



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
LICENCIATURA INTEGRADA EM MATEMÁTICA E FÍSICA**

PRISCILA DAIANE MACHADO SANTOS

**O USO DE DOBRADURAS COMO RECURSO DIDÁTICO
PARA EXPLORAR OS PONTOS NOTÁVEIS DE UM
TRIÂNGULO**

Santarém

2017

PRISCILA DAIANE MACHADO SANTOS

**O USO DE DOBRADURAS COMO RECURSO DIDÁTICO
PARA EXPLORAR OS PONTOS NOTÁVEIS DE UM
TRIÂNGULO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Ciências Exatas para obtenção do grau em Licenciatura Integral em Matemática e Física; Universidade Federal do Oeste do Pará Instituto de Ciências da Educação.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Medeiros dos Santos

Santarém

2017

RESUMO

Partindo do princípio de que através de atividades que motivem e desafiem os alunos, a aprendizagem se torne mais fácil, prazerosa e significativa, esta pesquisa apresenta uma proposta metodológica para o ensino de Geometria, que consiste na utilização de Dobraduras em triângulos de papel como meio para ensinar Pontos Notáveis de um Triângulo. Nesse sentido, o objetivo desse trabalho foi propor, aplicar e analisar essa metodologia como meio de construção de conceitos. Foram aplicadas cinco atividades com alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Frei Othmar, no Município de Santarém-PA. As informações para análise foram coletadas a partir do diário de campo da pesquisadora e da aplicação de um questionário com os sujeitos da investigação. Com isso, a pesquisa traz um relato de experiência vivida pela pesquisadora em sala de aula e as concepções dos alunos sobre a atividade proposta. Os principais resultados mostram que a atividade proposta se mostrou útil e foi bem aceita pelos alunos. Sua utilização possibilitou que os alunos pudessem refletir sobre os erros cometidos e aprendessem com eles.

Palavras-Chave: Geometria. Pontos Notáveis de um Triângulo. Dobraduras.

ABSTRACT

Assuming the principle that through activities that motivate and challenge students, the learning process becomes easier, pleasurable and meaningful, this research presents a methodological proposal for teaching Geometry, which consists of using folding in triangles made of paper as a way to teach Notable Points of a Triangle. Thus, the purpose of this work was to propose, apply and analyze this methodology as a way of constructing concepts. Five activities were applied with students from the third grade of high school of Frei Othmar School, in the municipality of Santarém-PA. The data for analysis were collected from the researcher's field diary and the application of a questionnaire with the participating students. Therefore, this research presents a report of the experience lived by the researcher in the classroom and the students' conceptions about the proposed activity. The main results show that the proposed activity was useful and well accepted by the students. Its use made it possible for students to reflect on the mistakes made and learn with them.

Keywords: Geometry. Notable Points of a Triangle. Folding.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 - CONCEITOS PRIMITIVOS.....	17
FIGURA 1.2 - SEGMENTO DE RETA.....	17
FIGURA 1.3 - SEMIRRETA.....	17
FIGURA 1.4 - PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO	18
FIGURA 1.5 - RETAS CONCORRENTES	18
FIGURA 1.6 - RETAS PARALELAS.....	18
FIGURA 1.7 - RETAS PERPENDICULARES.....	19
FIGURA 1.8 - ÂNGULO AÔB.....	19
FIGURA 1.9 - BISSETRIZ DE UM ÂNGULO.....	19
FIGURA 1.10 - TRIÂNGULO ABC	20
FIGURA 1.11 - CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS QUANTO AOS LADOS	20
FIGURA 1.12 - CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS QUANTO AOS ÂNGULOS.....	21
FIGURA 1.13 - ÂNGULO RETO, AGUDO E OBTUSO.....	21
FIGURA 1.14 - MEDIATRIZ, BISSETRIZES INTERNAS, MEDIANA E ALTURA DO TRIÂNGULO.....	22
FIGURA 1.15 - CIRCUNCENTRO, INCENTRO, BARICENTRO E ORTOCENTRO DO TRIÂNGULO	23
FIGURA 2.1 - LOCALIZAÇÃO DA ESCOLA FREI OTHMAR.....	28
FIGURA 2.2 - CLASSIFICAÇÃO DOS ALUNOS POR SEXO	29
FIGURA 2.3 - PRIMEIRO PASSO DA ATIVIDADE 1	31
FIGURA 2.4 - SEGUNDO PASSO DA ATIVIDADE 1	31
FIGURA 2.5 - TERCEIRO PASSO DA ATIVIDADE 1	32
FIGURA 2.6 - PRIMEIRO PASSO DA ATIVIDADE 2.....	33

FIGURA 2.7 - SEGUNDO PASSO DA ATIVIDADE 2	33
FIGURA 2.8 - TERCEIRO PASSO DA ATIVIDADE 2	33
FIGURA 2.9 - PRIMEIRO PASSO DA ATIVIDADE 3.....	34
FIGURA 2.10 - SEGUNDO PASSO DA ATIVIDADE 3	35
FIGURA 2.11 - TERCEIRO PASSO DA ATIVIDADE 3.....	35
FIGURA 2.12 - PRIMEIRO PASSO DA ATIVIDADE 4.....	36
FIGURA 2.13 - SEGUNDO PASSO DA ATIVIDADE 4	36
FIGURA 2.14 - TERCEIRO PASSO DA ATIVIDADE 4.....	37
FIGURA 2.15 - QUARTO PASSO DA ATIVIDADE 4.....	37
FIGURA 2.16 - PRIMEIRO PASSO DA ATIVIDADE 5.....	38
FIGURA 2.17 - SEGUNDO PASSO DA ATIVIDADE 5	38
FIGURA 2.18 - TERCEIRO PASSO DA ATIVIDADE 5.....	39
FIGURA 3.1 - ALUNO A ENCONTRANDO PONTO MÉDIO E MEDIATRIZES	41
FIGURA 3.2 - CIRCUNCENTRO DO TRIÂNGULO ACUTÂNGULO.....	42
FIGURA 3.3 - ALUNO B REALIZANDO O PROCEDIMENTO PARA PROLONGAR AS MEDIATRIZES	44
FIGURA 3.4 - CIRCUNCENTRO DO TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO	45
FIGURA 3.5 - ALUNO C ENCONTRANDO BISSETRIZES INTERNAS E O INCENTRO.....	46
FIGURA 3.6 - INCENTRO DO TRIÂNGULO RETÂNGULO.....	47
FIGURA 3.7 - REALIZAÇÃO DAS MEDIANAS E BARICENTRO	49
FIGURA 3.8 - BARICENTRO DO TRIÂNGULO ACUTÂNGULO	49
FIGURA 3.9 - ALUNO C ENCONTRANDO O PONTO H, O ORTOCENTRO.....	51
FIGURA 3.10 - ORTOCENTRO DO TRIÂNGULO ACUTÂNGULO	51
FIGURA 3.11 - A AVALIAÇÃO DOS ALUNOS QUANTO A ATIVIDADE COM DOBRADURAS	52

FIGURA 3.12 - GRAU DE FACILIDADE OU DIFICULDADE NA UTILIZAÇÃO DO MATERIAL.....	52
FIGURA 3.13 - AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE.....	53

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – IDADES DOS ALUNOS DA TURMA 302 DA ESCOLA FREI OTHMAR – SANTARÉM, 2016.....	28
--	----

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	10
INTRODUÇÃO	10
1.1 IDEIAS INICIAIS.....	10
1.2 RETOMANDO ALGUMAS PESQUISAS QUE JÁ ABORDARAM O TRABALHO COM DOBRADURAS.....	12
1.3 CONCEITUANDO OS CONTEÚDOS ABORDADOS.....	16
CAPÍTULO 2	25
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	25
2.1 OBJETIVOS	25
2.1.1 Objetivo Geral:	25
2.1.2 Objetivos Específicos:	25
2.2 JUSTIFICATIVA E IMPORTÂNCIA DA PESQUISA	25
2.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	26
2.4 A ESCOLA E OS SUJEITOS DA PESQUISA	27
2.5 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE	29
CAPÍTULO 3	40
RESULTADOS	40
3.1 AS IMPRESSÕES E ANÁLISE SOBRE A EXPERIÊNCIA DIDÁTICA VIVENCIADA.....	40
3.2 AVALIAÇÃO E CONSIDERAÇÕES GERAIS DOS ALUNOS A RESPEITO DA ATIVIDADE	51
CAPÍTULO 4	56
ALGUMAS CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	60
ANEXOS	62

ANEXO 1: SUGESTÃO DE ATIVIDADE	63
ANEXO 2: QUESTIONÁRIO	65

Capítulo 1

Introdução

Neste Capítulo, apresentaremos as Ideias Iniciais da pesquisa, juntamente com um breve balanço de algumas pesquisas que já abordaram o trabalho com dobraduras e por fim os conceitos envolvendo os conteúdos abordados na pesquisa.

1.1 Ideias Iniciais

Muitas são as dificuldades que os alunos da Educação Básica enfrentam, e muitas dessas dificuldades acabam por desmotivar os alunos a aprender Matemática. Seja por que não gostam da disciplina ou seja por que não encontram motivos para gostar da disciplina, que pra muitos é considerada difícil. Tentar levar o aluno a querer aprender Matemática é uma das tarefas do professor de Matemática. Com base nessa ideia, surge a proposta desta pesquisa. Partimos do princípio de que através de atividades que motivem e desafiem os alunos, a aprendizagem se torne mais fácil, prazerosa e significativa.

Neste sentido, buscamos tomar uma atividade que de alguma forma apresentasse a Geometria Plana de uma forma mais dinâmica do que a tradicional¹. Assim, esta pesquisa apresenta e descreve uma experiência de ensino desenvolvida a partir de uma atividade envolvendo Dobraduras de papel. O principal objetivo da atividade foi desenvolver os conceitos que envolvem Geometria Plana, notadamente os Pontos Notáveis de um Triângulo.

Partindo portanto da ideia de que cabe ao professor buscar novas formas de metodologia para motivar seus alunos, a presente pesquisa busca incentivar isso, descrevendo uma experiência vivida em sala de aula, levando aos alunos algo novo para eles vivenciarem. Motivar os alunos a ter interesse é uma tarefa que não é tão

¹ Nos referimos aqui à abordagem tradicional como aquela em que o professor, ao ministrar uma aula expositiva, se utiliza de quadro branco e pincel como principais recursos didáticos.

fácil, mas é a realidade que os professores devem encarar, não como uma dificuldade, mas como um desafio a superar juntamente com seus alunos e levar com isso, o ensino e a aprendizagem a resultados significativos.

Existem várias propostas para o ensino que utilizam recursos didáticos inovadores usados nas pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Geometria, tais como Desenho Geométrico, Origami (Dobraduras), aplicativos como o GeoGebra, etc. Porém, em nossa investigação, optamos por abordar a metodologia das Dobraduras, por acreditarmos no potencial que sua utilização podem trazer para o ensino e aprendizagem do conteúdo de Geometria, no contexto da sala de aula.

Assim, nos propusemos a desenvolver uma atividade dinâmica com alunos da Educação Básica da Rede Pública, com o intuito de contribuir com reflexões que possam auxiliar o professor de Matemática no trabalho com essa metodologia, que aqui é apresentada e discutida em detalhes.

Estamos de acordo, portanto, com a perspectiva investigativa de ensino da Matemática e apoiamos a ideia de que:

Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informações sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003 apud SILVA, 2013, p. 26)²

Uma atividade utilizando Dobraduras faz com que os alunos investiguem seus conhecimentos, vivenciando o que aprenderam na prática.

Silva (2013) relata que cada vez mais está sendo conhecido o uso de Dobraduras como recurso para o ensino de Geometria. Segundo a autora, “esse instrumento pedagógico é bastante interessante, tendo em vista que, se aplicado no processo de ensino aprendizagem, direcionado ao estudo de conceitos geométricos, além de seu caráter lúdico, pode estabelecer uma relação entre teoria e prática...” (SILVA, 2013, p. 33). Assim, os alunos conseguem compreender os conceitos que envolvem a Geometria Plana de maneira prazerosa.

Em nossa investigação, desenvolvemos um breve levantamento bibliográfico de pesquisas que exploraram metodologias de ensino de Geometria a partir do uso de Dobraduras. Deste levantamento, despontaram dez pesquisas. Uma breve análise descritiva deste conjunto é apresentada na seção seguinte.

² PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações Matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

1.2 Retomando algumas pesquisas que já abordaram o trabalho com dobraduras

No sentido de ilustrar o cenário de investigação no campo e dar uma ideia geral do que se produz neste cenário, optamos por fazer um breve balanço das principais pesquisas nacionais que já abordaram o tema em questão. Abaixo descrevemos algumas pesquisas que já abordaram o tema.

Na pesquisa realizada por Silva (2013), foram apresentadas algumas Investigações Geométricas sobre Pontos Notáveis de um Triângulo, utilizando Dobraduras, o aplicativo GeoGebra e os Instrumentos de Desenho Geométrico. A atividade foi aplicada em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental, na qual foram investigadas as propriedades de cada Ponto Notável de um triângulo utilizando cada uma dessas ferramentas. Os procedimentos metodológicos utilizados foram a aplicação de um questionário sobre as concepções dos alunos em relação à Geometria Plana e aplicada cada uma dessas atividades. Os resultados apontaram que a implementação desses materiais tem capacidade de atrair os alunos e conseqüentemente os mesmos aprendem muito mais.

Braz (2013), utilizou o Origami como material de apoio para as aulas de Geometria Euclidiana Plana do Ensino Fundamental. O autor elaborou oficinas, com instruções e ilustrações, que utilizaram o Origami para introduzir conceitos de Geometria, tendo como foco da pesquisa os Pontos Notáveis de um Triângulo. O objetivo das oficinas foi introduzir os Pontos Notáveis de um Triângulo e algumas propriedades. De acordo com o autor, essas oficinas podem “desenvolver habilidades, tais como, concentração, memória, criatividade, motricidade e, principalmente, a interação coletiva na troca de conhecimentos” (BRAZ, 2013, p.74).

Leroy (2010), propôs o uso de Origami para servir de material de apoio para as aulas de Geometria no Ensino Fundamental e Médio. E para sua proposta, foram elaboradas oficinas com duração de 50 minutos que utilizam o Origami para reforçar a aprendizagem dos conceitos e proposições geométricas. Segundo a autora, “com as oficinas os alunos podem constatar através das dobraduras a veracidade dos conceitos geométricos estudados, sem adentrar na prova matemática dos mesmos” (LEROY, 2010, p. 10). Assim como Braz (2013), a mesma sugere suas aplicações em sala de aula, com objetivo de comprovar sua eficácia e contribuir para o ensino de Matemática.

Na pesquisa realizada por Araujo (2013), é abordada a utilização de dobraduras em triângulos de papel como uma proposta para a exploração do conteúdo de mediatrizes, medianas e pontos de interseção – circuncentro e baricentro de um triângulo, na qual uma atividade foi aplicada com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental na cidade de Assis-São Paulo. Para a análise de informações foram utilizados um pré-teste, logo depois uma atividade na forma de perguntas e respostas no sentido de resgatar alguns conceitos, em seguida, os participantes desenvolveram as atividades de dobraduras e por fim um pós-teste. Comparando os resultados do pré-teste e do pós-teste, o autor mostrou que os resultados obtidos foram positivos, portanto satisfatórios na obtenção de conceitos pelos alunos.

Assim como Araujo (2013), acreditamos que a exploração que podem ser feitas a partir de dobraduras permitem visualizar os conceitos de forma mais concreta, e que nossa atividade possa contribuir de maneira significativa na construção de conceitos em relação ao conteúdo proposto.

Outro autor que utilizou as Dobraduras em sua abordagem de investigação foi Araújo (2015). Tendo como objetivo central estudar as implicações pedagógicas do uso do Origami no processo de ensino e aprendizagem de pontos notáveis de um triângulo, na qual a questão norteadora foi “quais as contribuições pedagógicas do ensino da geometria por meio do Origami para a compreensão de conceitos geométricos tais como pontos notáveis de um triângulo?”. O experimento didático, como o mesmo relata, foi realizado como uma turma composta de 35 alunos de 8º ano de uma Escola Estadual de Goiás, realizada nos meses de fevereiro e março de 2015, composta por 06 atividades.

As informações sobre a intervenção foram coletadas mediante gravação de voz, registros escritos feitos pelos alunos em todas as atividades propostas, questionários e diário de campo do pesquisador. Inicialmente foi realizada uma revisão inicial de alguns conceitos elementares de Geometria Plana. Diante das informações obtidas com base nas análises dos dados Araújo (2015, p. 77) afirma que “o origami nas aulas de geometria foi um recurso facilitador da aprendizagem dos alunos, no sentido que todos demonstraram interesse e contentamento com as atividades”.

Ibraim e Silva (2011) realizaram uma pesquisa com objetivo de trabalhar alguns conceitos de Geometria Plana com o uso de Origami e Dobraduras e buscou responder como as técnicas de Origami podem auxiliar o reconhecimento das

características e propriedades de triângulos e quadriláteros, ou seja avaliar a influência do uso dessa metodologia no processo de ensino e aprendizagem de conceitos de Geometria Plana. O trabalho apresenta uma sequência didática que utiliza técnicas de Origami e Dobraduras no ensino de Geometria Plana, experimentação realizada em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental em uma Escola Pública de Campos dos Goytacazes, com a participação de 31 alunos. Foram construídos triângulos, quadriláteros e também avião, caixinha de papel, catavento e kusudama, utilizando técnicas de Dobradura e Origami. E ao longo dos processos de construção, as autoras afirmam que enfatizaram as características e propriedades de trapézios, retângulos, quadrados, losangos e triângulos, além de conceitos de mediana, bissetriz, ponto médio, reta paralela e perpendicular.

Segundo as autoras “atividades desse tipo contribuem positivamente para o processo de Ensino e Aprendizagem de Geometria, por permitir trabalhar com formas variadas e facilitar a identificação de elementos e propriedades” (IBRAIM; SILVA, 2011, p.57).

Monteiro (2008), em sua tese de mestrado intitulada “Origami: História de uma Geometria Axiomática”, relata a história do Origami, os sete Axiomas de Huzita-Hatori, que definem as sete possibilidades para uma única dobragem de Origami. É demonstrado que é possível resolver quaisquer equações de grau igual ou superior a três com a Geometria do Origami; são efetuadas também construções que permitem demonstrar: o Teorema de Pitágoras, soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo e o Teorema de Haga. Foram mostrados as Construções de alguns Origami geométricos como o Tsuru (garça que simboliza esta arte); os polígonos regulares quadrado, triângulo, pentágono e hexágono; e as cônicas parábola, elipse e hipérbole.

E no final, são realizadas algumas comparações da Geometria do Origami com outras Geometrias, como Geometria Euclidiana, Geometria dos Fósforos, Geometria do Compasso, Geometria da Régua, Geometria do Compasso Enferrujado, Geometria da Régua e do Compasso Enferrujado e Geometria da Régua Marcada. Segundo a autora com a Geometria do Origami é possível realizar todas as construções feitas por essas geometrias e supera todas essas geometrias analisadas em exceção da última, a Geometria da Régua, na qual a mesma permite as mesmas construções feitas com o Origami.

Cararo (2013), em sua obra “A Arte das Dobraduras: Uma contribuição para o Ensino da Geometria”, busca através do material didático aliar a Arte do Origami ao ensino da Geometria, na qual propôs uma metodologia diferenciada visando auxiliar o processo ensino-aprendizagem da Geometria a partir do Origami, no 8º ano do Ensino Fundamental. Portanto, partindo das perspectivas apontadas nas Diretrizes Curriculares do Paraná, a autora propôs que os alunos iniciem os conteúdos de Geometria através de pesquisa sobre o que é Origami e histórico do mesmo, e com posse do material sobre Dobraduras os alunos podem desenvolver as atividades, fazendo registros dos conteúdos relacionados a Geometria no caderno e resolverem situações problemas que relacionam o Origami a conteúdos de Geometria plana do 8º ano do ensino fundamental. Assuntos como: ângulos e seus elementos, medidas de superfície, Pontos Notáveis de um triângulo e entre outros.

E como finalização das atividades os alunos e a professora puderam montar painéis e fazer exposição do material construído para a socialização. Ao final da pesquisa a mesma realizou algumas sugestões de atividades como: construção de um quadrado, construção de triângulos, fazendo um sapo, confeccionando uma borboleta, mola maluca, um cubo e tetraedro todos em Origami. Em todas essas atividades são realizadas perguntas sobre o assunto que as construções abordam.

Nessa mesma perspectiva de abordagem temos Barreto (2013), que em sua pesquisa objetivou fazer o estudo da Geometria do Origami e suas aplicações como instrumento que contribua para o ensino da Geometria na Educação Básica. O autor fez uma pequena abordagem histórica do Origami e sua chegada ao Brasil. Mostrou aplicações do Origami para os estudos de Geometria Euclidiana Plana e Espacial, com ênfase ao estudo dos Poliedros de Platão.

No final do trabalho foi mostrado como foi desenvolvido o “Projeto Origami-Matemática e Arte”, foi aplicado no Colégio Estadual João XXIII, com objetivos de mostrar que através da Arte do Origami é possível aprender Matemática e utilizar o origami como ferramenta para o ensino da Geometria Euclidiana. Foi realizada uma atividade com alunos do 3º ano B, que foram divididos em grupo e desenvolveram uma pesquisa sobre Origami e apresentaram seus resumos para os colegas e depois cada grupo construiu por meio de Dobraduras, avião, barco, cisne, pavão, coração, que valorizasse a matemática envolvida no processo e no final do projeto apresentaram para as turmas do 6º ao 9º ano do turno vespertino e também do matutino. Nas atividades dos alunos os mesmos apresentaram como fazer as

dobraduras e apresentaram algumas propriedades sobre o assunto que estavam estudando em determinada dobradura.

Matumoto e Nascimento (2012), apresentam o resultado de um trabalho desenvolvido durante o Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná – PDE. Na qual o projeto contempla o estudo da Geometria, utilizando como recurso didático-pedagógico as Dobraduras e Origamis para construir conceitos de forma lúdica e criativa. O trabalho foi desenvolvido com 20 alunos do 7º ano, com intuito de minimizar dificuldades, na qual os alunos puderam trabalhar nas produções de obras feitas com o Origami e figuras com o Tangram. Os encontros para a realização da atividade foram realizados em oito fases e em todas as fases o conceito de cada propriedade das dobraduras envolvidas foi explorado. Segundo as autoras, a utilização das Dobraduras e Origamis, após as construções que os alunos realizam, os mesmos podem aprender com o material ao qual produziram, despertando no aluno a criatividade, o divertimento e a vontade em aprender.

Portanto, essas foram algumas pesquisas que já abordaram o trabalho com dobraduras e na seção seguinte temos os conceitos que serão abordados em nossa pesquisa.

1.3 Conceituando os Conteúdos Abordados

No sentido de melhor detalhar os conceitos que serão explorados nessa pesquisa, abordaremos nessa seção, conceitos elementares de Geometria, as Mediatrizes, Bissetrizes Internas, Mediana e Altura e os Pontos Notáveis de um Triângulo. Entre os vários autores que tratam do assunto, adotamos como principal referencial teórico Dolce e Pompeo (2005).

Noções Primitivas

As noções primitivas são adotadas sem definição.

Notação de ponto, reta e plano.

a) *Com letras*

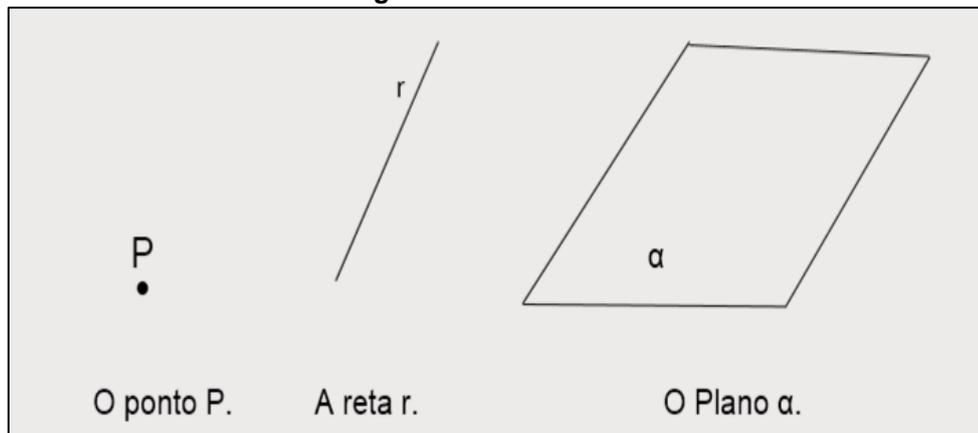
Ponto – letras maiúsculas latinas: A, B, C, ...

Reta – letras minúsculas latinas a, b, c, ...

Plano – letras gregas minúsculas α , β , γ , ...

b) **Notações gráficas**

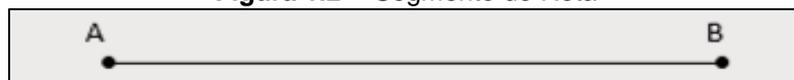
Figura³ 1.1 – Conceitos Primitivos



Definições:

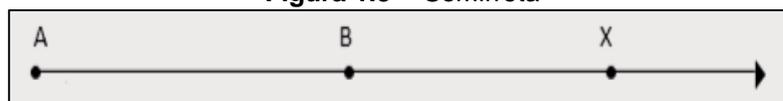
Segmento de Reta: Dados dois pontos A e B distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta. Os pontos A e B são as extremidades do segmento \overline{AB} e os pontos que estão entre eles são pontos internos do segmento \overline{AB} .

Figura 1.2 – Segmento de Reta



Semirreta: Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta \overline{AB} com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB (indicada por \overrightarrow{AB}). O ponto A é a origem da semirreta \overrightarrow{AB} :

Figura 1.3 – Semirreta

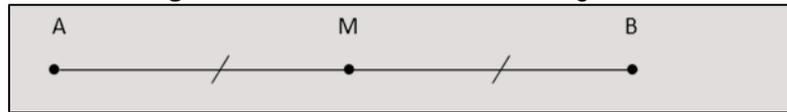


Segmentos colineares: Dois segmentos de reta são colineares se, e somente se, estão numa mesma reta.

³ As figuras foram construídas utilizando o aplicativo GeoGebra e o Programa Word.

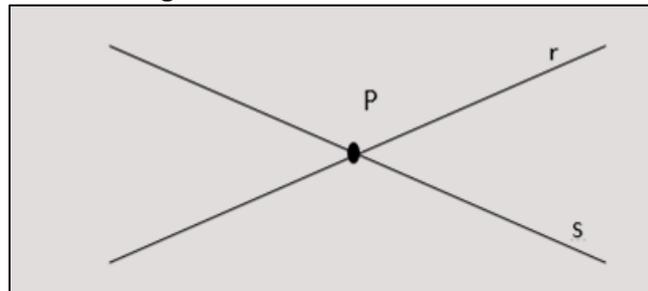
Ponto Médio de um Segmento: Um ponto M é ponto médio do segmento \overline{AB} se, e somente se, M está entre A e B e $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$. (O símbolo de congruência é representado por: \equiv).

Figura 1.4 – Ponto Médio de um Segmento



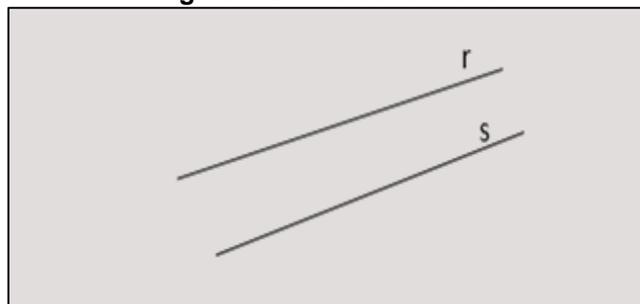
Retas concorrentes: Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum $r \cap s = \{P\}$.

Figura 1.5 – Retas Concorrentes



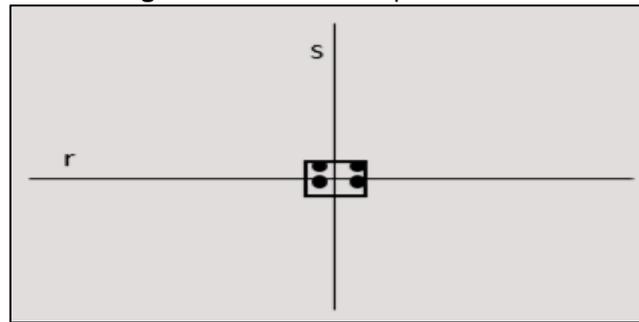
Retas Paralelas: Duas retas r e s são paralelas ($r \parallel s$) se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou são coplanares e não têm nenhum ponto comum, $r \cap s = \emptyset$.

Figura 1.6 – Retas Paralelas



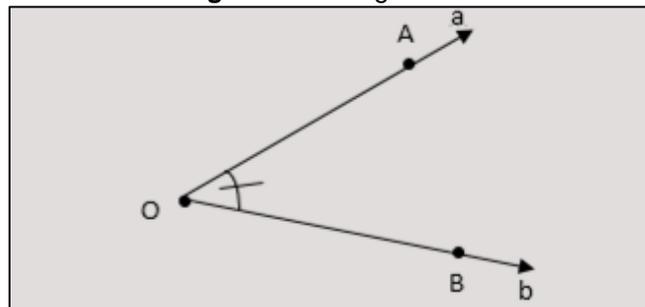
Retas Perpendiculares: Duas retas r e s são perpendiculares ($r \perp s$) se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos de 90 graus em sua interseção.

Figura 1.7 – Retas Perpendiculares



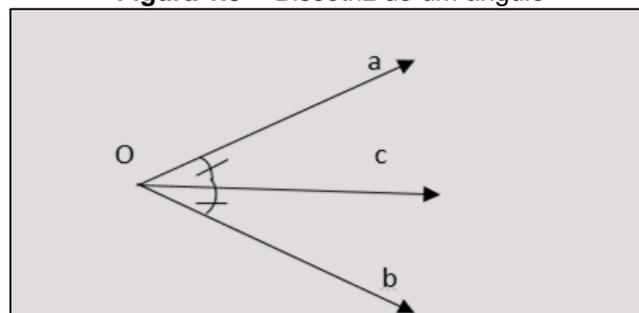
Ângulo: Chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares). O ponto O é o vértice do Ângulo. As semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são os lados do ângulo. Os ângulos podem ser representados por: $\widehat{AOB} = \widehat{aOb} = \widehat{ab}$.

Figura 1.8 – Ângulo \widehat{AOB}



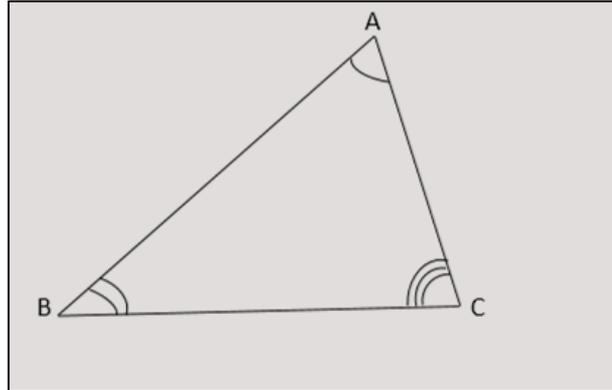
Bissetriz de um ângulo: Uma semirreta Oc interna a um ângulo \widehat{aOb} é bissetriz do ângulo \widehat{aOb} se, e somente se $\widehat{aOc} \equiv \widehat{bOc}$. A bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

Figura 1.9 – Bissetriz de um ângulo



Triângulo:

Dados três pontos A, B e C não colineares, a reunião dos segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} chama-se triângulo ABC. Indicação: triângulo ABC = ΔABC .

Figura 1.10 – Triângulo ABC**Elementos do Triângulo:**

- ✓ **Vértices:** Os pontos A, B e C são os vértices do triângulo ABC.
- ✓ **Lados:** Os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} são os lados do triângulo ABC.

Ângulos: \widehat{BAC} ou \widehat{A} , \widehat{ABC} ou \widehat{B} e \widehat{ACB} ou \widehat{C} são ângulos internos do triângulo ABC.

Diz-se que os lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} e os ângulos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} são, respectivamente, opostos.

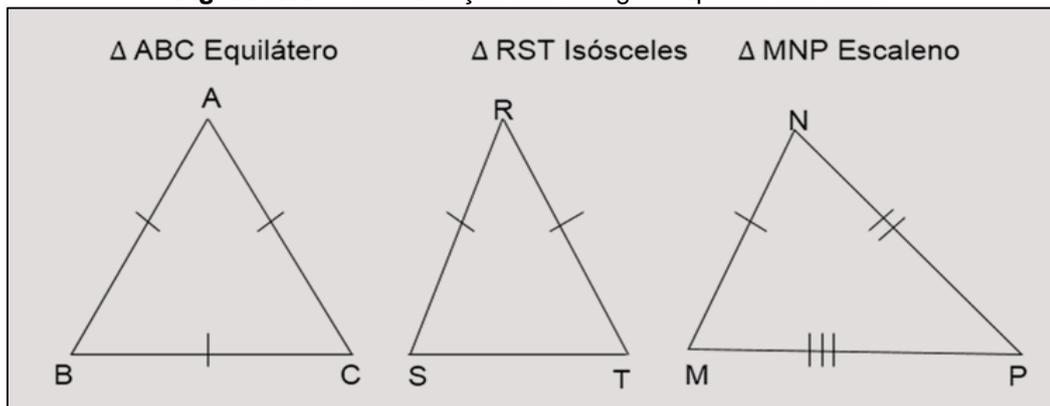
Classificação:

Quanto aos lados, os triângulos se classificam em:

Equiláteros se, e somente se, têm os três lados congruentes;

Isósceles se, e somente se, têm os dois lados congruentes;

Escalenos se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes;

Figura 1.11 – Classificação dos triângulos quanto aos lados

Quanto aos ângulos, os triângulos se classificam em:

Retângulos se, e somente se, têm um ângulo reto⁴;

Acutângulos se, e somente se, têm os três ângulos agudos⁵;

Obtusângulos se, e somente se, têm um ângulo obtuso⁶;

Figura 1.12 – Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

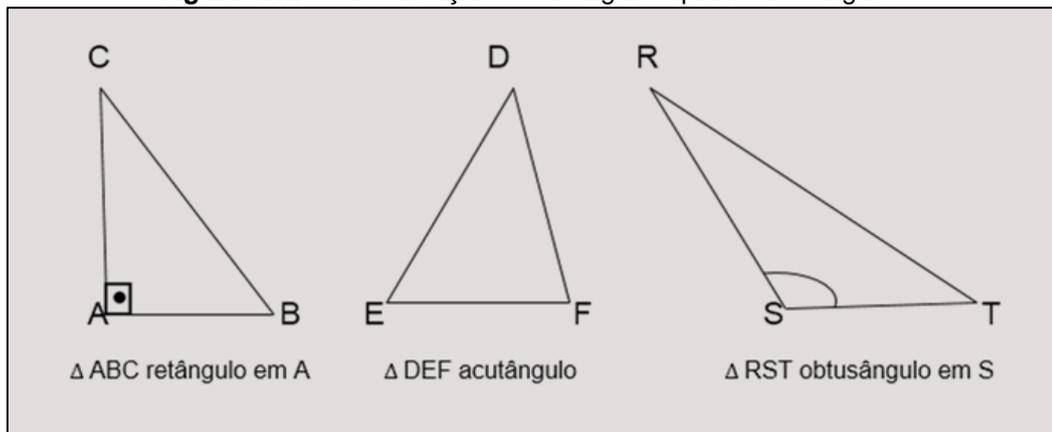
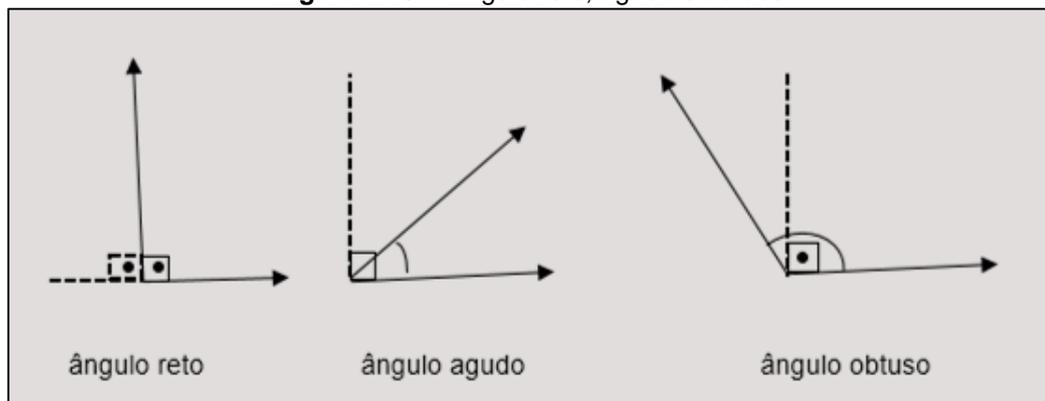


Figura 1.13 – Ângulo reto, agudo e obtuso



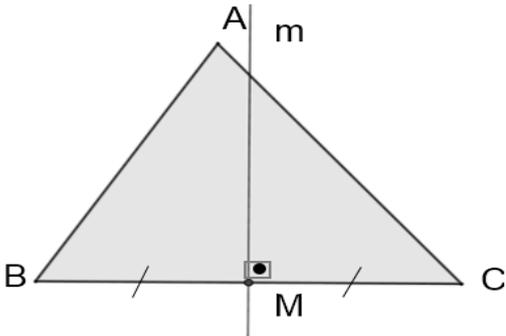
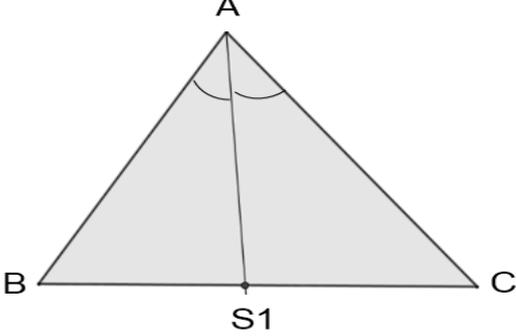
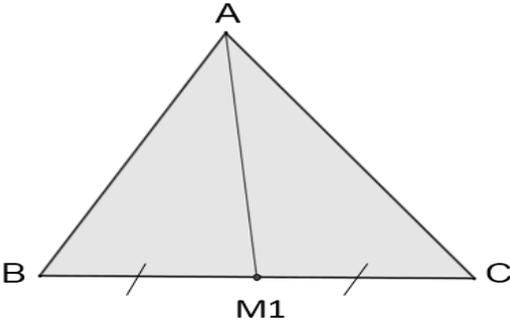
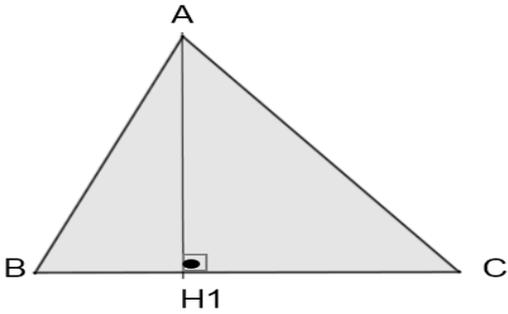
Além dos elementos básicos de um triângulo: lados, vértices e ângulos, em um triângulo identificamos outros elementos como Mediatriz, Bissetriz Interna, Mediana e Altura, como podemos observar na Figura 1.14:

⁴ Ângulo reto é todo ângulo de 90 graus.

⁵ Ângulo agudo é um ângulo menor que um ângulo reto.

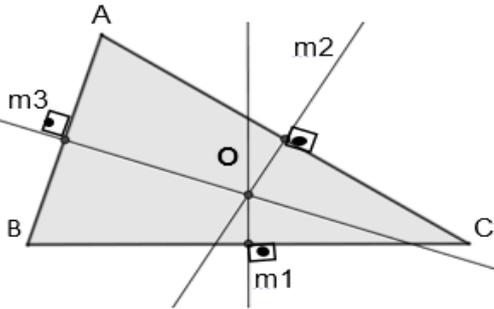
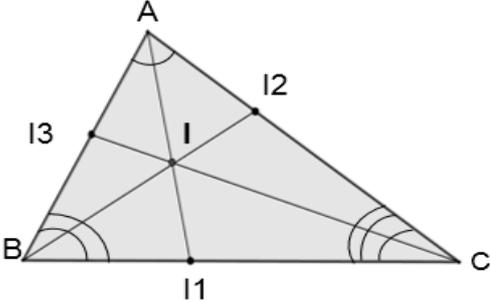
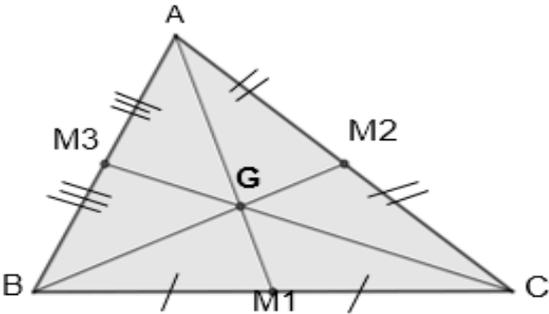
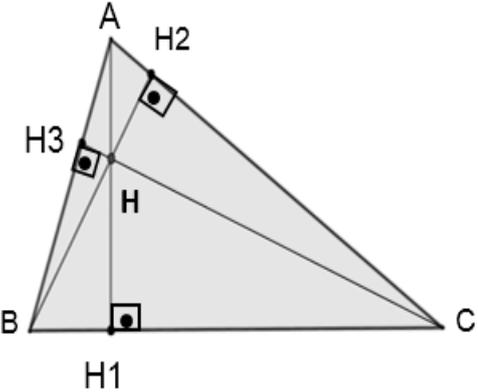
⁶ Ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto.

Figura 1.14 – Mediatriz, Bissetrizes Internas, Mediana e Altura do triângulo

Mediatriz do triângulo	Bissetriz interna do triângulo
<p>É a reta perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio.</p>  <p>(m é mediatriz de \overline{BC})</p>	<p>É o segmento, com extremidades num vértice e no lado oposto, que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.</p>  <p>($\overline{AS1}$ é bissetriz relativa ao lado \overline{BC} e ao vértice A)</p>
Mediana do triângulo	Altura do triângulo
<p>É um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto.</p>  <p>(M1 é o ponto médio do lado \overline{BC} $\overline{AM1}$ é a mediana relativa ao lado \overline{BC} e ao vértice A)</p>	<p>É o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado.</p>  <p>($\overline{AH1}$ é a altura relativa ao lado \overline{BC} e ao vértice A)</p>

Os pontos de interseção das Mediatrizes, Bissetrizes Internas, Mediana e Altura são denominados respectivamente de Circuncentro, Incentro, Baricentro e Ortocentro. Esses pontos são denominados de Pontos Notáveis do Triângulo, como podemos observar na Figura 1.15 à seguir:

Figura 1.15 – Circuncentro, Incentro, Baricentro e Ortocentro do triângulo

Circuncentro do triângulo	Incentro do triângulo
<p>É o ponto de interseção das Mediatrizes dos lados de um triângulo.</p>  <p>O é o Circuncentro do triângulo ABC. Obs.: O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.</p>	<p>É o ponto de interseção das três Bissetrizes Internas de um triângulo.</p>  <p>I é o Incentro do triângulo ABC. Obs.: O Incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.</p>
Baricentro do triângulo	Ortocentro do triângulo
<p>É o ponto de interseção das três Medianas de um triângulo.</p>  <p>G é o Baricentro do triângulo ABC.</p>	<p>É o ponto de interseção das retas suportes⁷ das alturas de um triângulo.</p>  <p>H é o Ortocentro do triângulo ABC.</p>

O Baricentro e o Incentro são pontos sempre internos ao triângulo. Já o Circuncentro e Ortocentro, suas posições dependem da classificação do triângulo quanto ao ângulo. Tanto o Circuncentro como o Ortocentro, são pontos internos quando o triângulo é acutângulo e externo quando é obtusângulo. Quando o triângulo

⁷ Reta suporte de um segmento é a reta que contém tal segmento.

é retângulo, o Circuncentro é o ponto médio da hipotenusa e o Ortocentro é o vértice do ângulo reto.

Portanto, nesta seção foram abordados os conteúdos explorados em nossa pesquisa e no próximo capítulo apresentaremos os procedimentos metodológicos da pesquisa.

Capítulo 2

Procedimentos Metodológicos

Neste Capítulo apresentaremos o objetivo geral, os objetivos específicos, justificativa e importância da pesquisa, os procedimentos metodológicos, a escola e os sujeitos da pesquisa e a aplicação da atividade.

2.1 Objetivos

2.1.1 Objetivo geral:

Propor, aplicar e analisar uma metodologia de ensino do conteúdo Pontos Notáveis do Triângulo, a partir da utilização de dobraduras de papel como meio de construção de conceitos.

2.1.2 Objetivos específicos:

- Propor uma metodologia de ensino utilizando dobraduras de papel;
- Aplicar a atividade com dobraduras em papel em uma turma do 3º ano do ensino médio;
- Analisar a utilização de dobraduras de papel como meio de construção de conceitos;
- Avaliar as impressões dos alunos sobre a atividade desenvolvida.

2.2 Justificativa e importância da pesquisa

Sabe-se que os alunos da Educação Básica sentem muitas dificuldades em entender os conteúdos de Matemática, em especial os de Geometria Plana. Apesar

de predominar o ensino voltado para a exposição de conteúdo, é notável que uma atividade dinâmica traz maior interesse por parte do aluno em querer aprender. Assim, a escolha do tema foi inspirada na pesquisa desenvolvida por Araujo (2013), que traz uma proposta de ensino voltada a explorar as Mediatrizes e Medianas e seus pontos de interseção utilizando Dobraduras em triângulos de papel. Ao final, o autor sugere que investigações semelhantes como as que ele fez podem ser realizadas utilizando as Bissetrizes dos ângulos Internos, as Alturas dos triângulos e seus pontos de interseção – Incentro e Ortocentro. Em nossa investigação, optamos por focar em todos os Pontos Notáveis de um Triângulo. Outros autores como Braz (2013) e Leroy (2010), também foram os motivadores para o desenvolvimento da pesquisa e sua finalização.

Como Geometria é um conteúdo de nosso interesse, surgiu então o desejo de realizarmos essa pesquisa. Gostaríamos de analisar as contribuições que a pesquisa poderá trazer para o avanço do conhecimento, além de reforçar as contribuições de autores como Araujo (2013) e Araújo (2015) que já desenvolveram pesquisas sobre Dobraduras, e ver quais contribuições podem ser feitas a partir da realização dessa pesquisa no contexto da nossa realidade.

O motivo pela realização da investigação surgiu ainda pelo interesse em buscar uma metodologia diferenciada que pudesse ser utilizada com alunos da Educação Básica a fim de despertar o interesse dos mesmos pela Matemática, facilitando com isso o seu aprendizado. Buscamos assim, as Dobraduras, uma metodologia inovadora e eficiente, que pode ser utilizada na busca da construção de conceitos geométricos, com a participação ativa dos alunos numa perspectiva investigativa de aprendizado.

Essa pesquisa propõe a interação das Dobradura com conceitos matemáticos relativos a Geometria Plana. Por meio de atividades aplicadas gostaríamos de identificar quais as potencialidades das dobraduras no ensino da Geometria e as dificuldades encontradas quando se pretende utilizar uma metodologia como esta.

2.3 Procedimentos metodológicos

Esta pesquisa caracteriza-se metodologicamente como exploratória, segundo os seus objetivos, e naturalista ou de campo, segundo o processo de coleta e análise de dados. Exploratória especialmente em sua fase inicial, pela necessidade

da busca de hipóteses e subsídios que levassem a informações necessárias para melhor definir o objeto e o foco de estudo. Naturalista ou de campo pelo fato de “a coleta de dados ser realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece” (FIORENTINI, LORENZATO, 2009, p.106).

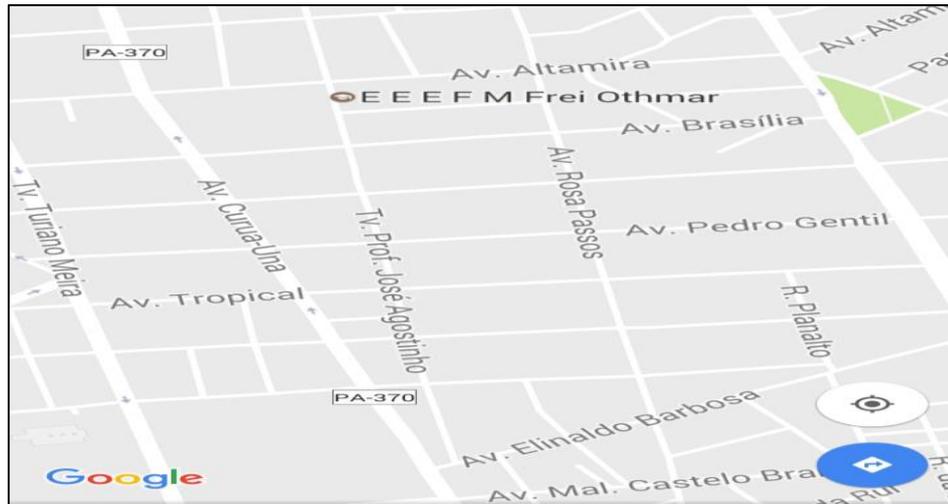
Dentro dessa perspectiva, optamos pela abordagem metodológica da observação participante ou etnográfica, na qual “a coleta de dados é realizada junto aos comportamentos naturais das pessoas quando essas estão conversando, ouvindo, trabalhando, estudando em classe, brincando, comendo...” (Ibid., p. 107).

Os instrumentos de coleta de dados para análise foram o diário da pesquisadora, com anotações sobre as observações realizadas durante todo o período de realização das atividades, e um questionário aplicado aos alunos com o intuito de verificar suas concepções sobre a atividade.

A pesquisa foi realizada nos meses de agosto e setembro de 2016, na escola Frei Othmar, situada no Município de Santarém, no Estado do Pará. As atividades foram desenvolvidas em um total de quatro aulas de 40 minutos cada, em três momentos distintos: Exposição do conteúdo envolvendo o tema abordado, aplicação da atividade com Dobraduras e aplicação de um questionário.

2.4 A Escola e os Sujeitos da Pesquisa

A Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Frei Othmar foi fundada em 04 de outubro de 1959 por iniciativa do Frei franciscano Othmar Rollman, com o objetivo de ajudar na formação educacional das crianças do bairro, como uma instituição vinculada à Igreja Católica, tendo os professores pagos pela Prefeitura Municipal de Santarém. Inicialmente, funcionava no barracão que servia de capela, associada à escola São Francisco e chamava-se Escola do Santíssimo Sacramento. Em 1968, a Prefeitura assumiu totalmente os gastos com sua manutenção e por isso passou a ser chamada Escola Municipal do Santíssimo Sacramento. Com o crescimento populacional do bairro e a demanda por vagas, a prefeitura reestruturou o prédio em alvenaria, que em 24 de outubro de 1969 foi inaugurado e a escola passou a se chamar Escola Municipal Frei Othmar. A mesma está localizada no bairro do Santíssimo, na Trav. Profº José Agostinho s/n, mas atende alunos de outros bairros de Santarém. Sua localização pode ser observada na Figura 2.1 à seguir.

Figura 2.1 – Localização da Escola Frei Othmar

Fonte: Google Maps.

A escolha da escola se deu pelo fato da montagem da atividade ocorrer no mesmo período da disciplina Estágio Supervisionado IV. Vimos assim um meio que facilitava a aplicação da atividade proposta na referida escola. Como já estávamos convivendo com os alunos durante o estágio, já tínhamos uma relação de aluno e professor. Escolhida a escola, precisaríamos escolher a turma. Observamos durante o estágio qual série naquele semestre estava trabalhando com o conteúdo que mais se aproximava de Geometria, ou que de alguma forma já tivessem visto o conteúdo alguma vez durante sua vida escolar. Assim, escolhemos então aplicar a atividade na turma de 3º ano do ensino médio, mais precisamente na turma 302. Para a aplicação da atividade proposta as aulas foram cedidas pela professora titular da turma. A seguir, traçamos um breve perfil dos sujeitos da pesquisa.

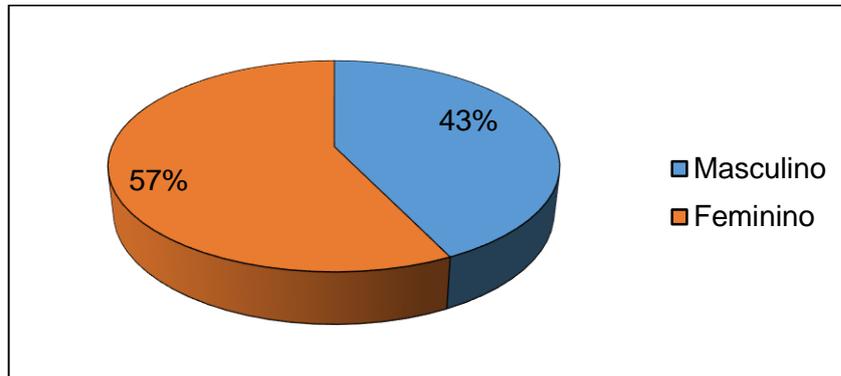
A Tabela 2.1 apresenta uma distribuição de frequências com as idades dos alunos da turma.

Tabela 2.1 – Idades dos alunos da turma 302 da Escola Frei Othmar – Santarém, 2016.

Idade	Frequência	%
16 anos	3	14
17 anos	7	34
18 anos	7	33
19 anos	3	14
20 anos	1	5
Total	21	100

Como podemos observar, os sujeitos da pesquisa encontram-se na faixa etária que vai de 16 a 20 anos, com uma maior frequência de alunos com idades de 17 e 18 anos. Abaixo, na Figura 2.2, apresentamos a classificação dos alunos por sexo.

Figura 2.2 – Classificação dos alunos por sexo



A Figura 2.2, como podemos observar acima, nos mostra que do total de alunos participantes da pesquisa a maioria é de alunos do sexo feminino, (57%).

2.5 Aplicação da Atividade

Antes da efetiva aplicação da atividade, procedemos na abordagem introdutória do conteúdo, com a breve apresentação de noções e construções básicas da Geometria Plana, tais como segmento, ângulo, congruência, bissetriz de um ângulo, mediatriz de um segmento. Desenvolvemos ainda uma breve exposição sobre os seguintes conteúdos: Segmento de reta, semirreta, Ponto médio de um segmento, ângulo, Bissetriz de um ângulo e sua classificação, Retas concorrentes, paralelas e perpendiculares, triângulo, seus elementos e sua classificação quantos aos lados e aos ângulos. E, por fim, foi desenvolvida uma exposição sobre Mediatriz, Bissetrizes internas, Medianas e alturas e respectivamente seus pontos de encontro, Circuncentro, Incentro, Baricentro e Ortocentro, os Pontos Notáveis de um Triângulo, que eram o principal enfoque da pesquisa. Após essa breve revisão de conceitos, os participantes desenvolveram as atividades de Dobraduras em triângulos de papel.

Uma parte das atividades foi realizada no dia 19 de setembro de 2016, pelo horário da manhã, e a outra parte da atividade no dia 26 de setembro de 2016, incluindo assim a aplicação de um questionário no final da atividade. Para a

elaboração e aplicação da atividade, pesquisamos alguns dos textos que trabalham com dobraduras e que apresentam sugestões de como as atividades poderiam ser desenvolvidas e aplicadas. Neste sentido, nos foram úteis principalmente as pesquisas de Araujo (2013), Braz (2013) e Leroy (2010).

Na aplicação das atividades foram utilizados triângulos confeccionados manualmente em folhas de papel A4. Os triângulos foram desenhados nas folhas e depois foram tiradas cópias de cada tipo de triângulo, incluindo assim triângulos retângulo, acutângulo e obtusângulo, não especificando aos alunos que tipo de triângulo estavam utilizando no momento da atividade. Não era objetivo da atividade obter os recortes dos triângulos feito pelos alunos e sim as dobras dos triângulos já confeccionados, uma vez que o recorte tomaria muito tempo.

De início gostaríamos de realizar a atividade em triângulo acutângulo, obtusângulo e retângulo em todas as atividades mas precisaríamos de muito mais tempo. Por isso para encontrar o Circuncentro do triângulo realizamos a atividade com triângulo acutângulo e obtusângulo. Para encontrar o Incentro utilizamos triângulo retângulo, para encontrar o Baricentro e o Ortocentro utilizamos triângulo acutângulo.

O primeiro passo antes da realização da atividade foi dizer aos alunos que aquela turma participaria de uma pesquisa sobre o uso de Dobraduras em triângulos de papel e pedimos a colaboração de todos. Falamos ainda que não era necessário suas identificações. Para efeito de análise para cada um dos alunos foi atribuído uma letra para suas identificações, como: A, B, C, D....

Após dados os materiais e todas as instruções dos procedimentos, deu-se início a atividade que consistia em encontrar os Pontos Notáveis de um Triângulo através de dobraduras em triângulos de papel, que envolvia conceitos, a identificação dos pontos de interseção, as diferenças entre Mediatrizes, Medianas, Bissetrizes Internas e Alturas.

Descrevemos abaixo a descrição detalhada dos procedimentos desenvolvidos e dos objetivos das atividades desenvolvidas:

Atividade 1: Encontrando o Circuncentro utilizando um triângulo acutângulo

Nessa atividade foram abordados os conceitos de **Mediatriz** de um triângulo e **Circuncentro**. Essa atividade teve como objetivos que os alunos construíssem as três Mediatrizes do triângulo através de Dobraduras, observassem o

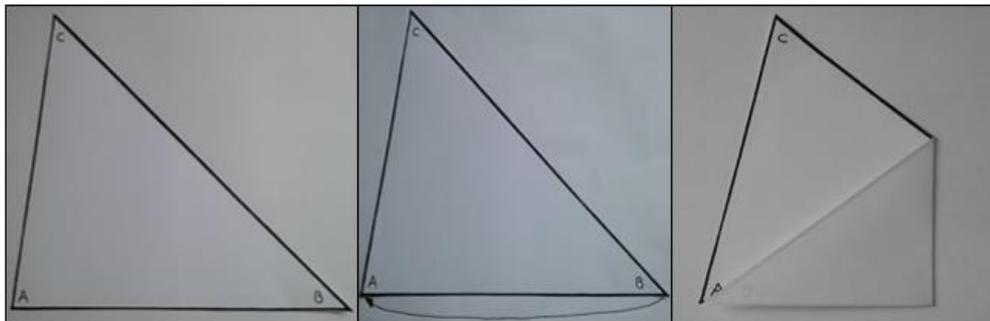
que é Mediatriz de um triângulo e percebessem que elas se encontram em um único ponto chamado **Circuncentro**. Foi fornecido a cada aluno um triângulo acutângulo recortado. Foi solicitado que fizessem as dobras no triângulo acutângulo seguindo os passos da atividade a fim que encontrassem o ponto médio de cada lado do triângulo e realizassem as construções das Mediatrizes relativas a cada lado. Desfeitas as dobras foram orientados a realizarem traços com caneta nessas dobras e instruídos a verificar que os traços deixados pelas dobraduras referentes as Mediatrizes se encontraram em um único ponto, chamado de **Circuncentro**, no qual este ponto é interno ao triângulo.

Descrição passo-a-passo da Atividade 1

Foram solicitados aos alunos que realizassem os seguintes passos:

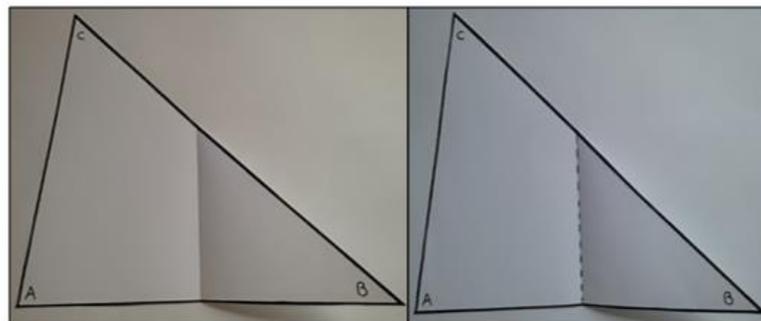
Primeiro passo: Com posse do recorte de um triângulo acutângulo ABC em mãos, faça uma dobra de modo a coincidir dois vértices A e B.

Figura 82.3 – Primeiro passo da atividade 1



Segundo passo: Desdobre e faça um traço com caneta na dobra. A dobra determinada é a Mediatriz do lado AB.

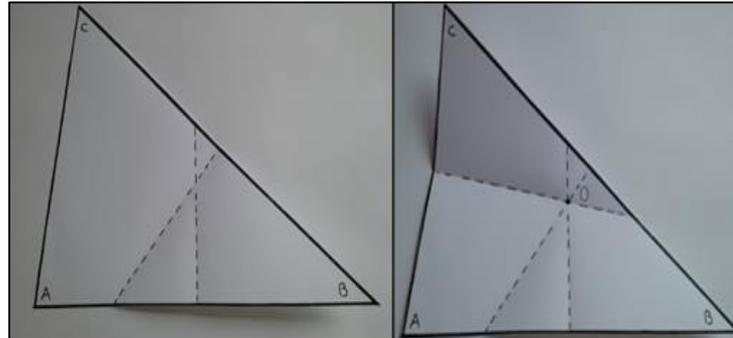
Figura 2.4 – Segundo passo da atividade 1



⁸ Fotos produzidas pela própria autora da pesquisa com a utilização de um equipamento fotográfico.

Terceiro passo: Repita os passos anteriores para os dois lados (BC e AC), obtendo os resultados ilustrados abaixo:

Figura 2.5 – Terceiro passo da atividade 1



Observe que as três Mediatrizes se encontram em um único ponto, que é interior ao triângulo, chamado de **Circuncentro** do triângulo e denotado por **O**.

Atividade 2: Encontrando o Circuncentro utilizando um triângulo obtusângulo

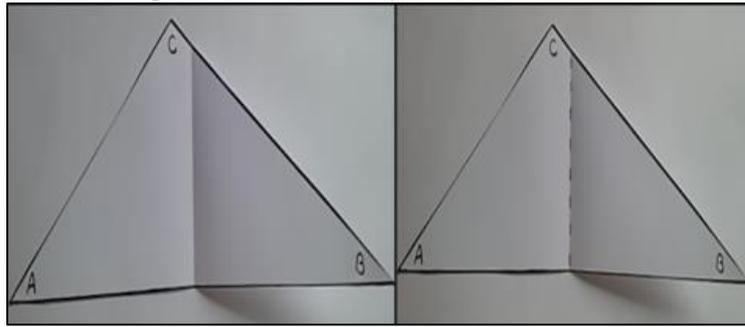
Nessa atividade foram abordados os conceitos de **Mediatriz** de um triângulo e **Circuncentro**, da mesma forma que a **Atividade 1**. Essa atividade teve como objetivos que os alunos construíssem através de Dobraduras as três Mediatrizes do triângulo e percebessem que elas se encontram em um ponto chamado Circuncentro. Foi fornecido a cada aluno um triângulo obtusângulo recortado. Os alunos realizaram de maneira análoga a **atividade 1**, até o momento em que traçaram as três Mediatrizes e a partir daí foram orientados a colocar o triângulo no caderno de forma que prolongassem os traços das Mediatrizes obtidas com as Dobraduras e com isso constataram que as três Mediatrizes se encontraram em um único ponto e que esse ponto no triângulo obtusângulo é chamado **Circuncentro** e é externo ao triângulo.

Descrição passo a passo da Atividade 2

Foram solicitados aos alunos que realizassem os seguintes passos:

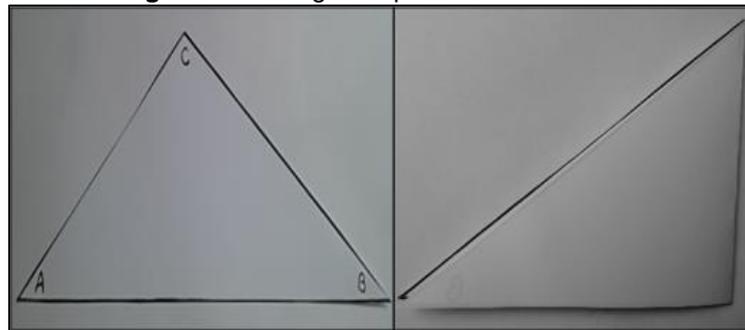
Primeiro passo: Com posse do recorte de um triângulo acutângulo ABC em mãos, faça uma dobra de modo a coincidir dois vértices A e B.

Figura 2.6 – Primeiro passo da atividade 2



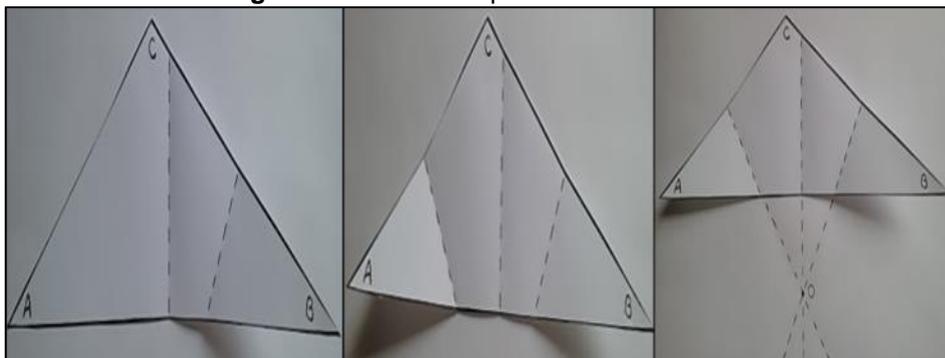
Segundo passo: Desdobre e faça um traço com caneta na dobra. A dobra determinada é a Mediatriz do lado AB.

Figura 2.7 – Segundo passo da atividade 2



Terceiro passo: Repita os passos anteriores para os dois lados (BC e AC), obtendo os resultados ilustrados na Figura 2.8:

Figura 2.8 – Terceiro passo da atividade 2



Observe que, neste caso, o ponto de encontro entre as três Mediatrizes é exterior ao triângulo.

Atividade 3: Encontrando o Incentro utilizando um triângulo retângulo

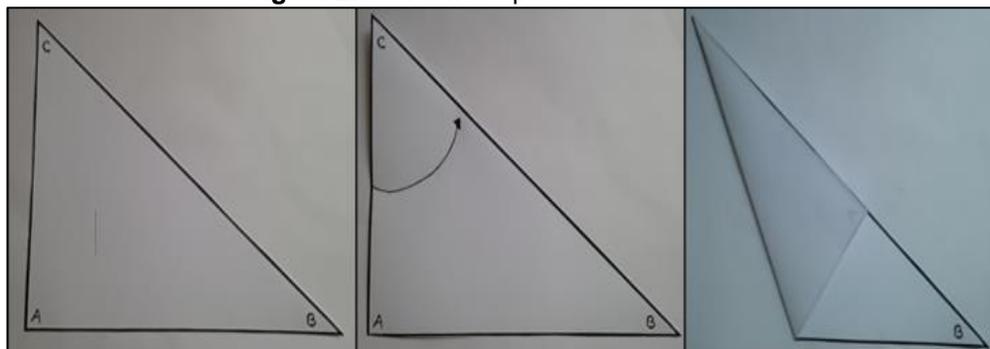
Nessa atividade foram abordados os conceitos de **Bissetrizes Internas** de um triângulo e **Incentro**. Essa atividade teve como objetivos que os alunos identificassem as Bissetrizes Internas de um triângulo, observassem o que é Bissetriz Interna de um triângulo, construíssem através de Dobraduras essas três Bissetrizes e percebessem que elas se encontram em um único ponto chamado **Incentro**. Foi fornecido a cada aluno um triângulo retângulo recortado. Foi solicitado que fizessem as dobras no triângulo para encontrar as Bissetrizes Internas e desfeitas essas dobras traçassem a caneta nesses traços e verificar que os traços deixados pelas dobraduras referentes as Bissetrizes se encontram em um único ponto interno ao triângulo, o qual é chamado de **Circuncentro**.

Descrição passo-a-passo da Atividade 3

Foram solicitados aos alunos que realizassem os seguintes passos:

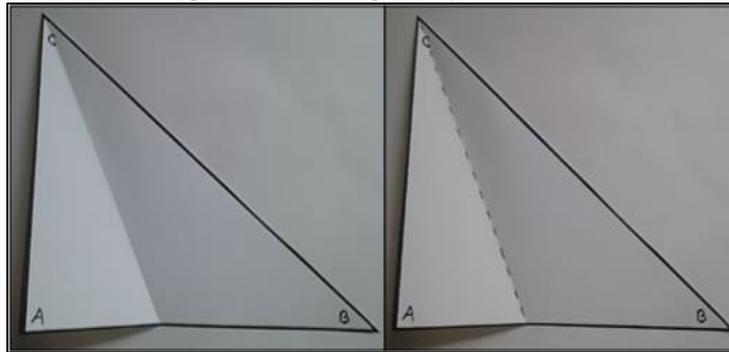
Primeiro passo: Com posse do recorte de um triângulo retângulo ABC em mãos, faça uma dobra de modo a coincidir os lados AC e BC.

Figura 2.9 – Primeiro passo da atividade 3



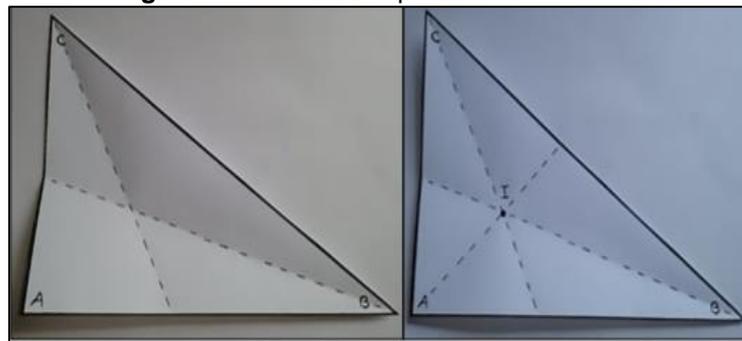
Segundo passo: Desdobre e faça um traço com caneta na dobra. Observe que a dobra determinada é a Bissetriz Interna do ângulo ACB.

Figura 2.10 – Segundo passo da atividade 3



Terceiro passo: Repita os passos anteriores para os lados AB e BC e para os lados AC e AB, obtendo assim as outras duas Bissetrizes Internas no triângulo.

Figura 2.11 – Terceiro passo da atividade 3



Observe que as três Bissetrizes Internas se encontram em um único ponto, chamado de **Incentro** do triângulo e denotado por **I**.

Atividade 4: Encontrando o Baricentro utilizando um triângulo acutângulo

Nessa atividade foram abordados os conceitos de **Mediana** de um triângulo e **Baricentro**. Essa atividade teve como objetivos que os alunos identificassem os pontos médios dos lados de um triângulo, assim como foram encontrados na (**atividade 1 e 2**), construíssem através de dobraduras as três Medianas de um triângulo, observassem o que é Mediana, e ilustrassem que as três Medianas dos lados de um triângulo se encontram em um ponto chamado **Baricentro**. Foi fornecido a cada aluno um triângulo acutângulo recortado. Foram, então orientados a fazer Dobraduras de forma a marcar os pontos médios dos lados do triângulo e, posteriormente a Mediana relativa a cada lado. Desfeitas todas as dobras e traçado com caneta essas dobras, os alunos foram instruídos a observar que os traços

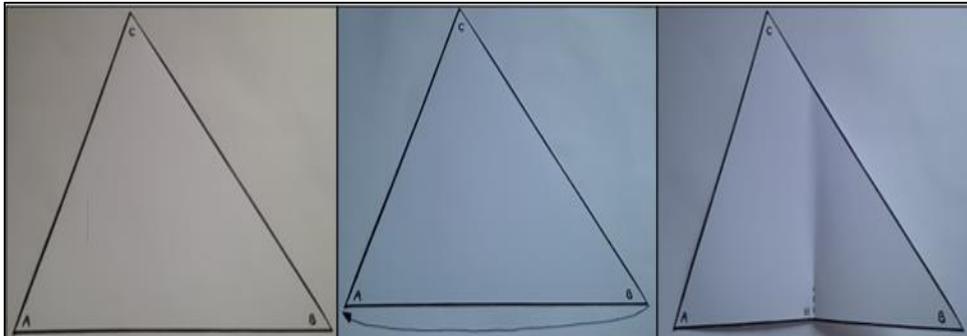
deixados pelas Dobraduras referentes as Medianas se encontram em um único ponto, o qual é chamado de **Baricentro**.

Descrição passo-a-passo da atividade 4

Foram solicitados aos alunos que realizassem os seguintes passos:

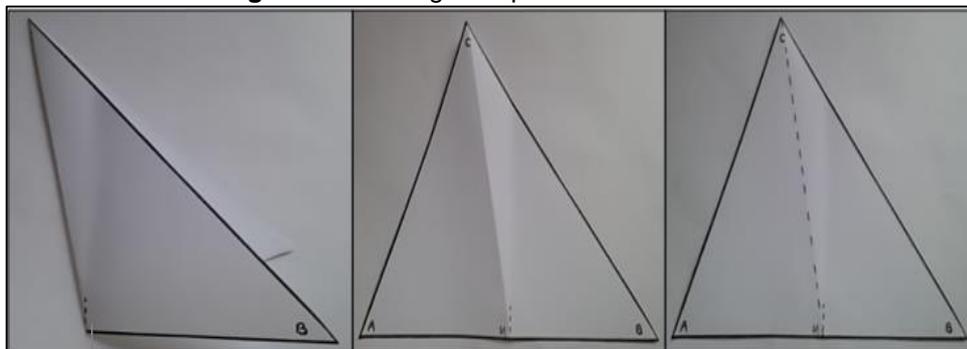
Primeiro passo: Com posse do recorte de um triângulo acutângulo ABC em mãos, faça uma dobra de modo a coincidir vértices A e B. Desdobre, determinando assim, o ponto M, médio do segmento AB.

Figura 2.12 – Primeiro passo da atividade 4



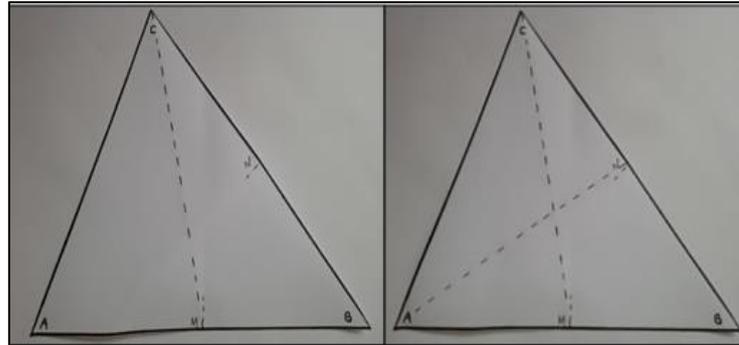
Segundo passo: Faça uma dobra que passe pelos pontos C e M. Desdobre e faça um traço com caneta na dobra. Observe que a dobra determina uma parte do vértice C e vai até o ponto médio do lado oposto AB. Esta dobra corresponde à Mediana relativa ao lado AB.

Figura 2.13 – Segundo passo da atividade 4



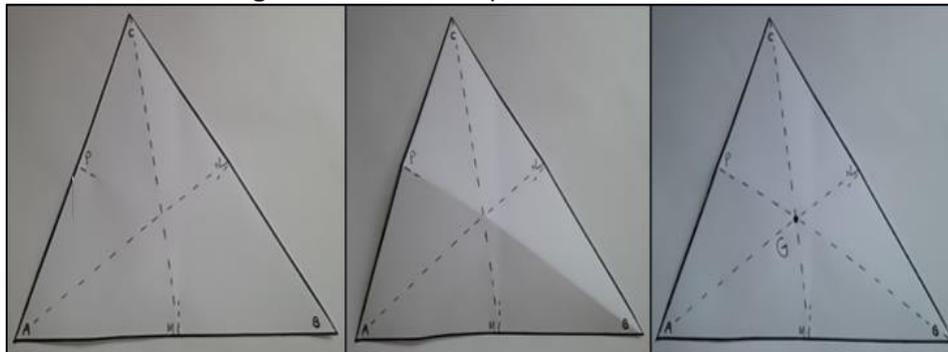
Terceiro passo: Repita os passos anteriores para o lado BC e o vértice A.

Figura 2.14 – Terceiro passo da atividade 4



Quarto passo: E repita novamente os passos anteriores para o lado AC e o vértice B.

Figura 2.15 – Quarto passo da atividade 4



Observe que as três Medianas se encontram em um único ponto, chamado **Baricentro** do triângulo e denotado por **G**.

Atividade 5: Encontrando o Ortocentro utilizando um triângulo acutângulo

Nessa atividade foram abordados os conceitos de **Altura** de um triângulo e **Ortocentro**. Essa atividade teve como objetivos que os alunos identificassem as Alturas dos lados de um triângulo, observassem o que é Altura de um triângulo e construíssem através de dobraduras as três Alturas referentes a cada lado de um triângulo e percebessem que elas se encontram em um ponto chamado Ortocentro. Foi fornecido a cada aluno um triângulo acutângulo. Foi solicitado que fizessem as dobras no triângulo acutângulo para encontrar as Alturas relativas aos lados do triângulo e verificassem que os traços deixados pelas Dobraduras referentes às

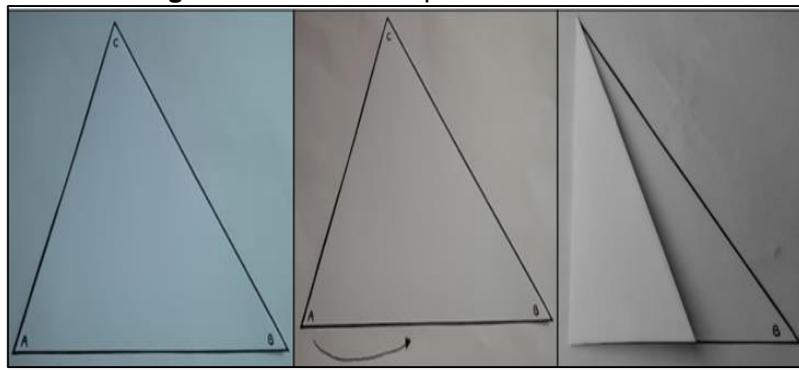
Alturas se encontram em um ponto interno ao triângulo, o qual é chamado de **Ortocentro**.

Descrição passo-a-passo da atividade 5

Foram solicitados aos alunos que realizassem os seguintes passos:

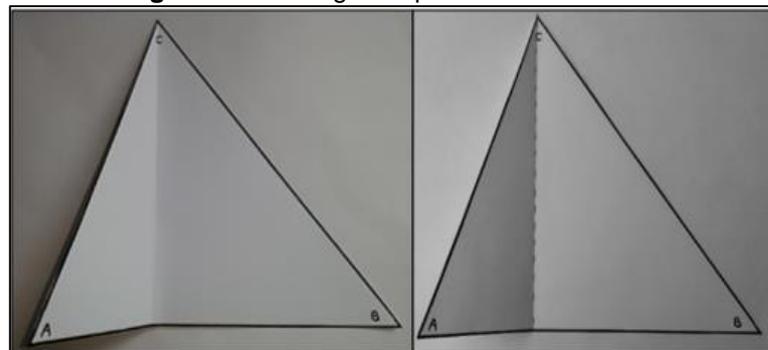
Primeiro passo: Com posse do recorte de um triângulo acutângulo ABC em mãos, faça uma dobra que passe pelo ponto C e de modo que as duas semirretas originadas em AB coincidam.

Figura 2.16 – Primeiro passo da atividade 5



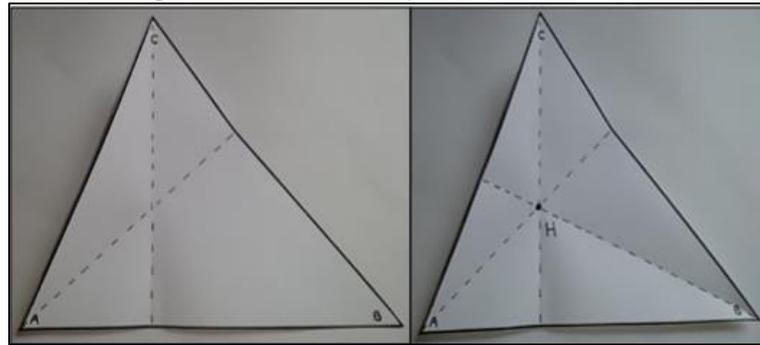
Segundo passo: Desdobre e faça um traço com caneta na dobra. Observe que a dobra determinada é perpendicular a AB que passa pelo vértice C. Esta dobra corresponde a Altura relativa ao lado AB.

Figura 2.17 – Segundo passo da atividade 5



Terceiro passo: Repita os passos anteriores para o lado BC e o vértice A e para o lado AC e o vértice B.

Figura 2.18 – Terceiro passo da atividade 5



Observe que as três alturas se intersectam em um único ponto, o **Ortocentro** do triângulo, denotado por **H**.

Resumidamente, temos que em todas as cinco atividades de Dobraduras foram feitos os procedimentos como, a orientação aos alunos sobre as atividades que seriam desenvolvidas e os objetivos das mesmas, logo depois foi feita a distribuição do material aos alunos, e por último a realização das atividades; em todas as etapas das atividades sempre dialogando com os alunos. E portanto nas cinco atividades os alunos foram orientados a seguirem com as orientações a respeito da realização da atividade. Nelas dizia-se para eles os passos que deveriam fazer para realizar sempre explorando os conceitos envolvidos em cada uma.

Ao final, um questionário foi aplicado com o intuito de verificar suas concepções sobre a atividade. Uma cópia do questionário utilizado nesta investigação consta no (**Anexo 2**) deste trabalho.

Portanto, neste capítulo foram apresentados os procedimentos metodológicos da pesquisa e no próximo capítulo apresentaremos os resultados obtidos em nossa investigação.

Capítulo 3

Resultados

Neste capítulo apresentaremos e comentaremos a análise dos dados obtidos em nossa pesquisa, por meio do diário de campo e do questionário.

3.1 As impressões e análise sobre a experiência didática vivenciada

Durante a realização da atividade foram observadas muitas coisas que julgamos interessante relatar. Com o recebimento do material, os triângulos de papel, os alunos ficaram admirados, acharam bem interessante, pareciam muito entusiasmados, pois era uma atividade muito diferente do que estavam acostumados. Vimos que a atividade com dobraduras despertou o interesse da maioria. Em relação à exposição do conteúdo, não foi observado muito interesse.

Durante a exposição do conteúdo, quando lançávamos alguma pergunta sobre o assunto que estávamos trabalhando para a turma, a maioria ficava calada. Os que mais respondiam, sabendo ou não do assunto, eram os que estavam sentados na frente. Quando foram aplicadas as cinco atividades que envolviam as Dobraduras, os que não estavam participando da aula passaram a demonstrar mais interesse, fazendo várias perguntas para o bom funcionamento de suas atividades.

Abaixo estão descritos alguns fatos observados durante a realização de cada uma das atividades no que diz respeito às dobraduras, com a respectiva análise da professora-pesquisadora.

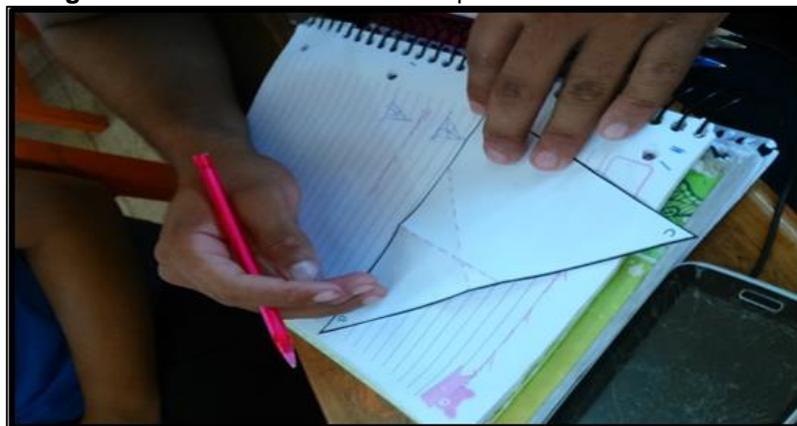
Na **atividade 1: Encontrando o Circuncentro utilizando um triângulo acutângulo**, os alunos foram solicitados a encontrar o ponto médio de um dos lados do triângulo, fazendo com que seus dois vértices coincidisse (Figura 2.3). A dobra feita pelos alunos determinou um segmento perpendicular ao referido lado do triângulo. Concluiu-se que esse segmento é uma das Mediatrizes do triângulo (Figura 2.4).

Com a realização desses primeiros passos dessa atividade (Figuras 2.3 e 2.4) os alunos puderam construir através do material uma das Mediatrizes de um dos lados do triângulo, realizando a Dobradura e com isso puderam construir o conceito de Mediatriz a partir da dobra realizada. Nesse sentido, os alunos puderam visualizar nas suas Dobraduras as construções das Mediatrizes e puderam discutir os conceitos trabalhados nessa atividade. Com a realização dessa primeira atividade, tiveram a oportunidade de explorar o conceito de vértice do triângulo, além de ponto médio do triângulo e segmento perpendicular.

Desta forma, depois que os alunos encontraram uma das Mediatrizes, foi solicitado que encontrassem as outras Mediatrizes, (Figura 2.5). Depois de realizarem o primeiro passo e segundo passo da atividade (Figuras 2.3 e 2.4), foi observado que alguns alunos conseguiram compreender e realizar os passos seguintes com tranquilidade.

Na figura abaixo, o aluno A encontrando o ponto médio e construindo as Mediatrizes do triângulo acutângulo através de Dobraduras.

Figura 3.1 – Aluno A encontrando ponto Médio e Mediatrizes



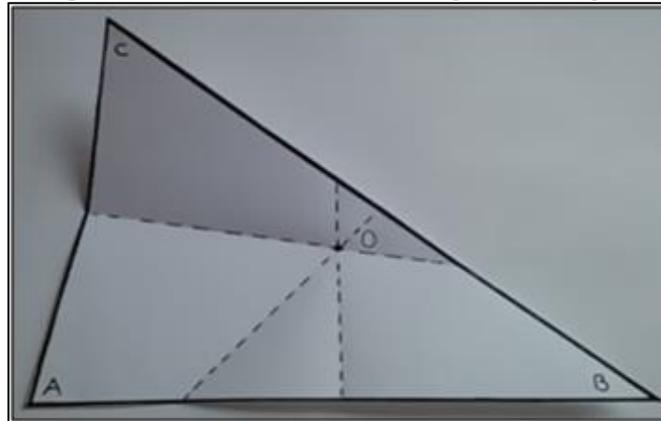
Os que não conseguiram encontrar as Mediatrizes foram orientados a rever a dobra que realizaram nas Figuras 2.3 e 2.4 para verificar o que foi feito para assim encontrarem as Mediatrizes. Com isso então puderam realizar os passos seguintes, e encontrar as Mediatrizes dos outros dois lados (Figura 2.5). Foi questionado se as três Mediatrizes se encontravam em um ponto e se o ponto ficou interno ou externo ao triângulo. A maioria respondeu que as Mediatrizes se encontraram no mesmo ponto. Os demais foram orientados a verificar suas Dobraduras e puderam perceber que o fato ocorreu devido aos dois vértices do triângulo não coincidirem.

De acordo com Araújo (2015, p.76) “... as dificuldades e o erro fazem parte no processo de ensino e aprendizagem e devem contribuir para que o professor reflita sobre sua prática pedagógica e busque rever seus conceitos no sentido de facilitar e garantir a aprendizagem dos alunos”. Nesse sentido, acreditamos que o erro cometido pelos alunos foi uma forma de aprendizagem, pois através desses erros eles puderam rever suas dobras e assim realizar de maneira correta.

Em relação a posição do ponto, todos responderam que ficou interno ao triângulo. No final foi explicado então que esse ponto é o Circuncentro do triângulo e o centro da circunferência circunscrita ao triângulo. Nesse sentido, essa atividade foi útil aos alunos, no sentido de oportunizá-los a construírem os conceitos de forma prática, onde eles puderam visualizar manipulando o material.

Podemos observar o resultado final obtido com as Dobraduras a partir da Figura 3.2, onde o ponto **O**, é o **Circuncentro** do triângulo acutângulo.

Figura 3.2 – Circuncentro do triângulo acutângulo



Na **Atividade 2: Encontrando o Circuncentro utilizando um triângulo obtusângulo**, os alunos foram orientados a realizar o mesmo procedimento da **atividade 1**.

Nesta atividade, os alunos não tiveram dificuldade em executar os procedimentos, pois eram iguais aos da atividade anterior, com a única diferença de que a segunda parte desta atividade foi desenvolvida no caderno dos próprios alunos. Sendo assim, no final dos procedimentos, surgiram os questionamentos dos alunos: qual a razão que fez com que as Mediatrizes do triângulo não se encontrassem como na atividade anterior?

Essa atividade foi realizada em um recorte de triângulo e segundo Braz (2013, p. 38) isso pode instigar a curiosidade dos alunos para o fato: “será que as três

mediatrizes não concorrem em um único ponto? (pois ao fazerem as dobras no recorte, o circuncentro não surgirá por se tratar de um ponto exterior ao triângulo neste caso)”. Nesse intuito foi realizada a **atividade 2**, para verificar se questionamentos como estes iriam surgir.

Nesse sentido, alguns imaginaram ter realizado os passos desenvolvidos de maneira errada, e por isso não deu certo o que objetivavam alcançar. Este erro é baseado na possível crença de que todo ponto notável de um triângulo é interno a este triângulo. Os alunos foram orientados então a pegar seus triângulos e colocar no caderno, e com isso, foram orientados a traçar o prolongamento das Mediatrizes.

A ideia de que os pontos notáveis de um triângulo são sempre internos a este triângulo é o que se constitui dentro do campo da Didática como um Obstáculo Didático. Este conceito é derivado das ideias de Bachelard, um epistemólogo francês. Um obstáculo didático é aquele que impede a aquisição de um novo conceito na medida em que lhe serve de barreira. Ele não é derivado da falta de conhecimento, mas sim da presença de outros conhecimentos (talvez mal constituídos dentro do sujeito cognitivo) que acabam impedindo a formação de novos conhecimentos. Pais (2011, p. 44), refere-se aos obstáculos didáticos como “conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar”.

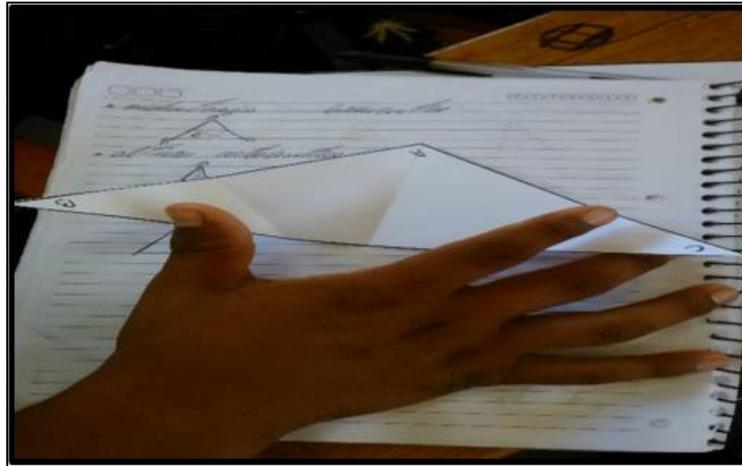
A concepção dos alunos de que todo ponto notável de um triângulo é sempre interno a este triângulo provavelmente se constituiu a partir da **atividade 1**, quando os sujeitos verificaram que o ponto notável encontrado situava-se dentro do triângulo. A partir daí, eles possivelmente generalizaram este resultado para todos os outros. É comum entre alunos mais inexperientes esse tipo de generalização indevida. Essas generalizações acabam se constituindo como obstáculos didáticos no aprendizado desses alunos.

Portanto este erro se constitui em um obstáculo didático. Este obstáculo se enquadra no obstáculo da generalidade.

Esse problema surge quando ocorre uma tentativa apressada de generalizar uma ideia que está ainda presa ao entendimento pré-reflexivo. [...] Trata-se de uma precipitação do pensamento indutivo, em que a observação de casos particulares é considerada suficiente para induzir afirmações gerais. (PAIS, 2011, p. 48)

Na Figura 3.3 temos o Aluno B realizando o procedimento de prolongamento das Mediatrizes do triângulo obtusângulo através de Dobraduras.

Figura 3.3 – Aluno B realizando o procedimento para prolongar as Mediatrizes



Realizando este procedimento os alunos encontraram o ponto de encontro das Mediatrizes. Assim foram questionados se as Mediatrizes se encontraram, se esse ponto encontrado em suas atividades era interno ou externo e se sabiam o motivo que proporcionou o fato. A maioria da turma encontrou o ponto e esse ponto foi externo ao triângulo. Mas a maioria não conseguiu responder o fato que proporcionou o encontro das Mediatrizes externo ao triângulo. Então eles foram questionados a lembrar da classificação dos triângulos quanto aos ângulos. Os mesmos não lembravam, e com isso foi falado novamente a eles da classificação dos triângulos quanto aos ângulos.

Nessa atividade, os alunos puderam colocar em prática o poder investigativo, pois, puderam observar que o Circuncentro pode ser externo ao triângulo e puderam constatar isso quando as três Mediatrizes se encontraram em um único ponto e sobretudo fora do triângulo. Assim como na pesquisa de Araujo (2013), os alunos perceberam que dependendo do triângulo este ponto poderia estar dentro ou fora do triângulo.

De acordo com Alves (2013):

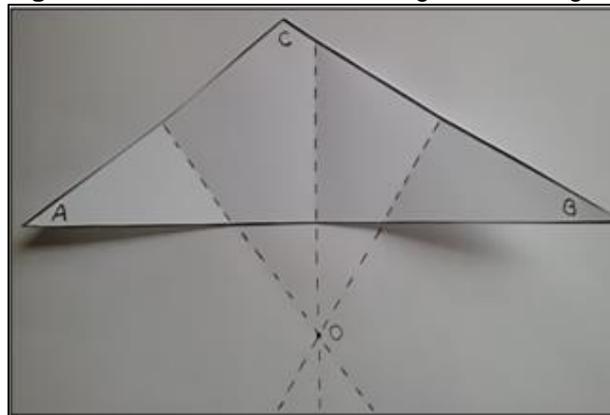
“A geometria é, provavelmente, a primeira matéria na qual os alunos têm a oportunidade de exercitar sua capacidade de argumentar matematicamente. Isso vem do fato de que é possível chegar a resultados profundos em geometria a partir de propriedades quando elas são descobertas pela construção e manipulação. Porém, os alunos não se sentem participantes das construções das demonstrações se os professores apresentam os resultados prontos, decorados, com uma sequência lógica já dada, deixando de lado o trabalho realizado por ele para chegar à solução”. (ALVES, 2013, p. 9)

Nesse sentido, os próprios alunos tiveram a oportunidade de refletir sobre suas construções, puderam descobrir através de suas construções e manipulações do material, e constatar que um Ponto Notável de um Triângulo também pode ser externo ao triângulo.

Depois que os mesmos encontraram os pontos de encontro, foi explicado a eles que dependendo do triângulo o Circuncentro terá uma posição definida. Na **atividade 1**, foi utilizado um triângulo acutângulo e por isso o ponto foi interno ao triângulo e na **atividade 2**, o Circuncentro é externo, pois o triângulo utilizado na atividade foi um triângulo obtusângulo. Esse foi o motivo pelo qual não foi especificado a eles o tipo de triângulo que estavam utilizando na atividade, para que os mesmos pudessem refletir sobre os resultados encontrados tanto na **atividade 1** quanto na **atividade 2** e com isso comparar os resultados, assimilando os conceitos envolvidos nas duas atividades.

Podemos observar o resultado final obtido com as Dobraduras a partir da Figura 3.4, na qual o ponto **O**, é o **Circuncentro** do triângulo obtusângulo.

Figura 3.4 – Circuncentro do triângulo obtusângulo



Na **Atividade 3: Encontrando o Incentro utilizando um triângulo retângulo**, os alunos foram solicitados a encontrar a Bissetriz Interna relativa a um dos lados do triângulo fazendo com que dois lados do triângulo coincidissem (Figura 2.9). A dobra feita pelos alunos determinou um segmento que divide o ângulo do vértice em dois ângulos congruentes. Concluiu-se que esse segmento é uma das Bissetrizes Interna do triângulo, (Figura 2.10).

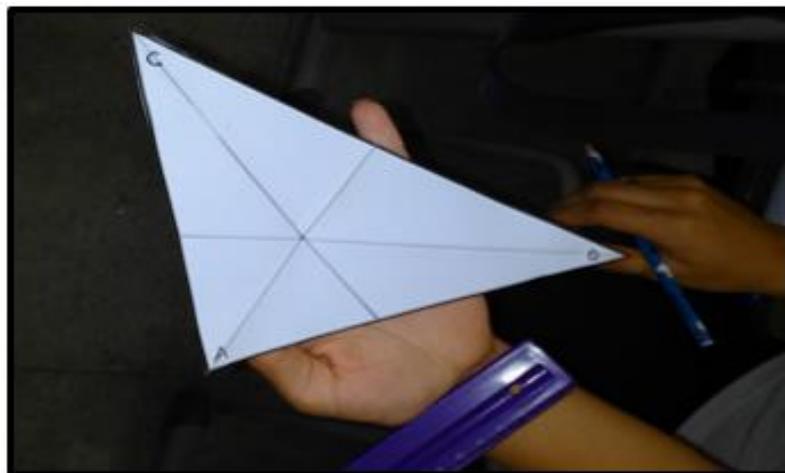
Nessa atividade, assim como nas atividades anteriores, os alunos tiveram a oportunidade de entender o conceito de ângulo para assim compreender o que é

Bissetriz de um triângulo. Com essa atividade os mesmos puderam visualizar esse conceito a partir do próprio triângulo entregue a eles.

Depois de realizarem os primeiros passos da atividade (Figuras 2.9 e 2.10), e de terem encontrado então uma das bissetrizes, foi solicitado aos alunos que construíssem as outras duas bissetrizes do referido triângulo e foi observado que alguns alunos conseguiram compreender e realizar os passos seguintes com bons resultados. Os que não conseguiram foram orientados a rever a dobra que realizaram nas Figuras 2.9 e 2.10 para verificar o que foi feito. Feito isso então puderam realizar os passos seguintes. Com isso foram questionados se as três bissetrizes se encontravam em um ponto e se o mesmo ficou interno ao triângulo. Alguns conseguiram realizar a atividade sem muitas dificuldades e responderam que as bissetrizes se encontraram no mesmo ponto.

Na Figura 3.5 seguinte, o aluno C após a construção das Bissetrizes Internas do triângulo retângulo e seus encontros através de Dobraduras.

Figura 3.5 – Aluno C encontrando Bissetrizes Internas e o Incentro



Os que não conseguiram encontrar foram orientados a refletir sobre suas Dobraduras e foi possível constatar que durante a construção não fizeram os lados de seus triângulos coincidirem apropriadamente. Essa dificuldade também foi encontrada na pesquisa realizada por Araújo (2015). De acordo com o autor, “... alguns não conseguiram encontrar o ponto comum as três bissetrizes porque durante a construção não fizeram os lados que formam o ângulo coincidirem” (ARAÚJO, 2015, p. 64). Portanto, a partir de correções os alunos seguiram com a atividade.

Assim, depois que encontraram os pontos de encontro das Bissetrizes Internas, foi explicado a eles que o ponto encontrado é chamado de **Incentro** pelo fato de ser o centro da circunferência inscrita no triângulo, e que este ponto é sempre interno ao triângulo.

Alguns dos alunos relataram que conseguiram entender esses conceitos utilizando as Dobraduras e aprenderam de maneira divertida. Essa atividade foi a atividade mais simples de ser realizada até então. A maioria da turma conseguiu realizar sem muitas dificuldades. Mas no início muitos não lembravam o que era ângulo de um triângulo e com algumas explicações utilizando as Dobraduras puderam lembrar, com a utilização de suas próprias construções.

Podemos observar o resultado final obtido com as Dobraduras a partir da Figura 3.6 seguinte, onde o ponto **I**, é o **Incentro** do triângulo retângulo.

Figura 3.6 – Incentro do triângulo retângulo



Na **Atividade 4: Encontrando o Baricentro utilizando um triângulo acutângulo**, os alunos foram solicitados a encontrar o ponto médio do lado do triângulo (Figura 2.12), além de traçar uma dobra de modo que partisse de um dos vértices e passasse pelo ponto médio do lado oposto. A dobra feita pelos alunos determinou um segmento de reta. Concluiu-se que esse segmento é uma das Medianas do triângulo, (Figura 2.13).

Os alunos não tiveram dificuldade com as dobraduras e em identificar na dobra o ponto médio do lado do triângulo, pois este fora um passo já realizado nas **Atividades 1 e 2**. O problema foi traçar a Mediana (Figura 2.13), pois alguns alunos não lembravam do conceito de Mediana. Em nossa investigação, para que os alunos pudessem desenvolver a atividade, ressaltamos o conceito, assim como Pereira

(2014, p.63) sugere ao afirmar que “o professor deve ressaltar os conceitos sempre que tiver oportunidade para que o aluno tenha sempre os mesmos na memória”. A partir dessa intervenção, os alunos tiveram a oportunidade de relembrar o conceito para desenvolver a atividade.

Outros não conseguiam encontrar uma das Medianas porque no momento de fazer as dobras muitas vezes realizavam a dobradura um pouco fora do lugar, não passando pelo ponto médio. Esta perspectiva foi útil aos alunos na medida em que os fez perceber que quando as medianas não se encontravam em um único ponto, isto se devia a falhas na execução das dobraduras. Assim, eram solicitados a realizar novas dobraduras na busca de obter os segmentos corretos.

Com alguns alunos foi possível observar a confusão entre os conceitos de Mediatriz e Mediana. Esta confusão também já foi diagnosticada na pesquisa de Pereira (2014). Dos quatorze alunos sujeitos de sua pesquisa, 28,6% confundiram Mediana, Mediatriz e Bissetriz.

Das três atividades foi a que os alunos mais sentiram dificuldade em realizar, pois esta exigia passos a mais que as **atividades 1, 2 e 3**. Muitos queriam fazer o mesmo procedimento que fizeram para encontrar o **Circuncentro (Atividade 1 e 2)**, pois as atividades eram um pouco parecidas e isso acabou causando alguma confusão, pois os alunos não se atentavam ao conceito de cada uma das atividades.

Por fim, os alunos encontraram a três Medianas e novamente foram questionados se elas se encontravam em um único ponto. Alguns alunos relataram que as Medianas se encontraram no mesmo ponto. Na pesquisa realizada por Pereira (2014, p. 64), dos quatorze alunos, 64,3% destes alunos, as suas Medianas se encontraram num mesmo ponto.

Assim, como na pesquisa de Araújo (2015), alguns alunos encontraram dificuldades de dobrar o papel de forma precisa, influenciando na não identificação do ponto de encontro das Medianas. Mas segundo o autor, “...eles conseguiram encontrar o erro durante o processo de dobrar o papel”. Assim também em nossa atividade, os mesmos conseguiram encontrar os erros em suas dobras e isso possibilitou que os motivasse a seguir com a tarefa até conseguir realizá-la.

Portanto, apesar de ser mais trabalhosa em relação às atividades anteriores, mostrou-se bem resistente as dificuldades em relação aos procedimentos e, diagnosticadas as dúvidas e sanadas algumas das dificuldades, a maioria encontrou o Baricentro de seu respectivo triângulo.

Por fim, foi reforçado a eles que aquele ponto de encontro das Medianas é chamado de **Baricentro**. Foi explicado que o Baricentro é o centro de gravidade do triângulo.

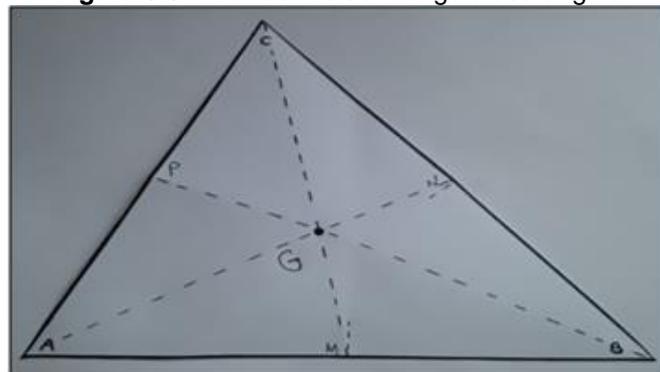
Na Figura 3.7, o aluno D após a construção das Medianas do triângulo acutângulo e seus encontros através de Dobraduras.

Figura 3.7: Realização das Medianas e Baricentro



Podemos observar o resultado final obtido com as Dobraduras a partir da Figura 3.8, onde o ponto **G**, é o **Baricentro** do triângulo retângulo.

Figura 3.8 – Baricentro do triângulo acutângulo



Na **Atividade 5: Encontrando o Ortocentro utilizando um triângulo acutângulo**, os alunos foram solicitados a encontrar a Altura referente a um dos lados do triângulo, fazendo a dobra passar por um dos vértices de modo que as duas semirretas originadas coincidisse (Figura 2.16). A dobra feita pelos alunos

determinou um segmento perpendicular ao referido lado do triângulo. Concluiu-se que esse segmento é uma das Alturas do triângulo, (Figura 2.17).

Nos primeiros passos das Figuras 2.16 e 2.17, respectivamente, os alunos deveriam construir uma das Alturas de um triângulo utilizando a metodologia proposta. Encontrada então uma das Alturas, foi solicitado aos alunos que encontrassem as demais. Depois de realizar os primeiros passos da atividade, foi observado que alguns alunos conseguiram compreender e realizar os passos seguintes (Figura 2.18). Os que não conseguiram foram orientados a rever as dobras que realizaram anteriormente (Figuras 2.16 e 2.17) para verificar o que foi feito e assim questionados se realizaram os passos corretamente, e com isso puderam desenvolver a construção da Altura relativa a um dos lados do triângulo, e feito isso então puderam realizar também os passos seguintes.

Os alunos foram questionados se as três Alturas se encontraram em um ponto e em que posição referente ao triângulo ficou este ponto. A maioria respondeu que as Alturas se encontraram no mesmo ponto. Como alguns alunos não conseguiram encontrar tal ponto, estes foram então orientados a verificar novamente suas Dobraduras, o que fez com que eles percebessem que o fato ocorreu devido a pequenos descuidos na realização destas dobras. Alguns, por exemplo, não conseguiram realizar o primeiro passo (Figura 2.16) de maneira adequada e, ao dobrar o papel, as duas retas originadas não coincidiram. Alguns alunos encontraram dificuldade em realizar essa atividade, mas não tiveram muitas dificuldades como as atividades desenvolvidas anteriormente. Esta foi a atividade mais simples de ser realizada pelos alunos, pois foi a que eles tiveram mais facilidade, somente alguns alunos solicitaram orientação para realizar a atividade.

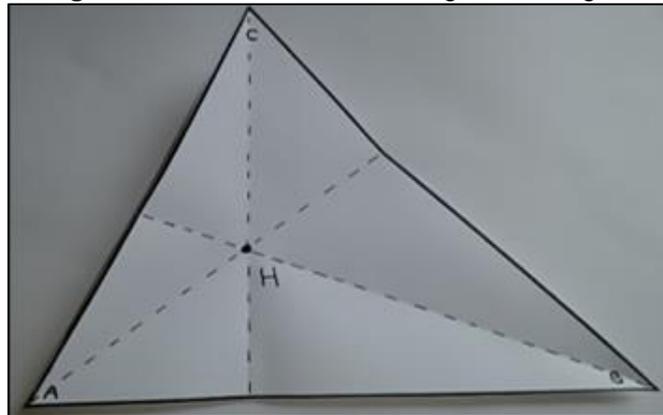
Na Figura 3.9, o aluno E encontrando o ponto **H**, o **Ortocentro**, o ponto de encontro das Alturas do triângulo acutângulo através de Dobraduras.

Figura 3.9 – Aluno C encontrando o ponto **H**, o Ortocentro



Podemos observar o resultado final obtido com as Dobraduras a partir da Figura 3.10 seguinte, na qual o ponto **H** é o **Ortocentro** do triângulo acutângulo.

Figura 3.10 – Ortocentro do triângulo acutângulo



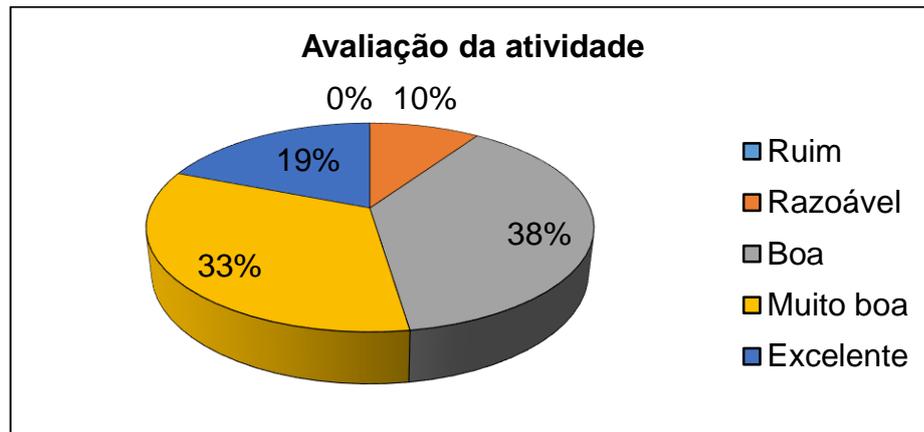
3.2 Avaliação e Considerações Gerais dos Alunos a Respeito da Atividade

A partir da aplicação de um questionário semiestruturado (Anexo 2), foi possível obter um *feedback* dos sujeitos da pesquisa a respeito da atividade desenvolvida.

Como já mencionamos, essa pesquisa foi realizada com uma turma do 3º ano do Ensino Médio, com 21 alunos de uma Escola da Rede Pública de Santarém, no Estado do Pará. A cada aluno foi atribuída uma letra para suas identificações, já que os mesmos não poderiam ser identificados. Os sujeitos da pesquisa, os alunos, foram identificados como: A, B, C, D, ...

A seguir, temos a Figura 3.11, que mostra a avaliação dos alunos sobre a atividade desenvolvida.

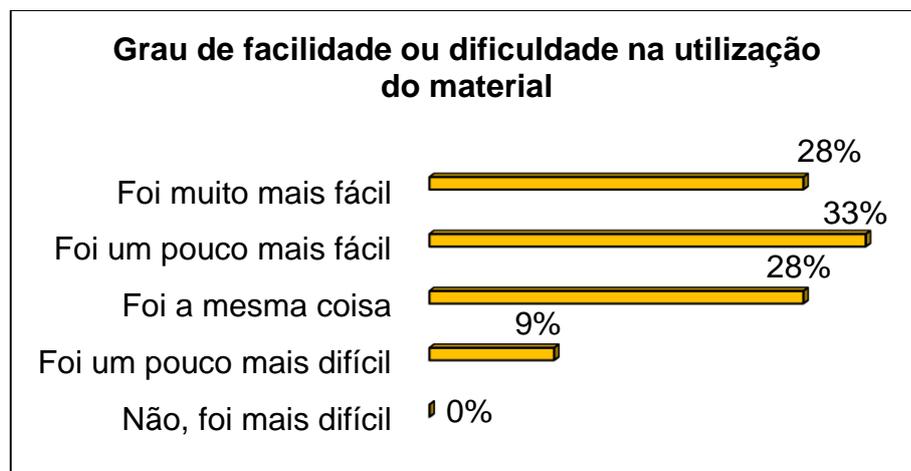
Figura 3.11 – A avaliação dos alunos quanto a atividade com dobraduras



Portanto, como podemos observar na Figura 3.11, os dados mostram que dos 21 alunos 0% consideraram a atividade Ruim, 10% Razoável, 38% Boa, 33% Muito boa e 19% excelente. Observa-se que há um percentual considerável na avaliação Boa e Muito boa. Isso mostra que as atividades desenvolvidas envolvendo as Dobraduras a qual os alunos participaram foi bem aceita. Com esses dados, podemos concluir também, que a maioria dos alunos acredita que as atividades envolvendo as dobraduras podem ser utilizadas nas aulas de Geometria.

Na Figura 3.12, temos, do ponto de vista dos alunos, a relação entre o material proposto e a aula tradicional, ou seja, se para os alunos foi mais fácil aprender utilizando o material proposto do que na aula tradicional.

Figura 3.12 – Grau de facilidade ou dificuldade na utilização do material

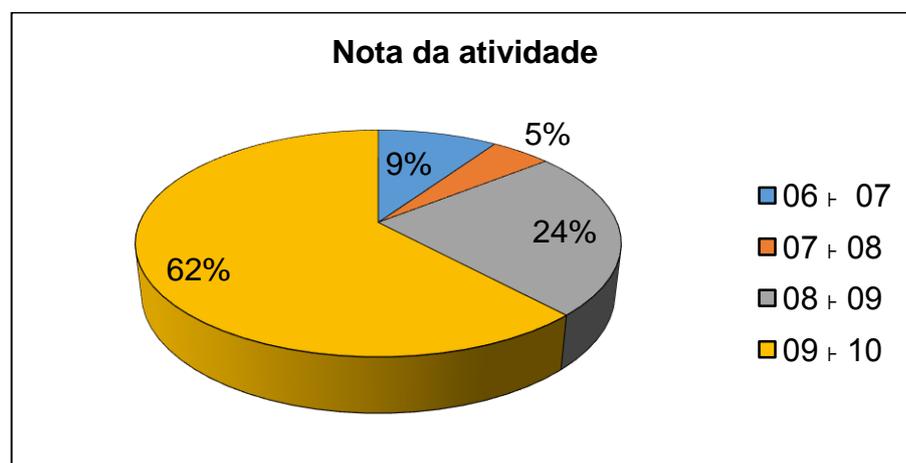


Os dados apresentados na Figura 3.12 mostram que 28% dos 21 alunos disseram que foi muito mais fácil, foi um pouco mais fácil 33%, foi a mesma coisa 28%,

foi um pouco mais difícil 9% e não foi mais difícil 0%. Portanto esses dados mostram que muitos alunos acreditam que a atividade utilizando o material proposto foi muito mais fácil do que em uma aula tradicional. Portanto, do ponto de vista dos alunos, o material facilitou suas aprendizagem em comparação de como é visto de maneira tradicional.

Na figura 3.13, temos a avaliação em relação ao desenvolvimento das atividades de uma maneira geral.

Figura 3.13 – Avaliação da Atividade



Como podemos observar os dados da Figura 3.13, revelam que 9% concederam nota de 06 + 07, 5% de 07 + 08, 24% de 08 + 09 e 62% de 09 + 10. Os dados mostram que a maioria dos alunos, os 62% deram nota de 9 a 10, mostrando assim que de uma maneira geral a avaliação feita pelos alunos foi positiva, mostrando que a metodologia utilizada produziu um efeito aceitável entre os participantes.

Os alunos apontaram vantagens e desvantagens na utilização de dobraduras no aprendizado dos Pontos Notáveis de um triângulo. Dentre as **vantagens** temos: Consideraram a experiência muito interessante; aprenderam a realizar a atividade passo-a-passo e isso os ajudou aprender de maneira agradável e mais rápido; indicaram que o aluno fica mais atento à explicação do professor; as atividades possibilitaram ver os erros e acertos e isso trouxe melhorias para o aprendizado em sala de aula; e relataram ainda que utilizando as Dobraduras foi muito mais fácil aprender.

Dentre as **desvantagens** citadas podemos destacar: Alguns alunos relataram que tiveram dificuldades com a realização das dobraduras; e apenas um aluno relatou que poderia aprofundar em outros assuntos que julgou serem mais

importante do que estudar os Pontos Notáveis de um Triângulo. Podemos destacar o obstáculo didático encontrado no momento de definir um ponto notável fora do triângulo, pois os alunos confundiram a **atividade 2** com a **atividade 1** ao generalizar o resultado obtido da primeira atividade (**atividade 1**) na segunda atividade (**atividade 2**).

De acordo com os alunos os fatores em que o material facilitou a aprendizagem, os mesmos consideraram uma aula interessante com as dinâmicas usadas durante as aulas; facilitou a aprendizagem quando foram realizadas as dobraduras no papel; ajudou de forma prática no desenvolvimento das atividades; foi possível entender um pouco os conceitos, ajudou na forma de entender o assunto; de poder visualizar onde os pontos se encontraram; e foi mais fácil pra entender. Relataram suas participações nas atividades desenvolvidas como boa, excelentes, pois conseguiram tirar suas dúvidas, tiveram vontade de aprender, foi uma atividade boa para eles e para seus colegas, relataram que faltou um pouco de explicação, ou seja, outras aulas para desenvolver as atividades.

Quando questionados se acreditam que as atividades, auxiliaram o seu entendimento em relação ao conteúdo desenvolvido, os alunos responderam que: foge da rotina; foi um bom meio de aprendizagem; facilitou o entendimento em achar os pontos de encontro; é uma forma de mostrar a Geometria que facilita a aprendizagem, aprenderam coisas que não sabiam. O **aluno J** afirmou: “Sim, pois facilita na realização de aprender o conteúdo de forma dinâmica”. Nessa mesma perspectiva o **aluno K** escreveu: “Sim. Ajudou bastante no meu entendimento de como achar os pontos ...”. Com base nas respostas desses alunos podemos concluir que, para eles, a metodologia utilizada facilitou a aprendizagem.

Das sugestões para melhorar o trabalho a maioria respondeu que não tinha sugestões e dos que responderam citamos a afirmação do **aluno T**: “As aulas poderiam ser mais práticas como essa”. Outros afirmaram ainda que o trabalho realizado foi bom e que todas as atividades foram boas.

Os alunos foram questionados se gostam de Matemática, em especial Geometria. A maioria respondeu que depende do conteúdo e que possuem muitas dificuldades em relação a Matemática, mas relataram que preferem aulas mais dinâmicas, pois melhoram bastante o aprendizado. Esse resultado mostra que poderíamos aliar a Geometria das Dobraduras com outras metodologias, aliando ao uso de tecnologias, já que em uma turma temos alunos de todos os estilos.

Dos 21 alunos, 18 (85,71%) responderam que gostariam que nas aulas de Geometria tivesse mais dinamismo entre as aulas, pois acreditam que é muito melhor para aprender. Os alunos responderam que quando é algo interessante o aluno fica mais animado, melhora o entendimento do conteúdo; uma atividade dinâmica possibilita aos alunos saírem um pouco da rotina que estão acostumados todos os dias. Três alunos (14,28%) acreditam que não, mostrando que preferem uma aula tradicional.

As atividades realizadas com a metodologia das Dobraduras mostrou-se útil, pois contribuiu para chamar a atenção do aluno, para que o mesmo pudesse ver na prática, visualizando suas construções que a Matemática é muito interessante, deixando um pouco a questão de que a mesma é uma disciplina difícil.

Portanto, neste capítulo foram apresentados os resultados obtidos em nossa investigação e no próximo e último capítulo serão apresentados algumas conclusões e considerações finais.

Capítulo 4

Algumas Conclusões e Considerações Finais

Neste capítulo apresentaremos um breve balanço dos principais resultados da pesquisa, além de perspectivas/sugestões para trabalhos futuros.

A presente investigação foi realizada em uma turma do 3º ano do Ensino Médio, na Escola Frei Othmar situada no Município de Santarém, Estado do Pará. O objetivo dessa pesquisa foi propor, aplicar e analisar uma metodologia de ensino do conteúdo Pontos Notáveis de um Triângulo, a partir da utilização de Dobraduras de papel como meio de construção de conceitos. Nesse sentido, as atividades desenvolvidas tinham como principal objetivo desenvolver os conceitos que envolvem Geometria Plana, notadamente os Pontos Notáveis do Triângulo, através das construções feitas com as Dobraduras nos triângulos.

A escolha do tema se deu pelo interesse em estudar Geometria Plana e buscar uma atividade diferenciada que pudesse auxiliar na aprendizagem dos alunos da Educação Básica.

Assim, foram desenvolvidas cinco atividades sobre os Pontos Notáveis de um Triângulo: Circuncentro, Incentro, Baricentro e Ortocentro. Realizamos duas atividades envolvendo o Circuncentro, uma atividade com triângulo acutângulo e outra com triângulo obtusângulo; uma atividade com o Incentro utilizando triângulo retângulo; uma outra atividade com o Baricentro e mais outra atividade com o Ortocentro utilizando triângulo acutângulo. Essa pesquisa foi desenvolvida nos meses de agosto e setembro de 2016.

Depois da construção do material aplicamos as atividades com os alunos para que os mesmos pudessem construir os conceitos e no final foi entregue um questionário (**Anexo 2**) para sabermos suas concepções sobre as atividades realizadas.

Tendo como referência os participantes da pesquisa, as imagens, as construções, as observações e anotações feitas pela professora-pesquisadora, é possível perceber algumas potencialidades das Dobraduras. Primeiramente, podemos destacar que o seu uso possibilita, ao nosso ver, o favorecimento do

processo de aprendizagem dos Pontos Notáveis de um Triângulo. A utilização dessa metodologia diversificada como meio de construir conceitos geométricos faz-se de maneira prazerosa, uma vez que propõe aos alunos um caráter desafiador, estimulando os sujeitos a desenvolverem as atividades propostas.

Também proporciona a interação de todos os envolvidos. E desperta a solidariedade entre os colegas, pois estimula um ambiente colaborativo e participativo. Em relação a aceitação de realizar as atividades os alunos não mostraram resistência, chegando a concluir que as atividades foram positivas quanto ao aproveitamento do conteúdo, pois os mesmos se dispuseram a aprender, se mostrando interessados na aplicação dessa metodologia de ensino.

Uma das vantagens em utilizar as dobraduras diz respeito ao erro, ou seja, a relação do erro com a utilização do material. A utilização das Dobraduras possibilita a identificação de erros conceituais, na medida em que as dobras não se encontram no mesmo ponto. Isso é uma perspectiva interessante do ponto de vista da aprendizagem, pois possibilita ao aluno identificar seu erro e refazer novamente os passos da atividade para assim realizar corretamente. Nesse sentido, de alguma forma o aluno também aprende com o seu erro.

Os alunos em geral demonstraram atitudes positivas frente à atividade e ao conteúdo. Podemos destacar tal fato em algumas falas: “a atividade foi boa por que fiz alguma coisa, eu nunca faço nada”. Quando as atividades acabaram uma das alunas falou “quando a aula é legal acaba logo”. Outra: “eu gostei da atividade, quando teremos outra?”. Achamos interessante relatar essas falas, pois mostram claramente que gostaram do que viram e viveram naquele dia em sua sala de aula.

É importante ressaltar que uma atividade que traz dinamismo como esta, não deve necessariamente excluir a explicação do assunto de forma tradicional, mas trazê-la como um complemento, um apoio. Não seria eficaz aplicar a atividade antes de uma breve exposição de conteúdo, pois com a realização da atividade muitos alunos mostraram que encontraram os pontos justamente por causa da exposição apresentada anteriormente. Além disso pudemos perceber que somente com a explicação não seria possível fixar os conceitos, e uma boa alternativa seria mesclar a explicação com a atividade. Outro ponto que gostaríamos de destacar se refere ao baixo custo do material utilizado na atividade.

Dentre as dificuldades na realização de uma atividade com Dobraduras, destacamos os procedimentos realizados nas dobras de papel. Foi observado que

alguns dos alunos sentiram dificuldades em fazer as dobras no local apropriado. Também foi uma atividade um pouco movimentada, no início de cada atividade eles tinham muitas dúvidas em relação a sua realização, sempre confundiam com a atividade realizada anteriormente. Eles faziam muitas perguntas, o que mostrou que a atividade despertou o interesse deles em querer realizá-la.

Uma das dificuldades em aplicar essa metodologia, diz respeito ao tempo de aplicação, pois para possuir resultados mais significativos e para explorar mais conceitos envolvidos, precisaríamos de mais aulas.

Portanto, resumidamente, podemos concluir que a metodologia utilizada foi bem aceita pelos alunos, mostrando que uma metodologia inovadora como as Dobraduras desperta o interesse pelos alunos para aprenderem o conteúdo. Mostraram também que as Dobraduras mostrou-se útil como meio de construção de conceitos sobre os Pontos Notáveis de um triângulo, no sentido que os alunos puderam refletir sobre suas construções. Mostrou que uma atividade nova aos alunos desperta o interesse dos mesmos e os mesmos encararam como um desafio que devem superar. Foi verificado que os alunos tiveram mais dificuldades em relação como fazer as dobras no papel, pois os mesmos não lembravam dos conceitos envolvidos nas atividades e com a realização das mesmas puderam perceber. Isso foi possível por se tratar de uma atividade dinâmica, que requeria o questionamento dos mesmos.

Como forma de melhoria é importante ressaltar aqui, que o professor pode atentar para essas dificuldades encontradas, principalmente no que diz respeito às Dobraduras no papel e os conceitos relacionados aos Pontos Notáveis de um triângulo. Isso pode possibilitar que o ensino desses conceitos possam ser mais aproveitados, pois destacamos nesse trabalho alguns erros cometidos pelos alunos. Com isso o professor ao ensinar esse conteúdo pode focar nesses erros.

A seguir descrevemos algumas sugestões da aplicação de atividades envolvendo os Pontos Notáveis de um triângulo.

Para a realização das **atividades 1 e 2** utilizamos triângulo acutângulo e obtusângulo e no (**Anexo 1**) dessa pesquisa temos instruções e sugerimos a aplicabilidade dessa atividade para encontrar o Circuncentro utilizando triângulo retângulo.

Na **atividade 3**, que tinha por objetivo encontrar o Incentro realizamos apenas com triângulo retângulo e a **atividade 4**, que tinha por objetivo encontrar o

Baricentro realizamos apenas com triângulo acutângulo, deixamos como sugestão também a aplicação das atividades utilizando triângulos retângulo, acutângulo e obtusângulo para visualizar e comprovar que estes são pontos sempre externos ao triângulo.

E na **atividade 5** que tinha por objetivo encontrar o Ortocentro do triângulo realizamos com triângulo acutângulo e também damos instruções e sugestões de sua aplicabilidade com triângulo retângulo (**Anexo 1**) e sugerimos sua aplicação também com triângulo obtusângulo. Em resumo, sugerimos a aplicação das atividades envolvendo os Pontos Notáveis de um Triângulo com triângulo retângulo, acutângulo e obtusângulo em cada Ponto Notável, ou seja, encontrar o Circuncentro, Incentro, Baricentro e Ortocentro utilizando triângulo retângulo, acutângulo e obtusângulo.

Portanto, essas foram algumas conclusões da pesquisa e também algumas sugestões da aplicação de atividades envolvendo os Pontos Notáveis de um Triângulo.

Referências Bibliográficas

- ARAUJO, Marcelo Henrique de. *Explorando Mediatrizes, Medianas, Baricentro e Circuncentro, Utilizando Dobraduras: Uma Proposta de Ensino*. 2013. 46f. Monografia (Licenciatura Plena em Matemática) – Instituto Municipal de Ensino Superior de Assis, Fundação Educacional do Município de Assis, Assis-SP.
- ARAÚJO, Osmar Rodrigues de. *Contribuições Pedagógicas do Ensino de Pontos Notáveis de um Triângulo por meio do Origami*. 2015. 101f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão, Universidade Federal de Goiás, Catalão.
- ALVES, Alberto Cunha. *O Geogebra como ferramenta didática no ensino de Geometria Euclidiana*. 2013. 94f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Terezinha.
- BARRETO, Carlos Alberto. *A Geometria do Origami como ferramenta para o ensino da Geometria euclidiana na educação básica*. 2013. 85f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristovão.
- BRAZ, Lúcia Helena Costa. *Uma abordagem didática da geometria dos pontos notáveis de triângulos utilizando origami*. 2013. 76f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Lavras, Lavras-MG.
- CARARO, Elhane de Fatima Fritsch. *A Arte das dobraduras: Uma contribuição para o Ensino da Geometria. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE (Produções Didático-Pedagógicas)*. v. II. 2013. Unioste, Francisco Beltrão.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar-Geometria Plana*. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2005. 456p. v.9.
- ESCOLA FREI OTHMAR. *Projeto Político Pedagógico*. Santarém-Pá: Secretaria Executiva de Educação. 2012. 33p.
- FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sérgio. *Investigação em Educação Matemática: Percursos teóricos e metodológicos*. 3ª ed. rev. Campinas, SP. Autores Associados, 2009. (Coleção formação de professores).
- IBRAIM, Ester Souza Ribeiro; SILVA, Tieli Caetano Paes. *O uso de dobraduras e Origami no ensino de Geometria Plana*. 2011. 107f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campos dos Goytacazes-RJ.
- LEROY, Luciana. *Aprendendo Geometria com Origami*. 2010. 79f. Monografia (Especialista em Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte- MG.

MONTEIRO, Liliana Cristina Nogueira. *Origami: História de uma Geometria Axiomática*. 2008. 111f. Dissertação (Mestrado em Matemática para o ensino) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa.

MATUMOTO, Luiza Takako; NASCIMENTO, Adriana Vieira do. *Trabalhando a Geometria por meio do Origami. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense*. v. I. 2012.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática; uma análise da influência francesa*. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011. 136 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 3).

PEREIRA, Aguinaldo Borba. *Explorando elementos dos triângulos em um ambiente informático de ensino*. 2014. 124f. Dissertação (Mestrado no Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

SILVA, Katiana Maria da. *Investigações geométricas por alunos sobre os pontos notáveis do triângulo apoiadas pelo origami instrumentos de desenho geométrico e o geogebra*. 2013. 81f. Monografia (Licenciatura Plena em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande-PB.

Anexos

Anexo 1: Sugestão de atividade

Sugestão da aplicação da atividade para encontrar o Circuncentro e o Ortocentro utilizando um triângulo retângulo.

Atividade 1: Encontrando o Circuncentro utilizando um triângulo retângulo

1º passo: Com posse do recorte de um triângulo retângulo em mãos, faça uma dobra de modo a coincidir dois vértices quaisquer como na figura abaixo.



Figura 1: 1º passo

2º passo: Desdobre e faça um traço com caneta na dobra. A dobra determinada é a mediatriz do lado do triângulo.

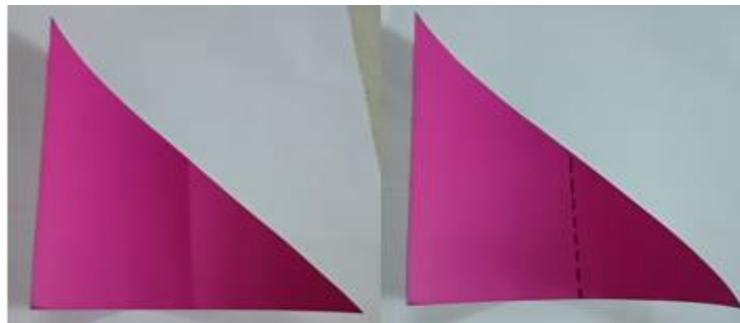


Figura 2: 2º passo

3º passo: Repita os passos anteriores para os outros dois lados do triângulo, e obtenha os resultados ilustrados abaixo:

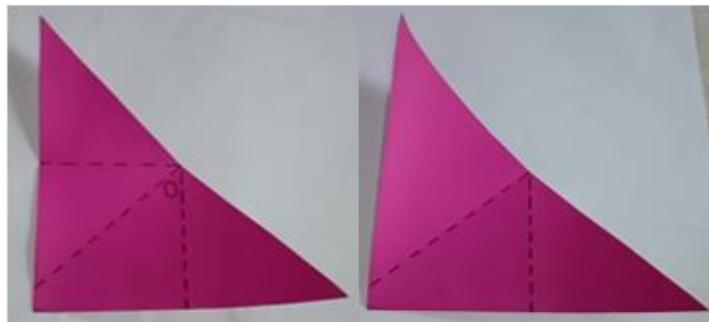


Figura 3: 3º passo

Observe que, neste caso, as três mediatrizes também se intersectam em um único ponto, o Circuncentro do triângulo, mas nesse caso o Circuncentro ponto médio da hipotenusa.

Atividade 2: Encontrando o Ortocentro utilizando um triângulo retângulo

1º passo: Com posse do recorte de um triângulo acutângulo ABC em mãos, faça uma dobra que passe pelo ponto A e de modo que as duas semirretas originadas em BC coincidam.

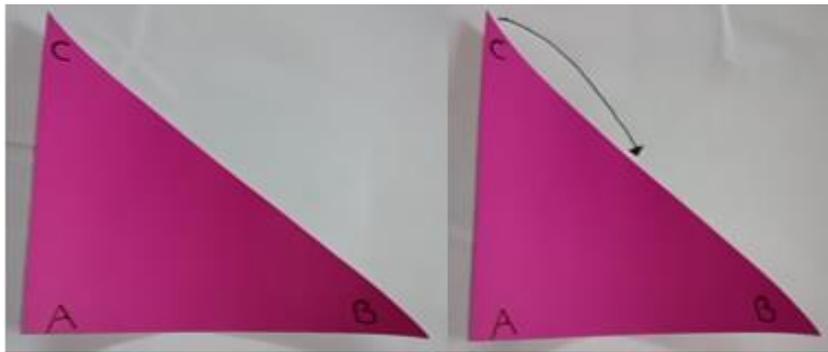


Figura 1: 1º passo

2º passo: Desdobre e faça um traço com caneta na dobra. Observe que a dobra determinada é perpendicular à BC e que passa pelo vértice C. Esta dobra corresponde à altura relativa ao lado BC.

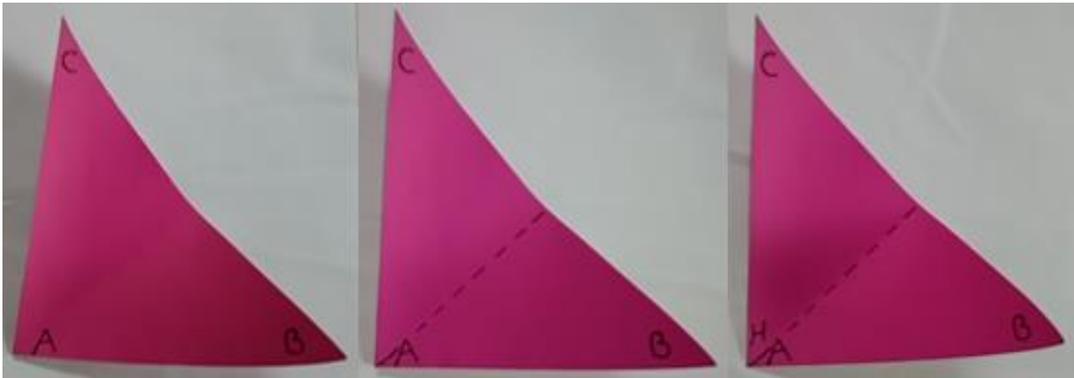


Figura 2: 2º passo

Podemos observar na figura acima que a partir da definição de altura e pelo fato do triângulo ser retângulo que a altura relativa aos lados AB é o lado AC e vice-versa, pois os catetos são as outras alturas. E neste caso, o Ortocentro é o vértice do ângulo reto.

Esta atividade teve como referência a pesquisa de Braz (2013).

Anexo 2: Questionário

Questionário

Universidade Federal do Oeste do Pará-Ufopa
 Instituto de Ciências da Educação- Iced
 Licenciatura Integrada em Matemática e Física

Nome (a primeira letra do seu nome): _____

Idade: _____

Sexo: F () M () Série: _____

Obs: não é necessário colocar seu nome

Questionário sobre a atividade

1) Qual a avaliação que você faz da atividade com dobraduras?

- a) Ruim
- b) Razoável
- c) Boa
- d) Muito Boa
- e) Excelente

2) Para você, foi mais fácil aprender utilizando o material proposto do que na aula tradicional?

- a) Não, foi mais difícil
- b) Foi um pouco mais difícil
- c) Foi a mesma coisa
- d) Foi um pouco mais Fácil
- e) Foi muito mais fácil

3) Cite, na sua visão, as vantagens e desvantagens da utilização de dobraduras no aprendizado dos pontos notáveis do triângulo?

4) Elencar as principais dificuldades no trabalho com dobraduras?

5) Elencar os fatores em que o material facilitou a aprendizagem.

6) Como você avalia a sua participação em relação as atividades desenvolvidas?

7) Você acredita que a forma como as atividades foram realizadas, auxiliaram o seu entendimento em relação ao conteúdo desenvolvido? Se sim, explique como isso aconteceu.

8) Você teria alguma sugestão, que acredita que possa contribuir para melhorar esse trabalho?

9) Você gosta de estudar Matemática, em especial Geometria?

Sim () Não () Depende do conteúdo ()

Justifique sua resposta:

10) Você teria alguma sugestão de como gostaria que fossem as aulas de Matemática?

Sim () Não ()

Se sim, diga qual?

11) De uma maneira geral, qual a nota de 0 a 10 você daria sobre a atividade desenvolvida?

12) Você gostaria que as aulas de matemática tivesse mais dinamismo entre as aula?
