Arley Antes Souza

Uma visita ao disco de Poincaré: proposta de material para aperfeiçoamento de professores

Santarém-PA

11 de abril de 2019

Arley Antes Souza

Uma visita ao disco de Poincaré: proposta de material para aperfeiçoamento de professores

Monografia apresentada ao Programa de Ciências Exatas, do Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática e Física.

Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA
Instituto de Ciências da Educação
Programa de Ciências Exatas
Licenciatura Integrada em Matemática e Física

Orientador: Sebastián Mancuso

Santarém-PA
11 de abril de 2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Setor de Processamento Técnico da Divisão de Biblioteca da UFOPACatalogação de Publicação na Fonte. UFOPA - Biblioteca Central Ruy Barata

Souza, Arley Antes.
Uma visita ao disco de Poincaré: proposta de material para aperfeiçoamento de professores / Arley Antes Souza. – Santarém, 2019.
35f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Ciências Exatas.
Orientador: Sebastián Mancuso.

1. Ensino de geometria. 2. Geometrias não euclidianas. 3. Formação de professores. I. Mancuso, Sebastián, orient. II. Título.

UFOPA/Sistema Integrado de Bibliotecas CDD 23 ed. 370.71

Elaborado por Bárbara Costa – CRB-15/806

Arley Antes Souza

Uma visita ao disco de Poincaré: proposta de material para aperfeiçoamento de professores

Monografia apresentada ao Programa de Ciências Exatas, do Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática e Física.

Trabalho aprovado. Santarém-PA, 11 de abril de 2019:

Prof. Dr. Sebastián Mancuso
Orientador—UFOPA

Prof. Dr. José Antônio de Oliveira Aquino
Examinador—UFOPA

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Prof. Me. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues
Examinador—UFOPA

Santarém-PA
2019

Aos professores de nosso país

Agradecimentos

Apesar dos eventos dos últimos dois anos, pude terminar este trabalho graças ao apoio de meus pais, Arnaldo e Clarice, e também de minha irmã caçula, Crícia, que veio me fazer companhia durante a semana de finalização deste trabalho.

Deixo aqui também meus agradecimentos a meu orientador, professor Mancuso, pois, muito além de orientações acadêmicas, deu-me o encorajamento necessário para concluir esta produção. Por outro lado, minha amiga e colega de profissão, Lissa, deu-me várias orientações acadêmicas além das palavras de encorajamento. Os dois são uma grande influência na minha visão do que deve ser educação matemática.

Tive muitas conversas com professores e estudantes do curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, e até de outros cursos; não seria possível citar todos por nome, mas tenho uma dívida convosco, pois tais conversas contribuíram de forma decisiva para a evolução deste modesto projeto.

Por fim, quero agradecer a Ariele, pela paciência em ler todo o material de apoio em anexo. Eu provavelmente não teria corrigido aqueles erros de português.

“Euclid alone has looked on Beauty bare.”

Edna St. Vincent Millay

Resumo

Este trabalho propõe um material de apoio para ensino de geometrias não euclidianas (GNE), que possa ser utilizado durante a formação inicial de professores ou formação continuada. Faremos isto por meio de um modelo da geometria hiperbólica conhecido como disco de Poincaré. Esse modelo tem grande importância dentro da matemática em parte por possibilitar a visualização das propriedades dessa geometria. Assim, esperamos que o material de apoio produzido facilite o estudo e interpretação de tais propriedades, que tornam a geometria hiperbólica tão diferente da euclidiana. O material de apoio dedica um capítulo inteiro a uma abordagem histórica do desenvolvimento das GNE. Outro capítulo é dedicado a definições e resultados da geometria euclidiana, e pode ser usado para revisitar esses tópicos, independente do interesse no disco de Poincaré.

Palavras-chaves: Ensino de geometria; Geometrias não euclidianas; Aperfeiçoamento de professores; História da matemática; Material de apoio para ensino.

Abstract

This work proposes a support material for teaching non-Euclidean geometries, which can be used during initial teacher training or teacher improvement. We will do this by means of a model of the hyperbolic geometry known as the Poincaré disk. This model has great importance in mathematics in part because it allows the visualization of the properties of this geometry. Thus, we expect the support material we produced to facilitate the study and interpretation of such properties, which make hyperbolic geometry so different from Euclidean geometry. The support material devotes an entire chapter to a historical approach to the development of non-Euclidean geometry. Another chapter is devoted to definitions and results of Euclidean geometry, and can be used to revisit these topics, regardless of the interest in the Poincaré disk.

Key-words: Geometry teaching; Non-Euclidean geometry; Teacher improvement; History of Mathematics; Teaching support material.

Sumário

1 Introdução

Este trabalho se dispõe a apresentar um material de apoio para ensino de geometrias não euclidianas, que possa ser utilizado durante a formação inicial de professores ou formação continuada. Faremos isto por meio de um modelo da geometria hiperbólica conhecido como disco de Poincaré.

Na história da matemática, a importância do disco de Poincaré, assim como dos outros modelos, reside no fato de que uma inconsistência em uma das novas geometrias se traduz em uma inconsistência na geometria clássica, a dita euclidiana. Além disso, antes da concepção dos primeiros modelos por Eugenio Beltrami, era muito difícil visualizar a geometria hiperbólica. Esses modelos permitem estudar e entender melhor as propriedades dessa geometria que a tornam distinta da euclidiana.

Antes de apresentar o material que preparamos, convém destacar o objetivo que tínhamos em mente ao produzir esse material de apoio. O fato é que há poucas obras de caráter didático disponíveis sobre o tema, ainda menos em português. Vamos comentar sobre estas mais a frente. Por ora, surgem algumas perguntas, como, por exemplo: Por que essa preocupação de ensinar geometrias não euclidianas para professores da educação básica? E quanto a seus alunos, que benefícios haverá em terem algum contato com outras geometrias? Não já há conteúdo demais, e não é este conteúdo demasiado abstrato? Por que adicionar mais um tópico de estudo?

Não apenas isto, mas as dificuldades de se ensinar simplesmente geometria já parecem assustadoras. Por exemplo, em um artigo de 1995, Lorenzato argumenta que há uma omissão no ensino de geometria no país. Quanto às causas dessa omissão, ele aponta o despreparo dos professores e o material didático disponível. De acordo com suas pesquisas, a formação inicial era insuficiente e os professores, na época, não demonstravam ter o mínimo de conhecimento de geometria para ensinar a matéria. Sobre a segunda dificuldade, Lorenzato aponta uma dependência exagerada do livro didático. Como os livros não davam a devida atenção à geometria, isto é: não a apresentavam com profundidade; às vezes apenas continham uma lista de definições e resultados; a apresentação era fragmentada, desconexa com outras ciências e com a própria matemática; aparecia somente no final do livro, então "não dava tempo" para abordar esse assunto; por essas razões, o ensino de geometria acabava sendo relegado a um segundo plano, ou a matéria nem sequer era lecionada (LORENZATO, 1995). É com tristeza que 20 anos depois não vemos melhora significativa nem na apresentação da geometria nem em sua "posição" dentro do livro (como se isso fosse realmente necessário).

Agora, vamos rever estas dificuldades considerando as geometrias não euclidianas

(GNE) e a situação atual do ensino no Brasil. Infelizmente, o problema relacionado ao despreparo dos professores não parece ter se resolvido, e é ainda mais grave quando consideramos as GNE. Por exemplo, em uma pesquisa recente com 43 instituições de ensino superior brasileiras, foi apurado que apenas cinco delas, ou seja, cerca de 12%, abordavam as GNE em seus cursos de Licenciatura em Matemática (BARRETO; TAVARES, 2010). Quanto aos livros didáticos, a existência das GNE geralmente não é nem sequer mencionada.

Dadas todas essas dificuldades, surge espontaneamente a pergunta: Afinal, por que ensinar geometria? É o ensino de geometria realmente necessário na educação básica? Se sim, o que dizer das GNE?

Existem, na verdade, questões ainda mais profundas e subjacentes a estas, como: Para que ensinar matemática? E ainda mais: Para que ensinar?

Ávila (2011) menciona duas justificativas comuns para se ensinar matemática: lidar com situações práticas envolvendo números e desenvolver o raciocínio lógico. Para ele, ambas as justificativas são insuficientes. Para Ávila, a matemática é parte do patrimônio cognitivo da humanidade, e deve ser usada para enriquecer a formação intelectual dos alunos. Este autor destaca também a importância da imaginação e da intuição dentro da matemática e a sua relação com outras ciências e com as artes.

Após esses comentários preliminares, Ávila (2011) enuncia alguns princípios básicos a serem seguidos no ensino de matemática. Entre esses princípios, ele defende que seja dado destaque às ideias dentro da matemática, às relações entre diferentes tópicos da matemática e às suas conexões com outras ciências. É de se notar que, na mesma obra, ele inclui um capítulo dedicado exclusivamente às GNE. Isso indica a opinião de que abordar as GNE possa ajudar a alcançar os objetivos da educação matemática traçados por ele.

A ideia de que os alunos devem ter prazer ao estudar matemática não é, de forma alguma, algo novo. Por exemplo, Sanford (1935) já dizia que não temos o direito de tirar dos alunos a alegria de descobrir algumas coisas por si mesmos, ainda que, nesse processo, eles venham a cometer erros. Naquela época, a autora criticou o mal uso dos livros de geometria. Ao invés de memorizar proposições, ela defende que a ênfase no ensino de geometria deveria estar na argumentação. Quase 100 anos depois, sua crítica ainda é motivo de preocupação.

Ainda sobre os objetivos do ensino de geometria, Brown (1950) resolve fazer essa pergunta diretamente aos autores de livros didáticos, professores e alunos. Na discussão que se segue, Brown conclui haver incongruências entre os objetivos desses personagens, e também entre os objetivos expressos pelos professores e seus métodos de avaliação. Ele conclui que os alunos deveriam ser informados dos objetivos da disciplina e serem avaliados concordemente.

Os comentários desses autores estão em consonância com o ensaio muito mais recente de Dudley (2010) para a *Notices of the AMS* (Observações da Sociedade Americana de Matemática). Neste ensaio, o autor critica a ênfase exagerada em aplicações que é dada por alguns, e os resultantes problemas "práticos" encontrados nos livros didáticos. Argumentando que deve haver espaço para tópicos que não tenham natureza imediatamente prática, ele menciona a existência de problemas desse tipo desde a antiguidade.

Dudley está certo ao apontar que desde os primórdios da matemática sempre houve problemas de natureza recreativa. Por exemplo, Boyer e Merzbach (2012) acreditam que uma grande parte da matemática pré-helênica era de caráter prático, mas não toda. Em sua História da Matemática, eles mencionam alguns problemas encontrados no papiro de Rhind, escrito no Egito Antigo, que carecem de qualquer motivação além do seu desafio intrínsico (p. 33). Entre os babilônios, são encontradas listas com ternas pitagóricas e outros resultados que também indicam uma matemática por ela mesma, desenvolvida por seus escribas para seu divertimento (pp. 46, 51).

Estes fatos nos fazem refletir sobre a própria origem e natureza da matemática. O historiador grego Heródoto afirmou que a geometria havia surgido no Egito por motivações práticas. Mas Aristóteles tinha uma opinião diferente, de que havia surgido porque haviam sacerdotes com tempo livre para se dedicarem a tais estudos (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 29). É estranho, mas muitos problemas supostamente "práticos" de hoje guardam semelhança com aqueles resolvidos pelos egípcios e babilônios (KATZ, 2009, p. 27).

Consideramos que o acesso à educação básica é um direito inalienável do indivíduo. Sem ele, o cidadão perde a capacidade de exercer de forma plena sua cidadania. Com efeito, a pessoa carente de habilidades básicas de leitura enfrenta sérios problemas no acesso e avaliação da informação. Para além do analfabetismo literal, há também o analfabetismo científico: sem saber conceitos básicos de ciência, o indivíduo pode se tornar alvo de desinformação e charlatanismo. Fica muito mais difícil analisar certos problemas que enfrentamos como sociedade e expressar uma opinião ponderada sobre diversos tópicos essenciais, como: aquecimento global, economia, preservação da biodiversidade, construção de hidrelétricas (e, de forma mais ampla, a crise energética) etc. Sem conhecimento científico básico, o cidadão fica, na verdade, privado de sua participação política e da possibilidade de tomar decisões e expressar opiniões conscientes.

Assim, fica clara a necessidade de aprender ciências na escola. Já temos justificado o ensino de muitos dos tópicos de Física, Química, Biologia e assim por diante. E por que ensinar Matemática, especificamente? Um primeiro motivo é que todas essas ciências dependem, de uma forma ou de outra, da linguagem da Matemática. Em Matemática, os estudantes aprendem a ler e interpretar gráficos (*gráficos não mentem, mas mentirosos usam gráficos*), mapas, dados estatísticos, equações que expressem a relação entre duas ou mais grandezas, entre outras habilidades importantes. Quanto à necessidade de geometria, Clements comenta que ela fornece uma maneira de refletir sobre nosso ambiente físico, além de ser uma ferramenta essencial no estudo de outros tópicos da própria Matemática e das Ciências (CLEMENTS, 2003). Sem se aprofundarem no estudo da geometria, os estudantes estão despreparados para prosseguir aprendendo sobre Ciências.

Em Heiede (2000), encontramos um comentário sobre as relações entre as GNE e a física, a filosofia e a arte. Para este autor, conhecer as GNE é de profunda importância para o professor. Esse conhecimento pode mudar seu conceito do que é matemática e a sua compreensão da própria geometria. Após seu contato inicial com as GNE, é provável que o professor passe a ensinar a própria geometria euclidiana de forma diferente, mesmo que não aborde as GNE diretamente com seus alunos.

As perguntas com que abrimos esse capítulo são difíceis de se responder, mas acreditamos ter dado uma justificativa razoável para a importância do ensino das GNE. No entanto, a maior parte dos professores de matemática da educação básica não têm a oportunidade de estudar tais geometrias na sua formação inicial, nem continuada. Podemos especular alguns motivos para a situação atual. Primeiro, os cursos de graduação, em geral, já tentam abordar uma quantidade gigantesca de conteúdo. Por isso, acaba havendo pouco espaço para adicionar mais um tópico de estudo. Segundo, as GNE são muitas vezes consideradas um tema difícil. Pode ser que haja receio de que uma turma de licenciandos, ou mesmo aqueles já atuam como professores, não possam acompanhar uma disciplina ou curso de extensão abordando as GNE; ou ainda, pode não haver alguém qualificado para ministrar um curso assim. E, por fim, o material em português destinado à educaçao básica e a seus professores é bem escasso.

Reconhecemos a dificuldade de lidar com o primeiro dos motivos alistados acima. Não pretendemos aqui defender a inclusão de mais uma disciplina nos cursos de licenciatura em matemática no país. Mas, com base nos autores já citados, defendemos que haja maior atenção para o ensino de geometria, e que os professores em formação tenham algum contato com as GNE.

Também é verdade que as GNE são uma área profunda e complexa da matemática. Porém, isso não quer dizer que não haja nenhuma transposição didática capaz de conferir algum conhecimento sobre o tema. Uma das maiores dificuldades desse trabalho esteve em selecionar que subtópicos seriam relevantes e acessíveis para um contato inicial. Acreditamos ter reunido um conteúdo interessante e enriquecedor para o professor, efetivo ou em formação. E a utilização desse material traz ainda outra vantagem. Pode ser uma oportunidade para o professor revisitar definições e teoremas da geometria euclidiana.

Dito isto, abordar as GNE em uma oficina, curso de extensão ou durante uma disciplina geralmente pressupõe a existência de algum material de apoio. Algumas dissertações de mestrado sobre o tema já foram escritas, como Brito (1995) e Ribeiro (2013). Também há alguns artigos com propostas de atividades pedagógicas abordando o tema.

A dissertação de Ribeiro deu origem a Ribeiro e Gravina (2013), que tem como principal aspecto o uso de *sotfware* de geometria dinâmica. Outro exemplo é Kaleff e Nascimento (2004), mostrando como abordar o uso de uma métrica diferente da usual usando uma analogia relativamente simples.

Também há disponível o pequeno livro de Coutinho (2001), intitulado *Convite às geometrias não euclidianas*. Neste livro, os modelos criados por Beltrami, conhecidos como disco de Klein e disco de Poincaré, são apresentados. A partir dos chamados quadriláteros de Saccheri e Lambert, é feito um estudo de algumas propriedades da geometria hiperbólica. São demonstrados alguns teoremas importantes que caracterizam essa geometria. Outros capítulos tratam da geometria esférica.

Apesar disso, podemos dizer que ainda há pouco material em português. Por exemplo, desses que citamos aqui, apenas a dissertação de Brito entra em detalhes sobre o desenvolvimento histórico das GNE. É claro que nem toda abordagem no ensino de matemática vai incluir uma longa consideração sobre a história dos conceitos em questão. Mas, devido à grande importância em usar a história das ideias no ensino de matemática, dedicamos um capítulo inteiro do material de apoio que propomos a uma exposição da evolução do pensamento geométrico. Julgamos também que essa exposição seja ao mesmo tempo enriquecedora e acessível para o professor da educação básica.

No próximo capítulo, é apresentado o material de apoio que produzimos. O capítulo explica a seleção dos tópicos que nele foram incluídos. O material completo está disponível em anexo no final deste trabalho. No terceiro e último capítulo, fazemos algumas considerações finais sobre o assunto.

2 Apresentação do material de apoio

Neste capítulo, vamos apresentar um material de apoio para ensino de geometrias não euclidianas, direcionado para professores em formação inicial ou continuada. Este contém três capítulos. O primeiro deles trata da evolução histórica das ideias que resultaram na criação das GNE. O segundo capítulo apresenta definições e teoremas da geometria euclidiana que serão necessários para o estudo de um modelo da geometria hiperbólica. O terceiro apresenta este modelo, conhecido como disco de Poincaré. Uma cópia completa do material está disponível em anexo.

2.1 Primeiro capítulo: O quinto postulado de Euclides

Na primeira seção do capítulo 1 do material de apoio produzido por nós, *As primeiras formas geométricas*, temos uma breve discussão sobre as origens da geometria. Muitos povos da antiguidade desenvolveram conceitos de geometria, mas nossa herança provém primariamente dos gregos. E eles, por sua vez, foram influenciados principalmente pelos egípcios e babilônios, por isso a seção foca nesses dois povos. Já citamos Boyer e Merzbach (2012) como fonte de informações sobre a matemática dessa época, incluindo suas motivações. Outra fonte que se aprofunda ainda mais nos seus problemas de interesse e métodos de resolução é Katz (2009). Com uma abordagem similar, temos Cooke (2011). Esta última fonte inclui uma discussão sobre a diferença entre *história* e *herança*, que foi influente na criação do material de apoio.

Os egípcios e os mesopotâmios não se preocupavam tanto com a justificação dos métodos que usavam, não havendo grande distinção entre os resultados que eram exatos e as aproximações. Esse modo de pensar está em contraste com a tradição geométrica grega, introduzida na segunda seção. Esta seção, entitulada *Os primeiros postulados*, apresenta a obra mais influente da matemática grega, *Os Elementos* de Euclides. Apresentamos os postulados, traduzidos do inglês, conforme aparecem na tradução do texto em grego editada em Fitzpatrick (2007).

Alistamos os postulados porque foi a discussão sobre estes que mais tarde daria origem às GNE. Embora os quatro primeiros sejam bem simples, e não exijam maiores explicações, adicionamos um parágrafo e um diagrama como auxílio para entender o quinto postulado. É fato que este último é bem mais longo e complicado que os outros, o que foi questionado desde os dias do próprio Euclides.

A próxima seção, intitulada *Em busca de uma demonstração para o quinto postulado*, é a mais longa do material de apoio. Aqui são detalhadas algumas das críticas direcionadas contra o quinto postulado de Euclides desde os tempos antigos. Essas críticas ao quinto postulado muitas vezes vieram acompanhadas de uma tentativa de demonstração. Historicamente, foram muitas as tentativas, dadas por matemáticos de formações bem diferentes. Tentar discutir todas essas tentativas estaria bem além do escopo do material de apoio. Uma fonte que tenta fazer isso é Rosenfeld (1988), no seu segundo capítulo. Todavia, incluímos em nosso material bastante conteúdo sobre esse assunto. Cada crítica e tentativa de demonstração do quinto postulado introduz alguma característica das GNE, ou outro fato matemático interessante.

O primeiro matemático que mencionamos por nome é Posidonius. A crítica que ele faz ilustra os perigos de se mexer com as definições de objetos matemáticos. A sua definição de fato resolveria o problema com o quinto postulado, exceto que a definição por si mesma deveria ser considerada um postulado; pois confere às retas paralelas uma propriedade que deveria ser demonstrada.

A sugestão de Posidonius foi preservada em um comentário dos Elementos escrito por Proclus. Nessa obra, Proclus rejeita essa definição, e aponta falhas na abordagem de outros matemáticos. A seguir, ele mesmo propõe uma demonstração do quinto postulado. Podemos encontrar um resumo desta “demonstração” em Rosenfeld (1988), e uma transcrição em Heath (1908, pp. 207, 208).

Na época de Proclus, o declínio da matemática grega já era evidente. As próximas contribuições interessantes sobre o assunto foram feitas por eruditos árabes. Em Cooke (2011) encontramos algumas das suas obras dedicadas ao quinto postulado. Nesse sentido, Rosenfeld (1988) dá um relato bem mais abrangente, incluindo a transcrição de trechos dessas obras. Essas fontes nos permitiram escrever sobre as tentativas de demonstração dadas por Thābit ibn Qurra e Omar Khayyam.

Séculos depois, quando a matemática voltou a florescer na Europa, o inglês John Wallis também deu uma “demonstração” para o quinto postulado. Influenciado por ele, houveram as tentativas posteriores de Saccheri e Lambert. Todos esses nos ensinam fatos notáveis sobre as GNE, e por isso foram incluídos. (ROSENFELD, 1988; EVES, 1983)

A quarta e última seção do primeiro capítulo leva o título *Um mundo inteiramente novo*; assim Bolyai Janós havia descrito a geometria hiperbólica que tinha criado. Tentamos explorar as ideias originais de Gauss, Bolyai e Lobachevsky mantendo o texto acessível. O livro escrito por Gray (2011) é dedicado exclusivamente à geometria no século XIX e expõe detalhes da matemática desenvolvida pelos três. Também são incluídos trechos de suas cartas em que tratam das GNE, o que é especialmente importante no caso de Gauss, pois ele não publicou nada sobre o tema. O livro de Rosenfeld (1988), que já citamos várias vezes, também é boa fonte histórica, incluindo tanto trechos de obras como de cartas. Uma exposição mais concisa pode ser consultada no capítulo sobre as GNE em Cooke (2011). Este último livro dá algumas razões para as GNE terem tido aceitação lenta nos anos logo após sua criação. Em Gray (2011) e Eves (1983) também encontramos explicações similares.

A importância dos modelos criados por Beltrami e da nova abordagem enfatizada por Riemann é mencionada na maioria dos livros acima, assim como em Katz (2009). Para uma análise das duas principais obras de Beltrami descrevendo os seus modelos, consultamos Arcozzi (2012).

Acreditamos que a inclusão da evolução dos conceitos matemáticos que levaram à criação das GNE dá uma outra dimensão a sua aprendizagem. Esta posição concorda com os princípios da educação matemática delineados por Ávila (2011), que citamos no capítulo anterior. Outra obra a mencionar a importância de usar história ao ensinar matemática é Berlinghoff e Gouvêa (2008). Em concordância com a visão de seus autores, esperamos ter retratado a matemática como um corpo de conhecimentos interligado, vivo e em constante desenvolvimento. Além disso, eles escrevem:

> Estamos convencidos de que saber a história de um conceito ou técnica matemática leva a um entendimento mais profundo e mais rico do próprio conceito ou técnica. (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008, p. 3)

Esperamos que o conteúdo no primeiro capítulo do material de apoio possa atingir esse objetivo.

2.2 Segundo capítulo: A geometria de Euclides

O segundo capítulo do material de apoio foi elaborado como preparação para o terceiro, onde é apresentado o disco de Poincaré. Apesar de ser o segundo, ele surgiu espontaneamente enquanto escrevíamos o que agora é o terceiro. Para entender melhor o modelo do disco, seria necessário pausar algumas vezes para dar certas definições e demonstrar teoremas da geometria euclidiana. Resolvemos mover estes subtópicos para um capítulo separado.

Embora as definições e resultados apresentados aqui sejam essenciais para se entender o modelo do disco de Poincaré, eles são importantes dentro da própria geometria euclidiana. Por isso, estudar esse capítulo, independente do interesse nas GNE, dá ao leitor a oportunidade de rever ou conhecer alguns conceitos geométricos importantes que não são usualmente tratados durante a formação inicial do professor

A primeira seção dá a definição de ângulo entre circunferências, e explicamos por que essa definição faz sentido. A segunda seção apresenta o surpreendente teorema de Jacob Steiner sobre potência de pontos, que precisaremos usar posteriormente.

Na terceira seção, temos uma nova definição, dessa vez de uma transformação geométrica chamada inversão em relação a um círculo. Mostramos uma maneira de construir o inverso de um ponto, dado um círculo qualquer no plano. Aproveitamos para dar algumas informações sobre transformações geométricas.

A consistência interna do modelo do disco de Poincaré depende do teorema apresentado na última seção do segundo capítulo. Esta é uma demonstração de existência e unicidade. Infelizmente, durante sua formação inicial muitos professores de matemática tiveram pouco contato com demonstração desse tipo. Aqui temos mais uma oportunidade de revisitar uma lacuna comum. A prova foi redigida com especial atenção à clareza dos passos.

2.3 Terceiro capítulo: A geometria do disco de Poincaré

Finalmente, é neste capítulo que apresentamos o modelo da geometria hiperbólica conhecido como disco de Poincaré.

Há muito tempo, a comunidade matemática desistiu de dar uma definição de ponto, reta e plano. Estes são considerados conceitos primitivos, com os quais estamos habituados a lidar na geometria euclidiana. Mas dentro do modelo do disco esses conceitos primitivos se expressam de outra maneira, diferente da habitual.

Quando um matemático representa uma figura no plano por meio de um diagrama, fica subtendido que o plano se extende por todas as direções, e que o diagrama representa apenas uma porção do plano. Nesse sentido, o modo como lidamos com o plano hiperbólico é totalmente diferente dentro do disco de Poincaré. A primeira seção do terceiro capítulo vem explicar como fazemos isso.

A segunda seção trata dos pontos e das retas dentro do modelo. Aqui falamos sobre os pontos ideais, representados sobre a borda do disco, e que não possuem análogo na geometria euclidiana. As retas são representadas como arcos de circunferência. Nesse ponto, já fizemos uso de boa parte do conteúdo do segundo capítulo.

Já que as retas são representadas dentro do disco de um modo não usual, isto é, pelo que seriam arcos de circunferência na geometria euclidiana, dedicamos uma seção para falar sobre as propriedades dessa reta. Mostramos aqui como medir ângulos na interseção entre duas retas e como é possível que por um ponto fora de uma reta passe mais de uma reta paralela.

Representar todo o plano hiperbólico dentro de uma região limitada do plano euclidiano exige o uso de uma métrica apropriada. Esta métrica é apresentada na quarta seção. Aqui fica evidente como é possível representar um plano inteiro dentro de uma região aparentemente pequena. Mostramos também porque não há incoerência quando dizemos que os pontos ideais estão há uma distância infinitamente grande de qualquer ponto no interior do disco.

Uma circunferência é o lugar geométrico constituído por pontos equidistantes de um determinado ponto. Se estamos usando uma métrica diferente, faz sentido se perguntar qual é o formato das circunferências dentro do modelo. Este ponto é abordado na quinta e última seção do capítulo.

Muito do material consultado para fazer esta transposição didática pode ser encontrado em Coutinho (2001), Charpentier, Ghys e Lesne (2010), Ribeiro (2013) e Goodman-Strauss (2001).

Como comentado no primeiro capítulo do material de apoio, os modelos concebidos por Beltrami, incluindo o disco de Poincaré, foram de grande importância na aceitação da geometria hiperbólica. Tais modelos demonstraram a sua consistência em relação à geometria euclidiana e permitiram a visualização de suas propriedades. Esperamos que o terceiro capítulo tenha apresentado o disco de Poincaré de forma que o leitor também possa visualizar algumas dessas propriedades.

3 Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo apresentar um material destinado ao aperfeiçoamento de professores de matemática. Acreditamos que o material proposto, disponibilizado aqui em anexo, possa ser utilizado na realização de uma oficina, em um minicurso ou ainda como material de apoio para discutir as geometrias não euclidianas dentro das disciplinas de geometria de cursos de licenciatura em matemática.

Tendo dito isto, o material evidentemente tem suas limitações. Na última década, tem sido feita muita pesquisa sobre o uso de *softwares* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, em aulas de matemática. E já temos até mesmo algumas propostas de atividades abordando o disco de Poincaré usando o GeoGebra. O material de apoio, no entanto, se limita a direcionar o leitor para Ribeiro e Gravina (2013). Futuramente, almejamos elaborar atividades específicas para este material que desenvolvemos.

Adicionalmente, o primeiro capítulo do material foi escrito por último. Embora ele antecipe várias propriedades da geometria hiperbólica, os capítulos subsequentes fazem poucas menções ao que já havia sido discutido anteriormente. Nesse sentido, o material ainda está um pouco fragmentado.

Para um estudo mais profundo da geometria hiperbólica usando o disco de Poincaré, seria excelente uma discussão sobre as *isometrias* dentro do modelo, isto é, transformações geométricas que preservam a distância entre os pontos da figura. Por exemplo, as reflexões em relação às retas hiperbólicas são dadas por inversões em relação aos (arcos de) círculos que as representam. Já havíamos falado sobre transformações geométricas no capítulo 2, onde explicamos como são definidas essas inversões. Então a fundação está preparada para a adição de um capítulo exclusivamente sobre este tópico. Usando combinações de reflexões em relação a retas hiperbólicas, é possível compor translações e rotações de figuras dentro do disco de Poincaré. Estudar estas transformações, ainda mais com o auxílio de um software de geometria dinâmica, tem o potencial de possibilitar um entendimente bem mais profundo das propriedades de figuras dentro da geometria hiperbólica.

Nós citamos anteriormente o trabalho de Heiede (2000), em que o autor defende a importância das GNE, de sua história e das suas conexões com outras áreas da matemáticas, das ciências, da arte e da filosofia. Essas conexões não estão claras no material de apoio. Existe apenas uma breve menção aos receios de Gauss quanto à recepção das GNE, por seu conflito com as ideias expressas pelo filósofo Immanuel Kant. O seu impacto, é claro, vai além disso, apesar desse ser um óbvio ponto de partida caso posteriormente adicionemos uma discussão sobre o assunto. Bernhard Riemann, quase profeticamente, escreveu sugerindo que possivelmente as GNE seriam a melhor alternativa para descrever o espaço dentro da física. Isto de fato se concretizou com as teorias da relatividade desenvolvidas por, entre vários outros, Poincaré, Einstein e Hilbert. O próprio Poincaré tornou o disco que agora leva seu nome ainda mais relevante dentro da matemática ao mostrar sua aplicação no estudo de certas funções. Ainda não sabemos se é possível e como abordar essas aplicações dentro do material que propomos. E o artigo de Ribeiro e Gravina (2013) comenta a relação do disco de Poincaré com algumas obras famosas do artista M. C. Escher, que nem sequer mencionamos.

Outra proposta futura é incluir um capítulo usando tesselações para abordar as GNE. Este seria muito provavelmente um tópico ao mesmo tempo divertido, interessante e acessível. As tesselações na geometria hiperbólica tem propriedades bem diferentes daquelas da geometria euclidiana. Aliás, esse assunto já é interessantes dentro da geometria euclidiana, então seria uma oportunidade de revisitá-lo. Heiede (2000) sugere que professores de matemática desenvolvam atividades com tesselações dentro do disco de Poincaré com seus alunos. Então essa é um maneira do material de apoio ter um impacto direto dentro da sala de aula.

Referências

ARCOZZI, N. Beltramis models of non-euclidean geometry. In: *Mathematicians in Bologna 1861–1960*. [S.l.]: Springer, 2012. p. 1–30. Citado na página 25.

ÁVILA, G. *Várias faces da Matemática: Tópicos para licenciatura e leitura geral*. 2. ed. [S.l.]: Blucher, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 25.

BARRETO, M. d. S.; TAVARES, S. Do mito da geometria euclidiana ao ensino das geometrias não euclidianas. *Vértices*, v. 9, n. 1, p. 73–82, 2010. Citado na página 18.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. [S.l.]: Blucher, 2008. Citado na página 25.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. 3. ed. [S.l.]: Blucher, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.

BRITO, A. d. J. *Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995. Citado na página 20.

BROWN, K. E. Why teach geometry? *The Mathematics Teacher*, JSTOR, v. 43, n. 3, p. 103–106, 1950. Citado na página 18.

CHARPENTIER, É.; GHYS, E.; LESNE, A. *The scientific legacy of Poincaré*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2010. v. 36. Citado na página 27.

CLEMENTS, D. H. Teaching and learning geometry. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, p. 151–178, 2003. Citado na página 20.

COOKE, R. L. *The history of mathematics: A brief course*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

COUTINHO, L. *Convite às geometrias não-euclidianas*. 2. ed. [S.l.]: Interciência, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 27.

DUDLEY, U. What is mathematics for. *Notices of the AMS*, v. 57, n. 5, p. 608–613, 2010. Citado na página 19.

EVES, H. *Great Moments in Mathematics (After 1650)*. [S.l.]: Mathematical Association of America, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

FITZPATRICK, R. *Euclids elements of geometry*. [S.l.: s.n.], 2007. Citado na página 23.

GOODMAN-STRAUSS, C. Compass and straightedge in the poincaré disk. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 108, n. 1, p. 38–49, 2001. Citado na página 27.

GRAY, J. *Worlds out of nothing: a course in the history of geometry in the 19th century*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

HEATH, T. L. *The thirteen books of Euclid's Elements*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1908. v. 1. Citado na página 24.

HEIEDE, T. The history of non-euclidean geometry. In: KATZ, V. (Ed.). *Using history to teach mathematics: An international perspective*. [S.l.]: The Mathematical Association of America, 2000. cap. 21, p. 201–211. Citado 3 vezes nas páginas 20, 29 e 30.

KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. Atividades introdutórias às geometrias não-euclidianas: o exemplo da geometria do táxi. *Boletim Gepem*, v. 44, p. 11–42, 2004. Citado na página 21.

KATZ, V. J. *A history of mathematics: An introduction*. 3. ed. [S.l.]: Pearson, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 19, 23 e 25.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? *A educação matemática em revista*, n. 04, p. 03–13, 1995. Citado na página 17.

RIBEIRO, R. S. *Geometrias não-euclidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinâmica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 27.

RIBEIRO, R. S.; GRAVINA, M. A. Disco de poincaré: uma proposta para explorar geometria hiperbólica no geogebra. *Revista Professor de Matemática Online*, v. 1, n. 1, p. 53–66, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 21, 29 e 30.

ROSENFELD, B. A. *A history of non-Euclidean geometry: evolution of the concept of a geometric space*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1988. Citado na página 24.

SANFORD, V. Why teach geometry? *The Mathematics Teacher*, JSTOR, v. 28, n. 5, p. 290–296, 1935. Citado na página 18.

Anexos

ANEXO A – Uma visita ao disco de Poincaré

Uma visita ao disco de Poincaré

Arley Antes Souza

Santarém-PA, 2019

Capítulo 1

O quinto postulado de Euclides

Apesar de muitos considerarem a matemática uma disciplina fria e difícil, existe alguma controvérsia entre o público leigo quanto a até que ponto a matemática é conectada à realidade. Alguns acham "matemática" em toda parte, e para isso podem citar a ubiquidade das operações aritméticas mais simples ou o fato de "encontrarem" formas geométricas, como triângulos e retângulos, em todo lugar. Por outro lado, há aqueles que caçoam do realismo dos problemas comumente encontrados nos livros didáticos, sobre o Joãozinho que foi comprar 54 melancias ou a Maria que precisa calcular os horários dos trens. A verdade é que as ideias matemáticas tiveram que ser inventadas por nós. Sendo assim, são marcadas por inexatidões e falhas, criticadas e corrigidas gradativamente. Considerando essa sua natureza, podemos investigar seu desenvolvimento histórico e encontrar suas raízes. Ao fazer isso, descobrimos um corpo de conhecimento vivo, em desenvolvimento; e, como estudantes ou professores, podemos atingir um entendimento mais profundo de suas ideias e conceitos.

Neste capítulo, vamos comentar brevemente as origens do pensamento geométrico. Nosso objetivo não é fazer um estudo aprofundado desse tema, mas fornecer um plano de fundo da criação da matemática grega. Em especial, vamos ver as consequências da escolha por Euclides do seu quinto postulado, e como a crítica a essa escolha foi combustível para alguns desenvolvimentos matemáticos ao longo dos séculos, culminando na descoberta de novas geometrias! Nesta jornada, apresentaremos alguns aspectos conceituais da geometria hiperbólica, que é modelada pelo disco de Poincaré, que vamos visitar no terceiro capítulo deste material.

1.1 As primeiras formas geométricas

É muito difícil rastrear a origem dos conceitos matemáticos mais primitivos, como é o caso de quase tudo pré-histórico. Provavelmente nunca vamos saber quem foram os primeiros humanos a chamarem uma figura de quadrado, e outra de círculo. Por isso, vamos nos concentrar nos registros que temos da tradição geométrica no Egito e na Mesopotâmia, que provavelmente foram as culturas que tiveram maior influência sobre a matemática grega.

A palavra geometria quer dizer literalmente "medir terra", o que descreve bem o trabalho dos agrimensores egípcios. Numa sociedade cuja subsistência e riqueza dependia muito do cultivo da pequena faixa de terra fértil ao longo do rio Nilo, é natural que alguns conceitos geométricos tenham se desenvolvido a partir de motivações práticas. Segundo nos relata um dos mais proeminentes historiadores da Antiguidade, Heródoto, em cada ano o rio Nilo enchia e, na sua baixa, os campos de cultivo precisavam ser novamente medidos e distribuídos. O imposto pago por cada agricultor era proporcional ao seu pedaço de terra. Assim, o rei mantinha inspetores para medir cada terreno e cobrar o devido imposto. Da necessidade de medir esses campos, os egípcios desenvolveram métodos para calcular áreas.

Infelizmente, poucos papiros egípcios contendo textos matemáticos foram preservados até nossos dias. O mais famoso desses, conhecido como Papiro de Rhind, contém uma lista de 87 problemas resolvidos com diversos métodos matemáticos. Esses papiros revelam que os egípcios podiam calcular com exatidão a área de figuras simples, como triângulos e vários tipos de quadriláteros. Não apenas isso, mas eles sabiam calcular com precisão a área de círculos. Apesar de não terem uma noção parecida com a nossa do número π, os seus cálculos assumem implicitamente que o valor de $\frac{\pi}{4}$ seja $(\frac{8}{9})^2$, uma aproximação correta até a terceira casa decimal.

É surpreendente que o registro mais antigo do Teorema de Pitágoras em um texto egípcio date de 300 AEC, quando a influência grega já estava bem estabelecida. Talvez os egípcios não conhecessem esse resultado ou, se conheciam, esse fato não foi preservado. Entretanto, outro povo da antiguidade parece ter conhecido bem esse teorema: os mesopotâmios.

Na região entre os rios Eufrates e Tigre, mais ou menos onde hoje é o Iraque, floresceram diversas civilizações que mostraram notável habilidade matemática. Essas civilizações muitas vezes são chamadas coletivamente de mesopotâmios. Diferentemente dos egípcios, a maior parte dos escritos preservados desses povos estão na forma de tabuinhas de argila escritas utilizando um estilete feito de cana. Como as marcas na argila tem forma de cunha, esse tipo de escrita é conhecida como cuneiforme.

O que as tabuinhas revelam sobre a matemática mesopotâmia é fantástico, e sua influência é sentida até hoje. Por exemplo, foram os mesopotâmios que criaram um sistema numérico sexagesimal, e é por isso que nós ainda dividimos uma hora (ou um grau) em sessenta minutos, e um minuto em sessenta segundos.

Assim como os egípcios, os mesopotâmios desenvolveram métodos para calcular as áreas de figuras planas. Lançando mão de diversos algoritmos, os escribas podiam calcular as áreas de figuras mais complicadas, e também o volume de vários sólidos. Mas parece que a geometria mesopotâmia era mais rebuscada que a egípcia em um aspecto: enquanto os egípcios se concentraram quase totalmente no cálculo de áreas, os mesopotâmios estudaram relações mais abstratas entre figuras. Em particular, as tabuinhas mostram que eles já conheciam o Teorema de Pitágoras uns mil anos antes dos dias de Pitágoras. Não somente isso, eles descobriram algum método para calcular ternas pitagóricas, isto é, ternas de números inteiros que satisfazem $\mathrm{a}^2 = \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2$. Listas com tais números foram preservadas.

Como se vê, tanto os egípcios como os mesopotâmios desenvolveram a matemática que necessitavam para a manutenção de suas sociedades. Quais as principais diferenças entre a matemática desenvolvida por esses dois povos, e aquela dos gregos? Como veremos na próxima seção, o que geralmente chamamos de matemática grega guarda poucas semelhanças com essas raízes. Não há evidência de que os egípcios e mesopotâmios se aprofundaram em se perguntar por que seus métodos realmente funcionavam. As explicações por trás de seus algoritmos parecem ter sido transmitidas oralmente por um longo tempo. Os gregos, por outro lado, passaram a enfatizar as justificativas de seus enunciados. Não apenas isso, suas descobertas começaram a expressar relações cada vez mais abstratas entre figuras geométricas e se distanciaram muito da maior parte das aplicações práticas. De fato, enquanto alguma matemática ainda era necessária em toda a Grécia, o tipo de cálculo que interessava a escribas e engenheiros se desenvolveu de forma mais ou menos independente. A matemática grega era feita por pessoas que tinham tempo para isso e, estando livres de outras preocupações, podiam se dedicar a atividades recreativas. [2]

1.2 Os primeiros postulados

Não se sabe com certeza a quem se devem as primeiras demonstrações em matemática como conhecemos hoje, apesar dessa honra ser muitas vezes creditada a Tales de Mileto. Numa demonstração, o matemático tenta deduzir certas propriedades a partir de outras mais elementares, numa série de passos lógicos. É claro que ele sempre precisará começar de pelo menos algumas premissas básicas e partir daí. De acordo com certos comentários que chegaram a nossos dias, vários matemáticos tentaram organizar as tais premissas básicas da geometria, mas somente uma obra foi preservada até nossos dias. Não somente preservada, essa obra se tornou a segunda mais impressa, traduzida e reeditada de toda a história humana, atrás somente da Bíblia. Este famoso texto matemático se chama *Os Elementos*, escrito por Euclides em cerca de 300 AEC.[1]

Os Elementos estavam organizados em 13 volumes, que tratavam dos fundamentos, ou elementos, de toda a matemática grega. Alguns volumes eram dedicados à geometria espacial, outros à importante discussão sobre incomensurabilidade. Mas, sem dúvida, o mais famoso é o primeiro, que trata exclusivamente de geometria plana. Nesse livro, Euclides assume cinco axiomas e cinco postulados, e a partir deles deduz as propriedades elementares das figuras planas, culminando numa bela demonstração do Teorema de Pitágoras e de seu recíproco.

Note-se que Euclides fazia uma distinção entre axioma e postulado, que já não é mais relevante hoje. Os axiomas eram noções comuns, aplicáveis em qualquer área do conhecimento. Por exemplo, o primeiro axioma dizia que se duas coisas forem iguais a uma terceira, então elas mesmas são iguais entre si. Os postulados eram as premissas básicas da geometria, a partir dos quais Euclides ergueria um edifício matemático. Estes são os cinco postulados, traduzidos livremente do inglês para o português, a partir da edição em inglês de Fitzpatrick [9]:

[1] Surpreendentemente, à parte seu nome e a época em que viveu, sabe-se quase nada sobre o próprio Euclides.

1. Que seja postulado traçar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer ponto;
2. E produzir (ou: aumentar, continuar a traçar) uma linha reta finita (ou seja, um segmento) continuamente em linha reta;
3. E desenhar um círculo com qualquer centro e raio;
4. E que todos os ângulos retos sejam iguais uns aos outros;
5. E que, se uma linha reta cruzando duas outras linhas retas tem ângulos internos de um mesmo lado (somados) menores que dois ângulos retos, então, se produzidas (traçadas) ao infinito, as duas outras linhas retas se encontram naquele lado cuja soma é menos de dois ângulos retos.

É clara a diferença entre os primeiros quatro postulados e o quinto. Um postulado, por ser uma premissa básica, deveria ser "autoevidente", o mais simples possível. Ao passo que os quatro primeiros são, de fato, afirmações muito simples, o quinto postulado é bem mais longo e complexo. A figura a seguir ajuda a entender o que Euclides está afirmando. Seja r uma reta que intersecta outras duas, s e t. Euclides diz que, se somarmos os dois ângulos internos em um mesmo lado de r e encontrarmos um valor menor do que dois ângulos retos, ou 180°, então as retas s e t se cruzam nesse lado.[2]

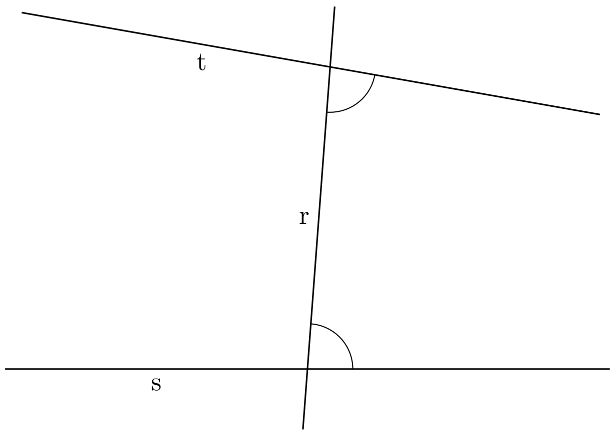


Figura 1.1: Segundo o quinto postulado de Euclides, as retas s e t se intersectam do lado em que a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos.

De certo modo, o quinto postulado de Euclides se parece mais com as proposições que são demonstradas ao longo do livro do que com os outros quatro postulados. Na verdade, desde a antiguidade muitos matemáticos parecem ter desconfiado que esse postulado deveria ser um teorema, e que, se não era apresentado como tal, era porque Euclides havia sido incapaz de demonstrá-lo. Dessa suspeita decorreram muitas tentativas de demonstração, e essa discussão ficou conhecida por muito tempo como *teoria das paralelas.*

1.3 Em busca de uma demonstração para o quinto postulado

Da antiguidade ao século XIX, muitas técnicas diferentes foram empregadas na tentativa de demonstrar o quinto postulado.[3] Alguns tentaram dar uma nova definição, supostamente mais clara, de retas paralelas; mas, na própria definição, incluíram sem perceber uma afirmação equivalente ao quinto postulado. Outros desenvolveram vários passos detalhados, como em uma demonstração, mas em algum ponto tacitamente utilizaram outro pressuposto, também equivalente a esse postulado. É notável que alguns matemáticos perceberam que estavam usando algo fora dos outros quatro postulados para demonstrar o

[2] Na linguagem de Euclides, as retas s e t seriam o que chamamos hoje de segmentos. Por isso ele diz que, se "prolongadas ao infinito", vão se encontrar.

[3] Talvez a primeira obra dedicada a demonstrar o quinto postulado tenha sido escrita por Arquimedes não muito tempo depois da publicação dos Elementos. Essa obra, chamada *Sobre linhas paralelas*, não sobreviveu até nossos dias, mas é citada pelos matemáticos árabes da Idade Média.

quinto, e enunciaram isso explicitamente, sugerindo postulados alternativos. Por fim, alguns geômetras lançaram mão de técnicas da lógica, como redução ao absurdo, para tentar excluir qualquer possibilidade distinta daquela especificada no quinto postulado. Por um motivo ou por outro, é claro, todas essas tentativas falharam. Aquelas que não continham outros erros lógicos sempre incluíam alguma afirmação equivalente ao resultado que se queria provar.

No time dos que tentaram redefinir o que eram retas paralelas, jogou Posidonius, matemático grego do primeiro século antes de Cristo. Euclides havia definido como paralelas as retas que, se prolongadas indefinidamente, nunca se tocavam. Posidonius, por outro lado, definiu como paralelas as retas (no mesmo plano) que 'nunca se aproximam nem se separam'; isto é, todos os segmentos perpendiculares traçados a partir de uma das retas até a outra são congruentes. Essa definição confere às retas paralelas uma propriedade que precisaria ser demonstrada, por isso ela mesma precisa ser considerada um postulado. Na geometria hiperbólica, as retas paralelas não são equidistantes, ou seja, não permanecem a uma distância fixa uma da outra.

Proclus viveu no quinto século da Era Comum, quando a matemática grega já estava em decadência. Ele editou uma versão comentada do primeiro volume dos Elementos muito importante, entre outros motivos, por incluir informações sobre história da matemática não encontradas em nenhuma outra obra que tenha sobrevivido. Nessa edição, Proclus critica uma "demonstração" dada por Ptolomeu e apresenta sua própria, resumida a seguir.

Proclus argumenta que, em um ângulo qualquer, a distância entre seus lados se torna cada vez maior conforme nos afastamos do vértice. Esta distância pode ser maior que qualquer valor finito. Sejam então duas retas paralelas, uma delas cortada por uma terceira, como na Figura 1.2. Para Proclus, a distância entre os lados de $\angle GFB$ vai se tornar cada vez maior, até ultrapassar a distância entre AB e CD. Nesse momento, a reta EG intersecta CD. [12]

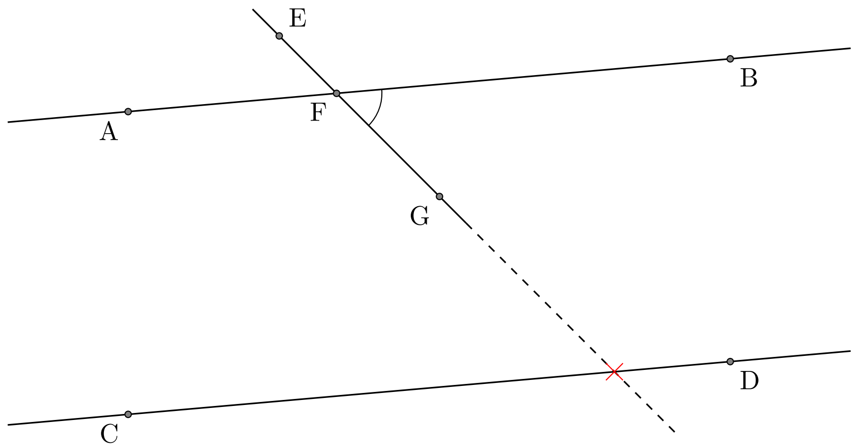


Figura 1.2: Segundo o lema de Proclus, se uma reta EG corta uma reta AB, paralela a CD, então EG também corta CD.

Sabendo disso, Proclus considera duas retas (AB e CD, na Figura 1.3) se cruzando com uma terceira, tais que a soma dos ângulos internos de um mesmo lado é menor do que dois retos. Euclides havia postulado que essas retas se cruzariam desse lado. De posse de seu lema, Proclus finaliza sua tentativa de demonstração. Seja chamado de E o vértice que está sobre AB. Passando por E, ele traça uma paralela a CD, que é EH na figura. De acordo com o resultado que acabara de demonstrar, sendo EH e CD paralelas, EB cortando EH, EB deve também cortar CD. Sendo assim, está "demonstrado" o quinto postulado.

O erro cometido aqui é bem sutil. Se Posidonius havia redefinido retas parelalas como retas equidistantes, Proclus considera apenas que a distância entre elas é finita. Apenas com essa premissa é possível demonstrar a primeira das suas proposições, de que uma reta cortando a primeira de duas paralelas também corta a segunda. Nem a premissa, nem esta proposição, são válidas na geometria hiperbólica. Duas retas hiperbólicas contidas no mesmo plano e que não se intersectam podem divergir por uma distância arbitrária uma da outra. Se não há um limite para a distância entre as duas, o argumento de Proclus se torna inválido. E, de fato, na geometria hiperbólica uma terceira reta que intersecte uma de duas paralelas não necessariamente intersecta a outra.

Na época de Proclus, que viveu logo antes do início da Idade Média, a matemática ocidental estava entrando em um prolongado período de decadência. Pouco teria sobrevivido, se não fosse pelo monumental esforço dos estudiosos árabes em preservar e traduzir as obras clássicas dos pensadores gregos. Além disso,

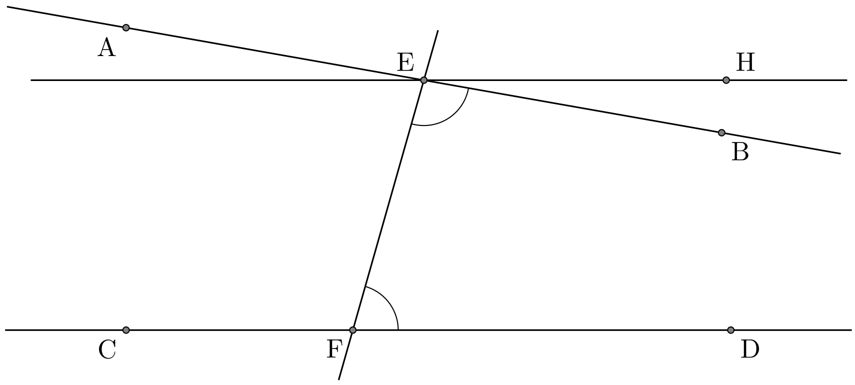


Figura 1.3: Diagrama ilustrando a tentativa de demonstração de Proclus, do quinto século.

os matemáticos árabes produziram muito material original. É deles que recebemos as palavras algoritmo, algarismo e álgebra. E, com respeito a geometria, os árabes tinham um fascínio especial pelo quinto postulado de Euclides. Não seria sequer possível, em apenas parte de uma seção, recontar todas as contribuições dos árabes relacionadas ao conceito de paralelismo e ao quinto postulado. Por isso, vamos comentar apenas algumas das ideias que se destacam.

Thābit ibn Qurra viveu durante o nono século em Bagdá, que poderia ser descrita como o centro intelectual do mundo da época. Sendo um dos maiores pensadores de seu tempo, Thābit traduziu diversas obras de matemáticos gregos, tendo inclusive revisado uma tradução anterior dos Elementos. Mas ele também foi um matemático original, e dedicou pelo menos dois trabalhos a demonstrar o quinto postulado de Euclides.

Em um de seus trabalhos, Thābit tenta justificar o uso de movimento dentro da geometria. Primeiro, ele faz uma crítica a certa demonstração de Euclides sobre congruência de triângulos, argumentando que fica implícito o uso de movimento em um de seus passos. Se essa demonstração era aceita por Euclides, então também deveria ser aceita a técnica que ele estava para introduzir. Argumentando que quando uma figura geométrica se move em linha reta todos seus pontos se movem em linhas retas e paralelas, Thābit consegue "demonstrar" o quinto postulado. Apesar desse argumento não ser exatamente de natureza geométrica, ele revela uma falha importante nos Elementos. Quando David Hilbert reformulou a geometria euclidiana usando 21 postulados ao invés de apenas cinco, um dos postulados é exatamente essa afirmação sobre congruência de triângulos que Euclides havia tentado demonstrar. A outra tentativa de Thābit não é menos notável. Ele estudou os chamados quadriláteros de Saccheri e de Lambert, que serão mencionados mais adiante.

Omar Khayyam, do décimo primeiro século e a quem são atribuídos muitos poemas persas, também se interessou pelo quinto postulado. Sendo um pensador de grande erudição, Khayyam estava muito bem familiarizado tanto com a geometria como com a filosofia gregas. Pelo visto, ele teve acesso a algumas obras de Aristóteles que não sobreviveram até nossos dias. Este fato é importante, pois Aristóteles, que viveu antes de Euclides, havia se interessado e escrito sobre o tema, criticando o tratamento que os matemáticos de sua época davam às retas paralelas.[4]

Khayyam primeiro criticou a natureza do quinto postulado, pois, segundo ele, Euclides havia feito questão de demonstrar alguns teoremas que pareciam até mais evidentes que esse postulado. A seguir, Khayyam analisou as tentativas de demonstração de outros árabes, apontando as falhas em suas deduções. Em especial, ele também rejeitou o uso de "movimento" dentro da geometria. Só então ele apresenta a sua demonstração. Khayyam usou algumas construções que já haviam sido apresentadas por Thābit, e que voltaram a aparecer com Saccheri e Lambert. A sua originalidade reside no fato de que sua tentativa pode ser considerada, de fato, uma demonstração; ao invés de aceitar tacitamente uma afirmação equivalente ao quinto postulado, ele usou outro axioma mais simples, que aparecia em certa obra de Aristóteles. Segundo Khayyam, "O Filósofo" havia dito: "Duas retas convergentes se intersectam, e é impossível que retas convergentes divirjam na direção de convergência." Esta afirmação é, de fato, equivalente ao quinto postulado.

Infelizmente, quando a matemática voltou a florescer na Europa, nem todas as obras escritas em árabe se tornaram imediatamente disponíveis. Alguns matemáticos europeus, trabalhando em tópicos pelos quais os árabes já haviam se interessado, redescobriram diversos resultados. Por isso, a despeito

[4]É provável que as críticas de Aristóteles tenham até mesmo influenciado a escolha dos postulados de Euclides.

da grande influência árabe sobre as ciências, algumas de suas descobertas não levaram o devido crédito. Apesar disso, sabemos que uma tentativa de al-Tusi[5], que viveu no século XIII, chegou às mãos de John Wallis, matemático inglês do século XVII. A partir daí, o interesse em se demonstrar o quinto postulado parece ter sido renovado.

Assim como Khayyam havia feito alguns séculos antes, Wallis baseou sua demonstração em outro axioma mais simples. Dada qualquer figura geométrica, ele postulou que fosse possível construir outra figura semelhante à primeira, mas de tamanho arbitrário. Novamente, tal axioma fazia muito sentido, já que resultados envolvendo figuras semelhantes eram conhecidos e amplamente utilizados desde a Grécia Antiga. Todavia, Wallis foi incapaz de demonstrar o quinto postulado usando apenas os outros quatro. Um dos fatos mais simples e ao mesmo tempo intrigante das geometrias não euclidianas é que *qualquer figura geométrica semelhante precisa ser necessariamente congruente.*

Já comentamos que o chamado *quadrilátero de Saccheri* havia sido estudado por Thabit; de fato, por vários outros matemáticos. Este Girolamo Saccheri foi um sacerdote jesuíta que estudou e ensinou filosofia e matemática em universidades italianas no final do século XVII e início do século XVIII. Saccheri teve um grande interesse no método de redução ao absurdo e, pelo visto, foi o primeiro a estudar a possibilidade do quinto postulado ser falso.[6] No entanto, nada indica que Saccheri tenha duvidado da veracidade do quinto postulado. Ele provavelmente acreditava que o postulado era verdadeiro e poderia ser demonstrado como teorema.

Saccheri, logo no início de seu tratado sobre o tema, constrói o seguinte quadrilátero: A partir de um segmento AB, ele ergue as perpendiculares AC e BD, e então une os pontos C e D com um segmento. Pela construção, os ângulos $\angle$BAC e $\angle$ABD são retos. Saccheri sabia (assim como Thābit e outros) que, se pudesse demonstrar que os ângulos $\angle$ACD e $\angle$BDC também são retos, tal resultado implicaria no quinto postulado. Assim, ele passa a demonstrar diversas propriedades deste quadrilátero, usando apenas os primeiros quatro postulados e as proposições dos Elementos que não dependiam do quinto. Logo Saccheri tem em mãos uma porção de fatos notáveis sobre o seu quadrilátero. Por exemplo, ele mostra que os ângulos $\angle$ACD e $\angle$BDC são congruentes. Mostra também que, se em um quadrilátero desse tipo um de tais ângulos é agudo, em todos os outros quadriláteros desse tipo no plano tais ângulos serão agudos; da mesma forma, se forem obtusos e se forem retos. A partir daí, Saccheri chama essas possibilidades de hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo obtuso e hipótese do ângulo reto.

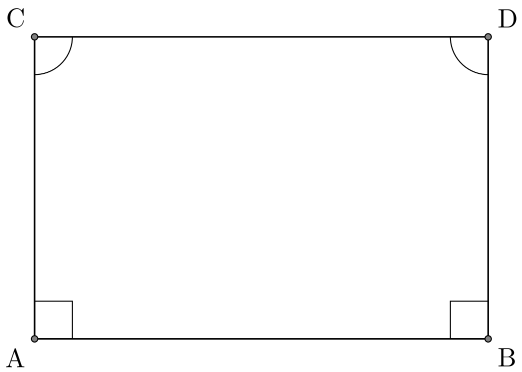


Figura 1.4: O quadrilátero de Saccheri é construído de tal modo que os dois ângulos da base sejam retos.

Usando redução ao absurdo, não foi difícil para Saccheri rejeitar a hipótese do ângulo obtuso. Estava implícito em Euclides que as retas não tem comprimento finito. Por isso, dentro da hipótese do ângulo obtuso, Saccheri foi capaz de imediatamente encontrar uma contradição. A hipótese do ângulo agudo, entretanto, se mostrou muito mais difícil de quebrar. Na verdade, Saccheri demonstrou uma grande variedade de teoremas da geometria hiperbólica! Por exemplo, ele foi capaz de mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo seria menor do que dois retos e que, por um ponto fora de uma reta, passariam infinitas retas paralelas. Incapaz de encontrar alguma contradição, o jesuíta penetrou o mais fundo que pode nessa hipótese, até mesmo fazendo considerações sobre "pontos no infinito". Saccheri não tinha uma definição muito clara do que eram esses pontos, mas, lançando mão deles, alegou encontrar uma contradição que certamente não deixou nem a si mesmo satisfeito.

[5] Comenta Rosenfeld que essa obra provavelmente foi atribuída a ele, mas havia sido escrita por outro matemático árabe.
[6] No método de redução ao absurdo, admite-se o contrário do que se deseja provar com a intenção de encontrar uma contradição.

Apesar do trabalho de Saccheri não ter tido grande impacto na comunidade matemática da época, outro matemático importante pelo visto teve acesso a sua obra e construiu sobre ela. Johann Lambert, assim como Euler, nasceu na Suíça e viveu no século XVIII. Usando os métodos de Saccheri, ele também escreveu um tratado sobre a teoria das paralelas, que foi publicado postumamente. Nesse tratado, Lambert, como Saccheri, faz um estudo minucioso de certo quadrilátero, que hoje leva seu nome. O quadrilátero de Lambert é construído de tal modo que três de seus ângulos são retos. A partir daí, Lambert desenvolve as consequências do quarto ângulo ser agudo, reto ou obtuso.

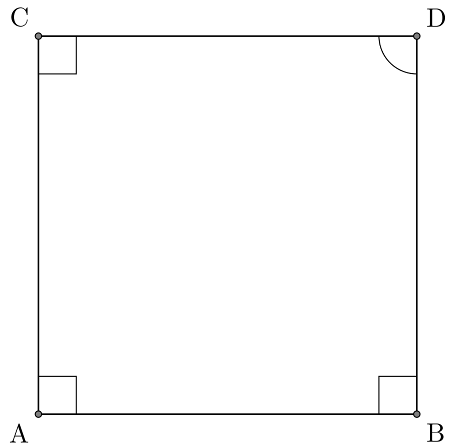


Figura 1.5: Por construção, um quadrilátero de Lambert possui três ângulos retos.

Embora Saccheri tivesse encontrado muitas consequências importantes da negação do quinto postulado, Lambert foi capaz de chegar ainda mais fundo. Por exemplo, ele também demonstrou que cada uma das hipóteses sobre o quarto ângulo corresponde a todos os triângulos terem a soma de seus ângulos internos menor do que, igual, ou maior do que dois retos. Mas, adicionalmente, ele percebeu que a diferença entre a soma dos ângulos internos de um triângulo e a soma de dois retos é proporcional à área deste triângulo. Quer dizer, dentro da hipótese do quarto ângulo ser agudo ou obtuso, a soma dos ângulos internos de triângulos de área muito pequena é bem próxima a dois retos. No entanto, quanto maior a área do triângulo, mais a soma de seus ângulos internos se distancia de dois retos.

Este fato demonstrado por Lambert tem grandes consequências sobre as geometrias não euclidianas. Wallis havia demonstrado anteriormente que a existência de figuras semelhantes, mas não congruentes, é suficiente para demonstrar o quinto postulado de Euclides. Agora é possível entender exatamente a relação entre as duas ideias. Na hipótese do ângulo reto, todos os triângulos tem seus ângulos internos somados equivalentes a dois retos, não importa sua área. Em contraste, dentro das outras possibilidades os ângulos internos e a área de um triângulo estão intimamente relacionados. Se dois triângulos são semelhantes, a soma de seus ângulo internos é a mesma. Mas, nesse caso, a medida de sua área também é a mesma. Por isso, triângulos (e outras figuras) semelhantes são obrigatoriamente congruentes.

Prosseguindo com as implicações desses resultados, temos um fato interessantíssimo sobre unidades de medida para comprimento. Na geometria euclidiana, podemos definir unidades de medida absolutas para ângulos. Por exemplo, um grau corresponde a uma parte entre 360 de uma circunferência, e um radiano corresponde a um arco de circunferência com a mesma medida do seu raio. Mas não existe maneira alguma de definir uma unidade de medida de comprimento absoluta. Por exemplo, não é possível construir uma certa figura, e definir um segmento nessa figura como uma unidade de medida. Isso se dá porque, na geometria euclidiana, podemos reproduzir quaisquer figuras em escala, quer dizer, de tal forma que a cópia seja semelhante, mas de "tamanho diferente". Nas geometrias não euclidianas, isso não é possível. Consideremos, por exemplo, um triângulo equilátero, que por conseguinte também é equiângulo. Para qualquer que seja o valor de seus ângulos, e existe uma unidade de medida absoluta para medir ângulos, admite-se apenas um valor possível para o comprimento de seus lados. Então é possível associar de forma biunívoca os valores de ângulos (em um certo intervalo) e comprimentos, efetivamente definindo uma unidade de medida absoluta também para comprimentos.

Tratando especificamente da hipótese do ângulo obtuso, Lambert demonstra que duas perpendiculares erguidas de uma mesma reta se cruzam. A partir daí, ele rejeitou esta hipótese basicamente com a mesma contradição encontrada por Saccheri. Mas Lambert nota que essa hipótese se torna verdadeira sobre a superfície de uma esfera, caso se considerem seus círculos máximos como retas. Por isso, Lambert conjectura que a hipótese do ângulo agudo também poderia ser observada sobre algum tipo de esfera imaginária. Traçando outro análogo entre as duas hipóteses, ele também introduziu as funções trigonométricas hiperbólicas em contraponto à trigonometria esférica. Infelizmente, entretanto, Lambert não foi capaz de construir a esfera imaginária que havia conjecturado, nem viu todo o potencial da nova trigonometria que havia desenvolvido.

Por que Lambert não fez questão de publicar este importante tratado em vida? A verdade é que, provavelmente, ele deve ter ficado decepcionado. Como quase certamente todos os matemáticos da época, ele acreditava que a única hipótese correta para a geometria plana era aquela do quarto ângulo reto. Sendo incapaz de provar o quinto postulado, ele deve ter pensado que havia fracassado, sem se dar conta de quão valiosas eram aquelas descobertas. Seja como for, alguns matemáticos da próxima geração estariam prontos para ir ainda mais além.

1.4 Um mundo inteiramente novo

Os dois mil anos de história da matemática que condensamos neste capítulo não renderam como fruto uma demonstração para o quinto postulado de Euclides. Isso não quer dizer, todavia, que esses esforços tenham sido em vão! Eles revelaram como várias propriedades da geometria euclidiana dependem desse postulado, incluindo, como vimos, a existência de figuras semelhantes mas não congruentes. Ademais, mesmo com a introdução da técnica de redução ao absurdo no estudo de retas paralelas, nenhum matemático pudera encontrar uma contradição ao se admitir uma alternativa que negasse o quinto postulado. Por isso, era questão de tempo até que a possibilidade de outras geometrias, consistentes em si mesmas mas com propriedades diferentes da euclidiana, pudesse entrar em discussão. Aqueles que geralmente levam o crédito pela descoberta dessas novas geometrias são o alemão Carl F. Gauss, o húngaro Bolyai Janós[7] e o russo Nikolai Lobachevsky.

Vamos começar discutindo a participação de Gauss (1777–1855), por ter sido provavelmente o primeiro e ainda assim não ter publicado, na prática, nada sobre o assunto. Gauss é amplamente considerado um dos maiores nomes da matemática em toda a história. Tendo contribuído com tantos ramos da pesquisa matemática, e até mesmo fundado alguns, era de se esperar que ele também se interessasse por geometria, incluindo a teoria das paralelas. Ao que indicam suas cartas, reunidas e publicadas após sua morte, Gauss havia se debruçado por um bom tempo sobre o quinto postulado de Euclides com a intenção de produzir uma demonstração rigorosa. Em suas tentativas, como havia acontecido com tantos outros, ao invés de encontrar uma demonstração, encontrou diversos resultados geométricos contraintuitivos. A mudança de atitude de Gauss é refletida em suas correspondências. Da esperança de encontrar uma demonstração, ele passa a aceitar a existência de uma outra geometria independente do quinto postulado. Se tivesse publicado suas descobertas, na lista (de todo modo enorme) de suas façanhas matemáticas estaria também a criação das geometrias não euclidianas. Ressalte-se, porém, que Gauss foi grande contribuidor da geometria diferencial, campo que acabaria se tornando tão importante para o estudo das novas geometrias.

Em seus dias de estudante, Gauss se tornou muito amigo de um certo Bolyai Farkas[8], com quem manteve contato pelo restante de sua vida. O filho desse amigo, Bolyai Janós (1802–1860), é o segundo personagem desta seção. Em certo ponto, Bolyai considerou uma definição alternativa de retas paralelas. Para sua surpresa, essa definição alternativa rendeu uma geometria diferente, onde não valia o quinto postulado de Euclides. Abismado com aquilo com que havia se deparado, ele escreveu a seu pai dizendo ter criado 'um novo e diferente mundo a partir do nada'.

Quando, em 1832, Bolyai Farkas publicou uma obra sobre os fundamentos da matemática, incluiu também um apêndice escrito por seu filho, com material concebido talvez uma década antes. Em um modesto número de 28 páginas, Bolyai Janós delineou as bases da geometria hiperbólica. A profundidade das ideias contidas nesse breve trabalho não pode ser ignorada, e explicar toda a matemática contida ali já foge do escopo deste trabalho. Vamos destacar algumas ideias principais.

A definição alternativa de retas paralelas usada por Bolyai aparece logo na abertura do apêndice. Ele considera como paralelas as semirretas AM e BN, no mesmo plano, satisfazendo duas condições: BN não intersecta AM; BP intersecta AM para todo ponto P no interior do ângulo ∠ABN. Partindo dessa definição, Bolyai desenvolve também uma trigonometria consistente. A seguir, ele deduz muitos teoremas importantes dessa geometria, como os que já consideramos sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, a relação entre essa soma e a área do triângulo, e a dependência entre ângulos e comprimentos.

[7]Em húngaro, o sobrenome vem primeiro.

[8]Esse Farkas também era conhecido como Wolfgang, e alguns livros de história da matemática o chamam por esse nome.

Mas existe um abismo de diferença conceitual entre Bolyai e os outros matemáticos que consideramos até aqui (com exceção de Gauss). Não há qualquer tentativa de demonstrar o quinto postulado, nem é expressa qualquer esperança nesse sentido. Bolyai não via defeito nessa nova geometria, e em uma das seções do apêndice desafia o leitor a encontrar qualquer falha que haja nela, se puder.

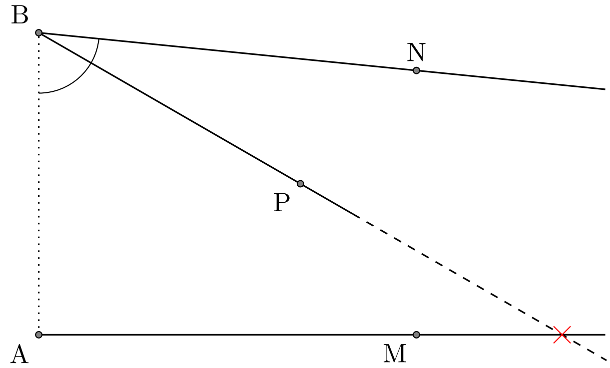


Figura 1.6: Segundo a definição usada por Bolyai, a (semir)reta BN é paralela a AM se elas não se cortam e se, para todo ponto P no interior do ângulo ∠ABN, BP corta AM.

Uma das inovações de Bolyai está na classificação explícita que ele faz entre os teoremas que são válidos na geometria euclidiana, na geometria hiperbólica ou nas duas. O seu interesse estava principalmente nessa última classe de resultados, a que ele se referia como "ciência absoluta do espaço". Concordemente, ele tenta expressar suas fórmulas trigonométricas na forma mais geral possível, que seja válida independente de se aceitar o quinto postulado ou alguma alternativa.

Antes de prosseguirmos em comentar o impacto dessa publicação, há mais dois resultados interessantíssimos encontrados no referido apêndice (na verdade, há uma grande porção deles). Bolyai chegou muito perto de criar um modelo para a geometria hiperbólica dentro de uma porção do plano, mas infelizmente não deu esse passo crucial. O que ele de fato apresenta, no entanto, é impressionante. Partindo de uma geometria espacial onde o quinto postulado não vale, ele define uma certa superfície, define certas linhas sobre essa superfície, e então mostra que essas linhas na superfície, se consideradas como retas no plano, são um modelo da geometria euclidiana plana dentro de um espaço não euclidiano. O segundo resultado que vamos comentar aqui tem a ver com o problema clássico grego de se construir um quadrado de área igual a um círculo dado. Suspeitava-se que esse velho problema não possuía solução. De fato, haveria de ser demonstrado posteriormente no mesmo século que, na geometria euclidiana, não é possível dar tal construção. Mas Bolyai foi capaz de fazê-lo na geometria hiperbólica.

Desafortunadamente, a publicação de Bolyai praticamente não teve repercussão, apesar de sua grande originalidade e da popularidade da discussão sobre as paralelas. A verdade é que, naquela época, ainda eram poucas as pessoas preparadas para compreender suas ideias e aceitar a existência de outras geometrias. É claro que Gauss poderia ter contribuído se tivesse ido a público defender este tópico que ele mesmo havia estudado. Mas suas ações, pelo visto, tiveram o efeito contrário. Segundo se relata, Farkas havia lhe enviado uma cópia do trabalho de seu filho. Em uma carta a outro de seus correspondentes, Gauss descreve Janós como um "gênio de primeira classe". Mas a Farkas, ele escreve dizendo que elogiar o trabalho dele seria elogiar a si mesmo, pois ele já havia seguido por aquele caminho e chegado às mesmas conclusões. Ainda que Gauss expressasse sua admiração (não por qualquer originalidade, mas por outra pessoa ter também chegado a seus resultados) e aprovasse a publicação, Janós desanimou e nunca mais publicou sobre o tema.

Enquanto isso, Lobachevsky (1792–1856), trabalhando em Kazan, na Rússia, também teve a visão matemática para vislumbrar esse novo mundo. Embora tenha sido, ao que tudo indica, o último dos três a desvendar a nova geometria, ele foi o primeiro a publicar, e continuou desenvolvendo, publicando e lutando para que suas ideias fossem aceitas até o final de sua carreira acadêmica. Em 1826, Lobachevsky deu uma palestra com o tema *Sobre os princípios da geometria, com uma rigorosa demonstração da teorias das paralelas*. As notas dessa palestra foram publicadas, mas perdidas com o tempo. Apesar do título, a tal demonstração rigorosa a que o palestrante se refere não era uma demonstração do quinto postulado; provavelmente se refere, na verdade, à tese de que procurar tal demonstração era fútil, pois a rejeição do postulado resultava em outra geometria igualmente válida. Uma versão estendida dessas notas foi publicada em 1829, escrita em russo, em um periódico local, intitulada apenas *Sobre os princípios da geometria*.

As semelhanças entre a obra de Lobachevsky e Bolyai são imensas. Por exemplo, Lobachevsky usa basicamente a mesma definição de Bolyai para retas paralelas. Também introduz muita trigonometria para tratar de figuras geométricas; considera essa nova geometria em três dimensões; define a mesma superfície encontrada por Bolyai; e, como ele, prova que tal superfície serve de modelo da geometria euclidiana dentro de uma não euclidiana. Nota-se, é claro, algumas diferenças no estilo e nos interesses de cada matemático. Se Bolyai tinha tentado desenvolver sua "ciência absoluta do espaço", com o máximo de teoremas válidos em ambas as geometrias, Lobachevsky estava mais interessado nos teoremas exclusivos da geometria hiperbólica. Em contraste com as 28 páginas do apêndice de Bolyai, apenas o primeiro artigo de Lobachevsky já se prolonga por mais de 60 páginas. Ao invés da notação abreviada do primeiro, ele dá nomes que considera apropriados aos objetos geométricos que vai descobrindo. Ainda outra contribuição de Lobachevsky está na interpretação de algumas integrais como a área de figuras simples dentro da geometria hiperbólica.

Como consequência de seu trabalho, Lobachevsky apresenta a possibilidade de que a melhor geometria para descrever o universo não seja euclidiana. Para verificar qual delas seria mais apropriada, ele tenta medir a soma dos ângulos de um triângulo de magnitude astronômica, usando uma estrela distante e o movimento da Terra ao redor do Sol. Na mesma época, sem saberem um do outro, Gauss também estava guiando um experimento com o mesmo objetivo. Nos dois casos, a diferença encontrada era tão pequena que estava dentro do erro de medição dos aparelhos. Todavia, Lobachevsky mostra em sua obra que, para triângulos pequenos, a geometria hiperbólica se aproxima muito da euclidiana; isto é, a soma dos ângulos internos de um triângulo é muito próxima de π, e as duas paralelas a uma reta por um certo ponto praticamente coincidem. Dependendo da escala do universo, o triângulo medido seria pequeno demais em comparação com aquele onde se pudessem medir os efeitos hiperbólicos.

Infelizmente, assim como acontecia com Bolyai, Lobachevsky quase não foi reconhecido em vida. Dentro da Rússia, seu trabalho passou despercebido ou foi cruelmente ridicularizado. Tentando ganhar mais projeção dentro da comunidade matemática, Lobachevsky publicou um tratado em alemão em 1940, e publicaria ainda outro em francês em 1855 (o ano anterior ao de sua morte). A estratégia teve um pequeno sucesso na medida em que o tratado de 1940 chegou até às mãos de Gauss. Novamente surpreso que uma terceira pessoa houvesse chegado àqueles resultados, Gauss se esforça para encontrar e ler os artigos originais em russo. Apesar de afirmar, como havia feito com Bolyai, que nada ali era novo para ele mesmo, por sua recomendação Lobachevsky foi eleito membro correspondente da Academia de Ciências de Göttingen. É triste que, ainda assim, Lobachevsky não tenha sido levado a sério nem mesmo em seu país natal. Após deixar a posição de reitor em Kazan, passou seus últimos dias em condições difíceis. Hoje a geometria hiperbólica é muitas vezes chamada por seu nome.

A razão dos trabalhos tão ricos e inovadores de Bolyai e Lobachevsky não terem chamado atenção em seus dias pode explicar por que Gauss estava tão relutante em publicar suas descobertas, que alega ter deduzido primeiro. O filósofo Immanuel Kant havia argumentado em sua *Crítica da Razão Pura* que a geometria era um conhecimento que temos *a priori*, algo inato ao ser humano e independente de nossas experiências. Obviamente que a postura dos três matemáticos entra em franca contradição com uma das mais influentes e respeitadas obras da história da filosofia. As cartas de Gauss revelam que ele tinha grande consciência da oposição que enfrentaria caso publicasse.

Outro motivo mais simples está nas dificuldades de comunicação da época. Gauss, é claro, não havia trazido suas ideias à luz do dia. Bolyai e Lobachevsky, os que foram a público, o fizeram em relativo isolamento, longe dos grandes centros acadêmicos do mundo da época. Bolyai, por um lado, desistiu após sua única publicação; e Lobachevsky, por outro lado, escreveu a maior parte de sua obra em russo em jornais de circulação bem limitada.

Há ainda um terceiro motivo: nem Lobachevsky, nem Bolyai, puderam apresentar um modelo para a geometria hiperbólica dentro da geometria euclidiana. Sem um modelo, os resultados contraintuitivos da nova geometria eram de difícil visualização. Não só isso, mas nada garantia que uma inconsistência não seria encontrada com maiores desenvolvimentos dessa geometria.

Demorou algum tempo até que o trabalho desses matemáticos pudesse ser reconhecido. Nesse meio tempo, já mencionamos a importância que a geometria diferencial teria para essas geometrias não euclidianas. Gauss foi pioneiro em demonstrar uma série de resultados sobre superfícies de curvatura constante. Então outro professor de Göttingen, Bernhard Riemann, estendeu essas ideias a um outro patamar. Com as generalizações que ele proveu, o estudo axiomático da geometria no estilo de Euclides perdeu relevância. Havendo uma maneira de medir ângulos e distâncias, existe uma geometria em qualquer superfície que satisfaça alguns requisitos básicos.

Já que os próximos capítulos deste material apresentam a geometria hiperbólica por meio de um modelo conhecido hoje como disco de Poincaré, vamos falar um pouco sobre a história desses modelos.

Baseando-se primeiro nos estudos de Gauss, Beltrami foi capaz de prover o primeiro modelo da geometria hiperbólica dentro da geometria euclidiana. Esse modelo leva hoje o nome de Klein (algumas vezes, Beltrami-Klein), por ele ter desenvolvido mais a fundo as suas conexões com a geometria projetiva. Quando da publicação do trabalho de Riemann, dois anos após sua morte, Beltrami imediatamente submeteu mais dois modelos, um em um disco (mas com uma nova maneira de representar retas) e outro em um semiplano. Não se sabe com certeza se Poincaré teve ou não acesso ao trabalho de Beltrami, mas ele fez um estudo muito profundo e encontrou nesses modelos aplicações originais, que conectaram as geometrias não euclidianas a outras áreas da matemática. Provavelmente é por essa importância que Poincaré conferiu a esses modelos que eles acabaram levando seu nome.

Apesar das razões apresentadas no parágrafo anterior, é realmente uma injustiça que o nome de Beltrami seja pouco mencionado com os modelos que foi capaz de prover. Esses modelos resolvem definitivamente a questão do quinto postulado, pois servem como demonstração de que este era independente dos demais; e, para qualquer contradição encontrada na geometria hiperbólica, teria necessariamente de haver uma equivalente na geometria euclidiana. Adicionalmente, os modelos de Beltrami possuem uma característica em comum: eles representam todo o plano hiperbólico dentro de uma região limitada do plano euclidiano. A fronteira que separa essa região limitada do restante do plano é essencial para o estudo e visualização de propriedades importantes da geometria hiperbólica.

É claro que essa breve história do quinto postulado de Euclides está longe de ser completa. Apresentamos, no final deste material, uma bibliografia que pode ser consultada sobre o tema. Mas estamos em dívida especial com duas fontes. Sem o trabalho de Rosenfeld [17], este relato da teoria das paralelas careceria de muitos detalhes, principalmente sobre a contribuição dos geômetras árabes. E o livro escrito por Gray [11] fornece um excelente panorama da geometria no século XIX, período da criação das geometrias não euclidianas.

No próximo capítulo, vamos estudar algumas definições e teoremas da geometria euclidiana. Com essas informações em mão, estaremos prontos para considerar mais de perto o disco de Poincaré.

Capítulo 2

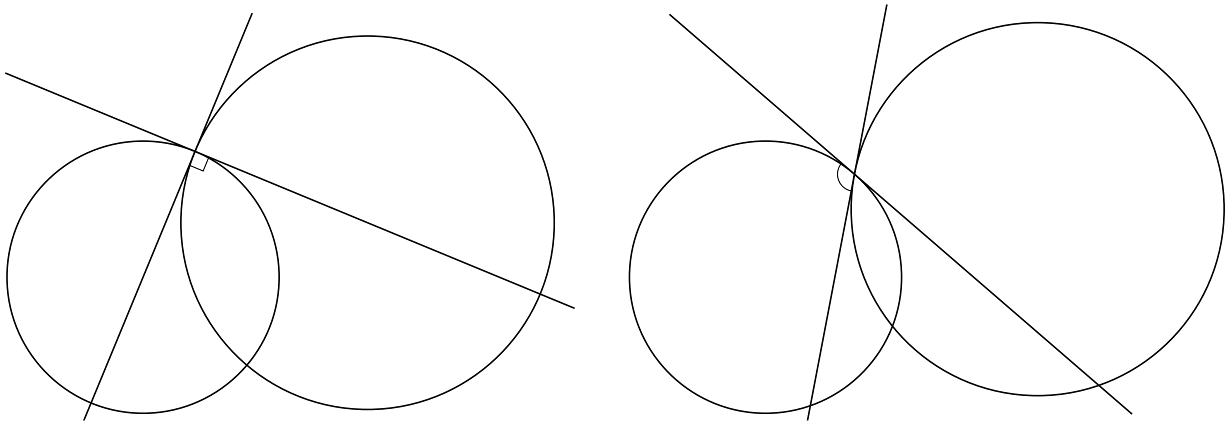
A geometria de Euclides

Apesar das discussões científicas e filosóficas sobre em qual geometria vivemos, é inegável que, como seres humanos, nós damos uma interpretação euclidiana para nosso mundo, isto é, nossas experiências diárias. No próximo capítulo, nós vamos construir um modelo de geometria hiperbólica a partir da geometria euclidiana. Esse modelo vai nos permitir visualizar a nova geometria.

Para construir esse modelo, no entanto, nós precisamos de algumas definições e teoremas da geometria de Euclides. Esses resultados são interessantes em si mesmos! Este capítulo foi escrito com o intuito não apenas de fundar a base para o que virá a seguir, mas de que seja uma chance de ver ou rever conceitos de geometria muito importantes. Vamos começar com uma definição e demonstração essenciais para as construções subsequentes. Depois, vamos ver o que é inversão em relação a um círculo e o que são potências de pontos. Por último, o teorema no final do capítulo é fundamental para a consistência do modelo do disco, que é o destino desse passeio matemático.

2.1 Ângulos entre circunferências

Para construir algumas figuras geométricas que usaremos com frequência, precisamos dar uma definição de ângulo entre circunferências. Consideremos duas circunferências no plano euclidiano que se intersectam em exatamente dois pontos. Tomemos as tangentes dessas circunferências em um dos pontos de intersecção. O ângulo entre as circunferências será definido como o ângulo entre essas retas tangentes. Dizemos que as duas circunferências são perpendiculares, ou ortogonais, quando as tangentes se cruzarem em um ângulo reto. A Figura 2.1 ilustra um caso em que as circunferências são ortogonais e um caso em que as circunferências não são ortogonais.



(a) Círculos ortogonais

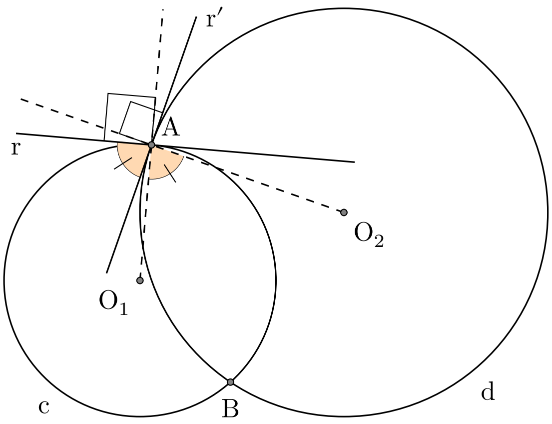
(b) Círculos não ortogonais

Figura 2.1

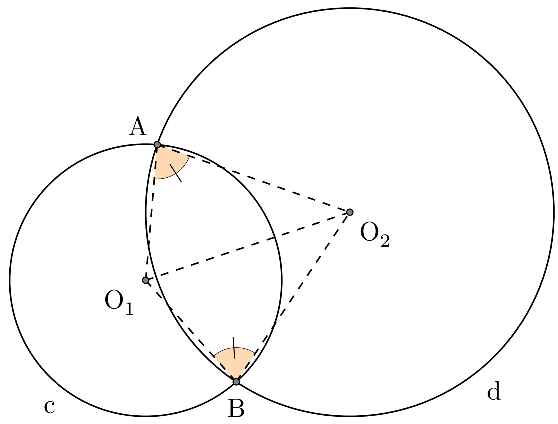
Nós acabamos de definir o ângulo entre circunferências que se intersectam em dois pontos distintos. Mas a definição só faz sentido se o ângulo entre as tangentes em um ponto de intersecção for congruente ao ângulo entre as tangentes no outro ponto de intersecção. De outro modo, haveriam dois valores de ângulos associados a um par de circunferências que se intersectam!

Para demonstrar que de fato são congruentes, vamos usar um fato conhecido da geometria euclidiana: a tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Sendo assim, sejam c e d duas circunferências, de centros O_1 e O_2, que se intersectam nos pontos A e B. Vamos chamar de r a reta tangente a c no ponto A, e r′ a reta tangente a d também no ponto A. Como sabemos, o segmento O_1A, que é raio de c, é perpendicular à reta r. Pelo mesmo motivo, o segmento O_2A, raio de d, é perpendicular à reta r′. Assim, o ângulo entre r e r′ é congruente ao ângulo $\angle O_1AO_2$. Veja a Figura 2.2a.

Pelo que foi considerado acima, para demonstrar que o ângulo entre as tangentes no ponto B será congruente ao ângulo entre as tangentes no ponto A, só precisamos demonstrar que os ângulos $\angle O_1AO_2$ e $\angle O_1BO_2$ são congruentes. Consideremos os triângulos $\triangle O_1AO_2$ e $\triangle O_1BO_2$. Como O_1A e O_1B são raios da mesma circunferência, $O_1A \equiv O_1B$. Da mesma forma, $O_2A \equiv O_2B$. Além disso, os dois triângulos têm o lado O_1O_2 em comum. Percebemos que, pelo caso LLL, os triângulos em questão são congruentes. Desse fato decorre que $\angle O_1AO_2 \equiv \angle O_1BO_2$. Veja a Figura 2.2b.



(a) O ângulo $\angle O_1AO_2$ é congruente ao ângulo entre as tangentes às circunferências.



(b) $\angle O_1AO_2 \equiv \angle O_1BO_2$

Figura 2.2

2.2 Potência de pontos

Em 1826, o matemático Jacob Steiner publicou alguns teoremas geométricos muito elegantes. Por exemplo, Steiner percebeu que, dado um círculo e um ponto P no mesmo plano, se traçarmos uma reta qualquer que passe por P e intersecte o círculo em dois pontos Q e R, o valor de $PQ \times PR$ não depende da reta em questão, apenas da posição do ponto P em relação ao círculo! Steiner usou esse fato para definir a potência de um ponto em relação a um círculo, como veremos agora.

Seja um ponto P externo a uma dada circunferência. A partir do ponto P, traçamos duas retas que cortam a circunferência nos pontos Q e R, e S e T. Veja a Figura 2.3a. Consideremos os triângulos $\triangle PQT$ e $\triangle PSR$. Os dois têm o ângulo $\angle QPT = \angle SPR$ em comum. Além disso, os ângulos $\angle PRS$ e $\angle PTQ$ são inscritos na circunferência. Estes últimos precisam ser congruentes, pois ambos medem metade do arco $\widehat{QS}$. Desses fatos, concluímos que os triângulos em questão são semelhantes, pois têm dois pares de ângulos congruentes.

Do fato de serem semelhantes, tiramos a seguinte relação:

$$\frac{PQ}{PT} = \frac{PS}{PR}$$

que pode ser reescrita como:

$$PQ \times PR = PS \times PT.$$

Como PQ e PS são retas quaisquer que cortam a mesma circunferência, o resultado segue para um ponto P exterior.

Ainda com um ponto P exterior ao círculo, convém considerarmos o caso limite onde a reta passando por P é tangente ao círculo no ponto T. Digamos que o círculo tenha centro O. Vamos traçar a reta PO e marcar os pontos Q e R nas intersecções com a circunferência. Finalmente, vamos chamar o comprimento do segmento PQ de x. Se r é o raio do círculo, o comprimento de PR será $x + 2r$.

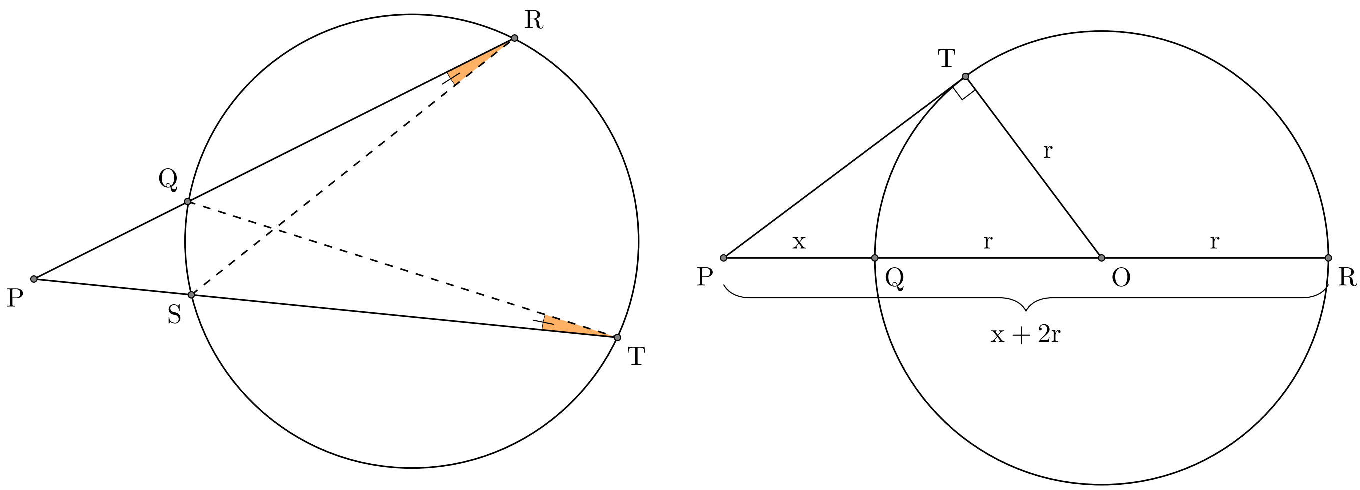
Como é sabido, a reta PT, por ser tangente à circunferência, é perpendicular ao raio OT. Assim, o triângulo $\triangle$PTO é retângulo em T. Pelo Teorema de Pitágoras, $\mathrm{PO}^2 = \mathrm{PT}^2 + \mathrm{OT}^2$. Podemos manipular esta equação como segue:

$$(\mathrm{x} + \mathrm{r})^2 = \mathrm{PT}^2 + \mathrm{r}^2$$

$$\mathrm{PT}^2 = \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{xr} = \mathrm{x}(\mathrm{x} + 2\mathrm{r})$$

$$\mathrm{PT}^2 = \mathrm{PQ} \times \mathrm{PR}.$$

Portanto, no caso limite da reta passando por P ser tangente ao círculo, a potência de P em relação a esse círculo será igual ao comprimento do segmento unindo P e o ponto de tangência, ao quadrado. Este fato é ilustrado na Figura 2.3b.



(a) Steiner demonstrou que $\mathrm{PQ} \times \mathrm{PR} = \mathrm{PS} \times \mathrm{PT}$.

(b) No caso limite, onde PT é tangente ao círculo, $\mathrm{PT}^2 = \mathrm{PQ} \times \mathrm{PR}$.

Figura 2.3

Foi mencionado que Steiner demonstrou que essa definição de potência de pontos faz sentido mesmo para pontos no interior de uma circunferência. A demonstração não é difícil, mas não faremos uso desse resultado no restante do material e por isso ela não será incluída aqui. Na próxima seção, vamos ver outra definição que será proeminente neste trabalho.

2.3 Inversão em relação a um círculo

Uma *transformação geométrica*, dito de forma simples, transforma uma figura geométrica em outra. Ou, sendo mais rigorosos na linguagem, uma transformação geométrica é uma função bijetiva que associa dois conjuntos de pontos. Algumas transformações muito conhecidas são a translação, a reflexão em relação a uma reta e a rotação em torno de um ponto. Nesta seção, vamos definir o que é inversão em relação a um círculo, uma transformação que associa cada ponto no interior de um disco a um ponto em seu exterior de forma biunívoca.

Seja c um círculo de centro O e raio r, e P um ponto diferente de O no mesmo plano. Por definição, o ponto P′, inverso de P em relação a c, é um ponto sobre a semirreta OP tal que:

$$\mathrm{OP} \times \mathrm{OP}' = \mathrm{r}^2.$$

Vamos apresentar uma construção clássica do inverso de um ponto no interior de um círculo. Novamente, consideremos um ponto P no interior de um círculo c, de centro O e raio r, com P distinto de O. Primeiro traçamos a semirreta OP, e então erguemos uma perpendicular pelo ponto P. Na intersecção desta perpendicular com o círculo c, marcamos o ponto Q. Agora, passando por Q, traçamos uma tangente a c. Chamaremos de P′ a intersecção dessa reta tangente com a semirreta OP. (Figura 2.4.) Vejamos por que P′ tem de ser inverso de P. Pelo modo como construímos os pontos P′ e Q, os triângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OQP'$ são ambos retângulos, com o ângulo $\angle POQ$ em comum. Por isso, sabemos que $\triangle OPQ \sim \triangle OQP'$. Além disso, $|OQ| = r$. Desses fatos, tiramos que:

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ}{OP'}$$

$$OP \times OP' = OQ \times OQ$$

$$OP \times OP' = r^2.$$

Por definição, então, o ponto P' é o inverso de P em relação ao círculo c, como queríamos mostrar. Para construir o inverso de um ponto exterior ao círculo, seguimos o mesmo caminho, apenas invertendo a ordem de alguns passos. É evidente que o inverso de um ponto no interior do círculo é exterior ao círculo, e vice-versa.

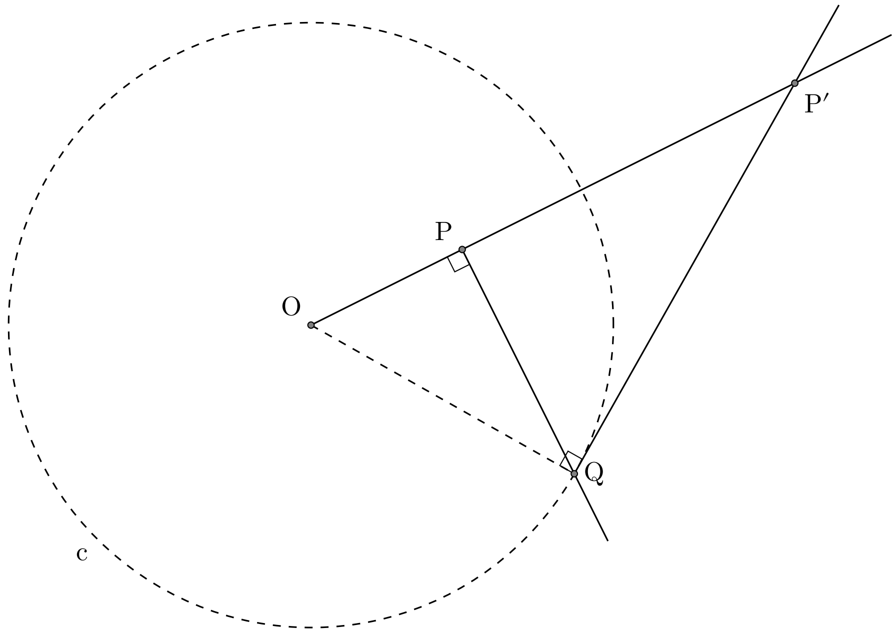


Figura 2.4: Construção do inverso de um ponto em relação a um círculo.

Consideremos alguns fatos sobre essa transformação. Primeiro, a medida do comprimento OP', conforme a definição que demos, é bem determinada na equação $OP' = \frac{r^2}{OP}$. Levando em conta que este ponto P' está sobre a semirreta OP, só existe um único ponto P' que satisfaça essas condições. De fato, dois pontos distintos sobre uma semirreta tem de estar a distâncias diferentes da origem. Assim, cada ponto no plano tem exatamente um inverso. Não apenas isso, mas ainda considerando P' como inverso de P, o inverso de P' tem de satisfazer a $OP' \times OP'' = r^2$, o que leva a $OP'' = \frac{r^2}{OP'}$. Pelos mesmos argumentos acima, o ponto P'' tem de coincidir com o ponto P. Portanto, o inverso do inverso de um ponto, com relação ao mesmo círculo, é este mesmo ponto.

Estamos muito perto de uma *involução*, uma transformação que, aplicada duas vezes, volta à figura original.[1] Mas ainda precisamos falar sobre os pontos sobre o círculo e o próprio centro do círculo, para o qual não definimos inverso. Pela definição, é fácil ver que os pontos sobre o círculo tem de ser os inversos deles mesmos. Segue imediatamente que a transformação, se aplicada duas vezes, leva quaisquer desses pontos a si mesmos.

O centro do círculo é um assunto mais delicado. Se fôssemos aplicar a definição como está, mas com P e O sendo os mesmos pontos, teríamos que $0 \times OP' = r^2$. Claramente isto não pode ser satisfeito para um segmento OP' de comprimento finito. É aqui que introduzimos um *ponto no infinito*. Por definição, este ponto será o inverso do centro de um círculo em relação a ele próprio, e vice-versa. Todas as retas incluem o ponto no infinito. Por isso, já sabemos que o inverso de um reta em relação a um círculo deve incluir o centro de tal círculo.

É hora de juntarmos o que definimos e provamos até aqui para demonstrar um resultado de muita importância para o modelo de geometria hiperbólica que veremos no próximo capítulo.

[1]A reflexão em relação a uma reta é um exemplo de involução. A translação e a maioria das rotações não são involuções.

2.4 Existência e unicidade de circunferências perpendiculares

Começamos esta seção enunciando o teorema cuja demonstração é o objetivo central desta seção.

> Dados dois pontos no interior de um círculo, não colineares com o centro, existe exatamente uma circunferência que passa pelos dois pontos e é ortogonal ao círculo.

Primeiro demonstraremos a existência de tal circunferência e, a seguir, sua unicidade. Como veremos, esse teorema é um dos mais importantes para a construção do modelo que apresentaremos no próximo capítulo.

Seja c um círculo de centro O e raio r, e A e B pontos em seu interior não alinhados com seu centro. Tomemos o ponto A', inverso de A em relação a c. Por definição, A' está sobre a (semir)reta OA. Sendo assim, A, B e A' não são colineares, o que implica a existência de um círculo d de centro O' que passa por esses três pontos. Como A está dentro de c e A' está fora (pois é inverso de A), o círculo d intersecta c.

Consideremos uma das retas que passa por O e é tangente a d. Seja T o ponto de tangência. Pela potência do ponto O em relação ao círculo d, $OA \cdot OA' = OT^2$. Mas, como A' é inverso de A em relação a c, $OA \cdot OA' = r^2$. Assim, $|OT| = r$. Portanto, T está sobre c.

É sabido que a tangente de um círculo é perpendicular ao raio nesse ponto de tangência. Como OT é tangente a d, e $O'T$ é o raio nesse ponto de tangência, as retas OT e $O'T$ são perpendiculares. Além disso, por um ponto sobre uma reta, podemos levantar exatamente uma perpendicular. Como a tangente a c pelo ponto T precisa ser perpendicular a OT, sabemos que $O'T$ é esta tangente. Se OT e $O'T$ são tangentes a d e a c, respectivamente, no ponto de intersecção T, por definição concluímos que as circunferências c e d são ortogonais.

Essa construção depende de um pequeno fato geométrico: o ponto O precisa ser externo a d, para que possamos aplicar o que demonstramos sobre potência de pontos. A demonstração é simples. Um reta pode cortar um círculo em no máximo dois pontos. A reta OA já corta o círculo d nos pontos A e A', de forma que o segmento AA' é toda a porção dessa reta interior ao círculo. Como A' está na semirreta OA, AA' não contém O, e segue que O é exterior a d.

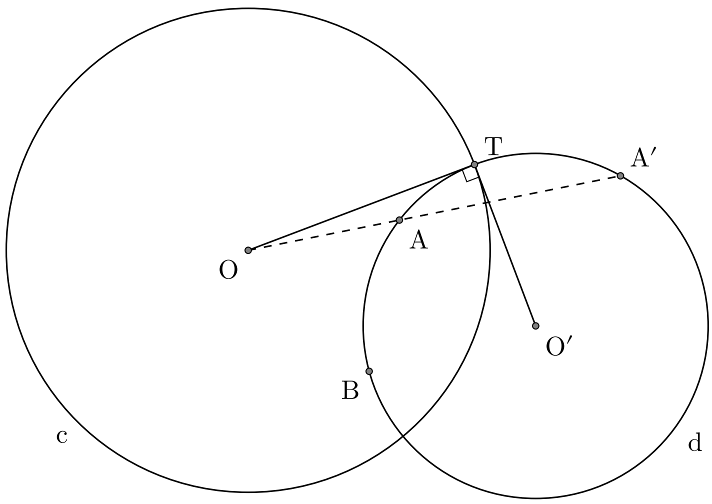


Figura 2.5: Um círculo d, passando por A, B e A', é perpendicular a c. Por outro lado, um círculo d passando por A e B e perpendicular a c também passa por A'.

Resta saber se a construção acima é única. Seja c um círculo de centro O e raio r, assim como antes. Também, escolhamos dois pontos A e B em seu interior, não colineares com O. Seja d um círculo ortogonal a c que passe por A e B.

Como c e d se intersectam, seja T um ponto de intersecção. A reta OT, raio de c, é perpendicular à reta tangente a c que passa por T. Mas, já que c e d são ortogonais, por definição a tangente a c passando por T é perpendicular à tangente a d passando por T. Como mencionamos há pouco, por um ponto sobre uma reta é possível erguer exclusivamente uma perpendicular. Assim, a reta OT é a tangente a d no ponto T. Disso, vemos também que O é exterior a d, um fato importante para o que será discutido a seguir.

Tracemos a reta OA e marquemos o outro ponto de intersecção com d, que chamaremos de A'. Pela potência de O em relação a d, $OA \cdot OA' = OT^2$. Como OT é raio de c, $OA \cdot OA' = r^2$. Se essa relação vale, então A' é inverso de A com relação a c! Portanto, o círculo d, além de passar por A e B, contém necessariamente o ponto A', inverso de A. Três pontos (não colineares) determinam de forma única uma circunferência, o que conclui a demonstração de unicidade.

Capítulo 3

A geometria do disco de Poincaré

No século XIX, o matemático italiano Enrico Beltrami concebeu alguns modelos para geometrias não euclidianas. Posteriormente, Henri Poincaré viria a fazer um estudo profundo de um desses modelos, hoje conhecido como disco de Poincaré. O modelo do disco nos permitirá visualizar algumas propriedades da geometria hiperbólica dentro de uma região limitada do plano euclidiano. As duas seções a seguir abordam os conceitos primitivos de plano, ponto e reta. Depois, vamos rever o significado de ângulo, e algumas relações binárias entre retas. Por fim, veremos como as circunferências são representadas dentro do disco.

3.1 O plano hiperbólico

Assim como o plano euclidiano é ilimitado em todas as direções, assim é o plano hiperbólico. Vamos analisar o que isso significa. Quando estudamos geometria, geralmente representamos as figuras como desenhos em uma parte do plano. Nesses desenhos, subentende-se que podemos estender uma reta indefinidamente. Em linguagem simples, o plano e as retas no plano não acabam, não importa o quanto queiramos estendê-los.

O plano hiperbólico guarda semelhanças e diferenças com o plano euclidiano. Assim como na geometria euclidiana, o plano hiperbólico estende-se indefinidamente em todas as direções. As retas hiperbólicas também podem ser prolongadas indefinidamente. Mas o modo como representamos o plano e as retas por meio do disco de Poincaré muda drasticamente. Na verdade, nós representamos o plano hiperbólico inteiro, infinito, dentro de uma região do plano euclidiano limitada por um círculo. Como isso é possível será explicado mais adiante. Por ora, é preciso saber que o modelo do disco de Poincaré é construído em um disco aberto. Dizer que um disco é aberto quer dizer que estamos falando da região que é interior a uma circunferência, mas sem incluir a própria circunferência. Por exemplo, na Figura 3.1 vemos um disco representado por uma linha pontilhada. Os pontos sobre a circunferência não fazem parte do disco (aberto), apenas os pontos dentro do círculo. Esse fato se mostrará muito importante quando apresentarmos a *métrica* do disco.

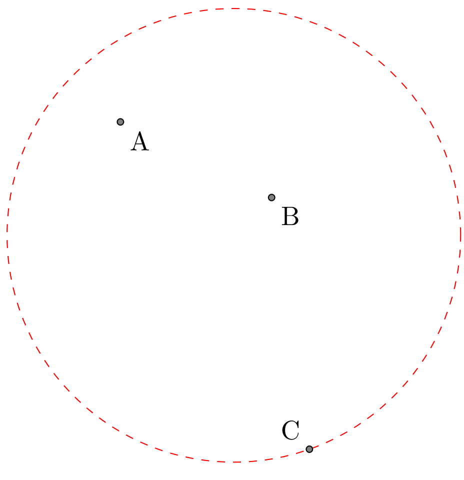


Figura 3.1: Representação de um disco aberto. Os pontos A e B, como exemplos, são parte do disco aberto. O ponto C não faz parte do disco aberto.

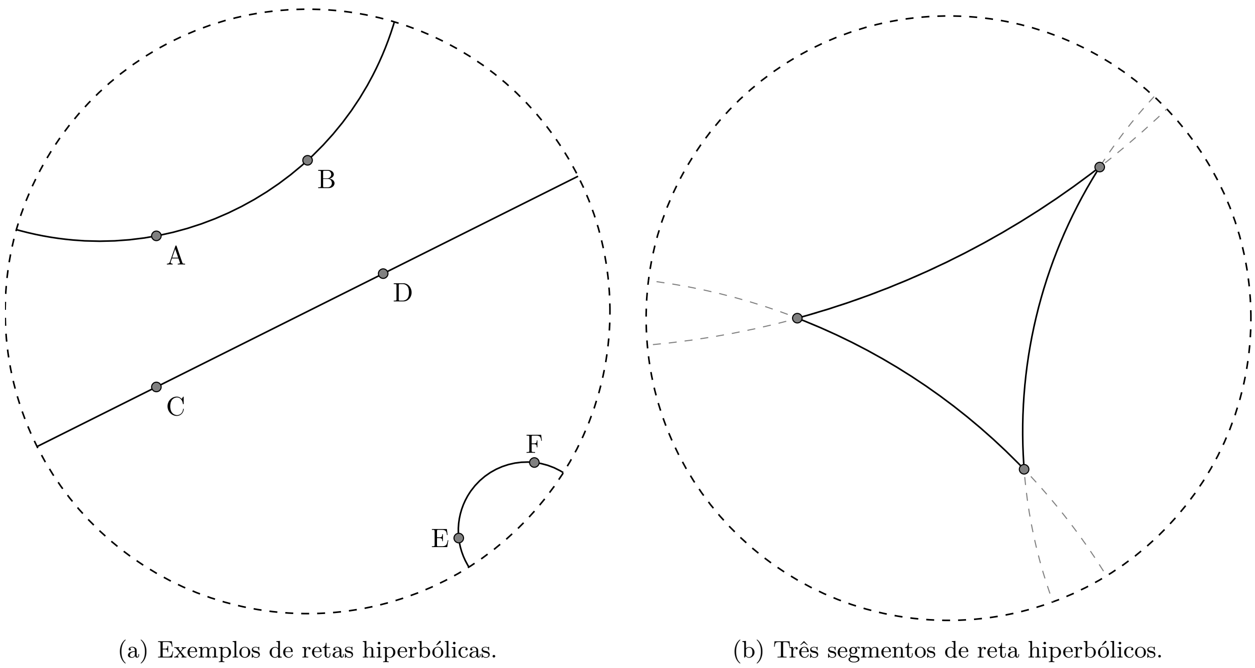
3.2 Pontos e retas

Representamos os pontos no disco de Poincaré assim como fazemos no plano euclidiano. Mas é preciso fazer uma observação. Mencionamos na seção anterior que o modelo do disco é construído sobre um disco aberto. Assim, todos os pontos do plano hiperbólico serão representados *dentro* do círculo, ou seja, no disco aberto. Entretanto, veremos que a borda do disco não é de nenhuma forma desinteressante. Por isso, vamos considerar também os pontos sobre essa borda. Esses pontos *não* fazem parte do plano hiperbólico, apesar de serem úteis em diversas construções. Vamos nos referir a eles como *pontos ideais*.

Em um plano euclidiano, é possível escolher um sistema de coordenadas qualquer, e atribuir valores aos pontos do plano com base nesse sistema. No sistema retangular cartesiano, por exemplo, um ponto é escolhido para ser a origem do sistema. Mas a escolha desse ponto como origem é arbitrária; não há, inicialmente, um ponto no plano euclidiano dotado de propriedades especiais que possa ser chamado de “centro”. O mesmo vale para o plano hiperbólico. Mesmo que estejamos representando os pontos em um disco, isso não significa que o ponto no centro do disco seja o centro dessa geometria. Ele é o centro do disco que estamos usando como modelo, mas apenas isso. Dentro da geometria hiperbólica, ele não tem nenhuma característica especial que o torne distinto dos seu vizinhos. Mas, assim como os pontos ideais, ele pode ser útil em algumas construções e demonstrações.

Assim como no plano euclidiano, esperamos que dois pontos no disco definam uma, e apenas uma, reta hiperbólica. No modelo do disco, porém, as retas geralmente tomam uma forma alternativa. Elas serão representadas por *arcos de circunferência* perpendiculares ao disco.[1] Mas, como vimos no capítulo passado, dois pontos dentro de um disco definem exatamente uma circunferência perpendicular. A exceção é quando esse dois pontos são colineares com o centro do disco. Nesse caso, a reta hiperbólica definida pelos dois pontos é um diâmetro do disco. Algumas retas hiperbólicas são representadas na Figura 3.2.

Assim, dois pontos quaisquer no disco de Poincaré determinam exatamente uma reta, assim como acontece na geometria euclidiana. Semelhantemente, um ponto divide uma reta em duas semirretas e dois pontos determinam um segmento de reta.



(a) Exemplos de retas hiperbólicas. (b) Três segmentos de reta hiperbólicos.

Figura 3.2

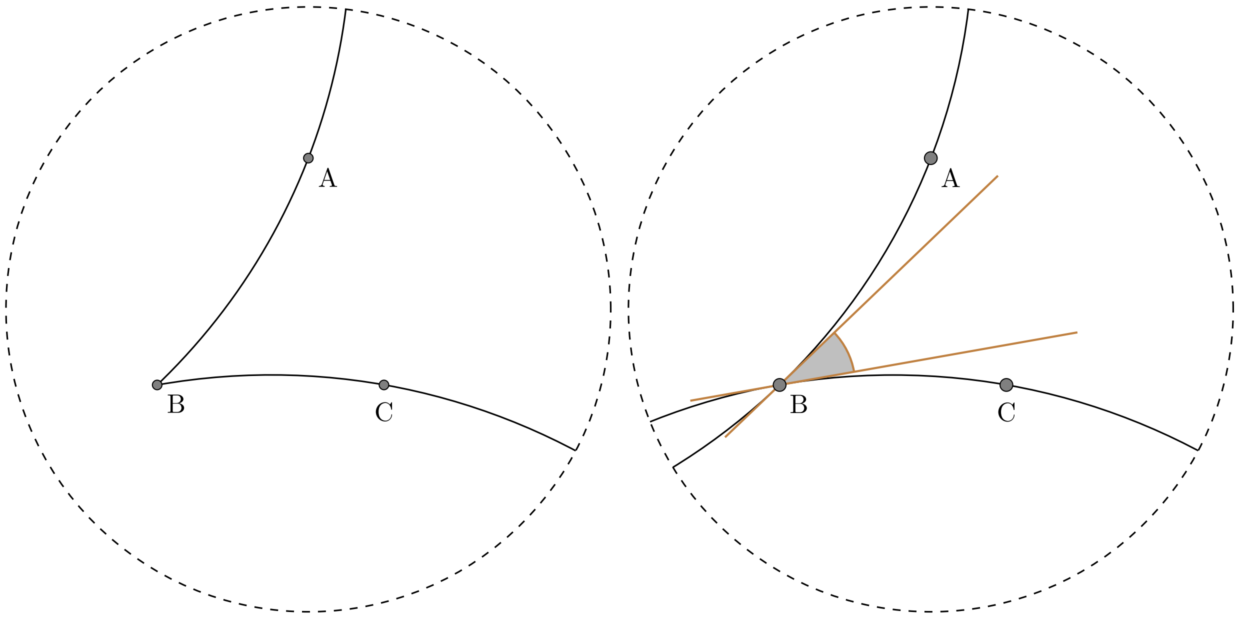
3.3 Ângulos, perpendicularidade e paralelismo

Vamos parar por um momento para refletir no que são ângulos na geometria euclidiana. Normalmente, *ângulo* é definido como a figura formada por duas semirretas que partem do mesmo ponto. Podemos fazer o mesmo no disco. Na Figura 3.3a, vemos representadas as semirretas BA e BC, e essa figura nada mais é que o ângulo ∠ABC.

Tendo dito isto, como podemos medir ∠ABC? Primeiro, tracemos as retas hiperbólicas AB e BC. É claro, essas retas se intersectam em B e são, para nós, arcos de circunferências (ou diâmetros do disco aberto). No caso de serem arcos, vamos tomar as retas euclidianas tangentes aos arcos no ponto B. O

[1]O que são circunferências perpendiculares foi definido no capítulo anterior.

ângulo ∠ABC na geometria hiperbólica tem a mesma medida que o ângulo euclidiano formado por essas retas. Esse fato é ilustrado na Figura 3.3b.



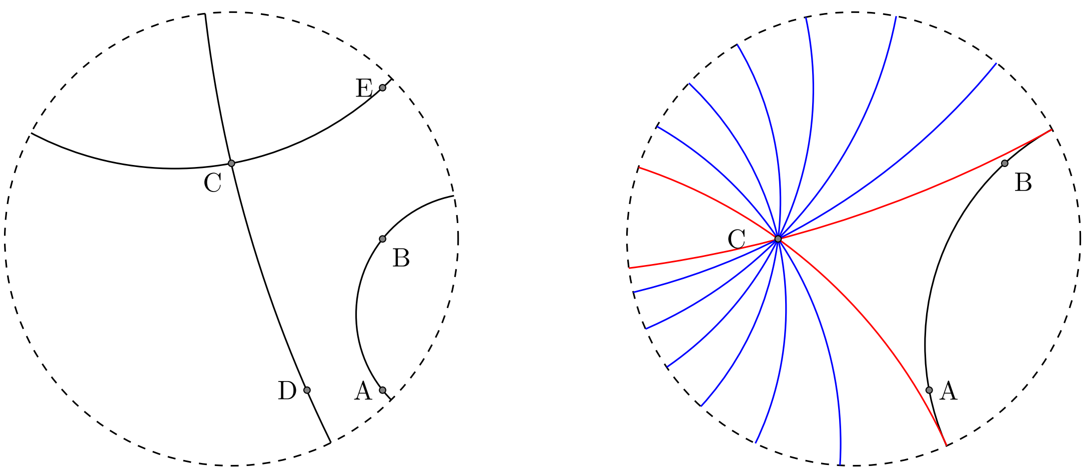
(a) Semirretas BA e BC formando o ângulo ∠ABC.

(b) A medida do ângulo hiperbólico ∠ABC a partir da construção de retas euclidianas.

Figura 3.3

Às vezes acontece de duas retas hiperbólicas se cruzarem em um ângulo de 90 graus. Nesse caso, dizemos que essas retas são perpendiculares, como fazemos na geometria euclidiana. Usando régua e compasso hiperbólicos, é possível mostrar que por um ponto sobre uma reta hiperbólica ergue-se exatamente uma perpendicular, e por um ponto fora da reta passa exatamente uma perpendicular.

Já sabemos que as geometrias não euclidianas surgiram de questionamentos sobre o quinto postulado de Euclides. Na geometria hiperbólica, vale uma versão alternativa do postulado das paralelas: Por um ponto fora de uma reta, passam mais de uma reta paralela à primeira reta. Podemos observar esse postulado no disco de Poincaré, conforme ilustrado na Figura 3.4a.



(a) Pelo ponto C, fora da reta AB, passam as retas CD e CE. Ambas são paralelas (não secantes) à reta AB.

(b) Algumas paralelas não secantes representadas em azul e as duas paralelas limitantes em vermelho.

Figura 3.4: Na geometria hiperbólica, vale uma versão alternativa do quinto postulado de Euclides.

Convém lembrarmos dos *pontos ideais* que mencionamos na segunda seção. Quando duas retas paralelas “se encontram”, ou seja, convergem para o mesmo ponto ideal, dizemos que elas são *paralelas limitantes*. Caso elas simplesmente não se intersectem, sem convergir para o mesmo ponto, dizemos que são *não secantes*. Ambos os casos estão ilustrados na Figura 3.4b. Na geometria hiperbólica, por um ponto fora de uma reta passam exatamente duas retas paralelas limitantes. Eram essas duas retas que Bolyai e Lobachevsky definiram como paralelas, como vimos no primeiro capítulo.

3.4 A métrica do disco

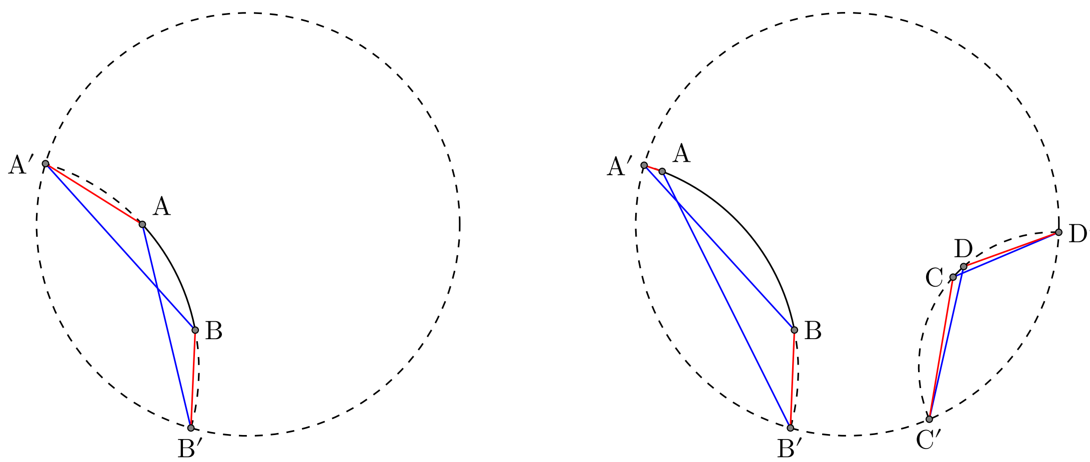
Estamos acostumados à ideia de que a distância mais curta entre dois pontos é percorrida sobre uma reta. Isso não deixa de ser verdade na geometria hiperbólica, mas o que chamamos de "retas" aqui têm uma forma especial. Para que haja consistência, precisamos de um novo jeito de medir o comprimento de segmentos de reta. O que precisamos se chama *métrica*: Uma função que toma dois pontos e retorna a distância entre eles.[2]

Para calcular a distância entre dois pontos no plano hiperbólico, usando o modelo do disco, vamos lançar mão de construções euclidianas. Dados os pontos A e B, primeiro traçamos a reta hiperbólica AB e então marcamos os pontos ideais A' e B', como na 3.5. A seguir, traçamos os segmentos euclidianos $A'A$, $A'B$, AB' e BB'. Na fórmula a seguir, k representa uma constante. A distância entre A e B será dada por:

$$d(A,B) = k\left|\ln \frac{A'B \times AB'}{A'A \times BB'}\right|.$$

Essa expressão, apesar de aparentemente arbitrária, funciona perfeitamente como a métrica do disco. Antes de mais nada, vemos que o valor da distância é o valor absoluto de um certo logaritmo. Ser um valor absoluto nos garante que a distância entre dois pontos nunca será negativa. O que acontece quando os pontos A e B se aproximam? Nesse caso, $A'B$ se aproxima de $A'A$ e AB' de BB'. Por isso, a razão $\frac{A'B \times AB'}{A'A \times BB'}$ se aproxima de um, e o valor de seu logaritmo, de zero. Vemos assim que a distância tende a zero quando os dois pontos se aproximam. No caso de coincidirem, não conseguimos marcar uma única reta que passe pelos dois pontos, mas definimos coerentemente que a distância seja zero.

Por outro lado, o que acontece quando um dos pontos, A ou B, se aproxima da borda do disco? Suponhamos que A esteja próximo da borda. Assim, o comprimento do segmento AA' se aproxima de zero, assim como o denominador da razão $\frac{A'B \times AB'}{A'A \times BB'}$. Por isso, o valor dessa razão se torna muito grande, o que faz com que o valor da distância aumente. De fato, podemos tornar essa distância tão grande como quisermos, aproximando suficientemente um dos pontos A ou B da borda. Esse fato é coerente com a noção de que os pontos ideais estão a uma distância infinitamente grande de qualquer ponto no interior do disco.



(a) $d(A,B) = k\left|\ln \frac{A'B \times AB'}{A'A \times BB'}\right|$

(b) A distância entre A e B é muito grande. Por outro lado, a distância entre C e D é muito pequena.

Figura 3.5: Para calcular a distância entre dois pontos no disco de Poincaré, usamos construções auxiliares.

[2]Métricas são funções muito importantes, então não é surpresa que haja muito mais a se dizer sobre elas. Na verdade, existem vários critérios que uma função deve obedecer para ser chamada de métrica. Por exemplo, a distância entre dois pontos deve ser sempre positiva, ou então nula se, e somente se, os dois pontos coincidirem. Outra propriedade digna de nota: deve satisfazer a desigualdade triangular.

3.5 As circunferências hiperbólicas

Agora que aprendemos o básico sobre os pontos e as retas no disco, e um pouco sobre perpendicularidade e paralelismo, resta ainda uma figura geométrica muito importante, o círculo. Por definição, dado um ponto qualquer no plano, chamado centro, uma circunferência é formada por todos os pontos que lhe sejam equidistantes. Neste texto, usamos as palavras *círculo* e *circunferência* como sinônimas, e reservamos a palavra *disco* para nos referir ao interior da figura.[3] Um segmento unindo um ponto na circunferência e seu centro é chamado de *raio*. É costume se referir ao "raio" como sendo um valor, o seu comprimento, assim como já fazemos com ângulos e outros segmentos.

Queremos saber qual o formato das circunferências dentro do disco, ou seja: Dado um ponto no disco, onde estão os pontos a certa distância fixa, considerando a métrica do disco? Como mencionado na seção 3.2, o plano hiperbólico em si não possui um centro. Mas, na demonstração a seguir, usaremos o centro do disco para simplificar as contas e facilitar a visualização do resultado.

Seja d um disco de raio r e centro em O. Este é o disco que usaremos como modelo do plano hiperbólico. Tomemos o círculo euclidiano c, de raio $r' < r$, também com centro em O. Sejam A e B dois pontos sobre esse círculo. Tracemos as retas hiperbólicas AO e BO, marcando os pontos ideais A', A'', B' e B'', conforme a Figura 3.6. É notável que, como essas retas passam pelo centro do disco, sejam representadas como segmentos de reta euclidianos. Por isso, os pontos A', A, O e A'' são colineares também no sentido euclidiano, assim como B', B, O e B''. As distâncias entre A e O, e B e O, são dadas por:

$$d(A, O) = k \left| \ln \frac{A'O \times AA''}{A'A \times OA''} \right|,$$

$$d(B, O) = k \left| \ln \frac{B'O \times BB''}{B'B \times OB''} \right|.$$

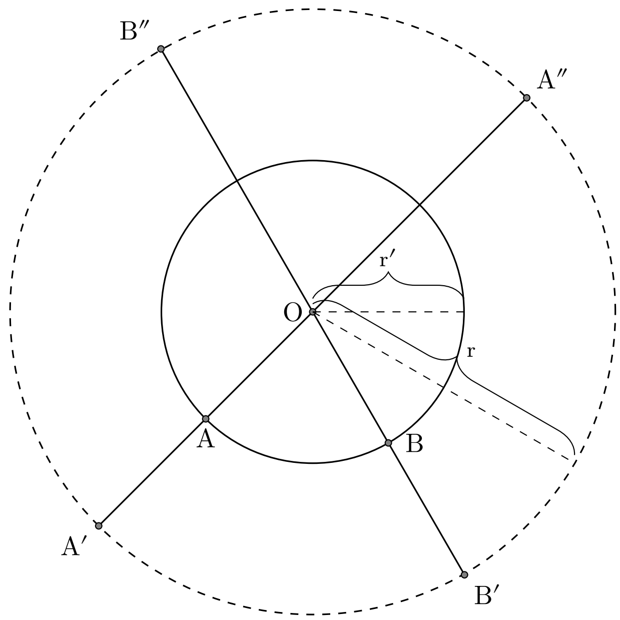


Figura 3.6: A distância hiperbólica entre A e O, e entre B e O, é a mesma.

Nas expressões acima, $|A'O| = |B'O| = r$, $|AA''| = |BB''| = (r + r')$, $|A'A| = |B'B| = (r - r')$ e $|OA''| = |OB''| = r$. Portanto, ambas as distâncias podem ser expressas como:

$$d(O, A) = d(O, B) = k \left| \ln \frac{r(r + r')}{(r - r')r} \right| = k \left| \ln \left(\frac{r + r'}{r - r'} \right) \right|.$$

Como A e B são pontos genéricos sobre o círculo c, concluímos que todos os pontos sobre c são equidistantes, no sentido hiperbólico, de O. Além disso, uma função $f(r') = \ln \frac{r+r'}{r-r'}$ é crescente para r constante e r' positivo. Assim, vemos que qualquer ponto no exterior de c estará a uma distância

[3] Como já mencionado, um disco fechado é formado pela circunferência e seu interior. Um disco aberto, por outro lado, é exclusivamente o interior de um círculo.

hiperbólica de O maior, e no interior, menor. Do que foi considerado, concluímos que o círculo c, na verdade, é um círculo hiperbólico!

Não provamos, e nem conseguiríamos, que todas as circunferências no disco se comportam da mesma maneira. Com algumas ferramentas que não pudemos incluir neste trabalho, seria possível transladar uma circunferência primeiro representada no centro do disco para perto de sua borda. Ao fazer isso, é observado que a circunferência (isto é, seu perímetro), mantém sua forma; mas o centro da circunferência hiperbólica parece deslocado em relação ao centro euclidiano. Este fenômeno se deve à métrica do disco.

Este capítulo nos permitiu conhecer alguns dos principais elementos da geometria hiperbólica no disco de Poincaré. É possível estudar esse modelo usando um *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra. Recomendamos com entusiasmo as atividades descritas em [16].

Bibliografia

[1] Geraldo Ávila. *Várias faces da Matemática: Tópicos para licenciatura e leitura geral.* 2^{a} ed. Blucher, 2011.

[2] William P Berlinghoff e Fernando Q Gouvêa. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas.* Blucher, 2008 (ver p. 2).

[3] Carl B Boyer e Uta C Merzbach. *História da Matemática.* 3^{a} ed. Blucher, 2012.

[4] Éric Charpentier, Etienne Ghys e Annick Lesne. *The scientific legacy of Poincaré.* Vol. 36. American Mathematical Soc., 2010.

[5] Roger L Cooke. *The history of mathematics: A brief course.* John Wiley & Sons, 2011.

[6] Lázaro Coutinho. *Convite às geometrias não-euclidianas.* 2^{a} ed. Interciência, 2001.

[7] Howard Eves. *Great Moments in Mathematics (After 1650).* Mathematical Association of America, 1983.

[8] Howard Eves. *Introdução à história da matemática.* Editora da UNICAMP, 2004.

[9] Richard Fitzpatrick. *Euclid's elements of geometry.* 2007 (ver p. 2).

[10] Chaim Goodman-Strauss. "Compass and straightedge in the Poincaré disk". Em: *The American Mathematical Monthly* 108.1 (2001), pp. 38–49.

[11] Jeremy Gray. *Worlds out of nothing: a course in the history of geometry in the 19th century.* Springer Science & Business Media, 2011 (ver p. 11).

[12] Thomas L Heath. *The thirteen books of Euclid's Elements.* Vol. 1. Cambridge University Press, 1908 (ver p. 4).

[13] Victor J Katz. *A history of mathematics: An introduction.* 3^{a} ed. Pearson, 2009.

[14] Victor J Katz. *Using history to teach mathematics: An international perspective.* Vol. 51. Cambridge University Press, 2000.

[15] Ricardo Silva Ribeiro. "Geometrias não-euclidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinâmica". Diss. de mestrado. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013.

[16] Ricardo Silva Ribeiro e Maria Alice Gravina. "Disco de Poincaré: uma proposta para explorar geometria hiperbólica no GeoGebra". Em: *Revista Professor de Matemática Online* 1.1 (2013), pp. 53–66 (ver p. 23).

[17] Boris A Rosenfeld. *A history of non-Euclidean geometry: evolution of the concept of a geometric space.* Springer Science & Business Media, 1988 (ver p. 11).