por fim, o trabalho de Lesser e Glickman (2009) intitulado de *"Using magic in the teaching of statistics"* explora o papel que as mágicas podem exercer no ensino de probabilidade e estatística. Segundos os autores, os truques incluem a utilização de recursos visuais bem como a não dependência da utilização exacerbada dos livros didáticos. No trabalho, há a demonstração de diversos truques que podem ser utilizados para ilustrar cálculos de probabilidade.

A maioria das publicações fazem uso de truques de mágicas que possuem embasamento matemático, ou seja, aproveitam deste fator para usar em sala de aula recomendando a busca, por parte dos alunos, dos segredos dos truques ou entendimento dos conceitos que os permeiam, visando uma maior autonomia de aprendizagem por parte dos educandos. De maneira geral, os assuntos trabalhados nas pesquisas são: aritmética, paridade, operações fundamentais e funções, e probabilidade e princípios de contagem.

Observou-se, que nos trabalhos pesquisados, houve posicionamento favorável quanto ao uso de truques de mágica no ensino de Matemática, sobretudo em relação a aspectos motivacionais. As ressalvas e preocupações que destacamos são que, em todos os casos, os truques de mágicas são apresentados de maneira isolada, não havendo qualquer tipo de contextualização com o cotidiano dos alunos, sendo este um fator preocupante, pois segundo Menezes et. al (2019) os recursos lúdicos devem ser utilizados com cuidado, buscando ao máximo sua otimização quanto aos conteúdos para evitar um mascaramento do método tradicional.

Constatamos ainda que o modo pelos quais estão sendo utilizados os truques não seguem um desencadeamento lógico, sendo utilizados de maneira bem específica, para ensinar conceitos isolados, não possibilitando englobar todas as nuances dos conteúdos. Ressaltamos que de maneira geral, fizeram uso de uma ferramenta (truques de mágicas) na qual não possuíam grande domínio de técnicas e conceitos da temática, não maximizando assim as potencialidades que o mundo do ilusionismo pode proporcionar.

SEÇÃO IV - PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISES A PRIORI

Agora faremos a exposição de nossa proposta de Sequência Didática, chamada de “Mágica e Probabilidade", e consiste na exposição de mágicas com cartas para os alunos com o intuito de trabalhar os conceitos de Probabilidade. A sequência estará dividida em três partes (três encontros), sendo que cada parte terá a apresentação de um truque de mágica contextualizado uma situação problema do cotidiano. Após a exposição de cada parte da SD, optamos por executar a Fase 2 da Engenharia Didática, Concepção e Análise a priori, no qual abordaremos possíveis solução para os problemas de cada parte bem como possíveis dificuldades que os alunos possam enfrentar.

Cada parte possibilita o estudo de alguns dos principais conceitos de Probabilidade, sendo eles: Experimento aleatório, Espaço amostral e evento de um experimento aleatório, Definição de probabilidade, Eventos complementares, Adição de probabilidades, Probabilidade condicional, Eventos independentes, Multiplicação de probabilidades.

O processo de investigação dos assuntos durante a aplicação da sequência deve estar em concordância com o segundo caso das concepções de Barbosa (2001) em relação a Modelagem Matemática, no qual o professor pode primeiramente apresentar o truque de mágica para os alunos, usando os discursos sugeridos para cada truque e depois propor a situação problema relacionada com o cotidiano. Posteriormente, os alunos devem investigar, propor meios e fazer a coleta de dados, a fim de estabelecer um modelo matemático para as questões. Em todo o processo, o professor deve atuar como orientador e coparticipante.

4.1 Parte 01: Sorteio Mágico

O encontro 01 deve ter uma média de duração de 4h, e terá o objetivo de fazer com que os alunos:

- Objetivo 1: Compreendam as noções de espaço amostral, o conceito de casos favoráveis e casos não favoráveis de um experimento aleatório;
- Objetivo 2: Deduzem como se calcula a probabilidade de um evento simples;
- Objetivo 3: Resolvam problemas de natureza probabilística;
- Objetivo 4: Estabeleçam que a probabilidade de um evento deve ser um valor de 0 a 1, propiciando a definição de certeza e impossibilidade.

Inicialmente a turma deve ser dividida em grupos de até seis pessoas. Segue-se então ao professor a Exploração Potencial da parte 01 [I - EP], ela irá ajudar o professor a entender o direcionamento pelo qual o discurso do truque de mágica deve seguir, e consequentemente acarretará o desencadeamento investigativo dos conteúdos. Somente após a apresentação do truque de mágica, o professor deve disponibilizar a exploração potencial aos alunos [I - EP], pois o truque é realizado de modo a exemplificar na prática a Exploração Potencial. Segue então a [I - EP] da parte 01:

- **[I - EP]:** *Comumente na segunda metade do ano, os postos de gasolina das cidades se preparam para a realização de sorteios de motocicletas que geralmente acontecem no mês de dezembro. Para concorrer, qualquer pessoa que abastecer no posto ganha dois cupons que devem ser preenchidos e depositados em uma urna que armazena todos os cupons até a data do sorteio.*

Esse sorteio trata-se de um experimento aleatório, sendo que, uma vez que se sabe quantos bilhetes uma pessoa possui dentro da urna, bem como o total de bilhetes na urna, é possível calcular a probabilidade de uma pessoa ser sorteada. Dessa maneira, o truque de mágica deve então ser apresentado de modo a recriar a situação de um sorteio de uma motocicleta nos postos de gasolina. Recomendamos que o tempo apresentação desse truque de mágica deve ser de no máximo 15 minutos.

Após a apresentação do truque de mágica, os grupos devem começar seus processos investigativos, podendo o professor disponibilizar um baralho para cada grupo ou pedir que os alunos tragam baralhos de suas casas para que estes possam tentar recriar as situações expostas e fazer experimentos.

Para nortear o processo de análise probabilística da situação problema, segue as Intervenções Reflexivas (I_r) e uma Intervenção Avaliativa (I_A) que devem ser propostas aos alunos. Essas intervenções devem ser apresentadas na ordem expressa abaixo e cada uma deve ter duração média de 30 minutos.

- **1ª [I_r]:** Como foi realizado o truque de mágica?
- **2ª [I_r]:** Supondo que cada pessoa só pode possuir no máximo um cupom para concorrer e que estarão participando um total de 52 pessoas, de que maneira seria possível expressar/falar as chances de uma determinada pessoa ganhar?
- **3ª [I_r]:** Quais os fatores que podem aumentar ou diminuir as chances de uma pessoa ser sorteada?

- **4ª [I_r]:** Como seria possível calcular a probabilidade de ocorrência de uma carta com número par e múltiplo de 3 na segunda posição do baralho?

- **5ª [I_a]:** Elabore um texto sobre os métodos que foram utilizados para interpretar e resolver os problemas, bem como possíveis conceitos, modelos e fórmulas matemáticas que foram criadas pelo grupo.

4.1.1 O Truque de Mágica da Parte 01: ACAAN

O truque de mágica utilizado nessa parte se enquadra em uma categoria de truques chamada de ACAAN que significa *"Any card at any number",* que pode ser traduzido como *"qualquer carta em qualquer número"*, sendo que consiste basicamente em uma carta escolhida por uma pessoa ser encontrada em uma exata posição do baralho também escolhida pela pessoa ou por qualquer outra pessoa presente no local, sem que nenhuma das pessoas sequer tenham tocado previamente no baralho.

Aplicando essa mágica em contextualização a nossa Exploração Potencial [I - EP], o truque consiste no aluno escolher uma carta do baralho (que representará o cupom da pessoa no sorteio), memorizar e devolver ao mágico que, por sua vez, sem olhar a carta escolhida, a insere no baralho e embaralha as cartas (simulando a situação de vários cupons sem ordem fixa para a realização do sorteio). Outro espectador então é convidado a escolher qualquer número entre 1 e 52 (para simular o resultado do sorteio), e o mágico mostrará que a carta sorteada é a que havia sido escolhida previamente.

Como em geral, os truques de mágicas acontecem juntamente com uma história ou discurso contado pelo mágico, segue-se então uma sugestão de discurso para a aplicação do truque em sala de aula contextualizado com a situação problema:

"A maioria dos alunos aqui presentes já devem ter visto motos novas sendo sorteadas em postos de gasolina, será que é muito difícil uma pessoa ser sorteada? Que tal recriarmos aqui uma situação semelhante? Para isso preciso de um voluntário (denotemos como Pedrinho o aluno escolhido).

Muito bem, uma salva de palmas para o Pedrinho. Pedrinho, vamos simular aqui que você veio até meu posto de gasolina, encheu o tanque do seu carro e então eu te dei um cupom para participar do sorteio de uma motocicleta 0 km. Veja que eu tenho aqui em mãos um baralho de 52 cartas que irá representar esses cupons, certo? Escolha uma das cinquenta e duas cartas aqui para ser seu cupom e mostre para a turma, mas não me mostre (Pedrinho escolha uma carte, memoriza e mostra para a turma).

Agora me dê seu cupom aqui (carta escolhida) Pedrinho. Vou inserir seu cupom aqui na urna (baralho) e irei misturar os cupons para que seja um sorteio justo (embaralhar as cartas). Veja que o cupom está perdido em meio a todos os outros cupons, igual a uma situação real nos sorteios de postos de gasolina. Preciso agora de mais um voluntário para fazer o sorteio da motocicleta aqui para a gente (O segundo voluntário será denominado por Ana).

Ana, como eu tenho 52 cupons aqui, me diga um número de 1 a 52 que será o respectivo cupom sorteado (Ana escolhe então um número, por exemplo o número 15). Tem certeza que quer o número 15, Ana? (o número pode ser alterado caso a pessoa queira), pois bem, vamos até a carta de número 15. Quem será então o ganhador da motocicleta? Vamos ver. O vencedor é o Pedrinho (faz suspense antes de mostrar e depois revelando que a carta sorteada foi justamente a carta escolhida por Pedrinho)"

4.1.2 Revelando o truque de mágica da parte 01

Para a realização do truque de mágica é preciso utilizar um baralho normal de 52 cartas e pedir a algum aluno que escolha uma carta. Seguramos em uma das mãos a carta escolhida, que aqui será representada pelo ás de espadas, e na outra o restante das cartas embaralhadas, conforme a figura 1.

Figura 1- Apresentação do baralho e do Ás de espadas.

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

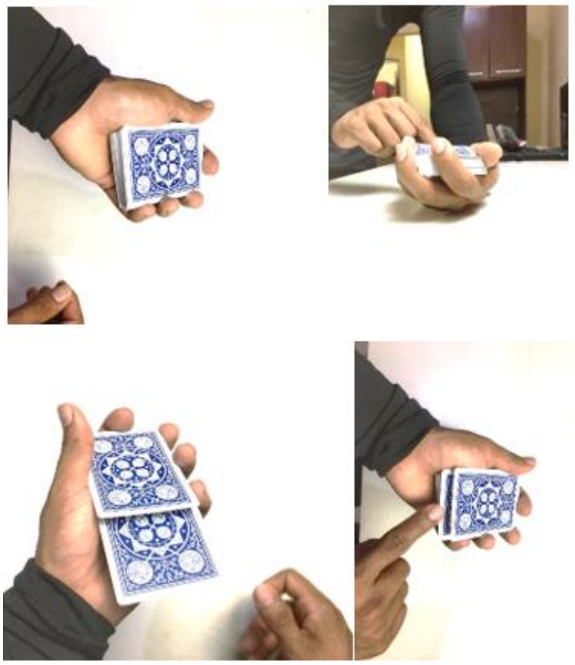
Em seguida, colocamos o ás de espadas na segunda posição do baralho fazendo com que os alunos acreditem estar colocando-a no meio do baralho. Para isso, empurramos levemente com o polegar a primeira carta do monte e em seguida fazemos uma quebra com dedo mindinho de modo a separar a parte de trás da primeira carta com o restante das cartas, conforme figura 2. Isso é chamado de "*break*" ou quebra.

Figura 2 - Break

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Colocamos o ás de espadas no *break* fingindo estar colocando no centro do baralho (figura 3), podendo após isso normalizar o modo de segurar o baralho. Dessa maneira, teremos a carta selecionada em uma posição que sabemos e que podemos controlar.

Figura 3 - Carta na segunda posição do baralho

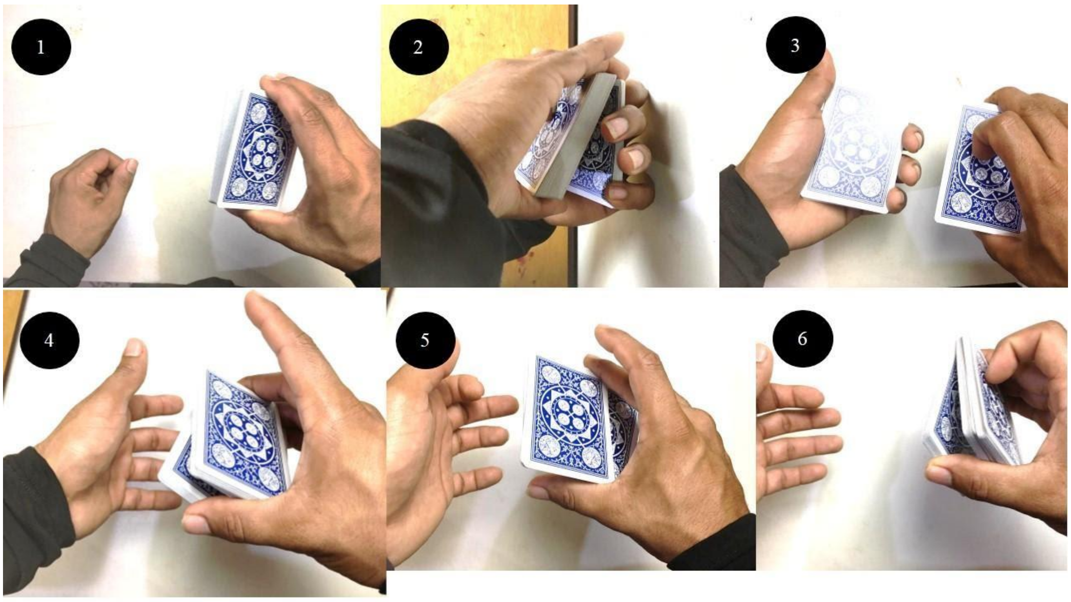


Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

O próximo passo será a realização de embaralhadas falsas, para gerar a noção de perder a carta escolhida no meio das demais. Para facilitar o entendimento do embaralhamento, seguem três etapas para sua realização.

Na primeira etapa, ilustrada pela figura 4, seguramos o baralho com a mão dominante. Em seguida, com a mão oposta, pegamos um pequeno bloco de cartas da parte inferior do baralho (itens 3 e 4). Colocamos o bloco na parte superior apoiando-o sobre no polegar sem deixar que ele se misture com as demais cartas conforme (item 5) e depois alinhamos os blocos igual ao mostrado no item 6. Lembrando que esse processo deve ser realizado de maneira fluida tal como uma pessoa embaralha normalmente um jogo de cartas.

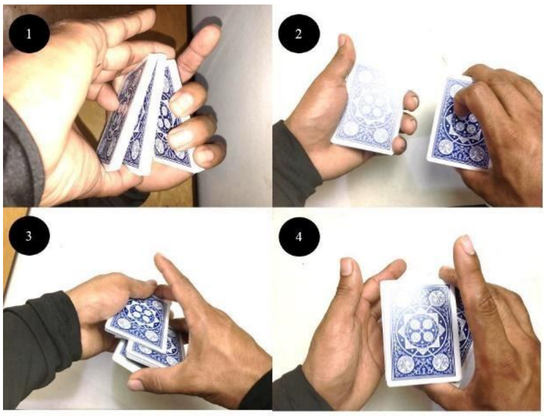
Figura 4 - Primeira etapa da embaralhada falsa



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

A segunda fase do embaralhar consiste em realizar o mesmo processo da primeira fase, entretanto, sem deixar que os dois blocos gerados na fase anterior se misturem, como mostra a figura 5. Ao final dessa fase, os dois blocos superiores podem se misturar, tendo somente que ficar isolado o bloco inferior, pois é justamente nele que a carta escolhida está localizada, logo abaixo da primeira carta.

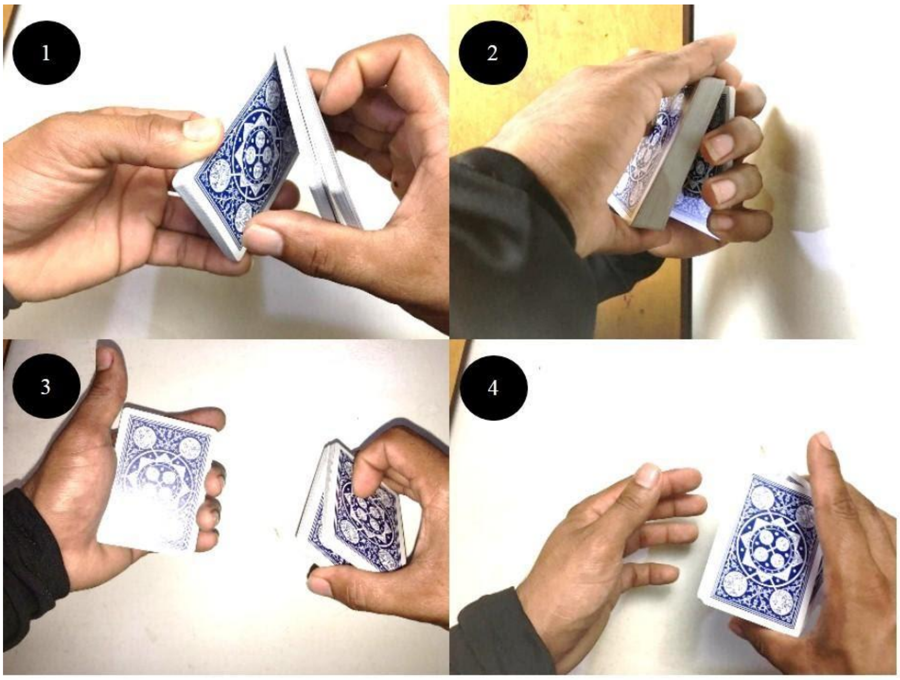
Figura 5 - Segunda etapa da embaralhada falsa



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

A terceira fase (figura 6) consiste somente em trazer o bloco inferior para a parte superior do baralho.

Figura 6 - Terceira fase da embaralhada falsa



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Dessa maneira a ordem do baralho permanecerá inalterada. Repetimos todo o processo mais uma ou duas vezes para gerar uma melhor noção de embaralhamento. Com isso, a carta escolhida volta para a posição original na qual havia sido colocada no início da ilusão, conforme a figura7. Lembrando que a carta está de face para cima somente para fins didáticos e que ao realizar o procedimento ela deve ficar sempre de face para baixo, e que todo o processo jamais deve ser divulgado aos alunos.

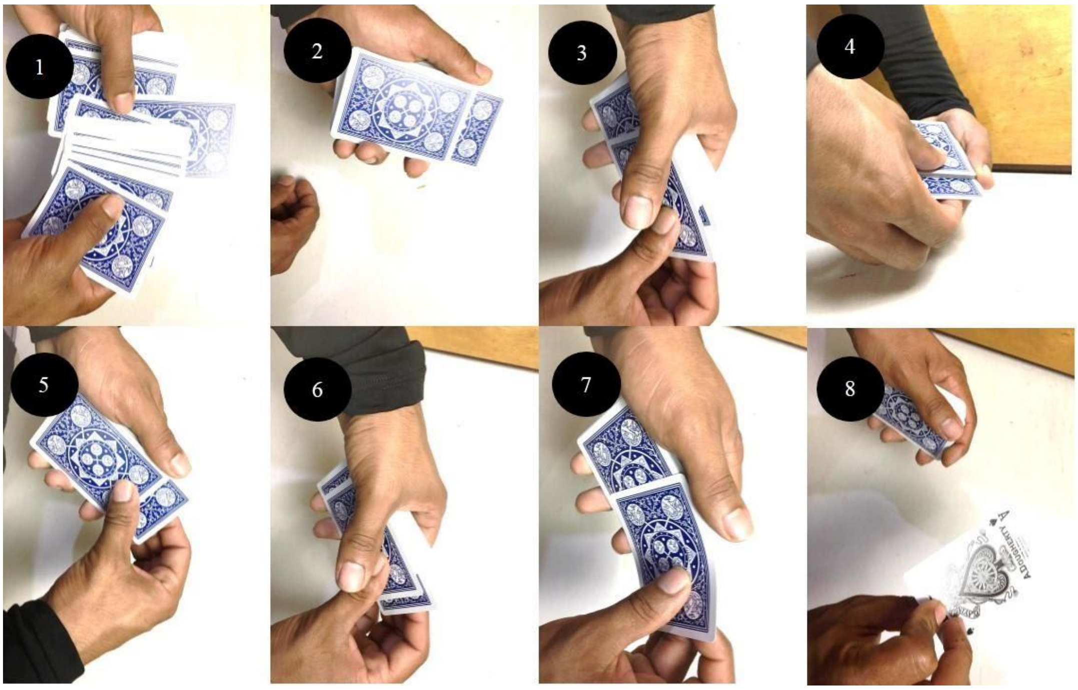
Figura 7 - Carta de volta à posição inicial

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

De maneira sutil, utilizando o dedão da mão oposta à qual está segurando o bloco de cartas, pegamos a primeira carta do baralho e colocamos na última posição do baralho. Assim, teremos a carta escolhida na primeira posição.

No próximo passo da mágica (figura 8), pedimos para que um aluno diga um número de 1 a 52, dando a ele a possibilidade de mudar de número. Após escolhido, contamos as cartas até o número dito pelo aluno sem modificar a ordem do baralho, e em seguida destacamos a carta da posição, e sem deixar que os alunos vejam qual carta é. Utilizando os dedos indicador, médio e polegar da mão oposta ao bloco, com um movimento de pinça empurramos a carta que estava no número do aluno para dentro do bloco e puxamos a primeira carta do baralho (Ás de espadas) girando a mão do bloco em direção ao próprio corpo e exibindo o ás para os alunos. Esse movimento todo, se feito de maneira rápida e natural, dará a completa impressão de que o às foi retirado da posição escolhida pelo aluno.

Figura 8 - Revelação da carta



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

4.1.3 Análise a Priori da Parte 01

Na parte 01, com a apresentação da exploração potencial em conjunto com o truque de mágica, espera-se contextualizar o estudo para o aluno mostrando aplicações da probabilidade no cotidiano e também que situações com poucas chances de consolidação podem realmente acontecer, buscando confrontar por meio de análises Matemáticas situações que para muitos alunos se resumem em "sorte", ou até mesmo na bênção de um deus (para aqueles que são religiosos). Essa etapa serve para o professor fazer uma análise geral dos conhecimentos prévios da turma a fim de estabelecer uma comparação entre as respostas baseadas no senso comum com as respostas pautadas em argumentos com caráter mais lógico, buscando incentivar os alunos a buscarem respostas concretas.

Por meio da segunda intervenção reflexiva, os alunos podem então escolher uma carta para começar a analisar, acarretando assim a conclusão de que eles têm uma única carta a seu favor para serem sorteados, as outras 51 cartas implicam no fracasso. Isso leva a concluir que em uma determinada posição do baralho, após embaralhar, qualquer das 52 cartas pode estar em qualquer posição. Ou seja, as possibilidades de uma carta estar, por exemplo, na terceira posição do baralho é igual a 52. Com a isso, há um número que representa todas possíveis possibilidades de um determinado evento acontecer, sendo ele denominado de espaço amostral n(Ω), e que há um número que representa as possibilidades deles de acertarem, ou sejam, seus casos favoráveis “n(a)” que nesse caso é 1.

Conceitualmente, eles têm 1 possibilidade de acerto em meio a 52 possibilidades, podendo ser interpretado como 1 para 52, e consequentemente pode ser representado por meio de uma razão 152≈0,019, sendo essa a probabilidade de ser sorteado. Isso pode ser escrito como uma generalização utilizando-se uma expressão Matemática, onde n é o espaço amostral (número de todos os possíveis casos) e n(a) são os casos favoráveis.

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Com a terceira intervenção reflexiva, os alunos podem concluir que quanto maior for a quantidade de casos favoráveis, maiores serão as chances de acontecer um determinado evento, e que quanto menor os casos favoráveis, menores serão as chances de acontecer. Pode-se concluir ainda que a quantidade de elementos no espaço amostral interfere nos cálculos, ou seja, quanto maior o espaço amostral, menor as chances de alguém ser sorteado, e quanto menor o espaço amostral, maior as chances de alguém ganhar.

Ainda nessa questão, pode se construir a ideia de que se não houver casos favoráveis, a probabilidade de o evento acontecer é nula, ou seja, o evento é impossível, e se, por exemplo houvessem várias cartas repetidas então aumentariam as chances de alguém vencer, podendo isso ser usado para fraudar sorteios dessa natureza.

É possível que algum aluno alegue que todas as cartas do baralho são iguais, isso gera algo chamado de certeza de um evento, ou seja, os casos favoráveis compreendem todas as possibilidades de escolha, acarretando na certeza de consolidação do evento que se quer. Os mágicos utilizam desse recurso para fazer a pessoa escolher cartas que ele queira utilizando baralhos com todas as cartas repetidas, assim há a criação da certeza de o evento acontecer.

Na quarta intervenção reflexiva, espera-se trabalhar o conceito e o cálculo de probabilidade de eventos intersecção de eventos. Assim, com a posse do baralho em mãos, espera-se que os alunos consigam interpretar que simultaneamente, a carta deve ser par e múltipla de 3. Nessas circunstâncias, como o baralho possui números de 1 a 13, seriam então as cartas de número 3, 6, 9 e 12. Todavia, esses números existem nos quatros naipes, assim teríamos uma carta do 3 de paus, uma carta do 3 de espadas, uma carta do 3 de copas e uma carta do 3 de ouros, repetindo isso para cada número. Então o espaço amostral é composto por quatro cartas com número 6 e quatro cartas com número 12, excluindo-se as cartas de número

3 e 9, pois estas não são pares. Agora tem-se 8 possibilidades favoráveis, n(A) = 8, em meio a 52 possibilidades, $n(\Omega)$. Então:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{52} \cong 0{,}15 = 1{,}5\%$$

Por fim, com a intervenção avaliativa espera-se criar-se um mecanismo para o professor avaliar o desenvolvimento das ideias de cada grupo, partindo das próprias concepções do professor atribuir uma nota para grupo. Espera-se nessa etapa que os alunos tenham a priori dificuldades em resolvê-la, visto que é necessário a sintetização textual e por meio de cálculos e conceitos, todo o conhecimento proposto na parte 01.

4.2 Parte 02: Loteria Mágica

A parte 02 deve ser realizada em um encontro com duração de 4h e visa que os alunos consigam:

- Objetivo 1: Identificar o conectivo “e” com a intersecção de eventos;
- Objetivo 2: Calcular a probabilidade da interseção de eventos;
- Objetivo 3: Resolver problemas envolvendo probabilidade condicional.

A turma deve ser dividida em grupos de até seis integrantes, e após isso, o professor deve ter em mente a seguinte Exploração Potencial [I - EP], pois ela irá direcionar a uma problemática investigativa a ser interpretada por um truque de mágica e que é muito comum na vida das pessoas: os sorteios lotéricos.

- **[I – EP]:** *Dona Maria, uma senhora de 60 anos de idade joga semanalmente na mega-sena desde os seus 34 anos. Na Mega-Sena, normalmente, o participante deve escolher 6 números entre 60 números, e ganha o prêmio máximo se os 6 números de sua escolha forem sorteados. Para a tristeza de Dona Maria, ela nunca foi sorteada, mas sempre diz que existem chances de um dia ganhar.*

Essa Exploração Potencial deve ser apresentada aos alunos primeiramente por meio de um truque de mágica, e somente após isso a [I - EP], deve ser dada de maneira escrita aos discentes. O truque de mágica será feito de modo a simular com os alunos a situação de um sorteio de loteria, nesse caso, o sorteio da mega-sena. Os detalhes sobre o truque de mágica serão descritos no próximo tópico.

Segue baixo as Intervenções Reflexivas (I_r), as Reflexões exploratórias (I_e) e uma Intervenção Avaliativa (I_A) que devem ser propostas aos alunos na ordem apresentada abaixo, no qual para cada deve ser dada um tempo médio de 30 minutos para investigações e elaboração das respostas. Essas intervenções nortearão toda a dinâmica afim de que seja trabalhado com os alunos os assuntos propostos nos objetivos da Parte 02.

- **1ª - [I_e]:** Explique como você acha que foi possível a realização da mágica;
- **2ª - [I_e]:** Calcule a probabilidade de alguém ser sorteado na mega-sena;
- **3ª - [I_r]:** Quais fatores podem acarretar na dificuldade ou aumentar as chances de uma pessoa em vencer nesse tipo de sorteio?
- **4ª - [I_e]:** Supondo que Pedro e Ana, duas pessoas da mesma família fizeram jogos diferentes pra concorrer a um mesmo sorteio da mega-sena, qual a probabilidade que Pedro vença ou Ana vença?
- **5ª - [I_a]:** Elabore um texto sobre os métodos que foram utilizados para interpretar e resolver os problemas, bem como possíveis conceitos, modelos e fórmulas Matemáticas que foram criadas pelo grupo.

4.2.1 O Truque de Mágica da Parte 02: Loteria Mágica

Inicialmente, escolhe-se um aluno para selecionar 6 cartas do baralho, na qual cada escolha será conduzida de uma maneira diferente pelo professor (isso irá representar a escolha de 6 números de um participante da Mega Sena), somente o próprio aluno pode ver as cartas escolhidas, devendo ele guardar todas sem que mais ninguém veja. O professor então irá pegar outro baralho, sendo que nele será escolhido por outros alunos um total também de seis cartas, representando assim o sorteio do resultado da loteria. Para o sorteio, cada aluno dirá um número de 1 a 52 que representará a posição de uma carta contada do topo para a base do baralho, dessa maneira, cada número escolhido estará representando uma carta e cada carta representa um número sorteado. Após destacar cada carta selecionada pelos 6 alunos, deve-se então pedir ao aluno que estava participando do sorteio que confira o resultado e verifique quem foi o grande vencedor da loteria escolar.

Para facilitar a apresentação do truque, segue-se uma sugestão de discurso para a realização do truque de mágica:

“Olá turma, acredito que todos já ouviram falar nos jogos de loterias. São aqueles que você escolhe uma quantidade de números dentre algumas possibilidades em um bilhete e se os números escolhidos foram sorteados, você ganha uma premiação em dinheiro.

Vamos buscar recriar aqui o jogo da Mega sena. Nesse jogo você escolhe 6 números de um total de 60, se os seus forem sorteados, você ganhará uma quantia enorme de dinheiro. Porém, vamos usar aqui o baralho com 52 cartas para representar o bilhete onde o participante marca os números, e cada carta irá representar uma escolha. Devido a isso gostaria de um voluntário para ser a pessoa que irá concorrer.

O aluno Pedrinho foi o voluntário. Pedrinho eu vou embaralhar as cartas aqui para mostrar que realmente está tudo misturado. Agora eu vou te ajudar a escolher 6 cartas, sendo cada escolha de maneiras diferentes (nesta etapa deve ser feito o processo de escolha de seis cartas conforme será ensinado na revelação do truque).

Guarde suas escolhas e não mostre pra ninguém, pode colocar no seu bolso se achar melhor. Agora vamos pegar esse outro baralho para simular um sorteio da mega sena. Vou embaralhar as cartas e pedir para que seis pessoas escolham uma carta, cada carta escolhida por alguém será um número sorteado para nossa brincadeira (agora deve-se andar pela sala e pedir para que alunos escolham uma carta de cada vez e não mostrem para ninguém).

Agora que temos a escolha do Pedrinho e os números sorteados, vamos conferir se houve um vencedor. Os seis alunos podem mostrar às cartas uma a uma e o Pedrinho irá revelar se foi uma de suas escolhas. E olha só, parece que temos um novo milionário em sala de aula em.”

4.2.2 Revelando o truque de mágica da parte 02

Para a realização desta mágica será utilizado uma sequência de técnicas conhecidas como “forces”, que se trata do ato de forçar a escolha da carta desejada para o público, fazendo-o pensar que ele mesmo escolheu, mas na verdade, o mágico induziu-o a uma escolha predefinida.

Começamos então selecionando 6 cartas quaisquer, em cada baralho, para forçar ao estudante, que será aqui exemplificado com as cartas de 1 a 6 do naipe de paus, conforme ilustrado na figura 9 (em ambos os baralhos devem ser as mesmas representações de cartas).

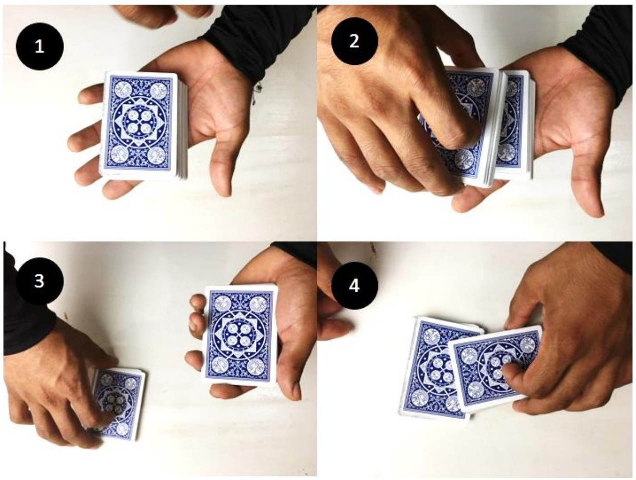
Figura 9 – Cartas usadas

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Precisamos agora preparar o baralho para a realização do truque, então em cada respectivo baralho, disponha uma das cartas na base do baralho e as restantes no topo do baralho.

Para o primeiro force, estenda sua mão com o baralho sobre ele e peça para o aluno dividir o baralho em duas partes pegando para si um bloco de cartas, em seguida peça para ele deixar o bloco sobre uma mesa ou uma cadeira, pegue o outro bloco que estava em sua mão e o coloco em cima do bloco de cartas do aluno conforme a figura 10.

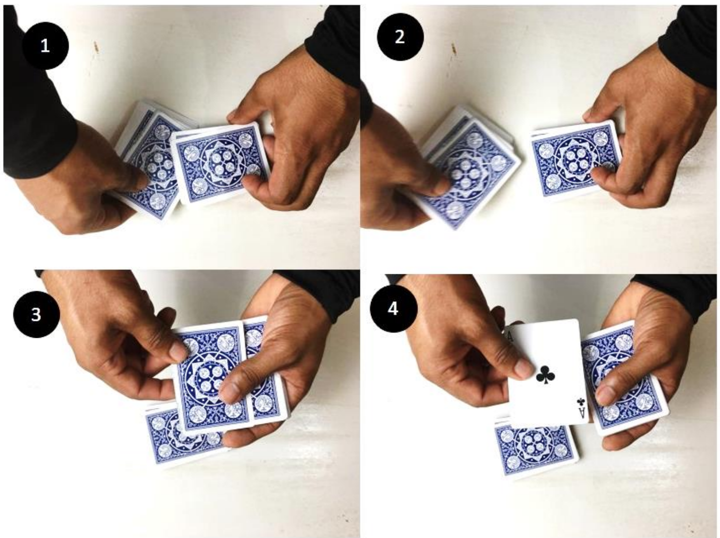
Figura 10 - Force 1 (parte 1)



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Traga a atenção dos alunos para si mesmo dizendo que essa maneira será a forma pela qual será escolhida a primeira carta. Em seguida, entregue a primeira carta do bloco que está embaixo conforme a ilustrado pela figura 11 (esse bloco era o que estava no topo do trabalho), isso fará com que os alunos pensem ter pego uma carta do meio do baralho, mas na verdade, pegou a carta escolhida pelo professor. Embora pareça um tanto quanto arriscado fazer isso, os alunos não lembrarão qual bloco estava em cima e qual bloco estava embaixo.

Figura 11 - Force 1 (parte 2)

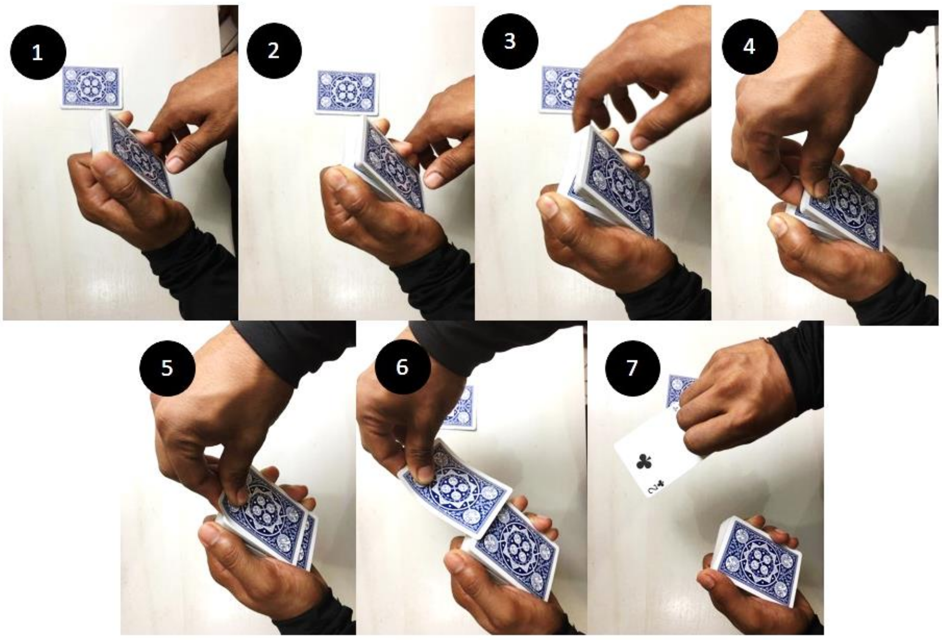


Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Após isso, tenha cuidado para não misturar as cartas e reorganize os blocos para voltar à organização original deixando com o aluno a carta “escolhida por ele”.

A segunda técnica irá forçar também uma das cartas do topo do baralho, e para isso, segure o baralho com a mão oposta à sua mão dominante, e com o polegar da mesma mão, deslize-o no canto do baralho da parte superior até a parte inferior pedindo para que o aluno diga para parar a qualquer momento que ele queira. No local onde o dedo estiver quando o aluno pedir para parar, destaque uma quebra maior no local com o dedo polegar, depois com a mão oposta, coloque o dedo indicador na quebra e o polegar da mesma mão no topo do baralho, em um movimento rápido, finja tirar a carta do lugar destacado, mas puxe a carta do topo, isso dará a impressão de que a carta foi realmente tirada do local escolhido pelo aluno, mas na verdade, foi destacada uma das cartas escolhidas pelo professor. A figura 12 ilustra as etapas do segundo force.

Figura 12 - Segundo force

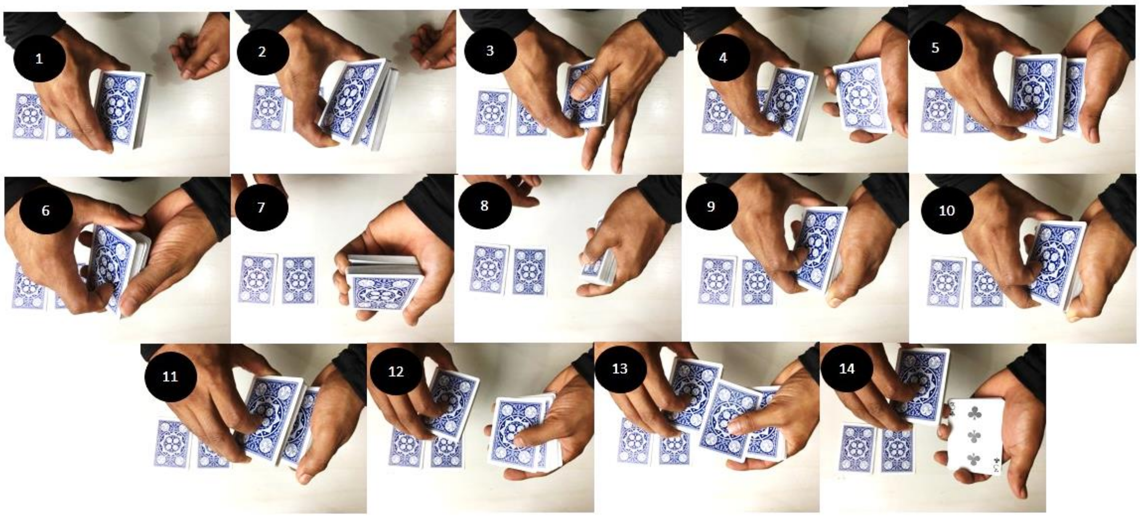


Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

O terceiro force é semelhante ao segundo, todavia, para iniciar, segure o baralho conforme a Figura 13 utilizando a mão dominante, e com o dedo indicador puxe um pequeno bloco de carta e o pegue com a mão oposta, em seguida, coloque o restante das cartas que estão na mão dominante sobre o bloco que está na outra mão, mas sem misturar as cartas, e para isso utilize o dedo mindinho para separar os blocos somente na parte de trás do baralho. Após isso, risque o polegar o canto frontal do baralho conforme a etapa anterior e peça para o aluno dizer “pare” quando ele quiser.

Finja dividir o baralho no local onde o aluno escolher, mas separe as cartas no local onde estava marcado com o dedo mindinho e entregue ao aluno a primeira carta do bloco de baixo, isso fará com que o aluno pense ter escolhido uma carta do meio do baralho, mas na verdade é uma das cartas que antes estava no topo, ou seja, uma das cartas previamente selecionadas pelo professor. A figura 13 ilustra todos os passos dessa técnica.

Figura 13 - Terceiro Force

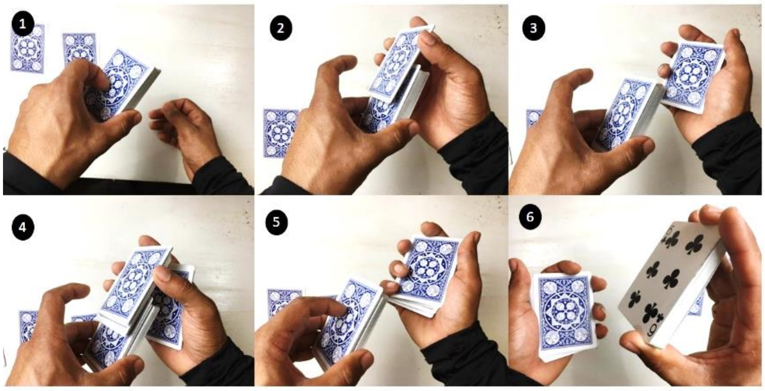


Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Após isso, repita a primeira e a terceira técnica para forças mais duas cartas para o aluno.

Assim, faltará somente uma escolha a ser feito pelo aluno, para isso, iremos forçar a escolha da carta anteriormente posta na base do baralho. Segure o baralho com a mão dominante conforme o item 1 da Figura 14 e com o dedo indicador e polegar da mão oposta retire pequenos blocos de cartas, um de cada vez, do topo do baralho, repousando sobre a mão a mesma mão que os está tirando. Enquanto faz isso, peça para o aluno dizer "pare" em algum momento, e quando ele disser, vire o bloco de cartas da mão dominante expondo a última carta do bloco, dando a entender que ele pediu para parar naquela carta, em seguida a entregue ela ao estudante.

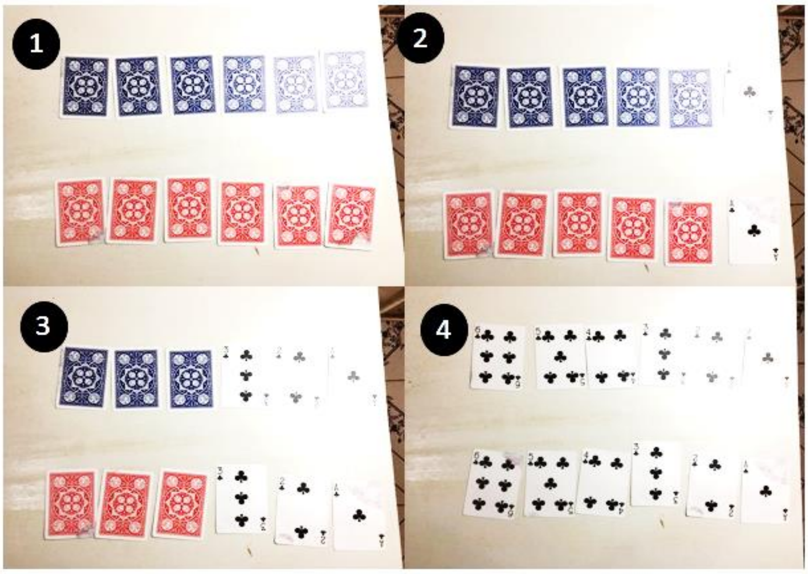
Figura 14 - Quarto force



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Com isso, o aluno terá “escolhido” suas seis cartas. Para dar continuidade, pegue o outro baralho e da mesma maneira como foi forçado as cartas para o aluno “A”, force para outros seis alunos diferentes, dando a entender que está acontecendo um tipo de sorteio aleatório. Após a realização, coloque as cartas dos dois baralhos emparelhadas e comece a revelar aos pares conforme a figura 15, revelando que o aluno “A” foi sorteado.

Figura 15 - Exposição final do truque



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

4.2.3 Análise a Priori da Parte 02

A parte 02 faz menção a uma situação muito comum na vida dos brasileiros que são os jogos em loterias, mais precisamente a mega sena. Com a primeira intervenção exploratória, o professor deve analisar a evolução dos argumentos dos alunos comparando com as respostas do encontro anterior sobre como a mágica foi realizada, pois o intuito é que agora as respostas com base lógica sejam mais recorrentes. Sabemos que é muito difícil desvendar todo o truque de mágica durante a aula, sendo necessário vários dias para que uma pessoa sozinha consiga descobrir. Acreditamos que os alunos podem ter como palpite que os baralhos estavam pré-programados, com as cartas organizadas em posições específicas, porém, acreditamos que no pouco tempo para desvendar o truque, é improvável que consigam desvendar essa organização. Outro palpite que os alunos podem sugerir é que alguns cortes escolhidos pelos alunos para selecionar as cartas não estão sendo feitos no local realmente indicado, acarretando então a descoberta de alguns dos forces (ato de forçar uma carta a alguém).

Com a segunda intervenção exploratória, os alunos irão fazer uso da aplicação de conceitos já trabalhos na Parte 01 e deverão ter a ideia de que para vencer na mega-sena, o primeiro número escolhido por eles deve ser sorteado e o segundo número escolhido deve ser sorteado, e o terceiro número deve ser sorteado, e assim por diante, notando o uso do conectivo “e”. Dessa maneira, os alunos podem esquecer de considerar que um número sorteado seja descartado do próximo sorteio, alterando assim o espaço amostral dos sorteios subsequentes. O cálculo poderia então ficar da seguinte maneira: $\frac{6}{30}.\frac{5}{60}.\frac{4}{60}.\frac{3}{60}.\frac{2}{60}.\frac{1}{60}$.

Caso isso ocorra, precisaremos orientar os alunos sobre a não reposição dos números já sorteados tendo as chances do primeiro número ser sorteado $\frac{6}{60}$, já a do segundo $\frac{5}{59}$, do terceiro $\frac{4}{58}$ e assim por diante. É bem provável que ao chegar nessa parte, os alunos não saibam o que fazer com essas probabilidades isoladas, devendo então o professor incentivar os alunos a escrever as probabilidades lado a lado entre o conectivo “e”, da seguinte maneira:

$$\frac{6}{60}\ e\ \frac{5}{59}\ e\ \frac{4}{58}\ e\ \frac{3}{57}\ e\ \frac{2}{56}\ e\ \frac{1}{55}$$

Assim, eles poderão ver as probabilidades de maneira conectada, transcendendo para a ideia de multiplicar os valores, obtendo:

$$P(ser\ sorteado) = \frac{6}{60}.\frac{5}{59}.\frac{4}{58}.\frac{3}{57}.\frac{2}{56}.\frac{1}{55} = \frac{720}{36045979200} = 0{,}000000019974$$

Já na terceira intervenção os alunos podem supor que a dificuldade em vencer ocorre das imensas possibilidades de sequencias de números compostos por 6 elementos utilizando números de 1 a 60. E para que aja um aumento nas chances de vencer, o número de números selecionados por uma pessoa para concorrer deve ser maior. Espera-se que essa conclusão não seja difícil de ser alcançar, pois ideias semelhantes já foram trabalhadas no encontro 1, e caso os alunos não consigam chegar a essa conclusão o professor deve fazer perguntas que guiem os alunos, como por exemplo: Quem tem mais chances de ganhar, uma pessoa que marca 6 números ou uma pessoa que marca 10 números para concorrer na mega sena?

A quarta intervenção, para calcular as chances de Pedro ser sorteado ou Ana ser sorteada (com bilhetes com números diferentes) implica na ideia de que somente um vai vencer e o outro não. Por exemplo, se Pedro e Ana estão concorrendo no sorteio, caso Pedro ganhe, Ana não pode vencer, e caso Ana vença, Pedro não pode vencer, consequentemente não pode haver casos em que os dois vençam ao mesmo tempo, e como as chances de um vencer não sofre influência do outro, temos dois eventos independentes. Assim, podemos resolver o problema da seguinte forma:

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} = \frac{720}{36045979200} + \frac{720}{36045979200} \cong 0{,}0000000399$$

Por fim, assim como na parte 01 tem-se a intervenção avaliativa como mecanismo para o professor avaliar o desenvolvimento das ideias de cada grupo, suas soluções, conceitos, modelos e fórmulas Matemáticas.

4.3 Parte 03: Desafio Mágico

A parte 03 também se recomenda o tempo de 4h para sua realização, e possui os seguintes objetivos:

- Objetivo 1: Aplicar o teorema da adição de probabilidades;
- Objetivo 2: Reconhecer eventos dependentes e independentes;
- Objetivo 3: Desenvolver modelos que representem o teorema da adição de probabilidades.
- Materiais utilizados: 1 baralhos de 52 cartas

Primeiramente, os alunos devem ser distribuídos em grupos com no máximo seis integrantes, e após isso, o professor deve fazer a apresentação do truque de mágica. Para isso, o professor terá como base da apresentação do truque a Exploração Potencial [I - EP] da parte 03, ela direcionará o professor ao discurso que norteará a apresentação do truque e o delineamento de todo o encontro. Segue-se então a Exploração Potencial [I - EP] da parte 03:

- **[I - EP]**: *No brasil, não é raro de encontrar famílias que se reúnem nos finais de semana para jogar baralho fazendo apostas de valores simbólicos como 10 centavos. Em um dia de jogo com familiares, Rodrigo desafio seu irmão Rodolfo a embaralhar as cartas e. após isso, retirar 10 cartas ao caso, e em meio a essas 10 cartas, 4 deles serem os reis.*

Após isso deve ser apresentado o truque de mágica de modo que simule a situação do desafio proposta na Exploração Potencial. Esse truque de mágica deve ser apresentado com um tempo de até 10 minutos.

Antes de adentrarmos a realização do truque, vejamos primeiro as Intervenções Reflexivas (I_r), Reflexões Exploratórias (Ie) e a Intervenção Avaliativa **[I_A]** que devem ser propostas aos estudantes com o intuito de direcionar a busca de analisar a situação.

- **1ª - [I_r]:** Tente explicar como foi realizado o truque de mágica.
- **2ª - [I_r]:** Discuta com seu grupo e explique, por meio de conceitos probabilísticos, sobre as chances de Rodolfo conseguir vencer o desafio proposto por seu irmão.
- **3ª - [I_e]:** Considere a situação que foi exposta com o truque de mágica na qual foram retiradas do baralho quatro cartas sucessivamente. Dado que as duas primeiras foram o Rei de Copas e o Rei de Paus, qual a probabilidade das outras duas serem também cartas do Rei?
- **4ª - [I_e]:** Na situação do Mágico vs Gambler, qual a probabilidade da primeira carta a sair ser um Rei de Ouros dado que a carta é preta?
- **5ª - [I_a]:** Elabore um texto sobre os métodos que foram utilizados para interpretar e resolver os problemas, bem como possíveis conceitos, modelos e fórmulas Matemáticas que foram criadas pelo grupo.

4.3.1 O Truque de Mágica da Parte 03: Mágico Vs Gambler

No mundo da mágica existe um truque chamado de “Mágico vs Gambler”. Nessa mágica, o Gambler desafio o mágico a fazer cortes no baralho e retirar quatro cartas consecutivamente de mesmo valor, o mágico aceita o desafio dizendo que irá sempre realizar três cortes e revelar a carta do topo do baralho. O mágico então pega seu baralho, faz três cortes e revela a carta do topo, sendo ela um rei, ele pega o rei e coloca face para baixo na mesa.

O mágico então realiza novamente três cortes, revela a carta do topo, e para surpresa do Gambler, a carta é um outro rei, o mágico coloca então o segundo rei de face para baixo na mesa. Tem-se então mais três cortes e o terceiro rei é revelado e colocado face para baixo na mesa. O Mágico então realiza os últimos três cortes, pega na carta do topo, e revela como sendo um 7.

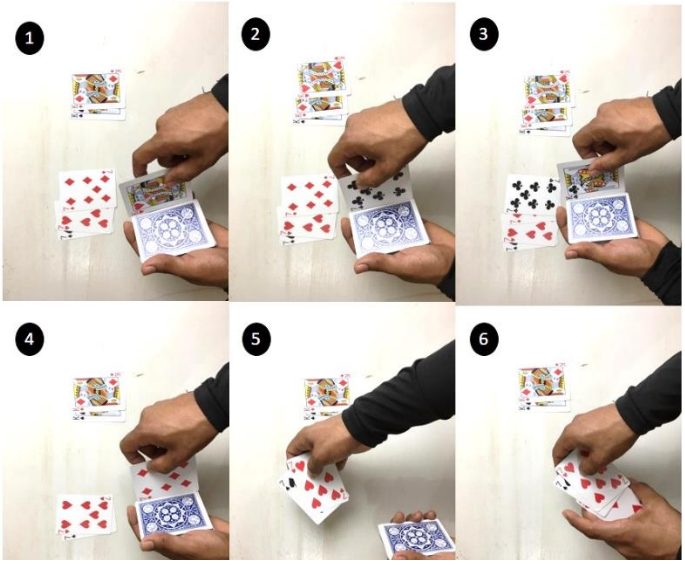
O Gambler então diz que venceu a aposta, mas o mágico diz que o trato não foi a retirada de quatro reis e sim quatro cartas de mesmo valor. Ele pede então para o Gambler virar as três cartas que estavam face para baixo na mesa, e para a surpresa do Gambler, eram três cartas de número 7. Para finalizar, o mágico então mostra ao Gambler que os reis estavam espalhados no próprio bolso e não dentro do baralho.

Uma vez feita essa descrição do truque, assim como nas partes anteriores, para ajudar o professor a aplicar esse truque de mágica de maneira contextualizada com a Exploração Potencial, vamos discutir como ele pode se portar e o que falar durante a realização do Truques. Diferentemente dos truques anteriores, o professor pode começar falando sobre a existência de diversas famílias e amigos que se reúnem para jogar cartas. Nesse cenário não é raro encontrar pessoas tentando adivinhar qual carta irá sair do topo do baralho ou qual carta está na mão de seu adversário. Assim a situação hipotética seria a de um amigo que desafiou o outro a retirar do baralho quatro cartas consecutivas e de mesmo valor; Para a realização do truque recomenda-se que o professor use como discurso a própria história do Mágico vs Gambler.

4.3.2 Revelando o Truque de Mágica da Parte 03

A realização desse truque de mágica necessita de uma preparação prévia do baralho. Para isso retire do baralho as quatro cartas de rei e as quatro cartas de número 7. Em posse das cartas, coloque no topo do baralho um dos reis, em seguida um dos 7, depois um dos reis novamente e logo em cima outro dos 7. Após isso, coloque as outras duas cartas de número 7 nas últimas posições do baralho. A figura 16 ilustras esses passos.

Figura 16 - Preparação do truque Mágico vs Gambler



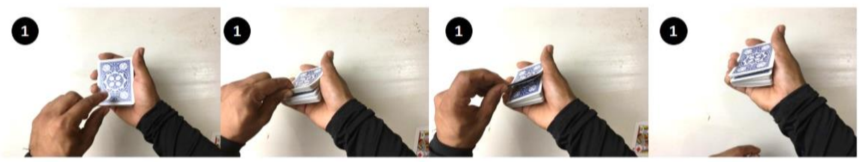
Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Para iniciar a apresentação, realize algumas vezes a embaralhada falsa já ensinada referente ao encontro 01 da sequência didática. Para passar a ilusão de que as cartas estão realmente embaralhadas é recomendado que use pelo menos mais um tipo de embaralhamento falso.

Para revelar a primeira carta (lembre-se que o rei está na segunda posição do baralho) é necessário utilizar uma técnica chamada de *double lift*, que consiste no ato de virar duas cartas dando a impressão de ser somente uma. Ensinarei aqui uma das variações mais simples de se executar essa técnica, porém há várias que podem ser encontradas na internet. Quando for revelar a carta toda, finja "sentir" as cartas passando uma das mãos sobre o baralho e ao mesmo tempo realize os passos a seguir.

No ato de "sentir" as cartas, com o dedo polegar da mão oposta a que estiver segurando o baralho, conte duas cartas discretamente e depois mantenha as duas separadas do bloco maior de cartas do com o dedo mindinho como mostrado na figura 17.

Figura 17 - Primeiro passo do *double lift*



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

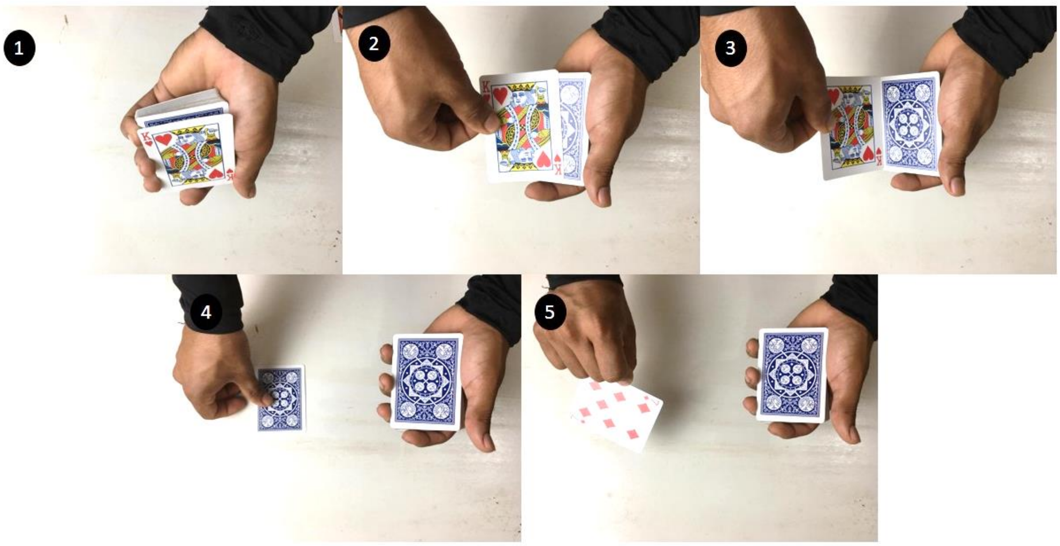
Em seguida, com o dedo indicador e polegar em forma de pinça, vira as duas cartas juntas, fazendo que pareça ser uma só carta (importante ter cuidado para as cartas não se separarem, caso contrário o truque todo estará arruinado), as deixe virada sobre o baralho. A figura 18 a ilustra o segundo passo do *double lift*.

Figura 18 - Segundo passo do *double lift*

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Com isso a carta que será exibida será o rei, como se ele estivesse no topo do baralho, mas na verdade a carta do topo é um 7. Faça novamente o *double lift* para as cartas ficarem face para baixo novamente no topo do baralho e em seguida disponha a primeira carta em cima da mesa com face para baixo conforme a figura 19. Importante lembrar que até a revelação final, em hipótese nenhuma, os alunos devem ver que a carta que está sendo colocada sobre a mesa é o número 7, a figura 19 mostra a carta no ultimo quadro apenas como recurso didático.

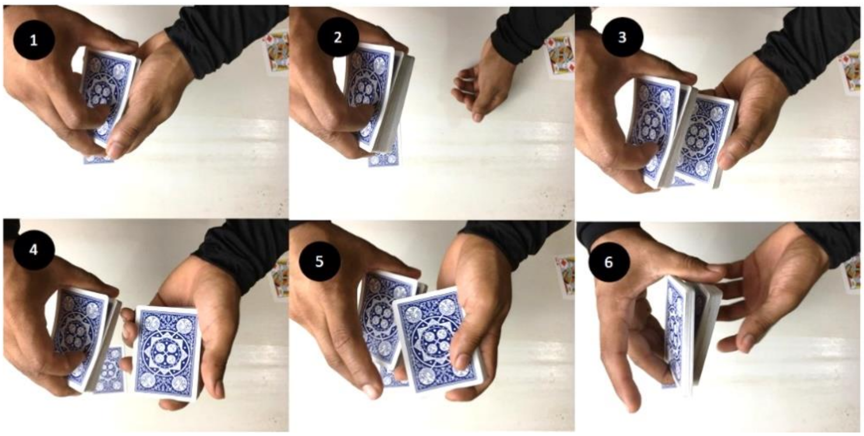
Figura 19 - Finalização da exposição do primeiro rei



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

O próximo passo é o de conduzir o rei que agora está no topo para a base do baralho sem alterar a ordem das demais cartas. Para isso, segure o baralho com a mão dominante fazendo uma quebra com o polegar na primeira carta do baralho, em seguida, com a mão oposta, pegue um pequeno bloco da base do baralho e coloque no topo mantendo a quebra realizada conforme a figura 20.

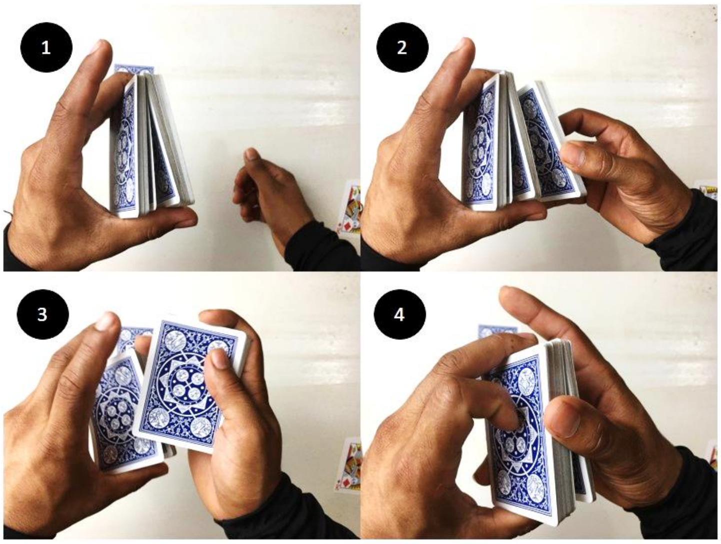
Figura 20 - Conduzindo uma carta do topo para a base do baralho (parte 1)



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Depois pegue outro bloco de cartas e coloque novamente para o topo conforme a figura 21.

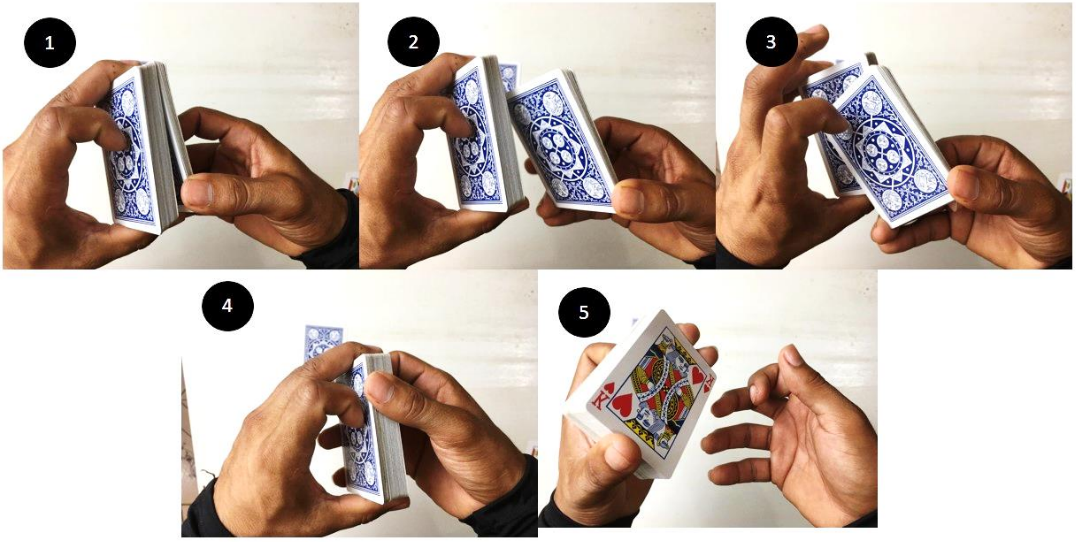
Figura 21 - Conduzindo uma carta do topo para a base do baralho (parte 2)



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Por fim pegue o restante das cartas até a quebra que foi criada e coloque para o topo do baralho, assim a carta que antes estava no topo, estará agora na base baralho, como ilustrado pela figura 22.

Figura 22 - Conduzindo uma carta do topo para a base do baralho (parte 3)

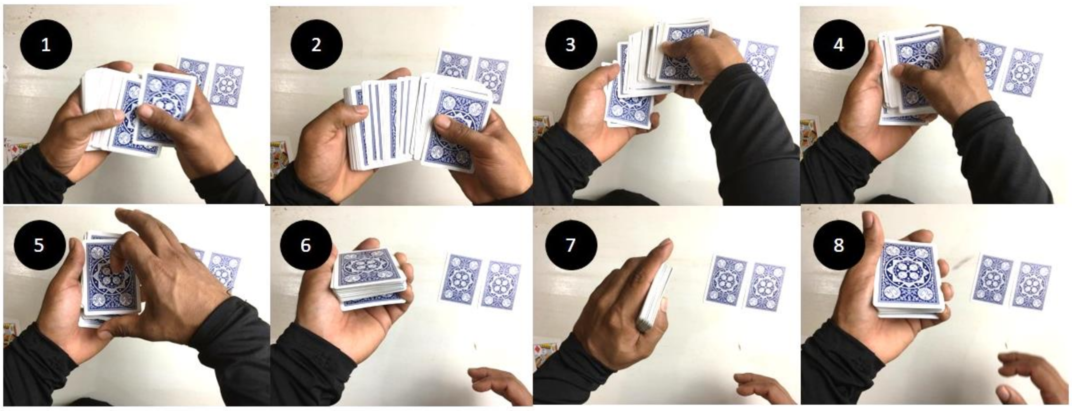


Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Agora com o mesmo processo usando o *double lift*, revele a carta do "topo" com sendo o rei (mas na verdade o rei é a carta da segunda posição do baralho), desfaça o *double lift* e coloque a primeira carta do baralho em cima da mesa também com face para baixo para esconder que ela é na verdade um 7.

Para preparar a próxima revelação de carta, é preciso conduzir as duas últimas cartas da base do baralho para o topo. Para isso, durante o discurso da mágica, passe as cartas uma por um, ou de várias cartas como se estivesse mostrando que o baralho está todo embaralhado, ao chegar nas duas últimas, alinhe todas as cartas ao mesmo tempo que separa as duas últimas com o dedo mindinho, criando uma quebra de cartas entre elas e o baralho, seguindo as etapas da figura 23.

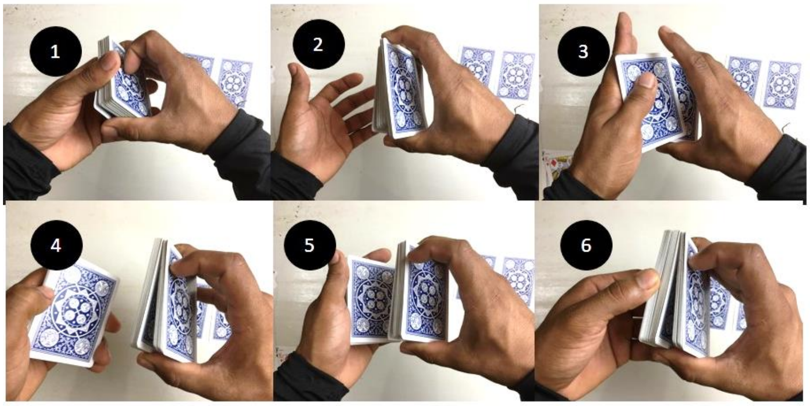
Figura 23 - Conduzindo duas cartas da base para o topo do baralho (parte 1)



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Transfira o baralho para a outra mão mantendo a quebra com o dedo polegar conforme ilustrado na parte 1 Figura 24. Para finalizar essa etapa, pegue um bloco de cartas do topo e coloca embaixo da quebra, segurando tudo só uma das mãos sem que a quebra seja desfeita da maneira como a figura 24 ilustra.

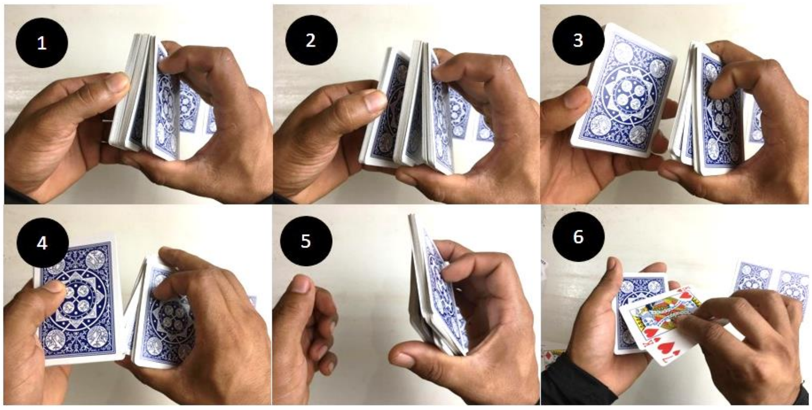
Figura 24 - Conduzindo duas cartas da base para o topo do baralho (parte 2)



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Após isso, pegue um bloco pequeno na parte de baixo e coloque de volta para o topo do baralho, e depois pegue um bloco de cartas até a quebra e coloque no topo, assim as duas cartas estarão nas primeiras posições do baralho.

Figura 25 - Conduzindo duas cartas da base para o topo do baralho (parte 3)



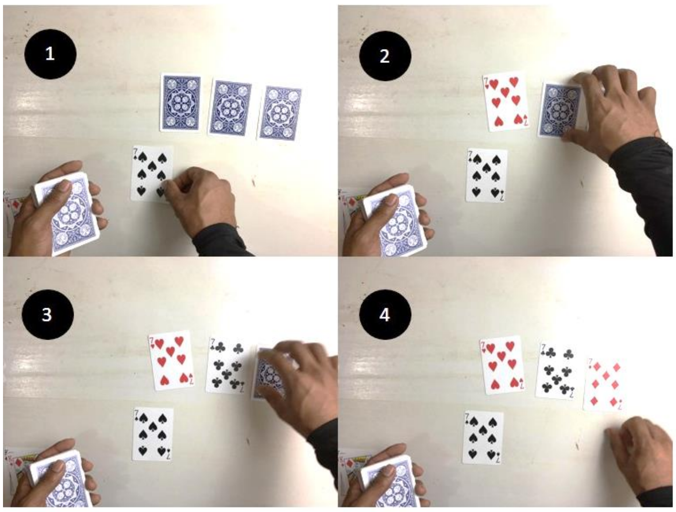
Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Em seguida, faça os mesmos paços de revelação da carta do topo com o *double lift*, desfaça o *double lift* e coloque a carta do topo na mesa com face para baixa ao lado das outras

Nesse momento, é preciso trazer a última carta do baralho para o topo, e para isso, repita os mesmos procedimentos usados para trazer as duas últimas cartas, todavia, para isso, faça a quebra somente na última, e depois siga os mesmos procedimentos da etapa anterior.

Após a carta da base ter sido transferida para o topo, revele a primeira carta como sendo um 7, isso irá gerar a noção que a mágica deu errado, e nesse momento, o professor deve fazer uma expressão de espanto, fingindo poder ter realmente errado. Em seguida, peça para algum aluno revelar as cartas que estavam viradas face para baixo mostrando que eles são, na verdade, as outras três cartas com valor 7, conforme a figura 26.

Figura 26 - Revelando as cartas



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

4.3.3 Análise a Priori do Encontro 03

Com base na exploração potencial aliada ao truque de mágica e a primeira intervenção, deve-se analisar as respostas dos alunos em relação às propostas de explicações dos truques anteriores a fim de constatar progressos nas explicações dos truques para então concluir se os alunos tiveram desenvolvimento argumentativo com base lógica, no qual espera-se que esse desenvolvimento seja perceptível.

Posteriormente, na segunda intervenção "**[I_r]:** *Discuta com seu grupo e explique, por meio de conceitos probabilísticos, sobre as chances de Rodolfo conseguir vencer o desafio proposto por seu irmão.",* os alunos podem dizer que as chances são pequenas devido a uma grande possibilidade de combinações para o espaço amostral, além de haver a possibilidade de alguns estudante pensarem também que embora o espaço amostral seja grande, o número de casos favoráveis também é um valor considerável, fazendo com que a probabilidade do evento ocorrer aumente.

Matematicamente, os alunos podem fazer uma analogia ao cálculo da probabilidade de se ganhar na mega sena, porém com apenas quatro número a serem sorteados e sem reposição em meio a um total de 52, acarretando assim que a probabilidade de vencer esse tipo de desafio pode ser expressa da seguinte maneira:

$$P(rodolfo\ vencer) = \frac{4}{52} . \frac{3}{51} . \frac{2}{50} . \frac{1}{49} = \frac{24}{6497400} = 0{,}00000369$$

Na terceira Intervenção, na qual indagamos que ao retirar 4 cartas sucessivas do baralho e sabendo que as duas primeiras são os reis de copas e paus, qual seria a probabilidade das outras duas também serem reis, esperamos que os alunos consigam perceber que antes de retirar qualquer carta, o espaço amostral é igual a 52 e que ao retirar os reis de copas e paus, ficamos com um espaço amostral de 50 cartas.

Como queremos que a terceira carta a ser retirada seja um Rei, e neste momento só restam duas cartas de Reis no Baralho, temos que a chances de um rei ser retirado na terceira vez é de 2/50, sobrando assim 1/49 de chances de se tirar o outro rei na próxima tentativa. Essa seria então a primeira introdução as ideias de Probabilidade Condicional, pois estabelecemos a condição de que as duas primeiras cartas retiradas são reis, fazendo assim com que aja uma intervenção no espaço amostral a ser considerado.

O aluno deverá lembrar ainda que no problema, retiramos “a terceira carta e a quarta carta”, havendo a existência do prefixo “e” implicando na multiplicação de probabilidade. Logo teremos que a probabilidade de que a terceira e a quarta carta retiradas ser de um rei é:

$$P(r) = \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} = \frac{2}{2450} = 0{,}00081$$

A quarta exploração, mostra a situação onde sabemos que a primeira carta a ser escolhida no truque de mágica é preta, indagando então qual seria a probabilidade de ser o rei de ouros. Com isso, espera-se que os alunos consigam identificar que o espaço amostral agora passar a ser igual a 26, visto que já sabemos que a carta é preta e que há um total de 13 cartas de paus (pretas) e 13 cartas de espadas (pretas). Espera-se também que consigam perceber facilmente que este se trata de um evento improvável, pois o rei de ouros é uma carta vermelha, não existindo nenhum rei de ouros na cor preta, fazendo com que tenhamos zero casos favoráveis, resultando em:

$$P(rei\ de\ ouros\ preto) = \frac{0}{26} = 0$$

A quinta Intervenção é quando os alunos irão elaborar um texto contendo como o grupo acredita que o truque de mágica ocorreu, quais foram às ideias, resultados e possíveis equações que eles desenvolveram ao longo da atividade. Isso servirá para o professor, aliando com suas observações em sala de aula, avaliar o desenvolvimento de cada grupo. Aqui os alunos podem ter dúvidas de como escrever seus resultados e como escrever suas ideias de maneira Matemática, devendo então o professor auxiliar os alunos no processo.

SEÇÃO V - EXPERIMENTAÇÃO DA SEQUENCIA DIDÁTICA

Antes de descrever a experimentação, é importante salientar as condições sob as quais realizamos os procedimentos. Fizemos a experimentação durante as aulas semanas da turma, que se dividem em 6 aulas de quarenta minutos, sendo estas distribuídas em 2 aulas interligadas na terça-feira, na quarta-feira e na quinta-feira. Essa distribuição fez com que tivéssemos uma hora e vinte minutos para a aplicação de cada parte da sequência didática, tempo esse abaixo do que que era esperado. Todavia, decidimos continuar com a experimentação e flexibilizar as formas com as quais os alunos iriam entregar suas tarefas e soluções.

No plano original, os alunos tinham que criar um texto para sintetizar as possíveis ideias e equações usadas para resolver cada problema proposto, entretanto, pedimos a eles que anotassem de maneira detalhada as respostas e resultados em cada questão. Alguns grupos conseguiram desenvolver bem essas dinâmicas, outros tiveram mais dificuldades, conforme iremos mostrar nos itens subsequentes.

5.1 Experimentação da Parte 01

Para iniciar a parte 01, a turma que possuía um total de 24 alunos, foi dividida em quatro grupos com 6 integrantes, que iremos denotar por G1 (grupo 1), G2 (grupo 2), G3 (grupo 3) e G4 (grupo 4) conforme ilustrado na figura 27.

Figura 27 - Grupos

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

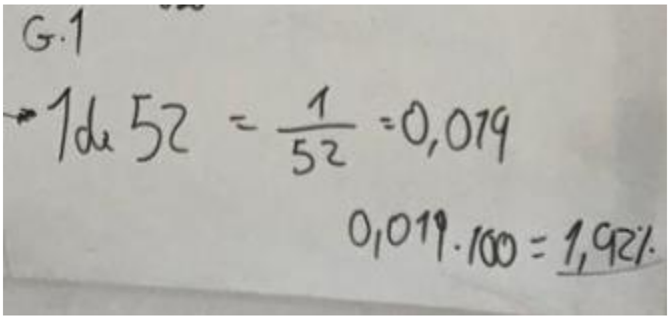
Após a demonstração do truque de mágica da parte 01, devido ao pouco tempo disponível, não pedimos para que os alunos escrevessem explicações sobre como o truque de mágica foi realizado, (intervenção reflexiva da parte 01), nos resumos e apenas ouvimos suas hipóteses. Um dos alunos disse que era “bruxaria”, outro chamou o professor de “Doutor Estranho”, fazendo uma referência a um mago de um filme, outro aluno usou o termo “é macumba”. Dessa maneira, enfatizamos que existia uma explicação lógica para o truque, e assim um outro aluno indagou que a o bilhete (carta escolhido) nunca foi de fato perdido entre os outros bilhetes, pedindo para que o truque fosse realizado novamente, mas deixando ele embaralhar.

Respondemos que não poderíamos deixar ele embaralhar, isso confirmou sua teoria de que havia alguma “trapaça” envolvida na realização do truque de mágica. Interrompemos os palpites para dar continuidade as atividades. Em seguida escrevemos no quadro a segunda intervenção Reflexiva:

- **2ª [I_r]:** *Supondo que cada pessoa só pode possuir no máximo um cupom para concorrer e que estarão participando um total de 52 pessoas, de que maneira seria possível expressar/falar as chances de uma determinada pessoa ganhar?*

A resposta do grupo 1 está exposta na figura abaixo. Esse grupo, elaborou uma resposta bem coerente com os conceitos de probabilidade, todavia, só escreveram no quadro quando o professor pediu para explicar para a turma como haviam realizado o problema, o grupo não escreveu no papel a resposta.

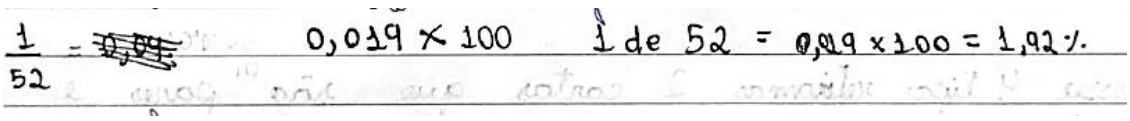
Figura 28 - Resposta do G1 a 2ª Ir da parte 01



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

O G2 utilizou ideias semelhantes estruturando a resposta ilustrada abaixo:

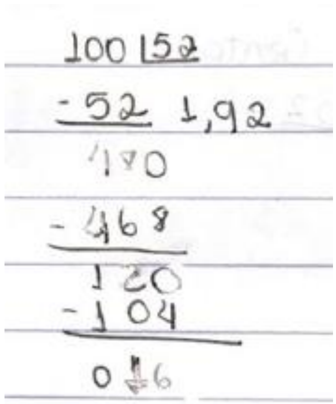
Figura 29 - Resposta do G2 a 2ª Ir da parte 01



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

O grupo 3 teve uma ideia diferente dos outros dois grupos, eles usaram ideias de porcentagem, calculando quantos porcentos uma carta representa em meio a cinquenta e duas, gerando assim o mesmo resultado conforme mostrado na figura 30.

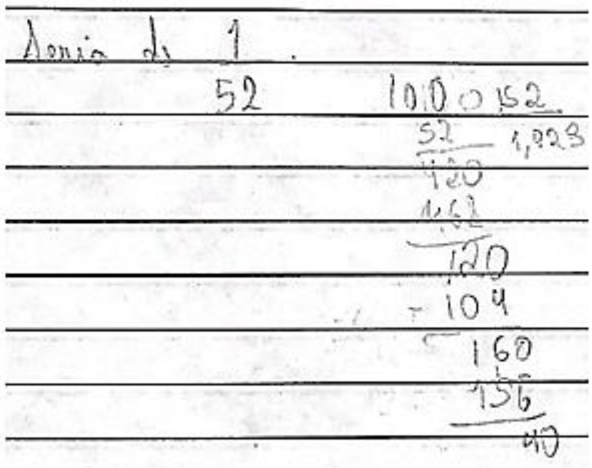
Figura 30 - Resposta do G3 a 2ª Ir da parte 01



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

O G4 misturou as ideias dos grupos anteriores, conforme ilustrado abaixo

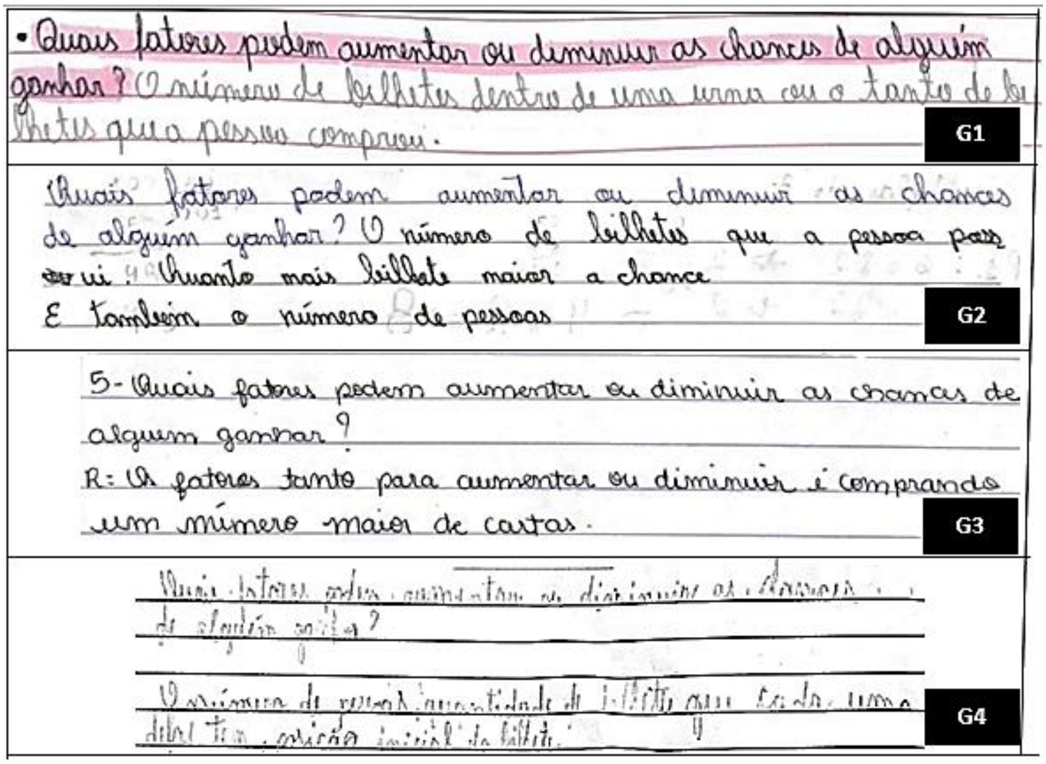
Figura 31 - Resposta do G4 a 2ª Ir da parte 01



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Ao expor a 3ª Intervenção Reflexiva a respeito dos fatores que podem contribuir ou dificultar as chances de alguém ganhar um sorteio, todos os grupos obtiveram respostas semelhantes, todas elas ancoradas nas ideias de se ter mais ou menos bilhetes para concorrer e ao número total de participantes do sorteio. A figura 32 exibe as respostas de cada grupo.

Figura 32 - Respostas dos grupos para a 3ª Ir da parte 01


• Quais fatores podem aumentar ou diminuir as chances de alguém ganhar? O número de bilhetes dentro de uma urna ou o tanto de bilhetes que a pessoa comprou.

G1

Quais fatores podem aumentar ou diminuir as chances de alguém ganhar? O número de bilhetes que a pessoa possui. Quanto mais bilhete maior a chance
E também o número de pessoas

G2

5- Quais fatores podem aumentar ou diminuir as chances de alguem ganhar?
R: Os fatores tanto para aumentar ou diminuir é comprando um número maior de cartas.

G3

Quais fatores podem aumentar ou diminuir as chances de alguém ganhar?
O número de [illegible] quantidade de bilhetes [illegible]

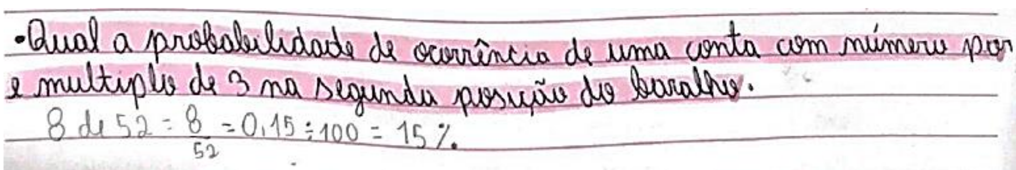
G4

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Agora veremos as respostas dos alunos sobre a 4º Intervenção Reflexiva, sendo está a que os alunos tiveram um pouco mais de dificuldades. Percebemos que os grupos estavam buscando separadamente a quantidade de cartas pares e depois separadamente as cartas com números múltiplos de três. Dessa maneira, fizemos o comentário em voz alta de que haviam cartas que satisfaziam as duas condições ao mesmo tempo, nisso pudemos ouvir alunos falando “aaah, puts, entendi”, “huum, agora eu saquei, agora eu entendi”, sendo esta última uma frase referente a vídeos humorísticos da internet.

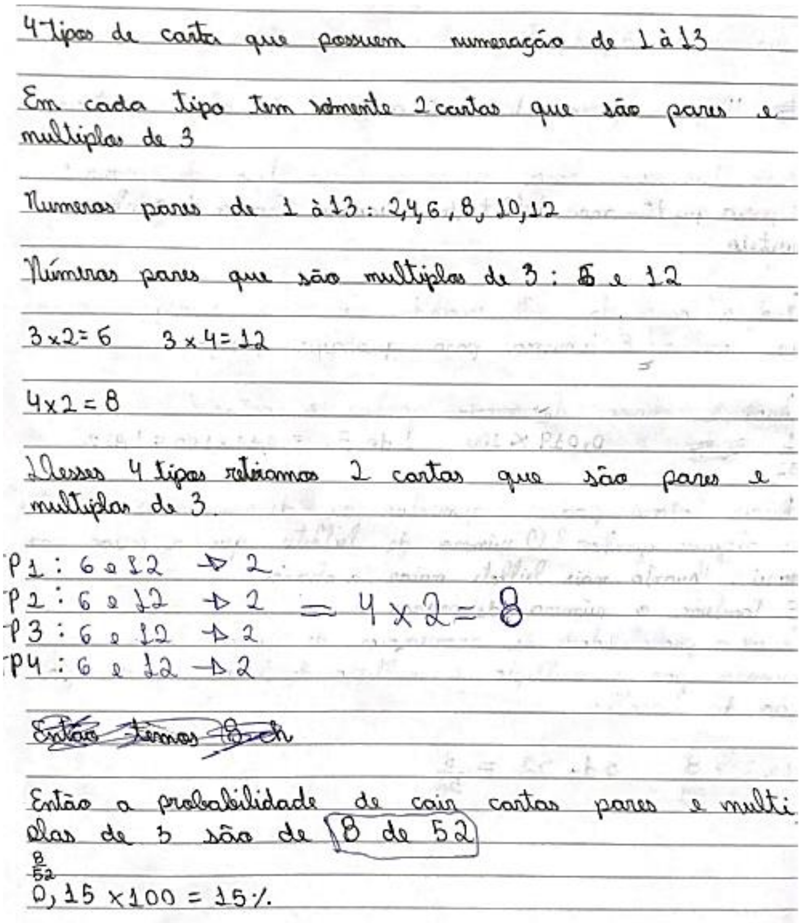
Assim, segue abaixo as figuras 33, 34, 35 e 36 que mostram as respostas dos grupos referentes a esta etapa da Sequência Didática.

Figura 33 - Resposta do Grupo 1 a 4ª I_r.


• Qual a probabilidade de ocorrência de uma carta com número par e multiplo de 3 na segunda posição do baralho.
8 de 52 = $\frac{8}{52}$ = 0,15 ÷ 100 = 15 %.

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Figura 34 - Resposta do Grupo 2 a 4ª I_r



4 tipos de carta que possuem numeração de 1 à 13

Em cada tipo tem somente 2 cartas que são pares e multiplas de 3

Numeros pares de 1 à 13: 2,4,6,8,10,12

Números pares que são multiplos de 3: 6 e 12

3x2=6 3x4=12

4x2=8

Desses 4 tipos retiramos 2 cartas que são pares e multiplas de 3.

P1: 6 e 12 → 2
P2: 6 e 12 → 2 = 4x2= 8
P3: 6 e 12 → 2
P4: 6 e 12 → 2

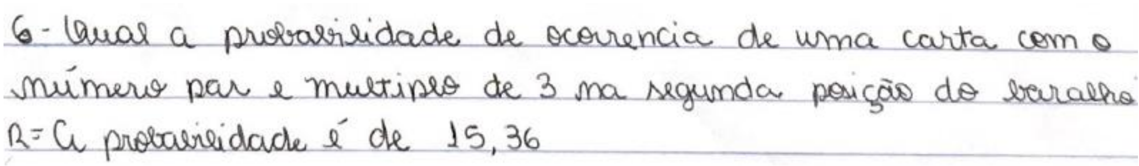
~~Então temos~~

Então a probabilidade de cair cartas pares e multiplas de 3 são de 8 de 52

8/52
0,15 x100 = 15%.

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

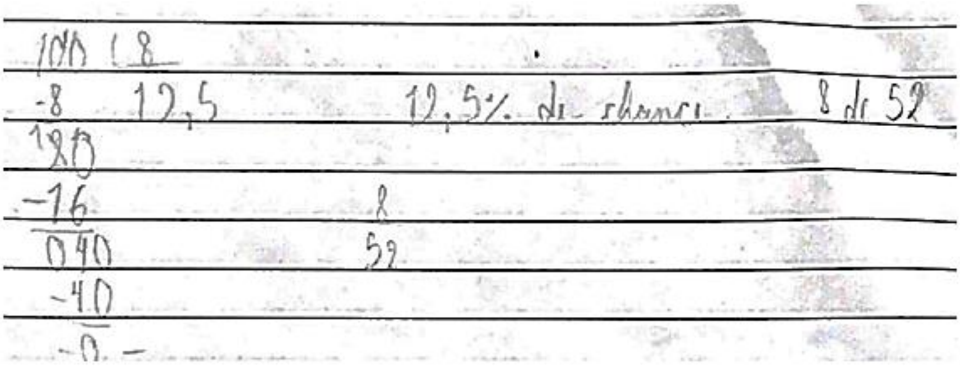
Figura 35 - Resposta do Grupo 3 a 4ª Ir



6- Qual a probabilidade de ocorrencia de uma carta com o número par e multiplo de 3 na segunda posição do baralho
R= A probabilidade é de 15,36

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

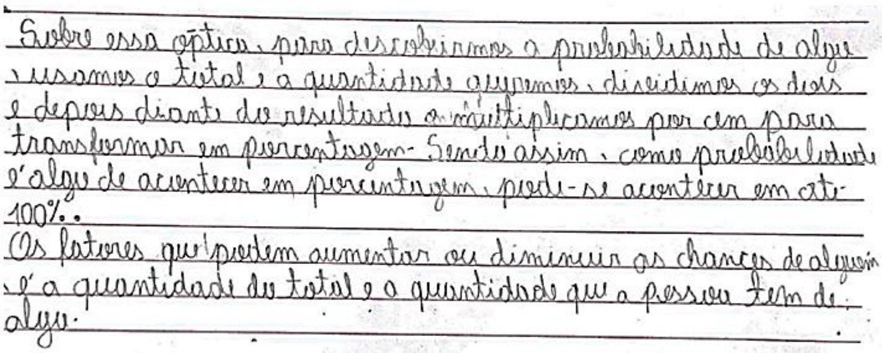
Figura 36 - Resposta do Grupo 1 a 4ª Ir



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

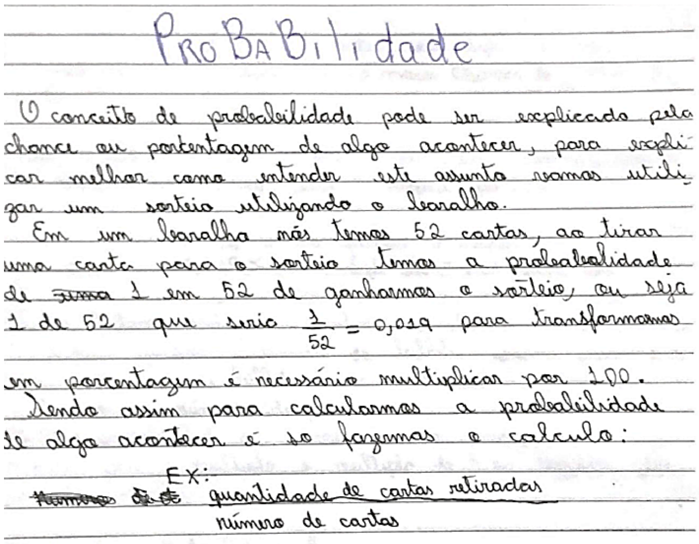
Na primeira parte da experimentação conseguimos prosseguir até a última etapa que é a Intervenção Avaliativa, no qual os grupos buscaram elaborar um texto sintetizando todas as respostas e conceitos discutidos durante toda a atividade. Porém, como o tempo era bem curto, os textos foram escritos bem rápidos pelos alunos, fazendo com que eles nós não conseguíssemos orientar na clareza o aprofundamento das ideias expressas pelos alunos. Dessa forma, abaixo temos os textos elaborados por cada grupo.

Figura 37 - Intervenção Avaliativa da parte 01: Grupo 01.


Sobre essa óptica, para descobrirmos a probabilidade de algo usamos o total e a quantidade que queremos, dividimos os dois e depois diante do resultado a multiplicamos por cem para transformar em percentagem. Sendo assim, como probabilidade é algo de acontecer em percentagem, pode-se acontecer em até 100%.
Os fatores que podem aumentar ou diminuir as chances de alguém é a quantidade do total e a quantidade que a pessoa tem de algo.

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Figura 38 - Intervenção Avaliativa da parte 01: Grupo 02.


PROBABILIDADE

O conceito de probabilidade pode ser explicado pela chance ou portentagem de algo acontecer, para explicar melhor como entender este assunto vamos utilizar um sorteio utilizando o baralho.

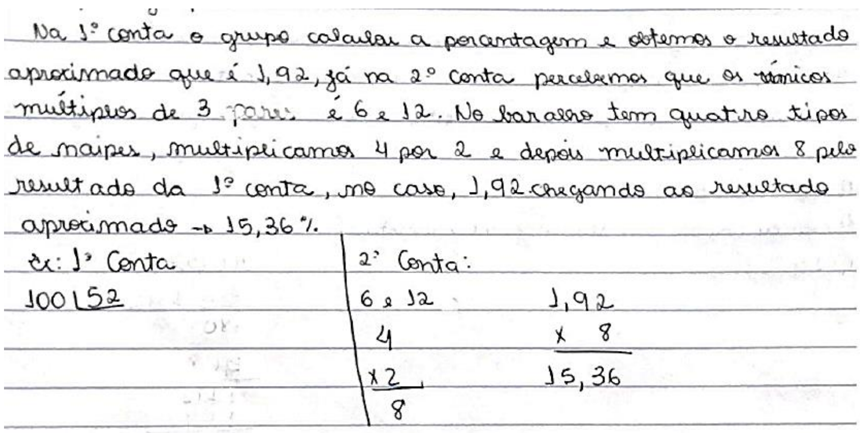
Em um baralho nós temos 52 cartas, ao tirar uma carta para o sorteio temos a probabalidade de ~~uma~~ 1 em 52 de ganharmos o sorteio, ou seja 1 de 52 que seria $\frac{1}{52} = 0{,}019$ para transformamos em porcentagem é necessário multiplicar por 100.

Sendo assim para calcularmos a probabilidade de algo acontecer é só fazermos o calculo:

Ex: ~~número de~~ $\frac{\text{quantidade de cartas retiradas}}{\text{número de cartas}}$

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

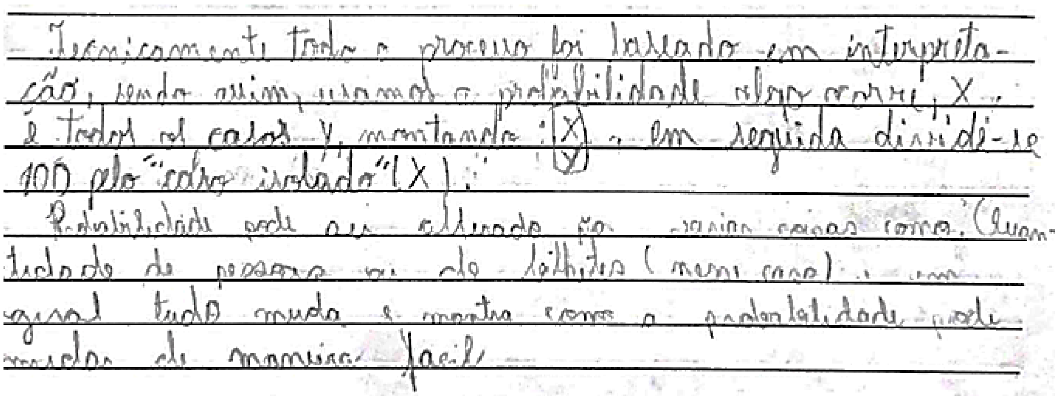
Figura 39 - Intervenção Avaliativa da parte 01: Grupo 03.


Na 1° conta o grupo calculou a porcentagem e obtemos o resultado aproximado que é 1,92, já na 2° conta percebemos que os únicos múltiplos de 3 pares é 6 e 12. No baralho tem quatro tipos de naipes, multiplicamos 4 por 2 e depois multiplicamos 8 pelo resultado da 1° conta, no caso, 1,92 chegando ao resultado aproximado → 15,36 %.

ex: 1° Conta	2° Conta:	
100 | 52	6 e 12	1,92
	4	x 8
	x 2	15,36
	8	

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Figura 40 - Intervenção Avaliativa da parte 01: Grupo 04.


Tecnicamente todo o processo foi baseado em interpretação, sendo assim, usamos a probabilidade algo ocorre, X, e todos os casos Y, montando: $\frac{X}{Y}$, em seguida dividi-se 100 pelo "caso isolado" (X).

Probabilidade pode ser alterado por vários casos como: (Quantidade de pessoas ou de bilhetes (mesmo caso)), em geral tudo muda e mostra como a probabilidade pode mudar de maneira fácil

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

5.2 Experimentação da Parte 02

Antes de discorrer sobre as dinâmicas da experimentação, iremos ressaltar que nesta etapa, nem todos os grupos conseguiram concluir todas as intervenções que deveriam ser propostas, por exemplo o Grupo 1 e 3 conseguiram fazer somente até a 2º intervenção reflexiva, evidenciando a real necessidade de um tempo maior para a aplicação da SD.

Ao chegar em sala, pedimos que os mesmos grupos do encontro anterior fossem formados e apresentamos o truque de Mágica referente à parte 02 no qual simulamos um sorteio da Mega sena, apresentando assim a primeira Intervenção reflexiva (1ª Ir). Notamos que durante a apresentação, os olhares dos alunos estavam fixados nas mãos do professor com o intuito de detectar algum momento de "trapaça" para descobrir o truque.

Imediatamente um aluno sugeriu que o truque estava na organização inicial dos dois baralhos, porém, os palpites baseados em possíveis fatos pararam aí, pois nenhum deles conseguiu deduzir que as escolhas de cada carta estavam sendo forçadas e predefinidas. Outro aluno disse: "*isso é bem aquelas mágicas que o cara vai falando números e multiplicando até adivinhar o número, tipo, daí deve ser assim para sair as mesmas cartas"*. Esses tipos de truques de mágica no âmbito mais profissional, de maneira geral, são bem complexos de se executar ou precisam de um baralho preparado, ou seja, baralhos cuja sua estrutura é diferente ao de um baralho comum.

Optamos então por seguir e expor a 2ª intervenção, sendo essa uma Intervenção Exploratória, cujo objetivo era que os alunos calculassem a probabilidade de alguém ganhar na mega sena. Nesta etapa, a primeira resposta e unânime de todos os grupos foi que a probabilidade seria $\frac{1}{60}$. Pedimos então que os grupos refletissem sobre o que essa fração estava representando a eles, e mesmo depois de algum tempo, não obtiveram explicação, sendo necessário então que fizéssemos com os alunos uma breve análise sobre o que esse resultado poderia significar.

Sugerimos então que o número 1 do numerador representa o bilhete favorável, e que o 60 no denominador sugere a quantidade de bilhetes concorrendo no sorteio. Perguntamos se eles achavam mesmo que na mega sena só avia no máximo 60 bilhetes a serem marcados escolhendo números de 1 a 60. Com isso fizemos eles entenderem o quão poderia ser complexo o cálculo desse fato sem se conhecer as ferramentas necessárias. Um aluno indagou*: "Professor, como que eu vou conseguir encontrar todos os bilhetes que dá para marcar? É usando anagramas?"*

Respondemos que usar os princípios de contagem era uma saída muito promissora, entretanto, o tempo não estava a nosso favor, e que poderíamos marcar uma outra aula para buscarmos fazer o cálculo dessa maneira. Sugerimos aos grupos então que tentassem contornar esse obstáculo usando o sorteio individual de cada número, imaginando as chances de acertar em cada sorteio. Nessa hora, distribuímos baralhos as equipes para que pudessem buscar a organização e sistematização do pensamento.

Após isso, os grupos buscaram por uma resposta, e em alguns minutos, o grupo 2 apresentou o seguinte resultado: $\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60}$. Dissemos que o primeiro caminho já estava estabelecido, mas perguntamos se seria possível sortear na mega sena, por exemplo o bilhete: 5, 5, 5, 5, 5, 5. Um aluno do grupo respondeu que não, então informamos que esse tipo de caso estava incluso no cálculo proposto por eles.

O grupo número 3 propôs a mesma ideia do grupo 2, porém estruturado de maneira diferente, eles escreveram:

1 de 60

1 de 60

1 de 60

1 de 60

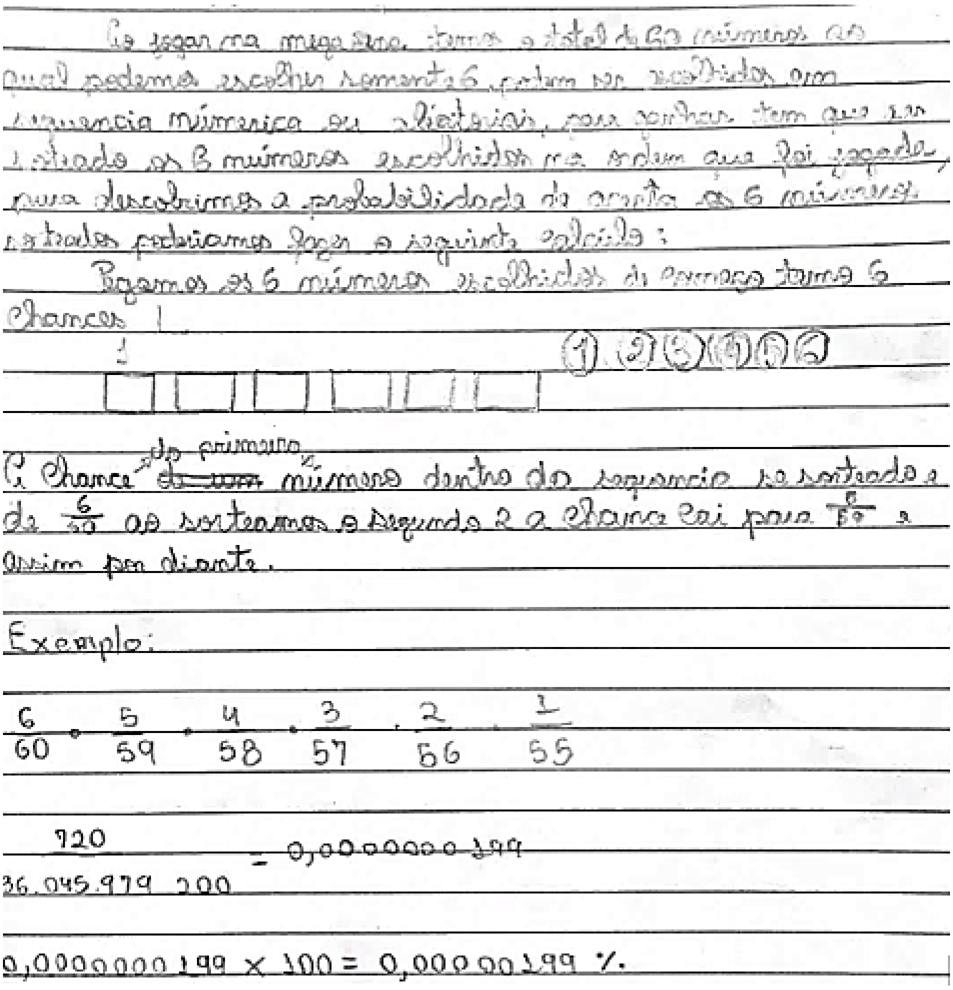
1 de 60

1 de 60

Passamos então a mesma instrução que ao grupo 02. Um pouco mais tardar, os grupos 1 e 4 chegaram as mesmas respostas inicialmente propostas pelos grupos 2 e 3, no qual passamos as mesmas orientações. Após alguns minutos, os grupos pediram para usar a calculadora pois os cálculos estavam bem grandes, nessa etapa, o uso do celular foi permitido somente para a utilização da calculadora.

Os grupos 2 e 4 apresentaram então suas respostas conforme as figuras abaixo:

Figura 41 - Resposta do grupo 2 a 2º Intervenção Reflexiva da parte 02



Ao jogar na mega sena, temos o total de 60 números ao qual podemos escolher somente 6, podem ser escolhidos em sequencia númerica ou aleatorias, para ganhar tem que ser sorteado os 6 números escolhidos na ordem que foi jogado, para descobrimos a probabilidade de acerto os 6 números sorteados podiamos fazer o seguinte calculo:

Pegamos os 6 números escolhidos de começo temos 6 chances

1 2 3 4 5 6

A chance do primeiro ~~de um~~ número dentro da sequencia ser sorteado é de $\frac{6}{60}$ ao sorteamos o segundo a chance cai para $\frac{5}{59}$ e assim por diante.

Exemplo:

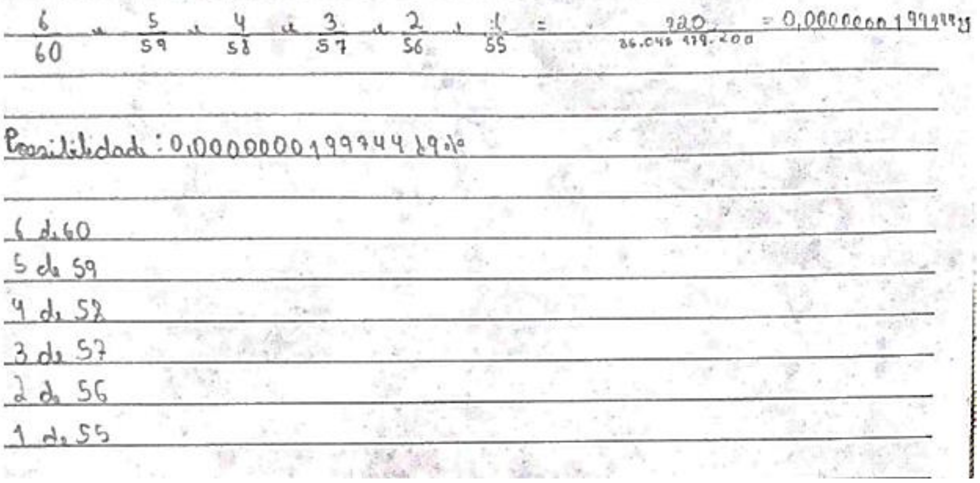
$$\frac{6}{60} \cdot \frac{5}{59} \cdot \frac{4}{58} \cdot \frac{3}{57} \cdot \frac{2}{56} \cdot \frac{1}{55}$$

$$\frac{720}{36.045.979.200} = 0{,}0000000199$$

$$0{,}0000000199 \times 100 = 0{,}00000199\ \%$$

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Figura 42 - Resposta do grupo 4 a 2º intervenção reflexiva da parte 02



$$\frac{6}{60} \cdot \frac{5}{59} \cdot \frac{4}{58} \cdot \frac{3}{57} \cdot \frac{2}{56} \cdot \frac{1}{55} = \frac{720}{36.045.979.200} = 0{,}00000001999925$$

Possibilidade: 0,000000001999744 19 %

6 de 60

5 de 59

4 de 58

3 de 57

2 de 56

1 de 55

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Em seguido, o grupo 1 apresentava suas soluções da seguinte maneira:

6/60 = 0,1

5/59 = 0,084

4/58 = 0,068

3/57 = 0,052

2/56 = 0,035

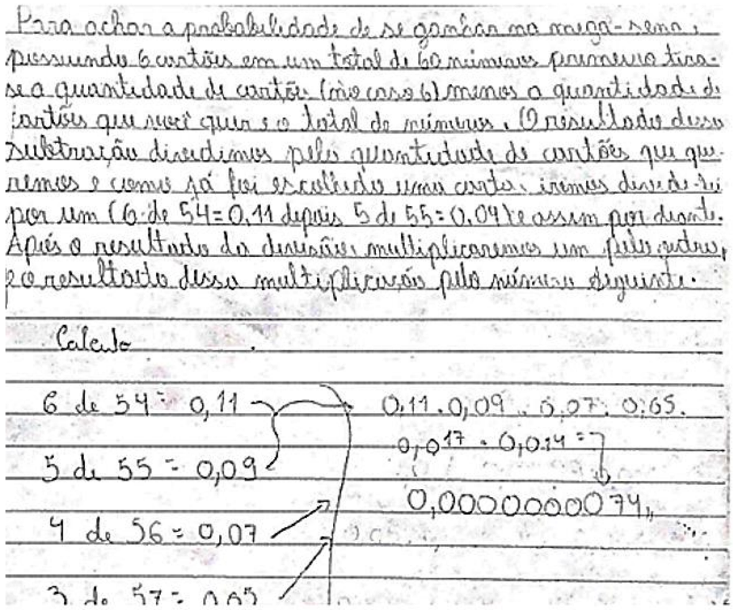
1/55 = 0,018

Notamos alguns pequenos deslizes de arredondamento nesses resultados, mas nada que fosse causar grandes erros em meio ao resultado final, todavia, a maior dúvida do grupo era sobre o que fazer com esses seis resultados. Alguns membros dos grupos decidiram somar, outros multiplicar, mas sem que entendessem o motivo desta operação. O grupo número 3, um pouco mais tardar conseguiu chegar, com um pouco mais de orientação do professor, ao mesmo dilema. A pergunta que então fazíamos a todos os grupos era: *Qual operação usar e porquê?*

Alguns alunos dos grupos 2 e 4 pareciam ter a ideia intuitiva de multiplicar essas probabilidades que segundo um deles era *"porquê o sorteio de um não tinha nada a ver com o sorteio do outro, e que se a gente somar, as chances de ganhar vai aumentando, só que é mais difícil acertar mais de um, então tem que multiplicar porque vai dando menor".*

Infelizmente devido o tempo, optamos por explicar que quando dois ou mais eventos [P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)] não interferem um na probabilidade do outro de ocorrer, temos que a probabilidade de ocorrer P(A_1) e P(A_2), ..., P(A_n), calculamos o produto entre as probabilidades, ocorrendo isso sempre que tiver o prefixo "e" entre os eventos. Assim os resultados dos grupos 2 e 4 foram reafirmados e tivemos os seguintes resultados para os grupos 1 e 3 (figuras 43 e 44, respectivamente).

Figura 43 - Resposta do grupo 1 a 2º intervenção reflexiva da parte 02


Para achar a probabilidade de se ganhar na mega-sena, possuindo 6 cartões em um total de 60 números primeiro tira-se a quantidade de cartões (no caso 6) menos a quantidade de cartões que você quer e o total de números. O resultado dessa subtração dividimos pela quantidade de cartões que queremos e como já foi escolhido uma carta, iremos diminuir por um (6 de 54=0,11 depois 5 de 55=0,09) e assim por diante. Após o resultado da divisão multiplicaremos um pelo outro, e o resultado dessa multiplicação pelo número seguinte.

Calculo

6 de 54 = 0,11

5 de 55 = 0,09

4 de 56 = 0,07

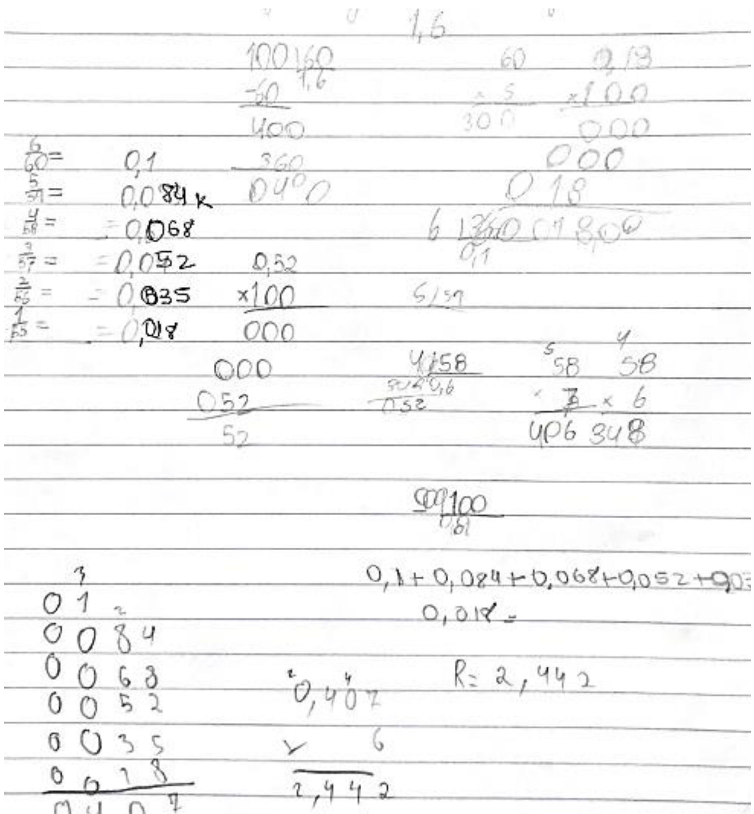
0,11 . 0,09 . 0,07 . 0,05.

0,0017 . 0,014 =

0,00000000074

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Figura 44 - Resposta do grupo 3 a 2º intervenção reflexiva da parte 02

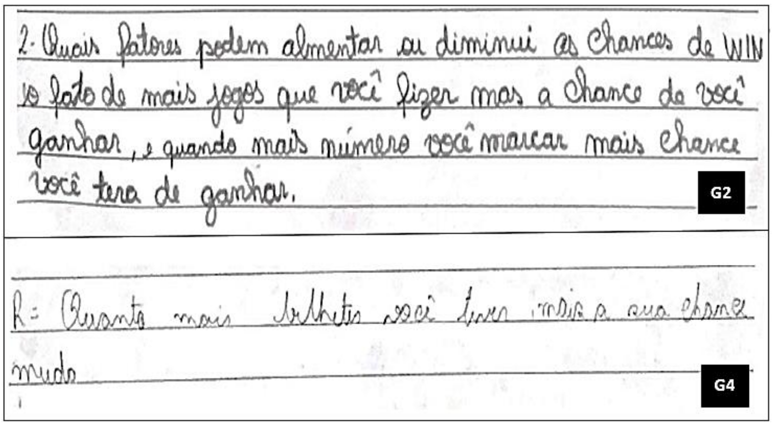


Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Como as discussões estavam acontecendo de maneira isolada em cada grupo, os grupos 1 e 3 não conseguiram avançar até as próximas Intervenções, sendo assim, explanaremos apenas as respostas dos grupos 2 e 4 nas fases seguintes da parte 02.

Na terceira intervenção Reflexiva da parte 02, os dois grupos (2 e 4) não tiveram grandes dificuldades para responde-las, sendo suas respostas apresentadas na figura 45.

Figura 45 - Resposta do grupo 2 e 4 a 3º intervenção reflexiva da parte 02

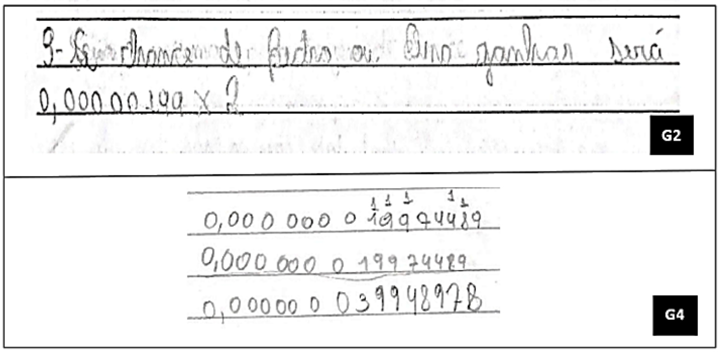


Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Para resolver a 4ª Intervenção Reflexiva, pode-se dizer que os grupos 2 e 4 fizeram por eliminação, pois eles já tinham as chances de alguém ganhar na mega sena com um único bilhete da mega sena, e a pergunta era as chances de Pedro ganhar ou Ana ganhar, assim logo assumiram que como não apareceu o prefixo “e”, deveriam somar as probabilidades, pois os eventos também eram independentes, as chances de um ganhar não interferiam no outro ganhar, conforme a seguinte fala de um dos alunos: *“Professor, como eles são da mesma família, então dá pra pensar que o menino tem dois bilhetes, ne? Então as chances de ganhar é maior, por isso a gente soma”.*

Com esse raciocínio, mesmo que ainda sem entender de fato o real motivo poder simplesmente somar as probabilidades nesses casos, os grupos conseguiram resolver o problema conforme mostrado na figura 46:

Figura 46 - Resposta do grupo 2 e 4 a 4º intervenção reflexiva da parte 02



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Para a Intervenção Avaliativa da parte 02, nenhum dos grupos teve tempo para elabora-la, assim, infelizmente não temos dados para discutir a respeito. Desse modo seguiremos para a parte 03 da SD.

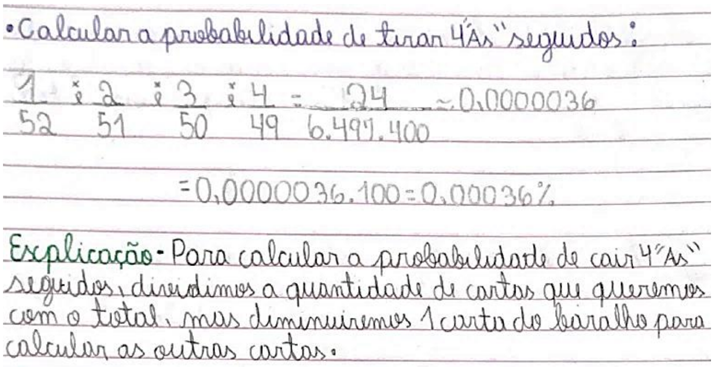
5.3 Experimentação da Parte 03

Faremos agora o relato da última parte da experimentação da SD. Iniciamos pela demonstração do problema por meio do truque de mágica Mágico vs Gambler. Como 1ª Intervenção Reflexiva, pedimos aos alunos que buscassem explicar a truque. Dessa vez alguns já estavam com ideias mais apuradas, e talvez até tenham pesquisado sobre mágica em casa, pois um aluno do grupo 2 disse: "*Professor, certeza que está virando duas cartas de uma vez fazendo a gente pensar que é uma"*, descrição essa que é a caracterização do *Double Lift*. Porém, não podemos descartar a hipóteses de o truque ter sido mal executado, evidenciando a importância de se praticar a execução inúmeras vezes em frente a espelhos e até mesmo fazendo gravações para elucidar possíveis falhas.

Essa sugestão do aluno explicou a ideia de mostrar uma carta, deixa-la face para baixo na mesa e depois aparecer outra carta no lugar dela. Todavia, essa foi a ideia mais próxima sobre a realização do todo o truque. Decidimos então seguir adiante com as demais intervenções devido a disponibilidade temporal.

Após apresentarmos a 2ª Intervenção Reflexiva, os alunos pularam qualquer ideia discursiva do problema e realizaram diretamente os cálculos probabilísticos das chances de a situação ocorrer. Durante a explicação do truque nas fases anteriores deste trabalho, usamos como exemplo as cartas de Rei e de números 7, mas ao aplicar em sala de aula optamos por usar as cartas de Dama e de Ás, lembrando que as escolhas de quais cartas usar não interfere nas dinâmicas, sendo algo meramente ilustrativo. Temos abaixo então as respostas dos grupos acerca da 2ª [Ir].

Figura 47 - Resposta do Grupo 1 sobre a 2ª Intervenção Reflexiva da parte 03



•Calcular a probabilidade de tirar 4"Ás" seguidos:

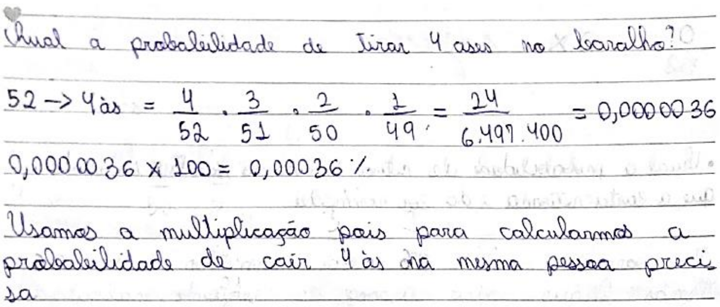
$\frac{1}{52} \cdot \frac{2}{51} \cdot \frac{3}{50} \cdot \frac{4}{49} = \frac{24}{6.497.400} \approx 0{,}0000036$

$= 0{,}0000036 \cdot 100 = 0{,}00036\%$

Explicação - Para calcular a probabilidade de cair 4"Ás" seguidos, dividimos a quantidade de cartas que queremos com o total, mas diminuiremos 1 carta do baralho para calcular as outras cartas.

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Figura 48 - Resposta do Grupo 2 sobre a 2ª Intervenção Reflexiva da parte 03



Qual a probabilidade de Tirar 4 ases no baralho?

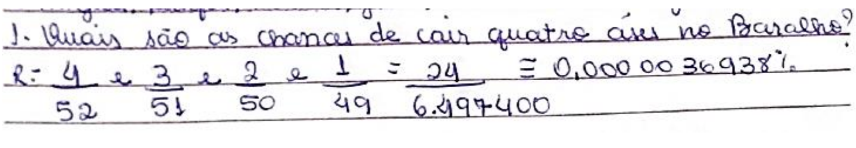
$52 \to 4$ às $= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} = \frac{24}{6.497.400} = 0{,}0000036$

$0{,}0000036 \times 100 = 0{,}00036\%$

Usamos a multiplicação pois para calcularmos a probabilidade de cair 4 às na mesma pessoa precisa

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Figura 49 - Resposta do Grupo 3 sobre a 2ª Intervenção Reflexiva da parte 03

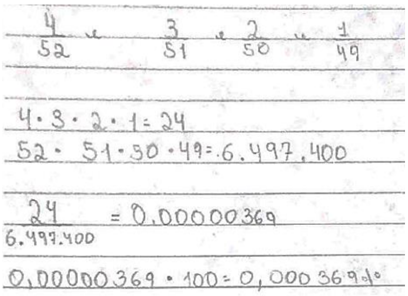


1. Quais são as chances de cair quatro áses no Baralho?

R: $\frac{4}{52}$ e $\frac{3}{51}$ e $\frac{2}{50}$ e $\frac{1}{49} = \frac{24}{6.497400} \cong 0{,}00000369387\%$

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Figura 50 - Resposta do Grupo 4 sobre a 2ª Intervenção Reflexiva da parte 03



$\frac{4}{52}$ e $\frac{3}{51}$ e $\frac{2}{50}$ e $\frac{1}{49}$

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 = 6.497.400$

$\frac{24}{6.497.400} = 0{,}00000369$

$0{,}00000369 \cdot 100 = 0{,}000369\%$

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

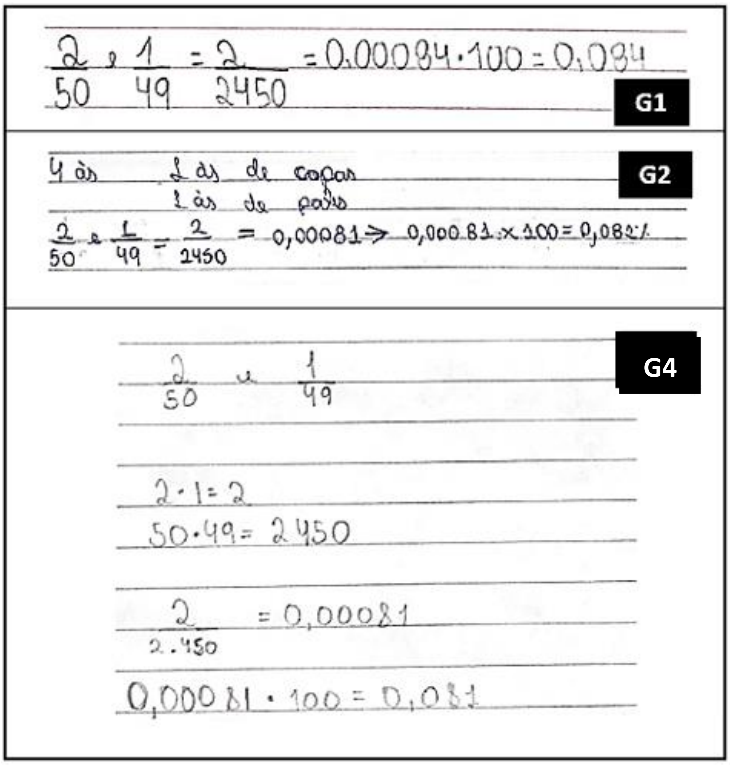
Notamos uma certa facilidade dos alunos em resolver esse problema após os aprendizados da parte 02, visto que as soluções apresentadas pelas equipes foram de certa maneira bem rápidas e imediatas. Um dos alunos do grupo 4 até perguntou ao professor: *"É só isso mesmo? Tem pegadinha não?",* mostrando a facilidade em resolver o problema.

Ao expor a 3ª Intervenção Reflexiva, os alunos tiveram um pouco de dúvida para resolver de forma correta, o grupo 3, por exemplo não resolveu a questão. A primeira tentativa dos grupos 1, 2 e 4 foi de que a probabilidade seria calculada com o seguinte cálculo:

$$\frac{2}{52} \cdot \frac{1}{51}$$

Nesse momento, a única instrução que demos as equipes foi de "pensem um pouco mais sobre a quantidade total de cartas". Após cerca de 4 minutos de discussão em equipe, a primeira resposta foi apresentada pelo grupo 4, em seguida pelo grupo 2 e por fim pelo grupo 1. As respostas de cada um estão dispostas na imagem abaixo.

Figura 51 - Resposta do grupo 1, 2 e 3 a 3º intervenção reflexiva da parte 03



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Notamos que o grupo 4 pulou a esquematização do cálculo pela forma de fração e adiantou fazendo separadamente o produto entre os valores que seriam os numerados e os valores que seriam os denominadores, para então fazer a divisão. Isso mostra uma certa segurança na realização desse tipo de cálculo.

Na 4ª intervenção reflexiva, os alunos tiveram um pouco de dificuldades em entender o problema, tivemos então que explicar o que de fato deveria ser calculado. Pegamos uma carta do baralho e dissemos que a carta era da cor preta, e perguntamos qual a probabilidade de ela ser um Rei de Ouros, assim os alunos conseguiram entender. Após isso, os grupos pegaram os baralhos e começaram a procurar as cartas que seriam seus casos favoráveis, mas não estavam encontrando, e por diversas vezes perguntaram ao professor quantos reis realmente tinha no baralho.

De certo modo, os alunos pareciam estar procurando alguma justificativa que levasse a algum valor numérico diferente de zero, procurando a existência de uma carta do Rei de Ouros na cor preta, sendo esta inexistente em um baralho. O diálogo abaixo mostra a confusão na mente dos alunos.

Aluno A: Professor, mas não tem essa carta

Professor: Exatamente

Aluno: Então não tem, como que calcula?

Professor: A ausência pode ser representada por qual número?

Aluno: Zero

Professor: Então!

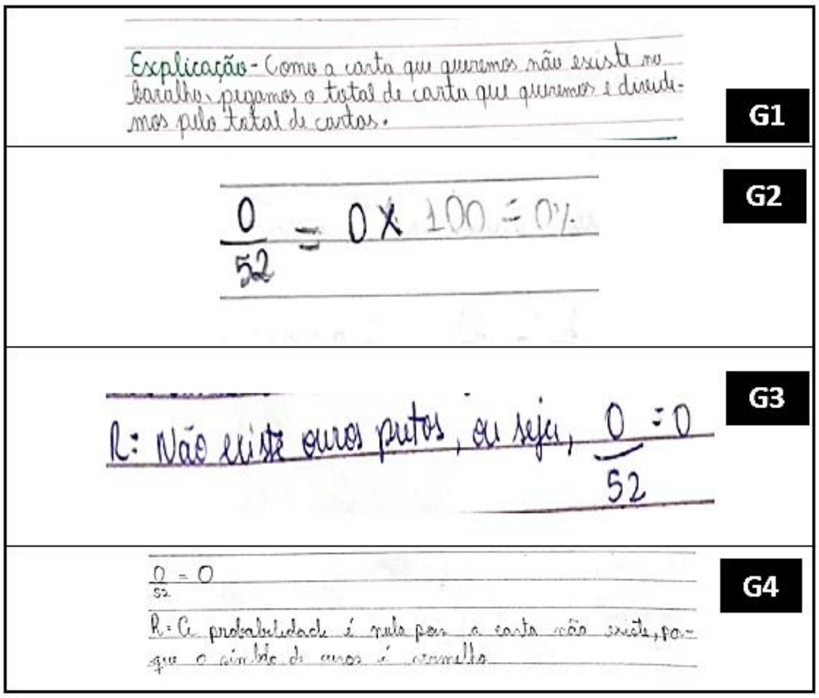
Aluno: Mas não dá pra dividir um número por zero.

Professor: Tenta reorganizar esse seu raciocínio aí, lembra do que vocês sugeriram como modo de calcular a probabilidade no nosso primeiro encontro.

Aluno: hum, tá.

Essas mesmas ideias foram discutidas com os demais grupos que apresentaram a dúvidas semelhantes. Alguns minutos depois, os alunos conseguiram chegar à conclusão de que a probabilidade seria igual a zero, como mostrado na figura abaixo.

Figura 52 - Resposta do grupo 1 a 4º intervenção reflexiva da parte 03



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor

Infelizmente, devido ao tempo, não conseguimos adentrar a Intervenção Avaliativa da parte 03, no qual os alunos buscariam sintetizar as todas as respostas e situações problemas em só texto buscando evidenciar todos os possíveis conceitos que eles desenvolveram.

CAPÍTULO VI – RESULTADOS E ANÁLISE A POSTERIORI

Neste capítulo realizaremos a 4ª e última fase da Engenharia Didática, a Análise a posteriori, que consiste em confrontar o que foi estabelecido nas Análises a Priori com o que foi observado na Experimentação da SD. Para Artigue (1996), essa fase possibilita a interpretação dos resultados obtidos na experimentação.

Dividimos este capítulo em três partes, no qual a primeira corresponde a análise a Posteriori do Parte 01 da SD: Sorteio Mágica, a segunda parte corresponde a análise a posteriori da Parte 02 da SD: Loteria Mágica, e a terceira parte trata-se da análise a posteriori da parte 03 da SD: Mágica vs Gambler. Na Análise a Posteriori de cada parte discutiremos separadamente cada Intervenção proposta na SD, proporcionando assim uma melhor clareza nas informações.

6.1 Análise a Posteriori da Parte 01: Sorteio Mágico

A atividade possibilitou aos alunos confrontarem o senso comum com análises sistemáticas, buscando uma ruptura nas respostas imediatistas. Pudemos perceber essa ruptura quando os alunos começaram a supor uma possível "trapaça" na realização do truque de mágica, afirmando que o bilhete (carta) não havia sido perdido no meio dos demais. Essa primeira mudança foi importante, pois possibilitou que os alunos afiassem seus olhares nas próximas etapas, sendo este o primeiro contato com as ideias de possíveis manipulações na realização do truque, abrindo precedentes para possíveis manipulações também em sorteios de situações reais.

A respeito da segunda intervenção reflexiva da parte 01, havíamos idealizado que os alunos a responderiam de maneira direta usando algumas ideias de uma certa quantidade de casos a favor em meio um total de casos. alcançando com as devidas orientações o resultado da probabilidade de uma pessoa ganhar um sorteio honesto, tendo apenas um bilhete, no qual participam ao todo 52 pessoas, pautado em $\frac{1}{52}$. Isso de fato ocorreu nos grupos 1 e 2.

Porém os grupos 3 e 4 fizeram uso de raciocínios envolvendo porcentagem, eles dividiram 100% (chances de sair qualquer carta) para 52 cartas, alçando assim as chances de uma única carta ser sorteada, tendo 1,91% como resposta, coerentemente com os resultados dos grupos 1 e 2. Percebemos então que o resultado matemático foi alcançado por todos os grupos mostrando o desenvolvimento das primeiras ideias sobre os cálculos de probabilidade e sobre os estudos dos conceitos que os permeiam.

A terceira intervenção reflexiva da parte 01, sobre quais fatores influenciam nas chances de alguém ganhar um sorteio, de certa maneira, foi a mais fácil dos grupos obterem algumas respostas, sendo a resposta unanime de que quanto mais bilhetes a pessoa tiver, maior será suas chances de ganhar em um sorteio. Essa resposta está coerente com o que supomos na análise a priori, mas ainda falta mais casos a serem considerados. Somente o grupo 1 respondeu que a quantidade de bilhetes ao todo que participam de um sorteio também influencia nas chances de uma determinada pessoa ser sorteada.

Acreditamos que para a melhoria das respostas e das análises de todos os grupos para esta etapa, precisaríamos direcionar um pouco mais de tempo na aplicação para que os grupos possam refletir a respeito, buscando transcender as análises imediatistas para as perguntas. Como já explicado anteriormente, tivemos que, infelizmente, regrar o tempo de aplicação, causando assim a aceitação de respostas.

A respeito da quarta Intervenção Reflexiva, após sentirem um pouco de dificuldades, todos os grupos conseguiram obter uma resposta a intervenção. Os grupos 1, 2, obtiveram cálculos semelhantes aos da Análise a Priori da parte 01. O grupo 3 conseguiu desenvolver as ideias em seu rascunho, porém, na entrega da atividade ao professor, escreveu apenas o resultado final, sem apresentar toda a explanação das ideias. O grupo quatro fez uso de cálculos percentuais, dividindo 100% por 8, buscando fazer uso da mesma forma de resolução da primeira intervenção da parte 01. Esse resultado induziu o grupo a resultado errado, visto que eles deveriam primeiramente fazer $\frac{100\%}{52} \cong 1{,}9$ e em seguida multiplicar esse resultado por 8: $1{,}92 \,.\, 8 \;\cong 15{,}3\%$. Devido ao tempo estar se esgotando, explicamos essa ideia ao grupo e pedimos para que seguissem adiante com a próxima intervenção.

Na intervenção avaliativa da parte 01, cujo objetivo era o de escrever um texto sobre os métodos que foram utilizados para interpretar e resolver os problemas, bem como possíveis conceitos, modelos e fórmulas Matemáticas que foram criadas pelo grupo. Esta etapa deveria ser a mais demorada, pois a ideia era de auxiliar os alunos na escrita, buscando explorar ao máximo todas as ideias usadas durante a aula, mas devido ao tempo, tivemos que pedir para os alunos elaborarem os textos sem que pudéssemos propor grande ajuda.

Acreditamos que devido a isso, os alunos se limitaram a escrever, na verdade. um parágrafo sobre o que se foi trabalhado, ou seja, de fato tiveram certas dificuldades para discorrer sobre tudo o que foi trabalho em aula. O grupo 1 sintetizou em um parágrafo a ideia inicial de como calcular a probabilidade de um evento simples, enfatizando que ao efetuar a divisão, deve-se multiplicar por 100% ao final para converter o resultado em porcentagem. O grupo ainda salientou que o maior valor para se obter nos resultados é de 100%.

O grupo 2 foi o que melhor estruturou seu texto, explicando inicialmente o que é probabilidade, sendo esta as *“Chances ou porcentagem de algo acontecer”*, usando após isso um baralho e o sorteio de uma carta para exemplificar como efetuar um cálculo de natureza probabilística, enfatizando ainda a necessidade de multiplicar por 100% para que o resultado esteja em porcentagem. Ao final o grupo buscou uma generalização sobre como calcular essas situações, sendo a resposta $\frac{Quantidade\ de\ cartas\ retiradas}{total\ e\ cartas}$.

O grupo 3, com um tempo bem curto para a elaboração do texto, apenas criou um parágrafo descrevendo os resultados obtidos em cada um dos problemas. O grupo 4 em um parágrafo também, descreveu que todos os problemas puderam ser resolvidos usando interpretação, dizendo que ao final doo cálculos, tem-se que multiplicar por 100 o resultado para transformar em porcentagem. O grupo criou ainda uma maneira de calcular as probabilidades de um evento, sendo ela P = $\frac{x}{y}$, no qual x seria o total de cartas retiradas e y seria (aqui a escrita ficou pouco legível), talvez o montante de cartas.

6.2 Análise a Posteriori da Parte 02: Loteria Mágica

A primeira Intervenção Reflexiva da parte 02 tinha o objetivo de fazer aguçar ainda mais a mente dos alunos para a realização de observações mais sistêmicas e lógicas sobre determinados fatos, neste caso, a explicação de como foi realizado o truque de mágica.

Havíamos idealizado nas Análises a Priori que os alunos poderiam desconfiar de uma organização pré-definida dos baralhos, e isso de ato se concretizou, houve alunos que sugeriram tal fato, mas sem conseguir idealizar essa organização corretamente. Nenhum aluno conseguiu também identificar que todas as escolhas de cartas foram forçadas aos alunos, pois acabaram abraçando a ideia de um truque de natureza Matemática, com as escolhas pautadas em pequenos cálculos.

Seguindo adiante, chegamos a segunda intervenção da parte 02, Intervenção Exploratória, no qual os alunos tinham que calcular as chances de alguém ganhar na mega sena. Supomos inicialmente que os alunos conseguiriam diretamente chegar à conclusão de que teriam que calcular a probabilidade de cada acertar cada um dos seis números sorteados, todavia, inicialmente todos os grupos propuseram como resposta a razão $\frac{1}{60}$ (uma chance de ganhar em meio a 60).

Após algumas orientações, um dos grupos mostrou uma das respostas (incorreta) que propomos na Análise a Priori da Parte 02, ou seja, que as chances de ganhar na mega sena poderia ser calculada com o produto das seguintes razões: $\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60}$. Com um pouco mais de orientação a cada grupo, todos conseguiram calcular de maneira isolada a probabilidade de acertar o número nas escolhas dos seis números da mega sena:

$$\frac{6}{60}\ e\ \frac{5}{59}\ e\ \frac{4}{58}\ e\ \frac{3}{57}\ e\ \frac{2}{56}\ e\ \frac{1}{55}$$

Como tivemos que aplicar a SD com o tempo muito menor do que o idealizado, e como já citado no capítulo sobre a experimentação, optamos por explicar o que fazer com esses resultados, propiciando aos grupos concluírem a segunda intervenção da parte 02. Notamos então a importância da realização da SD com um tempo maior para que os próprios alunos consigam desenvolver e explicar as ideias propostas.

Nas próximas Intervenções, somente os grupos 2 e 4 conseguiram participar, pois os demais precisaram de mais tempo para conseguir elucidar a segunda intervenção, dessa maneira, utilizaremos agora somente informações dos grupos 2 e 4 para as próximas intervenções da parte 02. Para a terceira intervenção, os dois grupos conseguiram chegar de maneira rápida ao que propomos nas Análises a Priori, ou seja, que marcar mais números em um bilhete ou que se uma pessoa tiver mais bilhetes, isso aumenta as chances de ganhar na mega sena.

Na quarta Intervenção, teorizamos nas Análises a Priori que os alunos conseguiriam resolver de maneira mais direta o problema, sendo que isso de fato ocorreu, todavia, suas respostas foram pautadas em um raciocínio por eliminação, no qual deveríamos calcular as chances de duas pessoas da mesma família ganhar na mega sena usando bilhetes diferentes. Os dois grupos deduziram que como no problema anterior, ao usar o prefixo “e” tínhamos que multiplicar as probabilidades, agora usando o prefixo “ou”, por exemplo, Pedro ganha ou Ana ganha, deveríamos somar as probabilidades.

Um dos grandes diferenciais das ideias que os alunos tiveram para resolver esse problema, foi o grupo 2 que fez uma comparação de que embora os bilhetes fossem de pessoas opostas, eles ainda pertenciam a mesma família, partindo assim do princípio da família ganhar o sorteio, tendo então o dobro de chances de ganhar caso tenha dois bilhetes, tendo corretamente como resposta a soma das razões ou de seus resultados decimais:

$$\frac{720}{36045979200} + \frac{720}{36045979200} \cong 0{,}0000000399.$$

A quinta e última intervenção da Parte 02 não pôde ser estruturada pelos grupos devido a indisponibilidade de tempo, e devido a isso não conseguimos orientar os alunos em formalizar e sintetizar as ideias trabalhadas em todas as intervenções. Em sala de aula, o professor pode solicitar essa última etapa também como um dever para casa, permitindo que as equipes façam suas estruturas textuais em casa e entreguem em uma próxima aula como recurso avaliativo.

6.3 Análise a Posteriori da Parte 03

Confrontaremos agora as informações obtidas na experimentação da parte 03 com as Análises a Priori realizadas da mesma. Por meio da apresentação do truque de mágica e da primeira intervenção reflexiva (explicar como o truque de mágica foi feito), realizamos a suposição de que os alunos já conseguiriam ter uma clareza maior a respeito das "trapaças" que permeiam o ilusionismo.

Constatamos que houve de fato um progresso, visto que um dos alunos conseguiu perceber o ato de virar duas cartas de uma só vez de modo que parecesse uma só carta (*double lift*), no qual, isso, aliado com as demais ideias já adquiridas nos encontros anteriores sobre um baralho previamente organizado, desvendam boa parte do truque de mágica. Para elucidar de fato a realização do truque, seria preciso fornecer mais tempo para que os alunos pudessem estruturar suas ideias e explicar os fatos de maneira mais consistente.

A respeito da segunda intervenção da Parte 03, supomos que os alunos poderiam tecer algumas discussões sobre a quantidade de elementos do espaço amostral, porém eles não tiveram qualquer menção a respeito de conceitos envolvendo contagem e pularam direto para a realização de cálculos que mostrassem a probabilidade de alguém conseguir retirar quatro cartas de mesmo valor de um baralho. Todos os grupos conseguiram realizar os cálculos conforme idealizamos nas Análises a Priori, visto que o problema possui grande semelhança com as chances de alguém ganhar na mega sena

Ao trabalhar a terceira intervenção em sala de aula, usamos como cartas demonstrativas os Ases, diferentemente da explicação de como realizar o truque de mágica no qual fizemos uso das cartas do Rei, lembrando que a escolha de qual carta utilizar, não interfere em nenhum aspecto da SD. Esta intervenção busca trabalhar com os alunos o conceito de probabilidade condicional, visto que queremos saber a probabilidade de ao retirar quatro cartas do baralho e sabendo que as duas primeiras são Reis (em sala de aula usamos os Ases), quais seriam as chances das duas últimas também serem Reis (novamente, em sala de aula fizemos a pergunta pautada nos ases).

Para essa intervenção, após algumas orientações em sala de aula, os alunos conseguiram desenvolver os mesmos raciocínios usados em nossas Análises a Priori, elucidando corretamente o problema. Ressaltamos que o grupo 3 não conseguiu resolver esse problema devido a uma perda de foco do grupo, o grupo estava bastante disperso, exigindo assim uma conversa com a equipe para pedir que se concentrassem melhor na atividade.

A quarta intervenção foi uma das mais dialogadas em sala, devido os alunos buscarem no baralho uma carta que não existia, acarretando em um pequeno entrave para se chegar a alguma conclusão. Após algumas orientações, conforme explicado na descrição da experimentação da parte 03, os alunos conseguiram deduzir que a quantidade de casos favoráveis seria zero, ou seja, trata-se de um evento impossível de ocorrer. Ressaltamos que todos os grupos conseguiram chegar a mesma conclusão para o problema.

Assim como na Parte 02, não conseguimos trabalhar a quinta intervenção devido ao tempo de aula ter se esgotado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, elaboramos e aplicamos uma Sequência Didática sob a perspectiva da Engenharia Didática e suas quatro fases, dialogando com as bases da Modelagem Matemática e com o uso de Truques de Mágica. Concretizar todas essas etapas foi desafiador e acarretou em um grande amadurecimento pessoal e acadêmico. Sentimos ainda a necessidade de reforçar os alicerces teóricos para de fato conseguir planejar e executar de maneira ainda mais coerente esta proposta didática. Unificar em uma só metodologia todas essas dinâmicas foi um enorme desafio, sobretudo a tentativa de aliar os truques de mágicas com os processos investigativos da Modelagem Matemática.

Por várias vezes pensamos: Como vamos projetar um problema de uma situação real (modelagem Matemática) usando um recurso que faz coisas improváveis acontecerem (truques de mágica)? Usamos para isso situações de sorteios e assim conseguimos trabalhar alguns dos principais conceitos de Probabilidade voltados ao ensino Fundamental. Assim foi possível atingir a maioria dos objetivos pretendidos com a pesquisa e testar uma metodologia inovadora e lúdica para o ensino.

Tivemos que ter bastante cuidado ao aplicar os truques de mágica, para que o mágico (Professor) não roubasse a cena e tomasse para si os holofotes da aula, reafirmando a importância de se colocar em sala de aula situações desafiadoras para os alunos investigarem, de modo que eles se tornem os atores principais do ambiente escolar.

Percebemos que em todas as Partes da Sequência Didática, os alunos conseguiram resolver a maioria dos problemas propostos, devido a isso consideramos então os resultados obtidos como satisfatórios e que com o devido tempo de aplicação, há possibilidades de aprofundamento e ampliação dos conceitos a serem trabalhados, cabendo ao professor orientar e conduzir os alunos nesse processo investigativo.

Reconhecemos que o tempo de 80 minutos de aula (tempo usado nas experimentações de cada parte) não é o suficiente para atingir todos os objetivos propostos, sendo de fato o tempo de 4h teorizado na elaboração da SD necessário para os alunos responderem os problemas e refletirem sobre suas respostas afim de amadurecer e refinar os conceitos ali trabalhados. Dessa maneira, nos comprometemos a realizar novamente a SD fazendo uso de um tempo hábil afim de consolidar de maneira mais completa a sua viabilidade.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Isabelly; ALVES, Francisco. **Utilizando Mágicas no Ensino da Matemática**. Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba/PR. 2013.

ARTIGUE, Michelle. **Engenharia didática**. In: BRUN, Jean (Org.). Didáctica das matemáticas. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BARBIERI, Felipe. **Mágicas para fazer na escola:** impressione seus amigos & torne-se um mágico em 30 dias, Planeta Brasil, São Paulo, 2019. 176 p.

BARBOSA, Jonei Cerqueira **Modelagem na Educação Matemática**: contribuições para o debate teórico**.** Reunião Anual da Anped, Caxambu, 2001.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem Matemática na sala de aula.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, VIII, 2004, Recife. Anais (on-line), Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/13/MR09.pdf.

BASSANEZI, Rodney Carlos**. Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 3ª Ed. 3ª reimpressão. São Paulo. 2011.

BATISTA, Michel Corci; FUSINATO, Polonia Altoé. **A utilização da modelagem matemática como metodologia no ensino de Física**. Revista de ensino de ciências e matemática. v. 6, n. 2, p. 86-96, 2015.

BATISTA, Rozilene da Costa, et al. **Sequência Didática–ponderações teórico-metodológicas. Didática e Prática de Ensino no contexto político contemporâneo**: cenas da Educação Brasileira – ENDIPE, XVIII, 2016, Cuiabá, Anais (on-line). Disponível em: https://docplayer.com.br/59297272-Sequencia-didatica-ponderacoes-teorico-metodologicas.html

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino.** 3. Ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem Matemática & implicações no ensino aprendizagem de matemática**. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

BLASCO, Fernando. **Using Mysteries of Magic to engage Students in the learning process**: Games and simulations as new problem-solving tools. 2016. Disponível em: https://www.semanticscholar.org/paper/Using-Mysteries-of-Magic-to-Engage-Students-in-the-Contreras-Duran/1a20d6fd22a4ce74bb4d6bf0e7fa10d69a9df145

BURAK, D. **Modelagem matemática:** ações e interações no processo de ensino aprendizagem. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

BRASIL. **PCN - Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/ SEF. 1998.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas**: Estrutura e elaboração. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Belém, 2017.

CAVALCANTI, Cléverson Wesley. **Roteiro e Aplicação - Feira Matemágica:** Curiosidades e Desafios no Âmbito Social da Educação Básica. p.124. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual Paulista – UNESP, São José do Rio Preto, 2017

DIACONIS, Persi; GRAHAM, Ron. **The Magic of Charles Sanders Peirce**, 2017.

ELDER, Kevin lee et al. **Using Illusions in the Classroom:** Principles, Best Practices, and Measurement. Cognitive Research: Principles and Implications, Vol. **5.** 2020. Disponível em: https://cognitiveresearchjournal.springeropen.com/articles/10.1186/s41235-020-00237-2#citeas.

FALCÃO, Emmanuel; et al. **Fazendo Mágica para Ensinar e Aprender Matemática**: Os Números ao Alcance do Ilusionismo. XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba/PR. 2013.

FERREIRA, Hugo; SANTOS, Dayene. **Abracadabra**: A Matemática em um Passe de Mágica. XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba/PR. 2013.

FONTELLES, Mauro José, Marilda Garcia Simões, Samantha Hasegawa Farias e Renata Garcia Simões Fontelles. **Scientific research methodology:** Guidelines for elaboration of a research protocol. Revista Paraense de Medicina, 23 (3), 2009.

GARAT, Fernanda et. all. **Abracadabra.** Revista Eclética, Rio de Janeiro, 2005.

GARDNER, Martin. **Mathematics, Magic and Mystery**. Courier Corporation, New York, 2014.

GAUDIO, Anderson Coser. **Explorando Mágicas em aulas de Física**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física. V. 32, N. 2, Vitória, 2015.

GONSALVES, E. P. **Iniciação à pesquisa científica**. 3. ed. Campinas: Alínea, 2003.

KLÜBER. T. E.; BURAK, D. **Concepções de modelagem matemática**: contribuições teóricas. In: Educação Matemática e Pesquisa**.,** São Paulo, v.10, n.1, pp-17-34, 2008.

KOHLMILLER, Paul. **Using Magic to Teach Science.** *Science Education and Outreach: Forging a Path to the Future. Vol. 431, 2010. Disponível em: http://adsabs.harvard.edu/full/2010ASPC..431..166K* .

LESSER, Lawrence M., GLICKMAN, Mark E. Using magic in the teaching of statistics. Revista Model Assisted Statistics and Applications. 2009, vol4. p. 265-274

LIMA, Renan Gustavo Araújo de; FREITAS, Jose Luiz Magalhães de Freitas. **Um estudo inicial de estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos, diante de problemas de combinatória.** XVIII EBRAPEM em 2014.

LOPES. Thiago Beirigo et al. **Engenharia didática como metodologia de pesquisa nos projetos publicados no EBRAPEM (2014-2016)**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.20, n.1, pp. 159-181, 2018 https://revistas.pucsp.br/emp/article/viewFile/34925/pdf

MACKNICK, Stephen L., MARTINEZ-CONDE, Susana, **Truques da Mente.** Zahar, Rio de Janeiro, 2011.

MENEZES, Adriano Araquem Baia, *et al.* **O uso de jogos com cartas no ensino da matemática.** Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. Cuiabá, 2019.

NÒBREGA, Wilma da. **Dificuldades de Aprendizado no Ensino da Matemática e o uso das novas Tecnologias.** 2014. p.93. Monografia (Especialização Fundamentos da Educação: Práticas Pedagógicas Interdisciplinares). Universidade Estadual da Paraíba – UEPB. Patos - PB 2014.

OGREN, Kevin. **Magic as an effective teaching strategy**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação). University College of the Cariboo, 2014.

OLIVEIRA, Tassiani Jorge de., *et. all.* **Matemática: (re)significando saberes, construindo cidadania.** Revista Pedagógica – UNOCHAPECÓ. Vol 01, n.30. 2013.

OLIVEIRA, Francisco Erilson Freire de. **Sobre várias demonstrações do Pequeno Teorema de Fermat e as inter-relações entre as áreas da Matemática.** 60 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará – UFC, Fortaleza, 2019.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** Uma análise da influência Francesa. Autentica, 3. Ed, Belo Horizonte, 2011.

PEREIRA, Thiago Caboclo. **O encantamento Lúdico da Arte Mágica na Escola**. 2017, p.20. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Artes Cênicas e Dança). Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul. Campo Grande, 2017.

SANTOS, Raimundo José Fonseca dos; SILVA, Renilson Peres. **O ENSINO DA DIVISÃO MATEMÁTICA NAS TURMAS DE 6º ANO NO ENSINO FUNDAMENTAL: Um Relato de Experiência em uma Escola da Zona Rural no Município de Santarém-PA.** 20 p. Monografia (Licenciatura Integrada em Matemática e Física) - Instituto de Ciências da Educação. Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA. Santarém -PA, 2017.

SILVA, Edna Lúcia da; MENEZES, Estera M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 3ª ed. Florianópolis: Laboratório de Ensino a Distância da UFSC, 2001.

SILVA, José Jairo de Santana e, *et al.* **Uso de Recursos Didáticos como Metodologia de Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio.** IX EPBEM - Encontro Paraibano de Educação Matemática, Campina Grande, 2016.

SIQUEIRA, Regiane Aparecida Nunes de. **Tendências da Educação Matemática na formação de Professores**. 50 p. Monografia (Especialista em Educação Científica e Tecnológica) - Departamento de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Ponta grossa, 2007.

SOARES, Tiago Berto. **Mágicas e Matemática**. p.73. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional). Universidade do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2017

VIGOTSKY, L. S. **A formação Social da Mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

YOKOYAMA, LEO; et al. **Prazer da Matemática e Ensino Híbrido**: Mágicas, Jogos, Brincadeiras, Desafios e Colaboração. XIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Cuiaba/MT. 2019.

ZABALA, A. **A Prática Educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998