Universidade Federal do Oeste do Pará

Instituto de Ciências da Educação

Programa de Ciências Exatas

Curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física

Brenno da Rocha Lages

Uma Simplificação do Problema de Apolônio em Construções Dinâmicas

Santarém

2022

Brenno da Rocha Lages

Uma Simplificação do Problema de Apolônio em Construções Dinâmicas

Monografia apresentado ao curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, do Programa de Ciências Exatas, do Instituto de Ciências da Educação, da Universidade Federal do Oeste do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado.

Orientador: Prof. Me. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Santarém

2022

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas (SIBI) da UFOPACatalogação de Publicação na Fonte. UFOPA - Biblioteca Unidade Rondon

Lages, Brenno da Rocha.
Uma Simplificação do Problema de Apolônio em Construções Dinâmicas / Brenno da Rocha Lages. - Santarém, 2022.
37f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia) - Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciência da Educação, Programa de Ciências Exatas.
Orientador: Aroldo Eduardo Athias Rodrigues.

1. Problema de Apolônio. 2. GeoGebra. 3. Tangência. I. Rodrigues, Aroldo Eduardo Athias. II. Título.

UFOPA/Sistema Integrado de Bibliotecas CDD 23 ed.

Elaborado por Bárbara Costa - CRB-15/806

Brenno da Rocha Lages

Uma Simplificação do Problema de Apolônio em Construções Dinâmicas

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, do Programa de Ciências Exatas, do Instituto de Ciências da Educação, da Universidade Federal do Oeste do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado.

Aprovada em 02 de fevereiro de 2022.
Banca Examinadora:

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Prof. Me. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues (Orientador)
Programa de Ciências Exatas – UFOPA

Cassio André Sousa da Silva

Prof. Dr. Cassio André Sousa da Silva
Instituto de Ciências da Educação - UFOPA

Josecley Fialho Góes

Prof. Dr. Josecley Fialho Góes
Instituto de Engenharia e Geociências – UFOPA

Santarém 2022

Dedico este trabalho a todos que acreditaram em mim e me apoiaram, especialmente minha companheira, Juliana Cristina Silva da Silva pelo incentivo, apoio e carinho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Jose Hildeberto de Oliveira Lages e Valdely da Rocha Lages, pelos seus ensinamentos e esforços que me tornaram o ser humano que sou hoje.

A minha companheira e melhor amiga, Juliana Cristina, por estar ao meu lado sempre me apoiando e me incentivando a ser a melhor versão de mim.

Ao meu orientador, Aroldo Eduardo Athias Rodrigues, pela paciência e confiança na confecção deste trabalho.

Ao professor Josecley Fialho Góes, por nos fornecer o template deste documento LaTeX.

Ao professor William Vieira Gonçalves que nos apresentou a possibilidade do uso dos gifs animados neste trabalho.

A todos os professores que conheci ao longo de meus anos de estudo, que de diversas maneiras me inspiraram sempre a dar o melhor de mim, em especial, ao professor Aroldo Athias, que tenho como exemplo de profissional que quero me tornar.

E a todos os meus amigos, em especial, Isabel Martins, Marlon Castro e William Martins pela amizade e por todos os momentos de descontração.

“A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”

Johannes Kepler

RESUMO

Neste trabalho apresentam-se resoluções de problemas envolvendo tangência, mais especificamente, os casos envolvendo apenas pontos e retas no problema de Apolônio, construídas a partir do ambiente de geometria dinâmica GeoGebra, isto é, não foram abordados os casos que envolvem a circunferência como um dos objetos inciais da construção. Inicialmente foi feita uma pesquisa sobre a resolução de cada caso de forma individual. Notou-se que os trabalhos consultados utilizam figuras estáticas para explicar o passo a passo das soluções propostas e que o material sobre o assunto encontra-se disperso em diversos trabalhos, especialmente no que diz respeito a uma abordagem completa dos subcasos. Para tentar contribuir com o preenchimento desta lacuna inciou-se a produção de um livro virtual dinâmico na plataforma on-line do GeoGebra. Este livro dinâmico foi depois convertido no presente trabalho, sendo as construções reduzidas a gifs animados.

Palavras-chave: Problema de Apolônio. Ambiente de geometria dinâmica. GeoGebra. Tangência

ABSTRACT

In this work, solutions to problems involving tangency are presented, more specifically, the cases involving only points and lines in the Apollonius problem, built from the GeoGebra dynamic geometry environment, that is, cases involving the circumference as one of the initial objects of the construction were not addressed. Initially, a research was carried out on the resolution of each case individually. It was noted that the works consulted use static figures to explain the step by step of the proposed solutions and that the material on the subject is dispersed in several works, especially with regard to a complete approach to the sub-cases. To try to contribute to filling this gap, the production of a dynamic virtual book was started on the GeoGebra online platform. This dynamic book was later converted into the present work, the constructions being reduced to animated gifs.

Keywords: Apollonius' Problem. Dynamic geometry environment. GeoGebra. Tangency.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANIMAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta soluções de problemas de tangência utilizando construções dinâmicas feitas a partir do *software* GeoGebra, mais especificamente, as resoluções do problema de Apolônio, pela riqueza de conceitos que este abrange e pela diversidade construtiva do problema.

Apolônio foi um astrônomo e matemático que nasceu em Perga, no Sul da Ásia Menor, em 262 a.C. aproximadamente. Quando jovem foi para Alexandria estudar com os sucessores de Euclides, posteriormente visitou Pérgamo, no Oeste da Ásia Menor, onde havia uma universidade aos moldes da de Alexandria, para onde retornou e morreu por volta de 190 a.C (EVES, 2004).

Embora Apolônio fosse um notável astrônomo, sua fama se deve principalmente a obra Secções Cônicas, que possui cerca de 400 proposições distribuídas em oito livros, dos quais apenas os sete primeiros chegaram até nós. Graças a essa obra, ficou conhecido como "O Grande Geômetra". Ele teve uma vasta produção, da qual muito foi perdido, e tudo o que temos dela são as descrições feitas por Pappus de Alexandria no século IV e por alguns matemáticos árabes séculos mais tarde (EVES, 2004).

O tratado sobre tangências, dividido em dois volumes, é uma dessas obras das quais temos apenas a descrição feita por Pappus, e nesta descrição vemos o problema conhecido hoje como "Problema de Apolônio" e sua solução. Seu enunciado (BOYER, 1996) é o seguinte:

Dadas três coisas, cada uma das quais pode ser um ponto, uma reta ou um círculo, traçar um círculo que é tangente a cada uma das três coisas.

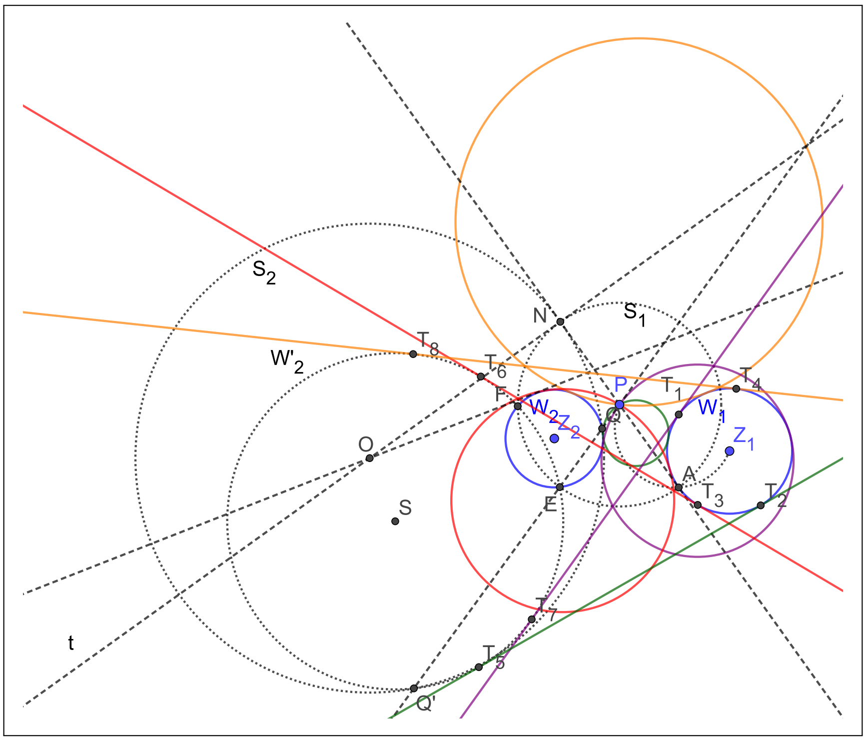
Esse problema envolve 10 casos, denominados a partir das letras iniciais dos elementos envolvidos em cada um deles (pontos, retas e círculos). Alguns casos são bastante simples, como os casos PPP e RRR, que aparecem em *Os Elementos*, de Euclides, até o mais difícil de todos, o caso CCC, que junto com o caso RRC ocupa todo o volume II do tratado. Os demais casos estão todos contidos no volume I. O caso CCC foi considerado um desafio pelos estudiosos dos séculos XVI e XVII, que achavam que o autor não o teria resolvido. Newton foi um dos que deram uma solução usando régua e compasso.

No enunciado do problema fica subentendido que "circunferência tangente a um ponto" significa "circunferência passando pelo ponto", ou que o ponto deve pertencer à circunferência, caso queiramos ser mais rigorosos ainda no uso da linguagem. Pensamos que esse pequeno "descuido intencional" se justifica pelo enorme ganho em termos de elegância para o enunciado.

Motivados pela riqueza de conceitos e diversidade das construções que o problema de Apolônio aborda em seus casos, procuramos saber mais sobre o tema e notamos que a utilização de figuras estáticas para explicar o passo a passo das soluções propostas traz consigo pelo menos duas dificuldades: uma é a grande quantidade de figuras necessárias para explicar todos os passos, o que torna o texto explicativo disperso e difícil de acompanhar; a outra consiste na ausência de representação visual para alguns passos, assim, visando contornar o primeiro problema, cria-se um novo. Pesquisando mais sobre o assunto, percebemos que há escassez de fontes que apresentem todas as diferentes configurações que cada caso pode vir a ter. Entretanto as soluções existem, mas estão dispersas em diversas fontes tais quais (BICUDO, 2009), (AMORIM, 2016) e (WAGNER; CARNEIRO, 2007) as quais foram consultadas por nós para o desenvolvimento das soluções apesentadas neste trabalho.

A poluição visual presente na Figura 1, que representa a solução de um dos subcasos do caso PCC (que não será abordado neste trabalho), é reveladora no que diz respeito a dificuldade que se pode ter ao tentar apresentar a solução do problema de Apolônio utilizando apenas figuras estáticas.

Figura 1 – Caso PCC



Legenda: Ilustração da solução de um dos subcasos do caso PCC.

Fonte: O autor, 2022.

Dessa forma tomamos como objetivo construir um material que contivesse as diferentes disposições que os objetos poderiam vir a ter em cada caso e suas respectivas soluções, de forma dinâmica, com a finalidade de facilitar a compreensão de cada construção.

Para atingir tal objetivo foi feita inicialmente uma pesquisa sobre a resolução de cada caso de forma individual, após a pesquisa iniciou-se a produção de um livro virtual dinâmico na plataforma on-line do GeoGebra com as resoluções dos casos em cada uma de suas respectivas configurações, listando os passos tomados para a construção e justificando estes passos ou a ausência de solução para o caso. Este livro dinâmico foi depois convertido no presente trabalho, sendo as construções reduzidas a gifs animados que rodam dentro do pdf editado em LaTeX. Contudo, hiperlinks que direcionam para o livro dinâmico estão presentes ao longo de todo trabalho.

Este trabalho foi pensado como um material para leitura digital, por esse motivo ele contém algumas ferramentas que não podem ser visualizadas em uma versão impressa, como as imagens do tipo gif animado que permitem ao leitor navegar pelos passos das resoluções de cada caso e os hiperlinks presentes em cada capítulo que levam aos casos referentes no livro virtual na plataforma on-line do GeoGebra. Além desses, disponibilizamos também o link para o livro completo:

<https://www.geogebra.org/m/y4yegryc>

Esse material amplia ainda mais as possibilidades apresentadas neste trabalho, visto que, através dos applets presentes no livro, é possível não apenas navegar pelos passos de construção, mas também se servir dos recursos dos ambientes de geometria dinâmica para manipular os objetos iniciais de cada caso e constatar que as construções propostas realmente produzem como resultado as circunferências procuradas.

Em se tratando de um trabalho de conclusão de curso de graduação e considerando as limitações de tempo para a realização do mesmo, optamos por abordar uma simplificação do problema de Apolônio ao invés do problema original. Assim, neste trabalho, o problema passa a ter o seguinte enunciado:

Dadas três coisas, cada uma das quais pode ser um ponto ou uma reta, traçar um círculo que é tangente a cada uma das três coisas.

Ou seja, excluímos do problema todos aqueles casos nos quais um dos elementos envolvidos fosse uma circunferência.

Este trabalho está estruturado de forma que cada capítulo aborda um caso diferente do problema de Apolônio (PPP, PPR, PRR e RRR) e cada uma das configurações possíveis para os objetos iniciais do problema (subscasos) constituem as seções destes capítulos. Os capítulos sempre se iniciam com a listagem dos subcasos, informando o número de soluções em cada um deles. A seguir, são apresentados, nos casos para os quais existe solução: a gif animada contendo o passo a passo da solução; a descrição do passo a passo; e a justificativa para essa solução. Nos casos em que não há solução, é apresentada apenas a justificativa para isso.

Esperamos que o leitor possa, através deste trabalho, não só apreciar a beleza do problema de Apolônio, como também a beleza dos desenvolvimentos tecnológicos aos quais este matemático jamais teve acesso e que foram utilizados aqui para facilitar nossa compreensão as soluções do problema.

2 CASO PPP

Neste capítulo, apresentamos o Caso PPP, que é considerado um dos mais fáceis e aparece no livro IV de *Os Elementos* de Euclides. Nele, são fornecidos três pontos distintos A, B e C e devemos encontrar o círculo que passa pelos três. Este caso só possui solução quando os três pontos não estão alinhados e esta solução consiste basicamente em encontrar o centro da circunferência procurada. Obviamente, quando os pontos pertencem a uma mesma reta, não é possível encontrar uma circunferência passando pelos mesmos. O leitor pode se certificar deste fato clicando aqui para consultar a versão on-line[1] do gif animado que será apresentado logo adiante e tentando posicionar os três pontos de modo que fiquem alinhados. Ao fazer isso, veríamos a circunferência construída a partir dos passos que descreveremos mais adiante se transformar em uma reta.

Temos então duas situações:

1. Os pontos A, B e C estão alinhados: não há solução.
2. Os pontos A, B e C não estão alinhados: a solução é única.

Navegue pela Animação 1 para ver o passo a passo da solução deste caso.

PASSO A PASSO DA CONSTRUÇÃO

No caso PPP uma única construção foi suficiente para tratar dos dois subcasos citados.

(1) São dados os três pontos A, B e C;

(2) É construída a mediatriz m_1 dos pontos A e B;

(3) É construída a mediatriz m_2 dos pontos A e C;

(4) É determinado o ponto O de interseção entre m_1 e m_2;

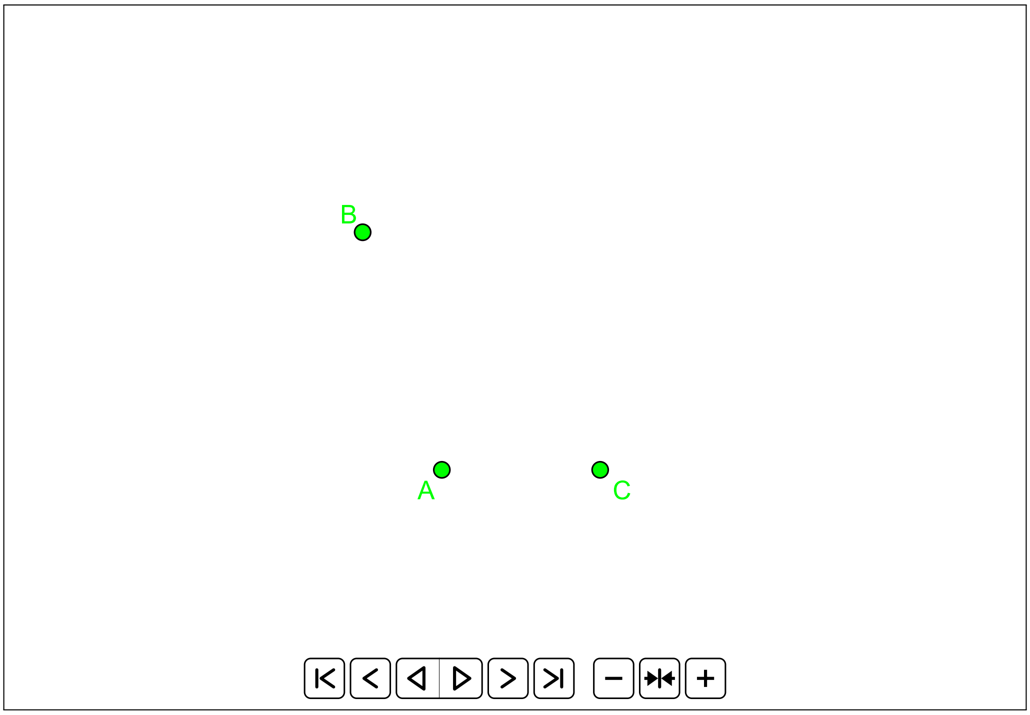
(5) É traçado o círculo c de centro O passando por A (que também passará por B e C).

JUSTIFICATIVA

A mediatriz do segmento AB é a reta perpendicar a ele que passa por seu ponto médio. Ela tem a propriedade de ser equidistante dos pontos A e B. Ao traçarmos a mediatriz do segmento AC obetemos a reta que equidista dos pontos A e C. Como o ponto O pertence as duas mediatrizes (já que é o ponto de interseção de ambas), então equidista dos três pontos A, B e C. Logo é o centro do círculo que passa por todos eles.

[1] https://www.geogebra.org/m/bksxjdjv

Animação 1 – Caso PPP



Legenda: Utilize a barra de navegação para visualizar o passo a passo da construção referente ao caso PPP.

Fonte: O autor, 2022.

3 CASO PPR

O Caso PPR é tratado no livro I da obra *Sobre Tangências* de Apolônio. Neste caso, são fornecidos dois pontos distintos A e B e uma reta r e devemos encontrar o círculo tangente a reta que passa pelos dois pontos. Assim como no capítulo anterior, clicando aqui, o leitor poderá acessar uma versão on-line[2] deste capítulo no site oficial do *software* GeoGebra, podendo assim testar a consistência das construções aqui apresentadas, ou seja, observar que as circunferências obtidas como soluções dos problemas resistem a manipulação dos objetos dados inicialmente, permanecendo tangentes a eles.

Este caso contempla os seguintes subcasos:

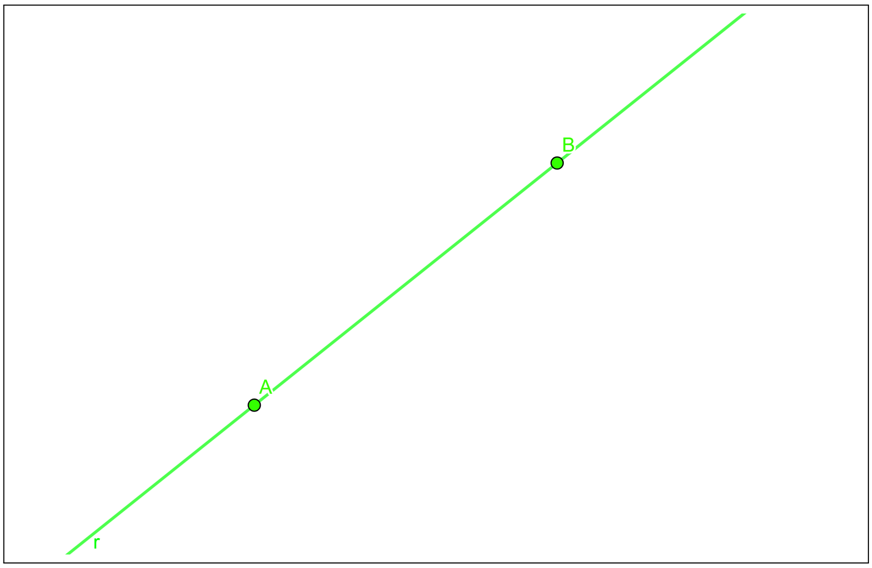
1. Os pontos A e B pertencem a reta r: não há solução.
2. Apenas um dos pontos A ou B pertencer a reta r: a solução é única.
3. Os pontos A e B estão em uma reta AB que é paralela à reta r: a solução é única.
4. Os pontos A e B estão em semiplanos opostos determinados pela reta r: não há solução.
5. Os pontos A e B estão em um mesmo semiplano determinado por r e a reta AB é concorrente a reta r: há duas soluções.

3.1 PONTOS SOBRE A RETA

Quando os dois pontos dados pertencem à reta dada, conforme a Figura 2, não é possível obter o círculo desejado, pois este deveria passar pelos pontos A e B, mas como ambos pertencem a r, teríamos então uma reta tangente com dois pontos de interseção com o círculo, o que entra em contradição com a própria definição de tangente.

2 https://www.geogebra.org/m/yudc4bet

Figura 2 – Caso PPR - 1º subcaso



Legenda: Ilustração do caso sem solução no qual ambos os pontos, A e B, pertencem à reta r.

Fonte: O autor, 2022.

3.2 UM DOS PONTOS SOBRE A RETA

Ao contrário do caso anterior, que não tinha solução, quando apenas um dos pontos pertence à reta dada, uma circunferência atendendo às condições do problema pode ser obtida. Navegue pela Animação 2 para ver o passo a passo da solução deste subcaso.

PASSO A PASSO DA CONSTRUÇÃO

(1) São dados dois pontos A e B e uma reta r;

(2) É construída a mediatriz m dos pontos A e B;

(3) É construída a reta p, perpendicular a r passando por A;

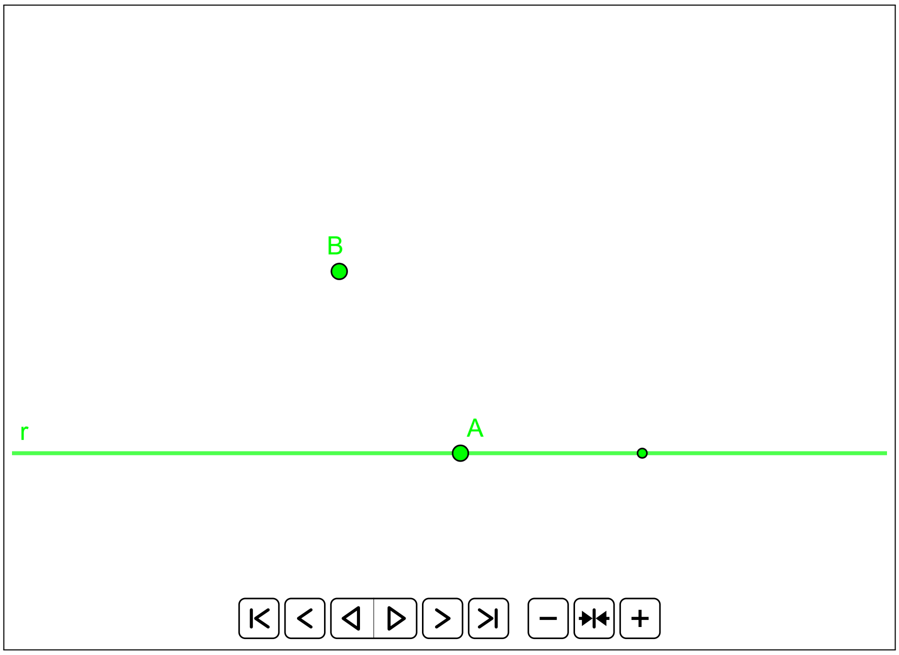
(4) É determinado o ponto O de interseção entre m e p;

(5) É traçado o círculo c de centro O passando por B (que também passará por A).

JUSTIFICATIVA

A circunferência c de centro O e raio OA é a solução do subcaso 2, pois o ponto O equidista dos pontos A e B, já que pertence a mediatriz m destes pontos, e, por construção, o raio OA é perpendicular a reta r e tem A como ponto de tangência (já que A e O pertencem a p).

Animação 2 – Caso PPR - 2º subcaso



Legenda: Utilize a barra de navegação para visualizar o passo a passo da construção referente ao 2º subcaso do caso PPR.

Fonte: O autor, 2022.

3.3 PONTOS EM UMA RETA PARALELA

Assim como ocorreu na seção anterior, no caso em que os dois pontos dados determinam uma reta paralela à reta dada, também a solução para o problema é única. Navegue pela Animação 3 para ver o passo a passo da solução deste caso.

PASSO A PASSO DA CONSTRUÇÃO

(1) São dados uma reta r e dois pontos A e B de modo que a reta AB é paralela a r;

(2) É traçada a mediatriz m dos pontos A e B;

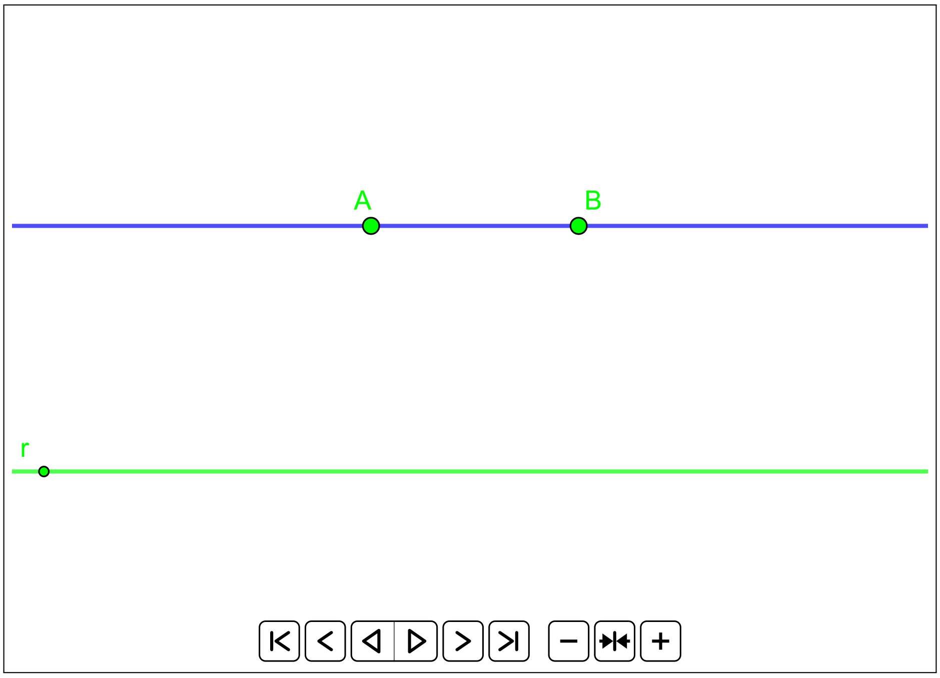
(3) É determinado o ponto C de interseção entre m e r;

(4) É traçado o círculo c que passa pelos pontos A, B e C.

JUSTIFICATIVA

Vamos provar que a circunferência c é solução do subcaso 3. De fato, seu centro O deve pertencer a m, já que precisa estar a mesma distância dos pontos A e B. Seja T o ponto de tangência da circunferência c com a reta r. Então a reta TO deve ser perpendicular r. Como a reta AB é paralela a reta r, temos que m é perpendicular a r, já que é mediatriz de AB. Como tanto a reta TO quanto m são perpendiculares a r e passam por O, então temos que $TO = m$, pela unicidade da perpendicular. Como T pertence a m e a r, então $T = C$, que é o ponto de interseção destas retas na construção apresentada aqui. Note que agora c pode ser construído utilizando o caso PPP.

Animação 3 – Caso PPR - 3º subcaso



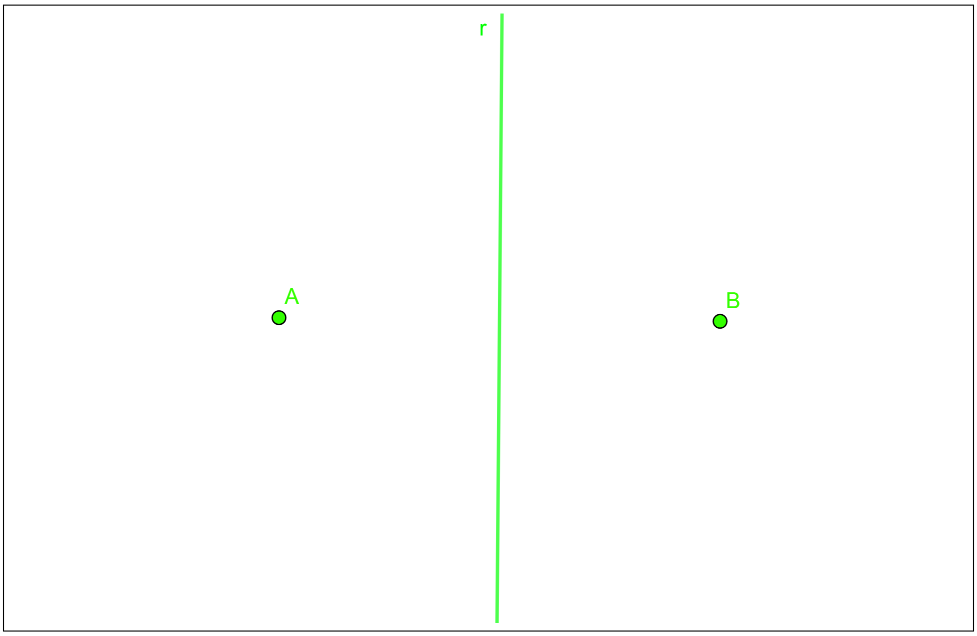
Legenda: Utilize a barra de navegação para visualizar o passo a passo da construção referente ao 3º subcaso do caso PPR.

Fonte: O autor, 2022.

3.4 PONTOS SEPARADOS PELA RETA

Neste caso, os pontos dados estão separados pela reta, conforme a Figura 3. A construção do círculo desejado não é possível, visto que ao percorrermos qualquer círculo passando por A e por B no sentido anti-horário, ele deverá intersectar a reta r duas vezes, uma indo de A para B e outro vindo de B para A, uma vez que estes pontos ocupam semiplanos opostos, dentre os determinados pela reta r.

Figura 3 – Caso PPR - 4º subcaso



Legenda: Ilustração do caso sem solução no qual os pontos A e B ocupam semiplanos opostos em relação à reta r.

Fonte: O autor, 2022.

3.5 PONTOS NO MESMO LADO DA RETA

Quando os dois pontos não pertencem à reta dada e estão localizado em um mesmo semiplano, considerando os dois que são determinados pela reta, temos mais de uma solução, duas para ser exato. Navegue pela Animação 4 para ver o passo a passo da solução deste caso.

PASSO A PASSO DA CONSTRUÇÃO

(1) São dados os pontos A e B e a reta r;

(2) É construída a reta AB;

(3) É determinado o ponto médio de AB, denominado M_1;

(4) É traçado o círculo d_1 de centro M_1 que passa pelos pontos A e B;

(5) É determinado o ponto C de interseção entre as retas AB e r;

(6) É determinado o ponto médio de M_1C, denominado M_2;

(7) É traçado o círculo d_2 de centro M_2 que passa pelos pontos M_1 e C;

(8) São determinados os pontos P_1 e P_2 de interseção entre d_1 e d_2;

(9) É traçado o círculo d_3 de centro C que passa pelos pontos P_1 e P_2;

(10) São determinados os pontos C_1 e C_2 de interseção entre d_3 e r;

(11) São obtidas as circunferências c_1 e c_2 passando ambas pelos pontos A e B e respectivamente pelos pontos C_1 e C_2.

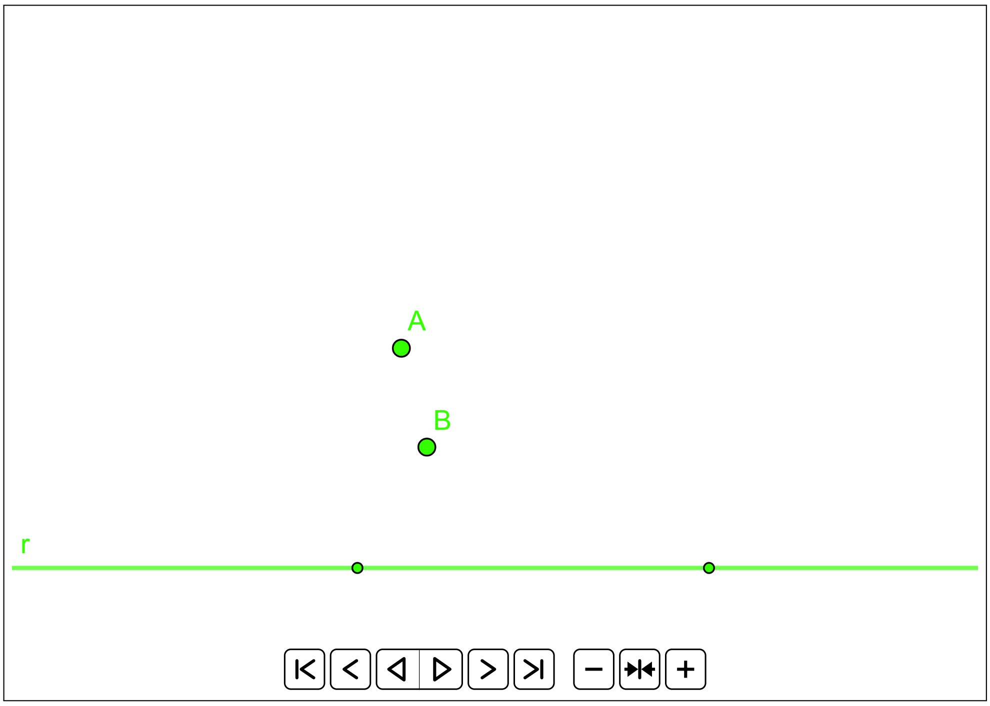
JUSTIFICATIVA

Para fixar as ideias, vamos nos concentrar na circunferência c_1. Observando-a vemos que a reta AB é secante a ela e, se esta é realmente uma solução do problema de Apolônio, a reta r deve ser tangente a mesma. Precisamos então determinar o ponto de tangência C_1 entre c_1 e r. Para determinar tal ponto lembremos que, pelas propriedades de potência de pontos, aplicada ao ponto C e a circunferência c_1, temos que $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{CC_1}^2$. Queremos então obter os pontos C_1 e C_2 sobre r cujas distâncias até C sejam a média geométrica entre os comprimentos dos segmentos AC e BC.

Vamos provar que a construção feita antes garante que a reta CP_1 é tangente ao círculo d_1. Para tanto, note que o triângulo CP_1M_1 é reto em P_1, já que está inscrito na semicircunferência de diâmetro CM_1 (evidenciada por d_2). Assim, a reta CP_1 é perpendicular ao raio P_1M_1 do círculo d_1 e, consequentemente, tangente a ele no ponto P_1.

Logo, como a reta AB é secante a d_1, temos $AC.BC = CP_1^2$, pela mesma propriedade de potência de pontos aplicada novamente ao ponto C, mas agora, a circunferência d_1, que . Portanto o ponto P_1 está distante de C exatamente pela distância que procuramos. Logo, como o ponto C pertence a reta r, traçando o círculo k de centro C e raio CP_1 os pontos de interseção deste com a reta r nos fornecerão os pontos de tangência C_1 e C_2 procurados. Assim, os círculos c_1 e c_2 que passam pelos pontos A e B e, respectivamente, pelos pontos C_1 e C_2 são os círculos que fornecem a solução do problema de Apolônio neste caso.

Animação 4 – Caso PPR - 5º subcaso



Legenda: Utilize a barra de navegação para visualizar o passo a passo da construção referente ao 5º subcaso do caso PPR.

Fonte: O autor, 2022.

4 CASO PRR

Assim como o caso anterior, o Caso PRR também é abordado no livro I da obra *Sobre Tangência*. Nele são fornecidos duas retas distintas r e s e um ponto A, devendo o círculo procurado passar pelo ponto ao mesmo tempo que tangencia as duas retas. Disponibilizamos também para este capítulo uma versão on-line[3] no site do oficial do GeoGebra, a qual pode ser acessada clicando aqui.

Este caso contempla os seguintes subcasos:

1. As retas r e s são paralelas e o ponto A pertence apenas a uma delas: a solução é única.

2. As retas r e s são paralelas e o ponto A está entre elas: há duas soluções.

3. As retas r e s são paralelas e o ponto A é separado de uma das retas pela outra: não há solução.

4. As retas r e s são concorrentes e o ponto A pertence apenas a uma delas: há duas soluções.

5. As retas r e s são concorrentes e o ponto A é a interseção entre elas: não há solução.

6. As retas r e s são concorrentes e o ponto A não pertence a nenhuma delas: há duas soluções.

4.1 RETAS PARALELAS E O PONTO PERTENCE A UMA DELAS

Este é mais um caso com solução única, nele o ponto pertence a uma das retas dadas, as quais são paralelas. Navegue pela Animação 5 para ver o passo a passo da solução deste caso.

PASSO A PASSO DA CONSTRUÇÃO

(1) São dados duas retas r e s e um ponto A pertencente a r;

(2) É construída a reta p perpendicular a r passando por A;

(3) É determinado o ponto B de interseção entre p e s;

(4) É determinado o ponto médio de AB, denominado O;

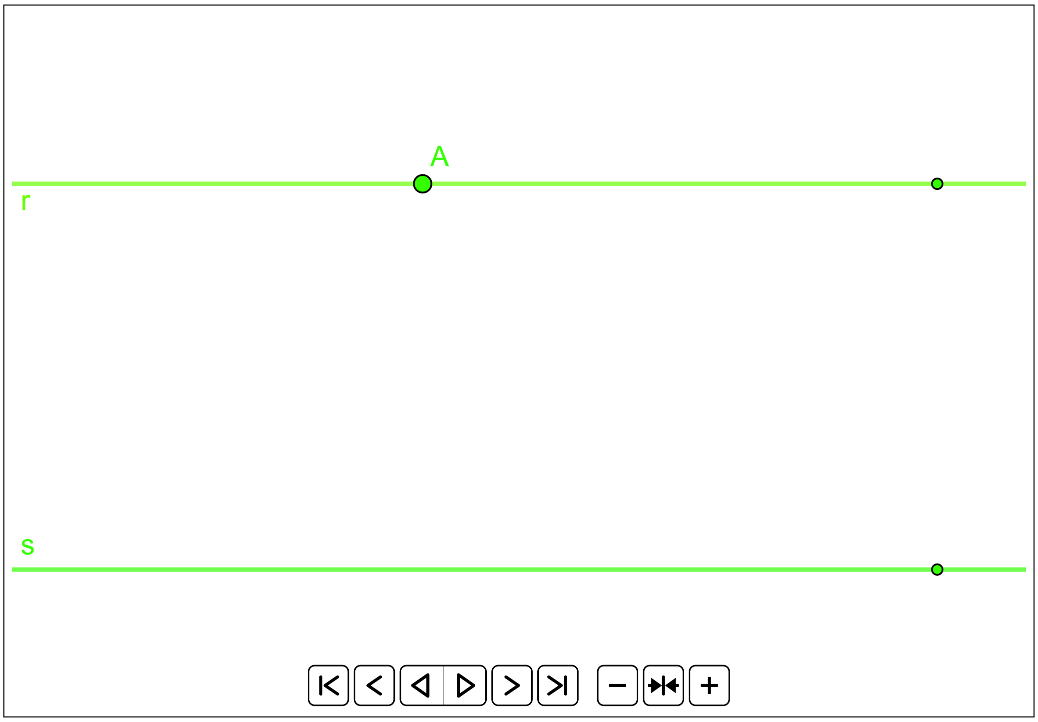
[3] https://www.geogebra.org/m/xjqnxkgh

(5) É traçado o círculo c de centro O passando por A (que também passará por B).

JUSTIFICATIVA

A circunferência c de centro O e raio OA é a solução do subcaso 1, pois passa por A e é tangente as retas r e s, uma vez que o raio OA é perpendicular a reta r, por construção, e o raio OB é perpendicar a reta s, pois esta última é paralela a r.

Animação 5 – Caso PRR - 1º subcaso



Legenda: Utilize a barra de navegação para visualizar o passo a passo da construção referente ao 1º subcaso do caso PRR.

Fonte: O autor, 2022.

4.2 RETAS PARALELAS E O PONTO NO ESPAÇO ENTRE ELAS

Assim como o caso abordado na Seção 3.5, este também possui duas soluções, mas aqui temos um ponto e duas retas paralelas, estando este localizado entre elas. Navegue pela Animação 6 para ver o passo a passo da solução deste caso.

PASSO A PASSO DA CONSTRUÇÃO

(1) São dados duas retas paralelas r e s e um ponto A entre elas;

(2) É construída a reta p, entre r e s, paralela a ambas e equidistante das duas;

(3) É traçado o círculo a de centro A e raio igual a metade da distância entre r e s;

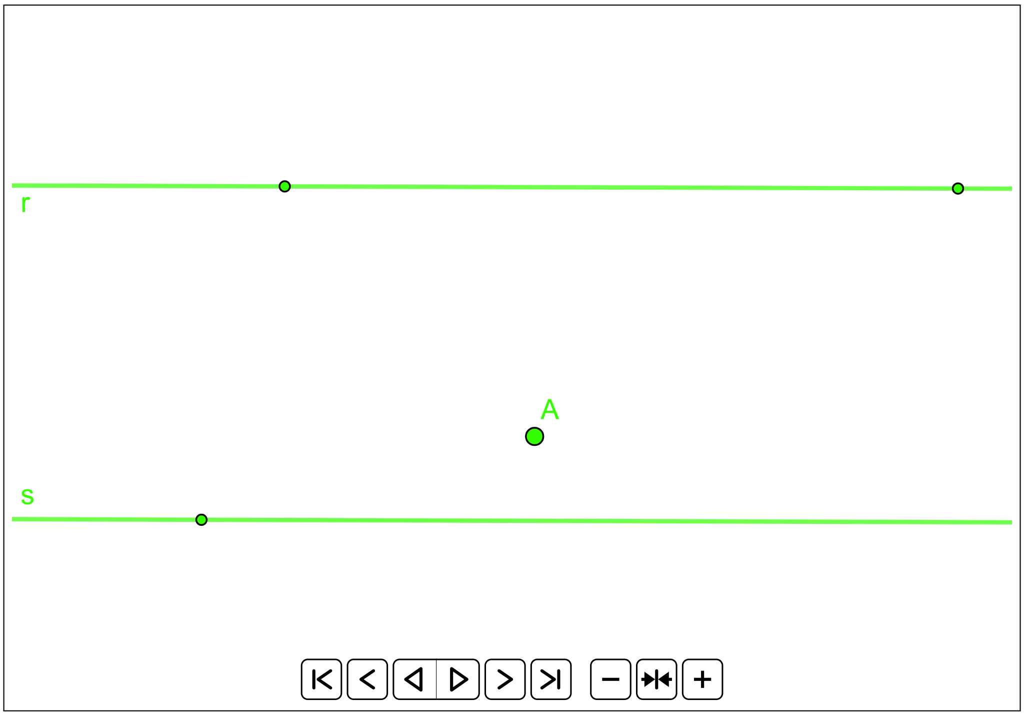
(4) São determinados os pontos O_1 e O_2 de interseção entre a e p;

(5) São traçados os círculos c_1 e c_2 de centros O_1 e O_2, respectivamente, passando por A.

JUSTIFICATIVA

Se a distância entre r e s é igual a d, qualquer circunferência que solucione o problema deve ter seu centro equidistante de r e s, pois os raios até os pontos de tangência com as retas r e s devem ser perpendiculares a essas retas, de modo que seus comprimentos coincidirão com a distância $d/2$. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de r e s é a reta p, paralela a ambas. Observe ainda que qualquer círculo que solucione o problema terá raio medindo $d/2$. Logo, procuramos pontos que estejam a essa distância do ponto A para serem centro de um círculo que solucione o problema, em outras palavras procuramos pontos sobre o círculo a de centro A e raio $d/2$. Os centros dos círculos c_1 e c_2 procurados pertencerão então a interseção entre p e a, ou seja, serão os pontos O_1 e O_2.

Animação 6 – Caso PRR - 2º subcaso



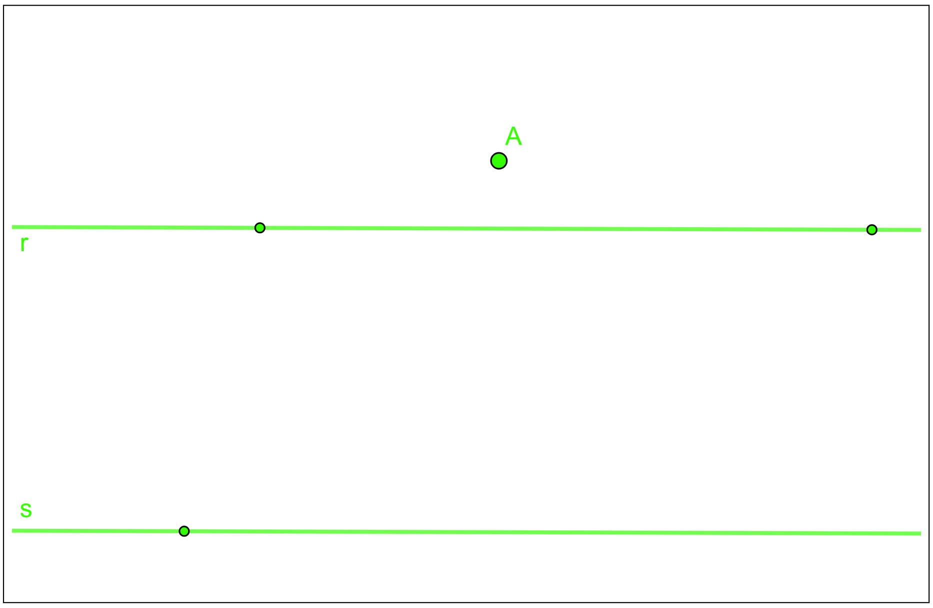
Legenda: Utilize a barra de navegação para visualizar o passo a passo da construção referente ao 2º subcaso do caso PRR.

Fonte: O autor, 2022.

4.3 RETAS PARALELAS E O PONTO FORA DO ESPAÇO ENTRE ELAS

O caso no qual as retas dadas são paralelas e o ponto não pertence à nenhuma delas, nem está localizado entre elas, conforme vemos na Figura 4, é mais um exemplo de caso sem solução. Imagine que o ponto A esteja no semiplano determinado por r que não contém a reta s (caso estivesse no semiplano determinado por s que não contém r o raciocínio seria análogo) e suponhamos que o círculo que procuramos tangenciasse s em um ponto T de s, então teríamos de obter um cículo passando por A e T tangente a r, sendo que A e T estão em semiplanos opostos dentre os determinados por r. Assim, recaímos no quarto subcaso do caso PPR, que como já vimos, não possui solução.

Figura 4 – Caso PRR - 3º subcaso



Legenda: Ilustração do caso sem solução no qual as retas r e s são paralelas e o ponto A não pertence às retas nem a região entre elas.

Fonte: O autor, 2022.

4.4 RETAS CONCORRENTES COM O PONTO EM UMA SÓ DELAS

Novamente aqui temos um caso com duas soluções. Nele, o ponto pertence a apenas uma das retas dadas, as quais são concorrentes. Navegue pela Animação 7 para ver o passo a passo da solução deste caso.

PASSO A PASSO DA CONSTRUÇÃO

(1) São dados duas retas r e s e um ponto A pertencente a reta s;

(2) São construídas as reta b_1 e b_2, bissetrizes das retas r e s;

(3) É construída a reta p, perpendicular a s passando por A;

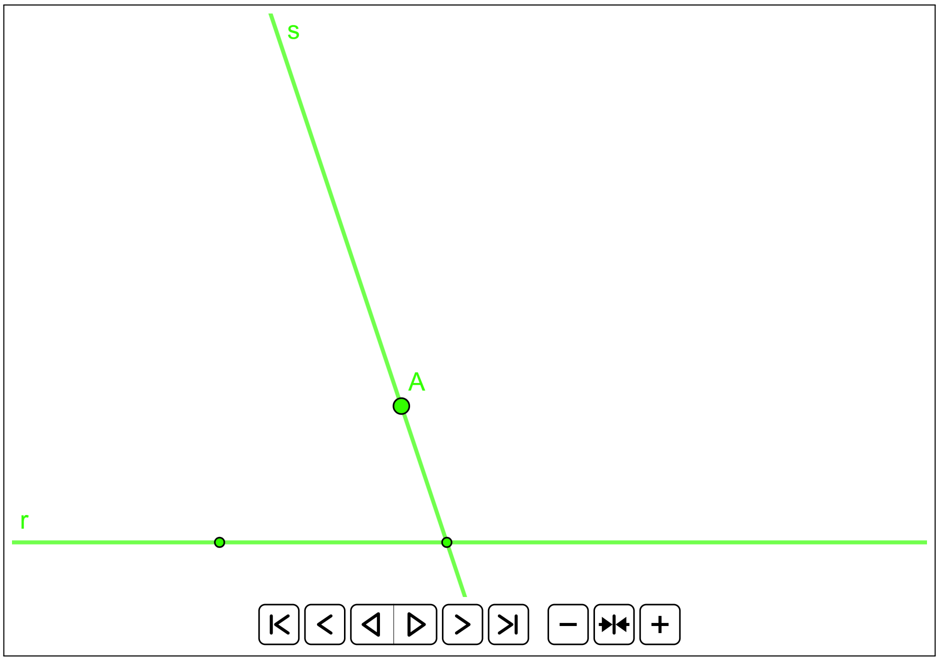
(4) São determinados os ponto O_1 e O_2 de interseção entre p e b_1 e b_2;

(5) São traçados os círculo c_1 e c_2 passando por A de centros O_1 e O_2, respectivamente.

JUSTIFICATIVA

Queremos determinar os centros de todos os círculos que solucionam este caso. Os mesmos devem estar localizados a igual distância das retas r e s, ou seja, sobre uma das bissetrizes b_1 e b_2. Por outro lado, como o ponto A pertence a reta s ele deve ser o próprio ponto de tangência, o que significa que os centros procurados devem pertencer a reta p, já que o raio é sempre perpendicular a reta tangente no ponto de tangência. Portanto, como os centros devem pertencer simultaneamente a uma das bissetrizes b_1 ou b_2 e a reta p, concluímos que tais centros são, na verdade, os pontos O_1 de interseção entre b_1 e p e O_2 de interseção entre b_2 e p. Assim, os círculos procurados serão os círculos c_1 e c_2.

Animação 7 – Caso PRR - 4º subcaso



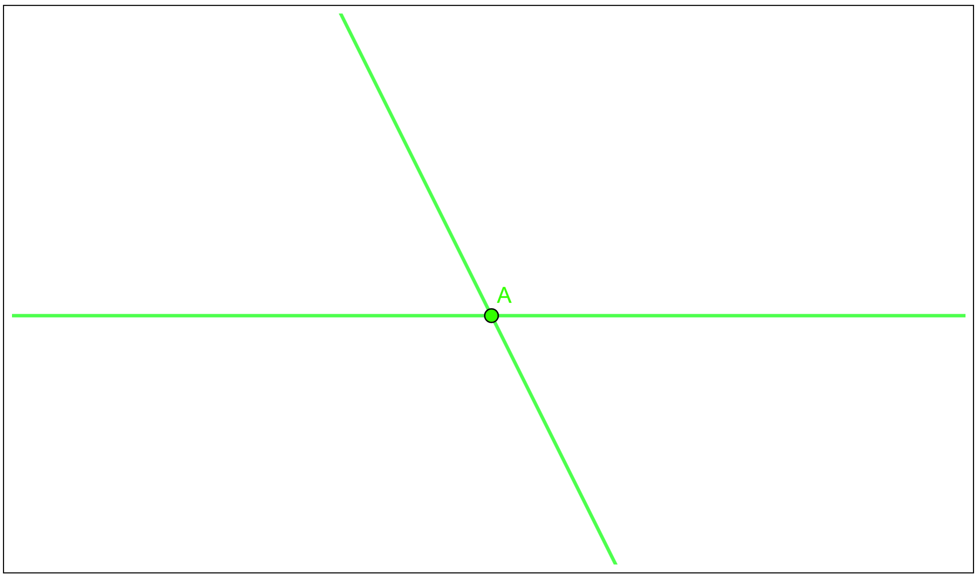
Legenda: Utilize a barra de navegação para visualizar o passo a passo da construção referente ao 4º subcaso do caso PRR.

Fonte: O autor, 2022.

4.5 RETAS CONCORRENTES E PONTO NA INTERSEÇÃO

Quando as retas dadas são concorrentes e o ponto corresponde à interseção entre elas, conforme podemos observar na Figura 5, não é possível obter a solução procurada, pois o ponto A deveria ser simultaneamente o ponto de tangência das retas r e s com a circunferência que soluciona o problema. Se O é o centro de tal circunferência, o raio OA deveria ser perpendicular a r e a s ao mesmo tempo, o que não é possível, uma vez que as retas r e s não são paralelas neste caso.

Figura 5 – Caso PRR - 5º subcaso



Legenda: Ilustração do caso sem solução no qual as retas r e s são concorrentes e o ponto A é o ponto de interseção entre elas.

Fonte: O autor, 2022.

4.6 RETAS CONCORRENTES SEM O PONTO SOBRE ELAS

Neste caso, o ponto não pertence a nenhuma das retas dadas, as quais são concorrentes. Navegue pela Animação 8 para ver o passo a passo da solução deste caso.

PASSO A PASSO DA CONSTRUÇÃO

(1) São dados duas retas concorrentes r e s e um ponto A que não pertence à nenhuma delas;

(2) É construída a reta b, bissetriz das retas r e s, que possui interseção com a região do plano que contém o ponto A, consideradas as quatro regiões delimitadas pelas retas r e s;

(3) É determinado o ponto A', simétrico do ponto A em relação à b;

(4) É construída a reta AA' que passa por ambos os pontos A e A';

(5) É determinado o ponto M_1, ponto médio dos pontos A e A';

(6) É determinado o ponto C, interseção de AA' e r;

(7) É determinado o ponto M_2, ponto médio de M_1 e C;

(8) É traçado o círculo d_1, de centro M_1 passando pelos pontos A e A';

(9) É traçado o círculo d_2 de centro M_2, passando pelos pontos M_1 e C;

(10) São determinados os pontos P_1 e P_2, interseção de d_1 e d_2;

(11) É traçado o círculo d_3 de centro C, passando pelos pontos P_1 e P_2;

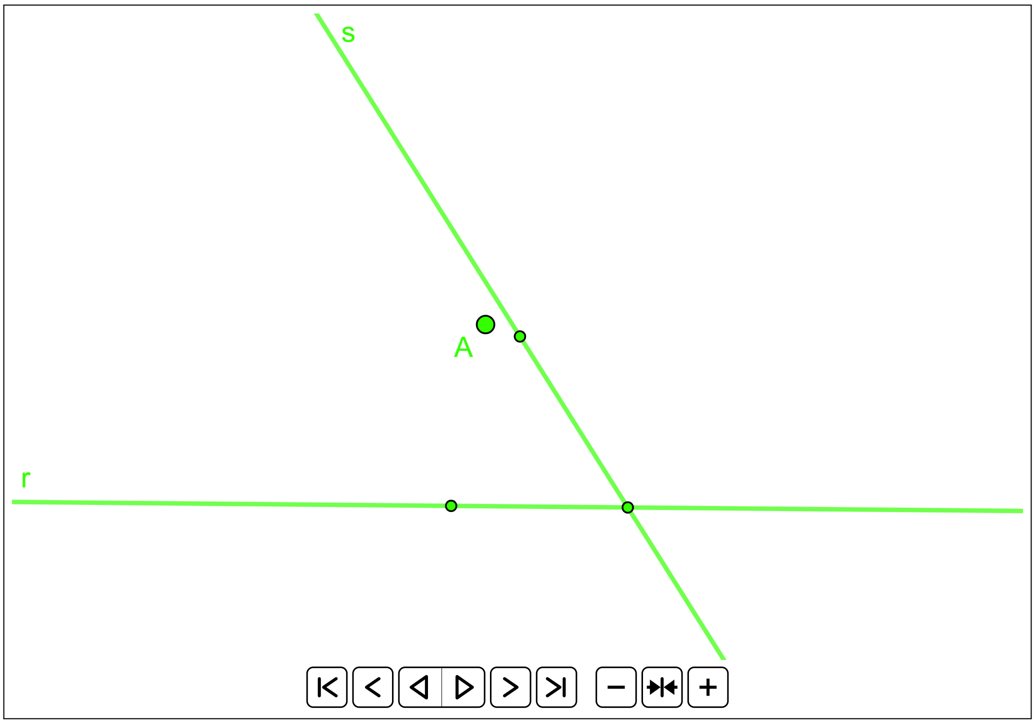
(12) São determinados os pontos C_1 e C_2, interseção de d_3 e r;

(13) São traçados os círculos c_1 e c_2 passando pelos pontos A, A' e C_1 e A, A' e C_2.

JUSTIFICATIVA

Os centros O_1 e O_2 das circunferências c_1 e c_2 que procuramos precisam equistar das retas r e s, logo, pertencem a bissetriz b destas retas. Como o ponto A' é simétrico de A em relação a bissetriz b, então b é mediatriz do segmento AA', o que significa que A' deve estar a mesma distância que A que qualquer ponto sobre a reta b, em particular $AO_1 = A'O_1$ e $AO_2 = A'O_2$ e, portanto, A' é um ponto que pertence a ambas as circunferências c_1 e c_2. Note ainda que, como A não pertence a nenhuma das retas r ou s, também A', que está a mesma distância da bissetriz b, não pertencerá a nenhuma dessas retas. Assim, tomando qualquer uma das retas r ou s e os dois pontos A e A', recaímos no quinto subcaso do Caso PPR, o que justifica todos os passos da construção que se seguem após a construção do ponto A'.

Animação 8 – Caso PRR - 6º subcaso



Legenda: Utilize a barra de navegação para visualizar o passo a passo da construção referente ao 6º subcaso do caso PRR.

Fonte: O autor, 2022.

5 CASO RRR

O Caso RRR, junto com o PPP, é considerado um dos casos mais fáceis de se resolver, este também está presente no livro *Os Elementos* de Euclides. Neste caso são fornecidas três retas distintas r, s e t e devemos encontrar os círculos tangentes a todas elas. Assim como nos capítulos anteriores clicando aqui o leitor poderá acessar a versão on-line[4] do capítulo no site oficial do GeoGebra.

Este caso contempla os seguintes subcasos:

1. As três retas concorrem duas a duas, mas não no mesmo ponto: há quatro soluções.
2. As três retas são paralelas entre si: não há solução.
3. Duas retas paralelas e uma transversal: há duas soluções.
4. As três retas concorrem no mesmo ponto: não há solução.

5.1 RETAS CONCORREM DUAS A DUAS

Dos casos aboradados até aqui, este é o único com quatro soluções. São dadas três retas que concorrem duas a duas formando a figura de um triângulo. Uma das circunferências fica inscrita neste triângulo, as demais são as chamadas circunferências ex-inscritas a ele. Navegue pela Animação 9 para ver o passo a passo da solução deste caso.

PASSO A PASSO DA CONSTRUÇÃO

(1) São dadas três retas r, s e t, que determinam um triângulo T;

(2) São construídas as bissetrizes i_1 e e_1 das retas r e s, bissetrizes interna e externa do triângulo T;

(3) São construídas as bissetrizes i_2 e e_2 das retas r e t, bissetrizes interna e externa do triângulo T;

(4) É determinado o ponto O_1 de interseção entre as bissetrizes externas;

(5) É construída a reta p_1 perpendicular a r (ou a s ou a t) passando por O_1;

(6) É determinado o ponto T_1 de interseção entre p_1 e r;

---

[4] https://www.geogebra.org/m/qv7axgs2

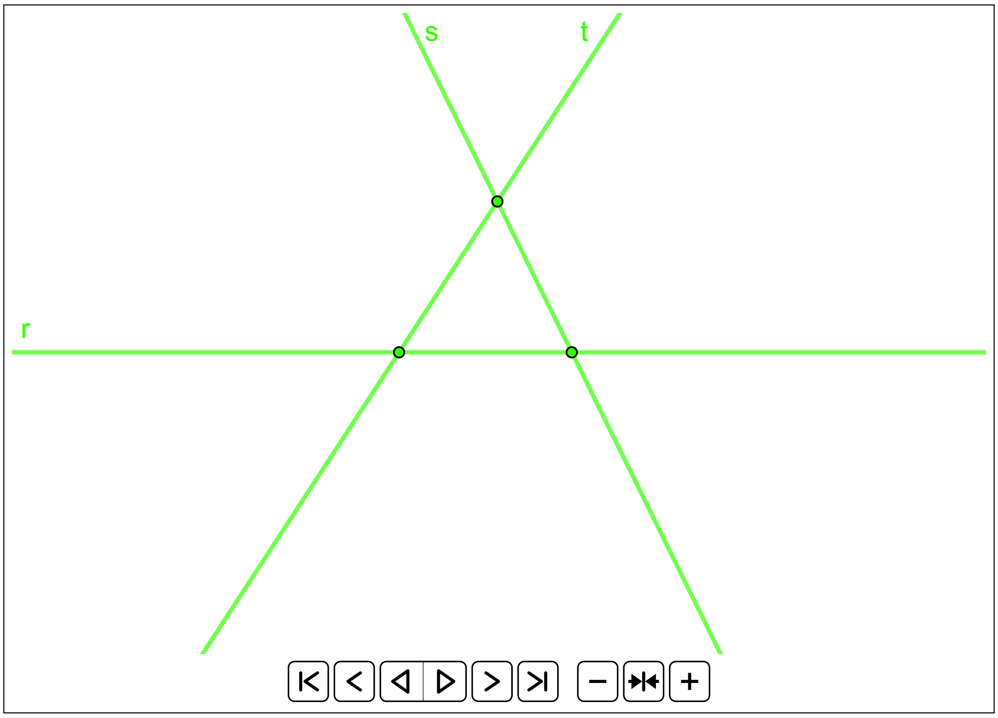
(7) É traçado o círculo c_1 de centro O_1.

OBS: Para determinar os círculos c_2, C_3 e c_4 foram repeditos os passos acima nos quadrantes correspondetes.

JUSTIFICATIVA

Queremos determinar os centros O_1, $_2$, O_3 e O_4 de todos os círculos que solucionam este caso. Os mesmos devem estar localizados equidistantes as retas r, s e t, ou seja, sobre duas das bissetrizes, assim, têm de ser os pontos de interseção entre estas. Como as circunferências que resolvem o caso devem ser tangentes as três retas inicialmente dadas, precisamos encontrar os pontos de tangência com estas retas, os quais serão os pés das perpendiculares a uma das retas dadas (digamos r) passando pelos centros O_1, O_2, O_3 e O_4. Com os centros e um ponto de cada um dos círculos, estes ficam determinados.

Animação 9 – Caso RRR - 1º subcaso



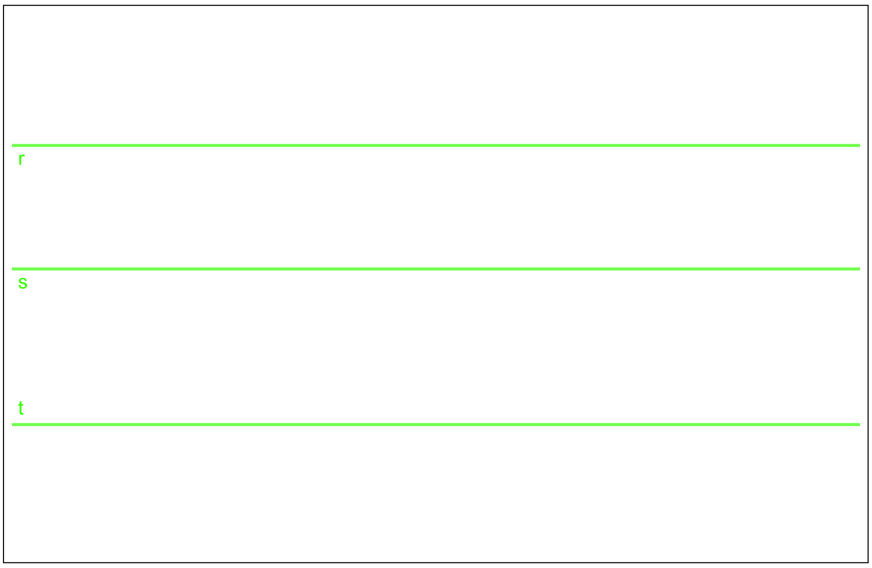
Legenda: Utilize a barra de navegação para visualizar o passo a passo da construção referente ao 1º subcaso do caso RRR.

Fonte: O autor, 2022.

5.2 RETAS PARALELAS

Neste caso, todas as retas dadas são paralelas entre si, conforme a Figura 6. Não é possível obter a solução neste caso, visto que ao traçarmos um círculo, ele deverá intersectar pelo menos uma das retas duas vezes, o que já foge do que é proposto no problema inicialmente. Algo muito semelhante ocorre no quarto subcaso do casos PPR e no terceiro subcaso do caso PRR.

Figura 6 – Caso RRR - 3º subcaso



Legenda: Ilustração do caso sem solução no qual as retas r, s e t são paralelas.

Fonte: O autor, 2022.

5.3 DUAS RETAS PARALELAS E UMA TRANSVERSAL

Aqui, duas das retas dadas são paralelas e a terceira é transversal às outras duas. Navegue pela Animação 10 para ver o passo a passo da solução deste caso.

PASSO A PASSO DA CONSTRUÇÃO

(1) São dadas três retas r, s e t;

(2) São construídas as bissetrizes interna e externa i_1 e e_1 das retas r e t;

(3) são construídas as bissetrizes interna e externa i_2 e e_2 das retas s e t;

(4) É determinado o ponto O_1 de interseção entre i_1 e e_2;

(5) É determinado o ponto O_2 de interseção entre i_2 e e_1;

(6) É construída a reta p_1 perpendicular a r (ou a s ou a t) passando por O_1;

(7) É construída a reta p_2 perpendicular a r (ou a s ou a t) passando por O_2;

(8) É determinado o ponto A de interseção entre p_1 e r;

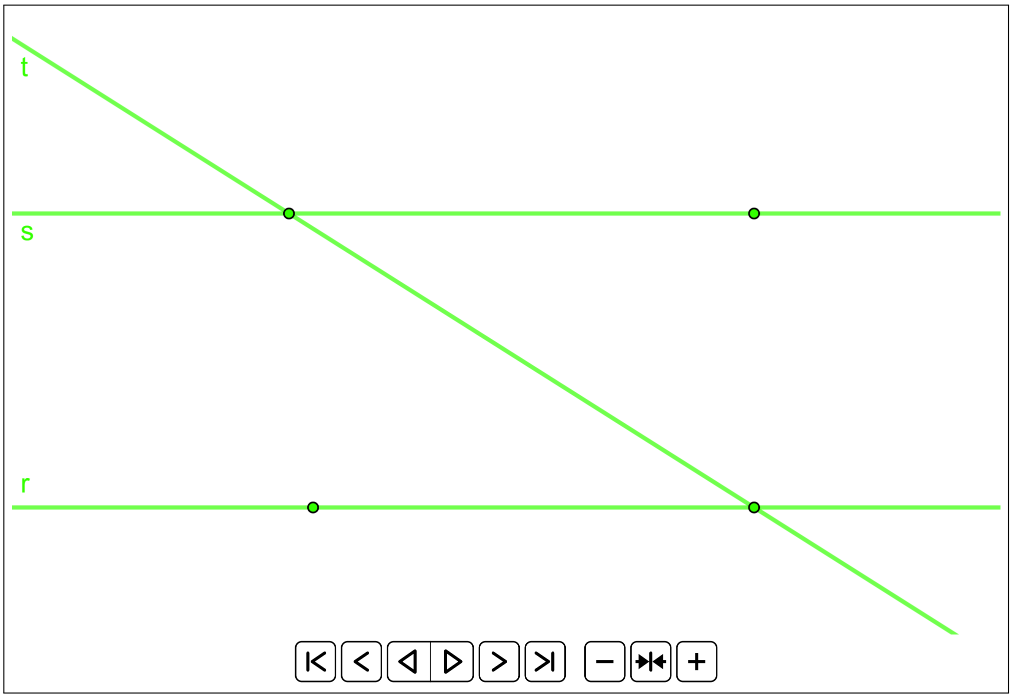
(9) É determinado o ponto B de interseção entre p_2 e r;

(10) São traçados os círculos c_1 e c_2 de centros O_1 e O_2 respectivamente.

JUSTIFICATIVA

Queremos determinar os centros de todos os círculos que solucionam este caso. Os mesmos devem estar localizados equidistantes as retas r, s e t, ou seja, sobre uma das bissetrizes. logo os centros devem estar na interseção das bissetrizes, para que assim os mesmo equidistam das três retas, uma vez que esteja em localizado em uma das bissetrizes internas ele equidista das retas r e t ou s e t, e quando nas bissetrizes externas equidista s e t ou de r e t, uma vez que os centros estejam na interseção de uma bissetriz interna com uma bissetriz externa ele equidista das três retas inciais. Com isso, concluímos que tais centros são, na verdade, os pontos O_1 e O_2.

Animação 10 – Caso RRR - 2º subcaso



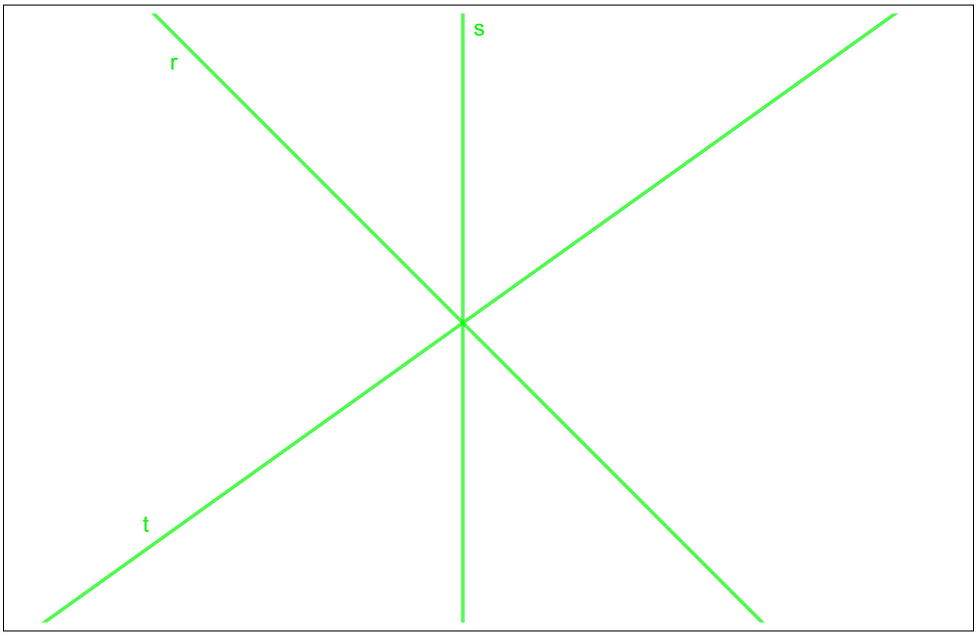
Legenda: Utilize a barra de navegação para visualizar o passo a passo da construção referente ao 2º subcaso do caso RRR.

Fonte: O autor, 2022.

5.4 RETAS CONCORREM NO MESMO PONTO

Este é o último caso abordado neste trabalho. Nele todas as retas concorrem no mesmo ponto, conforme a Figura 7. Não é possível obter a solução neste caso. Para se convencer disso, considere que tenhamos encontrado uma circunferência c que soluciona o problema. Onde deveria estar localizado seu centro? Como os raios de c devem ser sempre perpendiculares às retas tangentes no ponto de tangência, isso significa que o centro c é um ponto que equidista das três retas. Acontece que o único ponto que equidista das três retas é o ponto de interseção entre as três, pois qualquer outro ponto estaria localizado em uma das seis regiões determinadas pelas três retas, estando, portanto, mais próximo das duas retas que delimitam esta região que das demais, ou sobre apenas uma das retas, estando mais próximo desta que das outras duas. Não há como a circunferência c ter seu centro neste ponto de interseção e, ao mesmo tempo, ser tangente a qualquer uma das três retas, já que estas conteriam seu diâmetro. Isto prova que não há solução para este caso.

Figura 7 – Caso RRR - 4º subcaso



Legenda: Ilustração do caso sem solução no qual as retas r, s e t concorrem todas no mesmo ponto.

Fonte: O autor, 2022.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já explicado por nós, este trabalho abordou uma simplificação do problema de Apolônio e não o problema original. Entretanto é nossa intenção atacar o problema completo, dando continuidade ao que já foi feito até aqui. Temos inclusive a ambiciosa intenção de transformar o trabalho ampliado em um livro sobre o tema.

Reconhecemos que o trabalho apresenta ainda algumas limitações como a ausência de uma abordagem histórica mais profunda do problema e o fato de não cobrir todos os casos do problema original. Contudo, pensamos que, apesar destas limitações, o trabalho apresenta grandes qualidades.

Avançamos um passo no sentido de utilizar recursos tecnológicos relativamente recentes (alguns bastante recentes) para criar uma exposição didática e clara do problema que nos propusemos responder. O fato de muitos autores não dominarem tais tecnologias é uma possível explicação para a ausência de uma vasta gama de materiais que se sirvam deles em suas exposições sobre o problema.

No que diz respeito ao uso dos ambientes de geometria dinâmica, em particular do GeoGebra, é possível encontrar no banco de matariais deste site diversas construções relacionadas com o problema de Apolônio. Entretanto, estas, em geral, não se constituem em livros ou mesmo em atividades, mas apenas na postagem dos applets, os quais não vêm acompanhados de orientações sobre seu uso e, tampouco do passo a passo ou da justificativa deste. Em se tratando de textos em língua portuguesa, a escassez de materiais é ainda mais notável. Pensamos, por isso, termos sido muito felizes na produção de um livro dinâmico na plataforma on-line do GeoGebra, que está vinculado ao texto deste TCC (por meio dos hiperlinks que para ele direcionam) e que contribui para o preenchimento desta lacuna. Consideramos o livro dinâmico como parte integrante deste trabalho de conclusão de curso, pois complementa e enriquece o material aqui presente, já que os gifs não permitem a manipulação dos objetos que nele aparecem como ocorre no livro.

Aliás, os gifs animados são outro grande mérito deste trabalho, pois permitem uma leitura mais fluida, sem a necessidade de deixar o arquivo pdf para seguir os links. Essa sim é uma tecnologia bastante recente que incorporamos a este trabalho e que só foi possível pela opção de escrever o texto em LaTeX. Daí que não tenhamos conhecimento de nenhuma outra obra que faça uma exposição similar a que é feita neste trabalho.

Talvez seja importante ressaltar que este não é um trabalho voltado para o ensino. Embora acreditemos ter construído aqui uma apresentação didática do tema, reconhecemos que as escolhas que fizemos não representam aquela que acreditamos ser a mais adequada para tratar com este tema em sala de aula. Pensamos que, para o contexto escolar, é preciso focar em atividades que privilegiam o processo de descoberta pelo próprio aluno e não a mera exposição encadeada dos resultados seguidos de suas demonstrações.

Para a sala de aula, o professor poderia perguntar para seus alunos quantas e quais são as combinações possíveis dos três objetos envolvidos no Problema de Apolônio, deixando para estes a tarefa de descobrir quais são os casos. Além disso, poderia também ficar a cargo destes a tarefa de investigar quais são as diferentes configurações possíveis dentre de um determinado caso, ou seja, identificar os subcasos. A geometria dinâmica seria uma forte aliada neste processo de investigação. Também aos alunos seria atribuída a tarefa de propor soluções para alguns subcasos específicos, surgindo talvez diferentes propostas de passo a passo para as construções, as quais poderiam ser comparadas entre os alunos que definiriam, eles mesmos, qual delas seria a mais eficaz ou quais as vantagens e desvantagens de cada uma. Outro exercício interessante seria o de discutirem entre eles, com a mediação do professor, as justificativas que sustentam o passo a passo proposto. Poderiam ainda realizar as construções mais simples com régua e compasso físicos, verificando a seguir em algum ambiente de geometria dinâmica se a construção feita no papel resiste ou não às manipulações no *software*, buscando entender os porquês das construções frágeis e também das que funcionaram bem.

Finalmente, pensamos que o grande mérito do trabalho é o de ter reunido em um só lugar a solução de cada um dos casos envolvendo apenas pontos e retas, bem como as demonstrações de cada passo a passo.

Esperamos que, no futuro, os leitores deste trabalho possam ter notícias de um livro de nossa autoria contemplando as soluções de todos os casos propostos por Apolônio.

REFERÊNCIAS

AMORIM, Marcela Melo. **Os dez problemas de Apolônio: uma proposta para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado), 2016.

BICUDO, Irineu. **Os elementos**. São Paulo: Unesp, 2009.

BOYER, Carl B. História da matemática.(2ª edição). **Editora Edgard Blucher Ltda, Brasil**, 1996.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática, tradução: Hygino h. **Domingues, São Paulo: Editora da Unicamp**, 2004.

WAGNER, Eduardo; CARNEIRO, Jose Paulo Q. **Construções geométricas**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.