



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ – UFOPA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)**

**WILNAIANNY LIDEL PEDROSO CAVALCANTE**

**PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA  
BASEADAS EM CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM ORIGAMI**

**Santarém (PA)  
2020**

**WILNAIANNY LIDEL PEDROSO CAVALCANTE**

**PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA  
BASEADAS EM CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM ORIGAMI**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Matemática em Rede Nacional - Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA, Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestra em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Lenilson Moreira Araújo

**Santarém (PA)  
2020**

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas (SIBI) da UFOPA  
Catalogação de Publicação na  
Fonte. UFOPA - Biblioteca Unidade Rondon

Cavalcante, Wilnaianny Lidel Pedroso.

Propostas de atividades para o ensino de geometria baseadas em construções geométricas com origami / Wilnaianny Lidel Pedroso Cavalcante. - Santarém, 2020.

89f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Pós-graduação Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Orientador: Lenilson Moreira Araújo.

1. Construções geométricas. 2. Ensino de Geometria. 3. Origami. 4. Ludicidade. 5. Ensino de Matemática. I. Araújo, Lenilson Moreira. II. Título.

UFOPA/Sistema Integrado de Bibliotecas

CDD 23 ed. 516.1

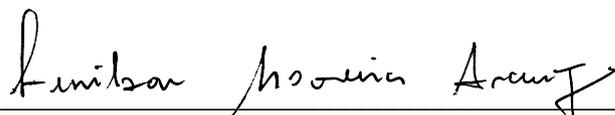
**WILNAIANNY LIDEL PEDROSO CAVALCANTE**

**PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA  
BASEADAS EM CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM ORIGAMI**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Matemática em Rede Nacional - Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA, Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestra em Matemática.

Conceito: Aprovado

Data de Aprovação 21/12/2020



Prof. Dr Lenilson Moreira Araujo - Orientador  
Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA



Prof. Dr. Angelica Francisca de Araújo - Examinador  
Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA



Prof. Dr. Kaled Sulaiman Khidir - Examinador  
Universidade Federal do Tocantins - UFT

Aos meus pais, Wilson e Ivonete.

## **AGRADECIMENTO**

A Deus, por me dar força e coragem pra executar esse trabalho.

À minha família por todo apoio e incentivo.

Aos meus amigos do PROFMAT, Carlos, Cristina, Joelson e Vanderlei, pelos momentos de descontração, pela companhia, pela maratona de estudos e pela determinação.

Ao meu orientador, pelo auxílio e pela paciência.

Aos meus professores do PROFMAT, por todo conhecimento transmitido.

A todas as pessoas que tiveram parcela de contribuição na minha trajetória durante o curso.

Ao programa PROFMAT.

## RESUMO

O objetivo desta pesquisa foi propor atividades para o ensino de Matemática, mais precisamente para o ensino de Geometria, através de construções geométricas com origami. As propostas de atividades desta dissertação se apresentam como alternativas relevantes para a prática docente, uma vez que elas fazem uso da manipulação de papel, o qual é muito acessível devido ao seu baixo custo. Foi utilizada neste estudo uma pesquisa do tipo bibliográfica. O principal resultado foi a produção de um conjunto de quatro atividades possíveis de serem utilizadas nas aulas de matemática para ensinar geometria no 9º ano do Ensino Fundamental. Elas abordam alguns conteúdos geométricos essenciais que devem ser trabalhados nos anos finais do Ensino Fundamental de acordo com a Base Nacional Comum Curricular. Acreditamos que as atividades e o texto produzido nesta dissertação possam ser interessantes e instrutivos tanto para quem ensina quanto para quem aprende.

**Palavras-chaves:** Construções geométricas. Ensino de Geometria. Origami. Ludicidade. Ensino de Matemática.

## **ABSTRACT**

The objective of this research was to propose activities for the teaching of Mathematics, more precisely for the teaching of Geometry, through geometric constructions with origami. The proposed activities of this dissertation are presented as relevant alternatives for teaching practice, since they make use of paper manipulation, which is very accessible due to its low cost. A bibliographical research was used in this study. The main result was the production of a set of four activities that could be used in math classes to teach geometry in the 9th grade of elementary school. They address some essential geometric contents that must be worked on in the final years of Elementary School according to the Common National Curricular Base. We believe that the activities and the text produced in this dissertation can be interesting and instructive for both those who teach and those who learn.

Keywords: Geometric constructions. Geometry teaching. Origami. Playfulness. Mathematics teaching.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Origami Tsuru .....	14
Figura 2 – Kusudama de flor .....	14
Figura 3 – Tessellation formando grade hexagonal .....	15
Figura 4 – Cisne de papel arco-íris .....	15
Figura 5 – Elefante de origami com técnica <i>Wet Folding</i> .....	16
Figura 6 – Exemplos de alguns símbolos utilizados em diagramas .....	17
Figura 7 – Coelho de Akira Yoshizawa .....	18
Figura 8 – Piranha Crease Pattern .....	19
Figura 9 – Tsuru Crease Pattern .....	19
Figura 10 – Axioma 1 de Huzita .....	21
Figura 11 – Axioma 2 de Huzita .....	21
Figura 12 – Axioma 3 de Huzita .....	21
Figura 13 – Axioma 4 de Huzita .....	22
Figura 14 – Axioma 5 de Huzita .....	22
Figura 15 – Axioma 6 de Huzita .....	23
Figura 16 – Axioma 7 de Hatori .....	23
Figura 17 – Dobra de Miura .....	24
Figura 18 – Folha de papel retangular representando o plano .....	26
Figura 19 – Noção de ponto no plano extraída a partir de uma folha de papel retangular .....	27
Figura 20 – Noção de reta dividindo um papel retangular ao meio .....	27
Figura 21 – Construção do ponto médio de um segmento por origami .....	29
Figura 22 – Regiões angulares limitadas por duas semirretas .....	30
Figura 23 – Exemplos de ângulo reto .....	31
Figura 24 – Ângulos determinados por um vinco no papel .....	31
Figura 25 – Exemplo de pares de ângulos opostos pelo vértice .....	32
Figura 26 – Sobreposição de ângulos opostos pelo vértice com dobradura .....	33
Figura 27 – Pares de pontos simétricos entre si em relação à $r$ e coincidentes pela dobra .....	34
Figura 28 – Reflexão de um ponto $P$ em relação a uma reta $l$ .....	35
Figura 29 – construção da dobra do axioma 1 .....	37
Figura 30 – Construção da mediatriz do segmento $P_1P_2$ .....	38
Figura 31 – Mediatriz do segmento $P_1P_2$ .....	38
Figura 32 – Construção da dobra do axioma 2 .....	39
Figura 33 – Distância entre duas retas paralelas .....	40
Figura 34 – Construção de linhas paralelas com origami .....	41
Figura 35 – Dobra que faz coincidir duas linhas paralelas .....	41
Figura 36 – Bissetriz do ângulo determinado pelas retas $l_1$ e $l_2$ .....	42
Figura 37 – Construção da dobra que faz duas linhas retas concorrentes coincidirem .....	42
Figura 38 – Dois triângulos retângulos congruentes obtidos por reflexão em relação à dobra .....	43
Figura 39 – Construção do quadrado a partir de uma folha de papel retangular .....	44
Figura 40 – Ponto $P$ não pertencente a $l$ .....	45
Figura 41 – Construção da dobra perpendicular a $l$ por $P \notin l$ .....	45
Figura 42 – Projeção ortogonal de um ponto $P$ sobre $l$ .....	46
Figura 43 – Construção final da dobra que intersecta perpendicularmente $l$ na projeção ortogonal $P_0$ de um ponto $P$ sobre $l$ .....	46

Figura 44 – Construção de um retângulo a partir de um papel dado.....	47
Figura 45 – Reta <b>l1</b> externa à circunferência.....	49
Figura 46 – Reta secante à circunferência.....	49
Figura 47 – Reta <b>l1</b> tangente à circunferência.....	50
Figura 48 – Reta <b>l2</b> tangente à parábola $\lambda$ de foco <b>P1</b> e diretriz <b>l1</b> no ponto P e que passa por <b>P2</b> $\notin \lambda$ .....	51
Figura 49 – Construção da aproximação do traçado de uma parábola de foco <b>P1</b> e diretriz <b>l1</b> .....	52
Figura 50 – linha <b>l3</b> simultaneamente tangente a duas parábolas.....	53
Figura 51 – Construção da dobra do axioma 7.....	54
Figura 52 – Soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer por origami.....	57
Figura 53 – visualização dos elementos geométricos obtidos após a construção apresentada na figura 52.....	58
Figura 54 – Quadrado de vértices A, B, C e D.....	59
Figura 55 – Quadrado ABCD dobrado pela diagonal AC.....	59
Figura 56 – Construção de dois quadrados de áreas $a^2$ e $b^2$ .....	60
Figura 57 – Quadrado de lado $a+b$ como a soma de dois quadrados de áreas $a^2$ e $b^2$ e dois retângulos de área $a.b$ .....	60
Figura 58 – Construção de um quadrado de lado $c$ inscrito em outro quadrado de lado $a + b$ .....	61
Figura 59 – Verificação do teorema de Pitágoras.....	61
Figura 60 – Verificação, por dobradura, do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo isósceles.....	63
Figura 61 – Teorema de Haga.....	64
Figura 62 – Construção de $1/4$ de um segmento a partir de um quadrado.....	65
Figura 63 – Construção de $1/4$ de um segmento aplicando o teorema de Haga.....	66
Figura 64 – Triângulos semelhantes.....	68
Figura 65 – Trissecção do ângulo agudo por origami.....	70
Figura 66 – Divisão do lado AD do quadrado ABCD na razão $PD/AP = \sqrt[3]{2}$ , com $P \in AD$ .....	72
Figura 67 – A quarta proporcional das medidas $AP$ , $PD = AP \times \sqrt[3]{2}$ e $AQ = 1$ .....	75
Figura 68 – Quadrado inscrito em outro quadrado.....	78
Figura 69 – Quadrado de área mínima inscrito em outro quadrado.....	79
Figura 70 – Dividindo um quadrado em três retângulos congruentes.....	81
Figura 71 – Duplicação de um quadrado de lado $a$ .....	82
Figura 72 – Construção de um segmento cuja medida é raiz quadrada da medida de um segmento dado.....	84

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>ENSINO DE GEOMETRIA E ORIGAMI.....</b>	<b>12</b>
<b>2.1</b>	<b>A importância do conhecimento geométrico .....</b>	<b>12</b>
<b>2.2</b>	<b>Aprendendo um pouco sobre a arte e geometria do origami.....</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>ELEMENTOS GEOMÉTRICOS E ORIGAMI.....</b>	<b>26</b>
<b>3.1</b>	<b>Elementos geométricos básicos.....</b>	<b>26</b>
3.1.1	Ponto, reta e plano .....	26
3.1.2	Semirreta , segmento de reta e ponto médio.....	28
3.1.3	Ângulo no plano .....	30
<b>3.2</b>	<b>Abordagem geométrica dos axiomas do origami.....</b>	<b>33</b>
3.2.1	Axioma 1 do origami .....	37
3.2.2	Axioma 2 do origami .....	37
3.2.3	Axioma 3 do origami .....	39
3.2.4	Axioma 4 do origami.....	45
3.2.5	Axioma 5 do origami.....	47
3.2.6	Axioma 6 do origami .....	52
3.2.7	Axioma 7 do origami .....	53
<b>4</b>	<b>CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM ORIGAMI.....</b>	<b>55</b>
<b>4.1</b>	<b>Origami e construções da Geometria Euclidiana .....</b>	<b>55</b>
<b>4.2</b>	<b>Alguns resultados geométricos e problemas de construção .....</b>	<b>56</b>
4.2.1	A soma dos ângulos internos de um triângulo .....	56
4.2.2	Teorema de Pitágoras.....	58
4.2.3	Construção de $\frac{1}{n}$ a partir do lado do quadrado utilizando o Teorema de Haga .....	64
4.2.4	Trissecção do ângulo .....	69
4.2.5	Duplicação do cubo .....	71
<b>5</b>	<b>PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA TRABALHAR GEOMETRIA COM ORIGAMI EM SALA DE AULA.....</b>	<b>76</b>
<b>5.1</b>	<b>Quadrado inscrito em outro quadrado.....</b>	<b>77</b>
<b>5.2</b>	<b>Dividindo um quadrado em três retângulos congruentes .....</b>	<b>80</b>
<b>5.3</b>	<b>Duplicação de um quadrado de lado dado .....</b>	<b>81</b>
<b>5.4</b>	<b>Construção de um segmento cuja medida é a raiz quadrada da medida de um segmento dado.....</b>	<b>83</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>86</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>88</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A matemática surgiu da necessidade de o homem querer explicar tudo a sua volta e dessa forma não poderia ser diferente que em qualquer atividade humana a matemática se faz presente. Constantemente, no nosso dia a dia estamos em contato com a matemática e fazendo uso da sua linguagem.

Seja quando observamos a hora no celular ou no relógio, seja quando vamos pagar uma conta no banco, ou quando vamos calcular o nosso imposto de renda. Também quando administramos a dosagem de um medicamento, quando olhamos os passos de uma determinada receita ou na leitura de informações contendo gráficos, tabelas e porcentagem. Se pararmos pra listar todas as atividades que realizamos no nosso cotidiano que utilizam as ferramentas da matemática, com certeza não faltaria o que escrever. Por isso, pelo menos o mínimo de conhecimento dessa disciplina nos é exigido.

Mesmo o conhecimento matemático sendo indispensável na realização das nossas atividades, ainda é perceptível, em grande parte dos alunos, a dificuldade de relacionar os conteúdos trabalhados dentro da sala de aula com o meio a sua volta e o resultado disso é um notório desânimo em relação a essa disciplina pela clientela escolar.

Dessa forma, não podemos negar que as aplicações da matemática se fazem necessárias nas aulas. Sobre essa temática Lorenzato (2010, p.56) afirma que “se o professor orientar seus alunos para que observem situações práticas, estes poderão concluir que as aplicações revelam como a matemática está forte e cotidianamente relacionada com o nosso viver”. Ainda de acordo com Lorenzato (2010) a aplicação não precisa estar presente em todas as aulas de matemática, como se fosse solução para todos os problemas de aprendizagem. Para o autor ela precisa ser concebida como uma alternativa metodológica ou estratégia de ensino.

Pensando na aplicação de conteúdos matemáticos, mais precisamente de natureza geométrica, para que fossem trabalhados por meio de atividades práticas, surgiu então o interesse de elaborar e apresentar propostas de atividades para o ensino de geometria baseadas em construções geométricas com origami. Tais atividades são voltadas aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e utilizam-se das técnicas do origami para apresentar passos de construções de figuras geométricas que podem ser utilizadas em sala de aula, nas aulas de matemática, como metodologia de ensino de geometria, para reforçar e aplicar conteúdos geométricos.

A palavra origami, conhecida no Brasil como dobradura, é de origem japonesa e

provêm do verbo dobrar (ori) e do substantivo papel (kami). A arte do origami se mostra uma excelente ferramenta pedagógica que pode auxiliar o professor no ensino de geometria por meio da ludicidade que a manipulação do papel proporciona nas construções geométricas. De acordo com Rêgo, Rêgo e Gaudêncio Junior (2003, p. 18):

O origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual, os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que o cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte.

A preferência por abordar conteúdos de geometria nas propostas de atividades sugeridas é justificada devido à influência positiva que o estudo dessa parte da matemática tem na forma como lidamos com problemas. “A geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (BRASIL, 2018, p. 271). Quanto ao uso do origami, como instrumento de construção geométrica nas atividades, é devido ele ser uma ferramenta interessante e lúdica, que envolve muitos conteúdos matemáticos, com destaque nos geométricos.

As propostas de atividades baseadas em construções geométricas com origami se apresentam como alternativas relevantes para a prática docente, uma vez que elas fazem uso da manipulação de papel, o qual é muito acessível devido ao seu baixo custo. Vale enfatizar ainda que há a possibilidade de obter o material de construção, um quadrado ou um retângulo, através de uma folha de papel reciclado.

Esta pesquisa teve como objetivo geral propor atividades para o ensino de matemática, mais precisamente para o ensino de geometria, através de construções geométricas com origami. Os objetivos específicos foram: conhecer o conjunto de axiomas do origami que permite representar objetos geométricos e seres da natureza através do alinhamento de pontos e retas, verificar conteúdos de geometria que podem ser trabalhados com o auxílio das dobragens de origami e elaborar atividades que trabalhem conteúdos geométricos através do origami. Para alcançar esses objetivos foi utilizada uma pesquisa do tipo bibliográfica, buscando em materiais como artigos, livros e dissertações o referencial teórico necessário para embasar as discussões desta pesquisa.

Esta dissertação estrutura-se em seis capítulos. No primeiro capítulo, encontra-se à introdução do trabalho, onde é apresentada uma breve abordagem do tema da dissertação, a relevância da pesquisa, a justificativa, bem como os objetivos.

O segundo capítulo contém a abordagem do ensino de geometria e da arte do origami, no qual é destacada primeiramente a importância do estudo da geometria e, em seguida, apresenta-se um pouco da arte e geometria do origami.

No terceiro capítulo, tem-se a relação entre elementos geométricos e origami, o texto começa fazendo a apresentação de elementos geométricos básicos que podem ser identificados no material de construção com origami, que é um papel no formato de quadrado ou retângulo, buscando conceituar tais elementos e representá-los na folha. Em seguida, tem-se um detalhamento das ferramentas de construção do origami que permitem a dobragem de linhas retas, um conjunto de sete operações que dizem como definir uma única dobra ao fazer o alinhamento de retas e pontos dados na folha. Na explicação de cada operação, apresentamos construções elementares com origami e algumas construções geométricas.

O quarto capítulo é dedicado a alguns dos teoremas que têm muita aplicação na matemática, como o teorema de Pitágoras. Além disso, neste capítulo destacam-se problemas famosos da geometria que não possuem solução por meio de régua e compasso, mas que podem ser solucionados por outros instrumentos. Desses problemas conhecidos como os três problemas clássicos da geometria, dois apresentam solução por origami.

O quinto capítulo traz as sugestões de atividades para trabalhar geometria por meio de construções geométricas com origami. Tais atividades envolvem conteúdos de geometria para serem abordadas no 9º ano do ensino fundamental, algumas delas foram elaboradas com base em construções encontradas em algumas fontes de pesquisas e adaptadas para serem abordadas através de atividades, as quais estão divididas em dois momentos: momento de construção e momento de verificação da construção por meio de questionamentos feitos sobre as sequências de passos solicitados para a construção do objeto geométrico. Nessas atividades, as construções solicitadas por meio do origami buscam trabalhar habilidades que envolvem aplicação, demonstração e verificações experimentais de alguns teoremas.

No último capítulo, têm-se as considerações finais do trabalho, onde se encontram resumidamente o panorama do trabalho, observações e reflexões sobre o tema trabalho.

## 2 ENSINO DE GEOMETRIA E ORIGAMI

### 2.1 A importância do conhecimento geométrico

Segundo Lorenzato (2010, p. 59) “Por mais conhecimentos sobre outras partes da matemática que alguém possua, eles não serão suficientes para resolver questões que demandem percepção e raciocínio geométrico”. Isto mostra como é importante o estudo da geometria, pois através dela podemos desenvolver o pensamento geométrico, que permite interpretar problemas inerentes de geometria e buscar as ferramentas necessárias para solucioná-los.

De acordo com Lorenzato (1995) não se pode fazer uma leitura interpretativa de mundo completa sem o conhecimento geométrico. Para este autor, se não houvesse ensino de geometria nas escolas, o pensamento geométrico das pessoas não seria desenvolvido e, assim, situações de vida que nos exige o raciocínio visual poderiam não ser compreendidas. Ele enfatiza também que sem o saber geométrico as pessoas não podem fazer uso da geometria como ferramenta facilitadora para compreensão e resolução de problemas de vários campos do saber.

O estudo da geometria é importante não só para desenvolvimento do pensamento geométrico, mas também para a formação do pensamento crítico que é indispensável na busca de soluções e tomada de decisão, o qual pode ser trabalhado através de atividades de geométrica, pois, conforme diz os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, tais atividades “são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas” (BRASIL, 1998, p.126).

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

Estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente construção, representação e interdependência. (BRASIL, 2018, p. 271).

Nos anos finais do Ensino Fundamental, a Base Nacional Comum Curricular destaca a importância da utilização do conhecimento de triângulos congruentes ou semelhantes para realizar demonstrações simples, contribuindo assim com a formação do raciocínio hipotético - dedutivo, que é importante na matemática (BRASIL, 2018).

## 2.2 Aprendendo um pouco sobre a arte e geometria do origami

A etimologia da palavra origami é japonesa e significa dobrar papel (ori) dobrar + (kami) papel. Segundo Ueno (2003), antes da criação dessa palavra, em 1880, o origami era conhecido como *origata*, que significa forma dobrada. Segundo a mesma autora, em outras línguas, podemos encontrar ainda outros nomes referentes ao origami, tais como: dobradura, na língua portuguesa; *papiroflexia*, em castelhano; *paperfolding*, em inglês; *faltenpapier*, em alemão; e *pliage*, em francês.

A prática do origami é um modo de interpretar as formas e objetos que encontramos a nossa volta, reproduzindo - os através de dobras realizadas no papel. Essa atividade manual permite exercitar a motricidade, trabalha a noção espacial, desenvolve capacidade de criar e estimula o raciocínio. Além desses benefícios que podem ser obtidos pela manipulação do papel, outros relacionados às atividades de terapia e de relaxamento são observados com o uso do origami (KANEGAE, 2019).

Para aqueles que se dedicam à arte do origami, os origamistas, a relação com o papel é como um diálogo, pois há uma profunda relação entre eles e a natureza, de onde se inspiram para criar, com o papel, representações de animais, plantas e objetos. Toda escultura produzida por meio do papel tem seu valor simbólico. O origami tsuru, por exemplo, símbolo do origami, diz a lenda relacionada a esse origami que aquele que dobrar 1000 tsurus terá seu desejo realizado. O grou-japonês ou tsuru é uma ave considerada sagrada, com longo período de vida e por isso está associada à saúde, felicidade, boa sorte e também simboliza a paz.

Não se sabe com precisão sobre a origem dessa arte. Para alguns autores o origami surgiu, na China, após a invenção do papel, que foi por volta de 105 d. C. Mas segundo Hatori <sup>1</sup>, não se encontram registros do origami no artigo da antiga dinastia Han (dinastia chinesa que durou de 206 a.C até 220 d.C) . Ainda de acordo com Hatori, há evidências de que o papel não era dobrável e sim utilizado apenas como material de escrita. Na verdade o que os estudos podem afirmar é que apesar dessa arte ter tido sua representatividade em países como a China e em outros países da Europa, foi no Japão que o potencial artístico do origami foi elevado, tanto que hoje é parte do patrimônio cultural deste país.

Os primeiros registros do origami mostram que ele era utilizado apenas em cerimônias religiosas e festivas. A prática dessa arte era exclusividade da elite: na recepção de

---

<sup>1</sup> HATORI, Koshiro. **History of Origami**. K's Origami. [S.l] [S.d] Disponível em: <https://origami.ousaan.com/library/historye.html>. Acesso em: 10 setembro, 2019

um casamento borboletas de origami eram utilizadas para enfeitar garrafas de saquê e haviam papéis especiais para dobrar as embalagens dos presentes e para o acompanhamento deles, caso fossem objetos valiosos (HINDERS, 2019).

Quando o papel ficou mais acessível, a arte de dobrar passou a ser uma atividade de passatempo e de interesse de algumas pessoas, fazendo surgir diversas variações do origami diferentes do tradicional, que faz uso apenas de uma folha de papel com forma quadrada. Os tipos de origami que podemos encontrar podem ter duas ou três dimensões. Observe a seguir algumas das variações do origami que podem ser encontradas:

- a) Origami tradicional: origami que utiliza apenas uma folha de papel, onde são feitas diversas dobragens, sem precisar cortar ou usar cola.

Figura 1 – Origami Tsuru



Fonte: edukame<sup>2</sup>

- b) Origami modular: é construído a partir de dobraduras de pequenas peças iguais que encaixadas dão forma ao objeto desejado. Um exemplo de origami que utiliza esta técnica é o kusudama, que é uma peça em forma de bola.

Figura 2 – Kusudama de flor



Fonte: eduardocavalcanti<sup>3</sup>

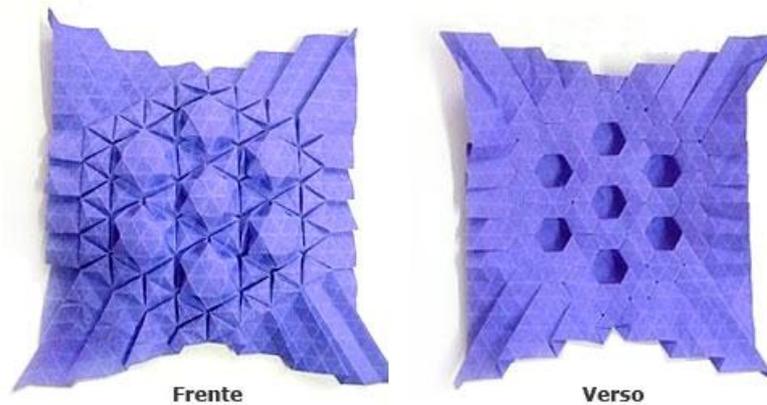
---

<sup>2</sup> Disponível em: <<https://edukame.com/figuritas-de-papiroflexia-para-tus-hijos>>. Acesso em: 25 de setembro de 2020

<sup>3</sup> Disponível em: <<https://eduardocavalcanti.home.blog/2019/06/10/kusudama-o-que-e-como-fazer-o-origami-de-um-jeito-simples/>>. Acesso em: 25 de setembro 2020.

- c) Origami Tessellation : nesta variação de origami, as dobras formam grades de figuras geométricas nas quais são realizadas construções que dão forma a belos mosaicos de origami;

Figura 3 – Tessellation formando grade hexagonal



Fonte: Oficina do origami <sup>4</sup>

- d) Block Folding (dobradura de blocos): variação de origami que utiliza diversos módulos triangulares de origami para construir objetos tridimensionais, como o cisne abaixo.

Figura 4 – Cisne de papel arco-íris



Fonte: Arthur 3D origami<sup>5</sup>

- e) *Wet Folding* (dobradura molhada): é uma técnica aplicada no objeto de origami após a sua construção, para deixá-lo com o aspecto mais vivo. Nesta variação é colocada um pouco de água no origami para poder modelá-lo, criando curvas que o tornam mais

<sup>4</sup> Disponível em: <http://oficinadoorigami.blogspot.com/2011/03/tipos-de-origami.html>. Acesso em: 09 de novembro de 2019.

<sup>5</sup> Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=FZvbMVBkttI>. Acesso em: 27 de setembro de 2020.

semelhante ao objeto real que representa.

Figura 5 – Elefante de origami com técnica *Wet Folding*



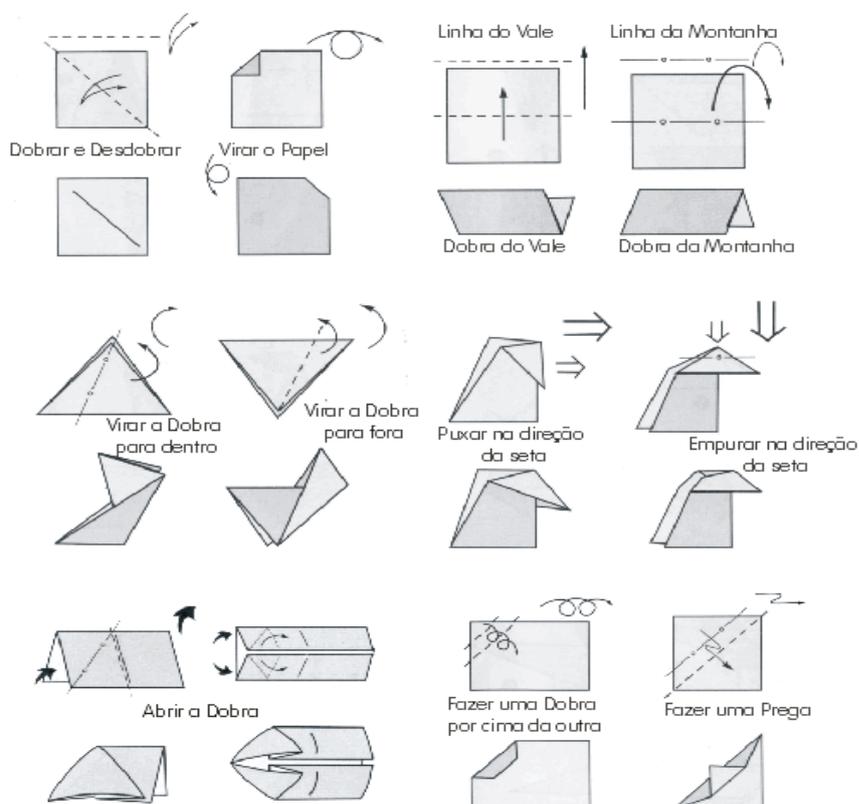
Fonte: Site toxel<sup>6</sup>

Para construir alguns modelos como estes, encontram-se disponíveis em páginas na internet e em livros sobre origami sequência de dobragens mostrando o passo a passo do origami. Para facilitar a compreensão da sequência de dobras necessárias para construção do origami, são colocados símbolos que indicam como executar cada dobra. Todos os diagramas de origami fazem uso de uma simbologia universal que permite que qualquer pessoa construa o objeto de origami independentemente do idioma em que esteja. Mas para isso é preciso compreender o significado de cada símbolo. Veja a seguir alguns símbolos encontrados com mais frequência em um diagrama de origami:

---

<sup>6</sup> Disponível em: <<http://www.toxel.com/inspiration/2012/09/09/origami-animals/>>..Acesso em: 27 de setembro de 2020.

Figura 6 – Exemplos de alguns símbolos utilizados em diagramas

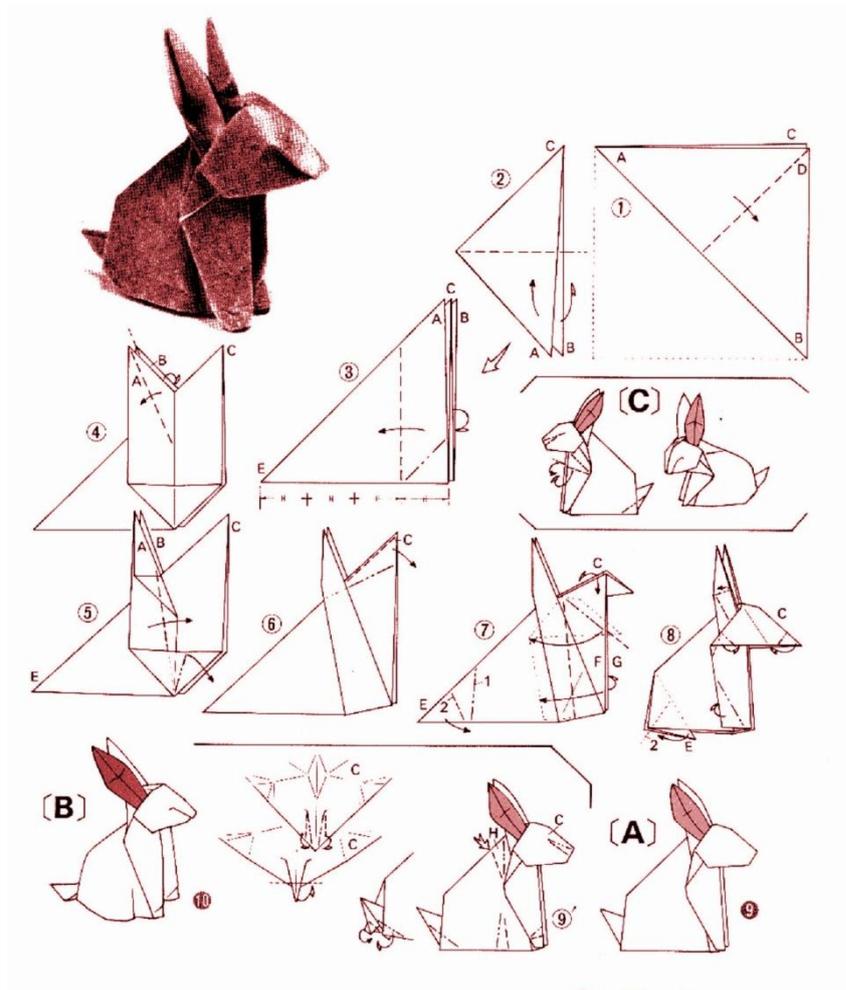


Fonte: Oficina do origami<sup>7</sup>

O sistema para diagramar origami aceito internacionalmente é conhecido como sistema Yoshizawa-Randlett, que foi desenvolvido pelo artista japonês Akira Yoshizawa no ano de 1954 e inserido no seu livro *Origami Geijutsu*. O sistema é creditado também aos origamistas Samuel Randlett e Robert Harbin que acrescentaram posteriormente outros símbolos, servindo de base para a construção de diagramas ensinando passos para obter um origami. Akira Yoshizawa, considerado o “mestre do origami”, foi autor de mais de 50.000 modelos, mas apenas centenas deles foram diagramados. As suas obras tiveram grande contribuição no compartilhamento da arte de dobrar pelo mundo. Observe a seguir um dos modelos diagramados por esse grande artista:

<sup>7</sup> Disponível em: < <http://oficinadoorigami.blogspot.com/2011/03/simbolos-do-diagrama.html> >. Acesso em: 27 de setembro de 2020

Figura 7 – Coelho de Akira Yoshizawa



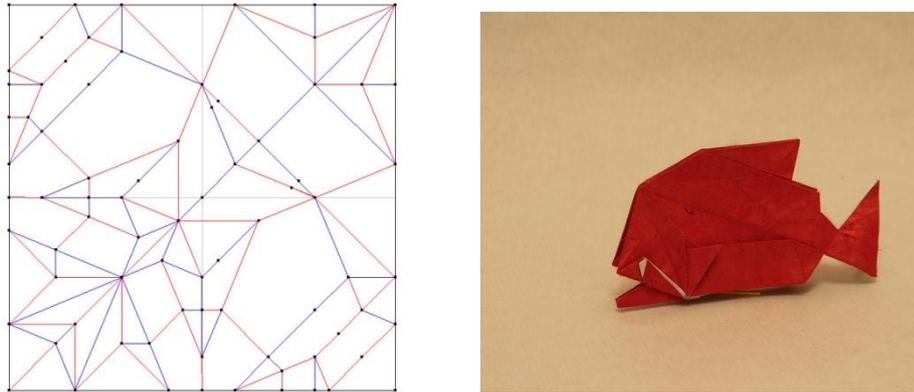
Fonte: paperlife <sup>8</sup>

Diagramas de origami são mais utilizados para apresentar a construção de origamis básicos, tais como: balão, garça, flores e etc. Geralmente, nestes tipos de origamis, há uma base comum, de onde se podem obter origamis distintos. Para os origamis complexos, dificilmente encontra-se modelo de construção através de diagramas; nestes é utilizado outro procedimento para representá-los, chamado de *crease pattern*, do inglês, significa padrão de dobras ou vincos, para abreviar podemos escrever como **(CP)**, essa forma de representação também é utilizada em origamis básicos e intermediários. No formato *crease pattern*, o modelo do origami fica planificado, ou seja, aparecem apenas as linhas que dão forma ao origami, podendo vir no padrão de dobras os símbolos de dobra vale e montanha, por meio de traços ou nas cores azul e vermelho. Apenas origamistas mais experientes e *designers* de

<sup>8</sup> Disponível em :<<http://paperlife.ru/images/origami/givnost/zaycu/RabbitAkiraYoshizawa/2.jpg>>. Acesso em : 25 de setembro de 2020.

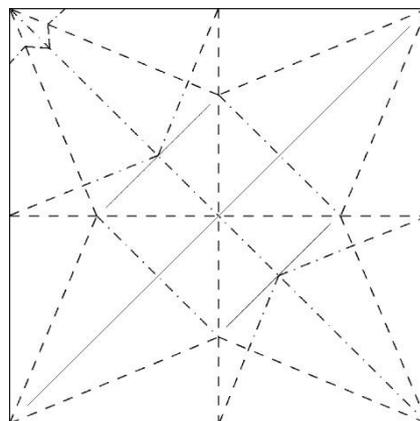
origamis conseguem perceber que tipo de objeto pode ser obtido através das dobras antes mesmo de montá-lo. A seguir estão alguns modelos de origamis básicos na forma *crease pattern*:

Figura 8 – Piranha Crease Pattern



Fonte: Site flickr<sup>9</sup>

Figura 9 – Tsuru Crease Pattern



Fonte: Site creased<sup>10</sup>

Na construção de origami, os objetos costumam ser moldados na forma mais tradicional, que é através de uma folha com forma quadrada, sem fazer cortes ou colagens. Para obter as dobras que permitem dar forma ao objeto final, busca-se sempre encontrar os pontos de referência da construção, que podem estar no interior do quadrado ou nas bordas da folha. Durante esse processo, pontos antigos de referência dão origem a novos pontos de referência, permitindo assim a construção das dobras necessárias, as quais são obtidas com precisão por meio do alinhamento de uma combinação de características do papel, tais como:

<sup>9</sup> Disponível em: < <https://www.flickr.com/photos/arunori/14600622948/>>. Acesso em: 25 de setembro de 2020.

<sup>10</sup> Disponível em: < <http://www.creased.com/corners/CreasePatternCorner/creasepatternCorner.html>>. Acesso em: 25 de setembro de 2020.

pontos, bordas, linhas de vinco ou interseções destes (LANG, 2015)

Na geometria do origami, podemos definir pontos pela interseção de duas linhas. As linhas são definidas pela borda do quadrado ou por um vinco construído no papel. O vinco ou marca no papel é resultado do ato de dobrar a folha e achatar. A combinação de pontos e linhas está em todos os passos de dobragem do origami. Claro, que alguns modelos mais complexos apresentam mais passos de construção do que outros mais simples, mas todos fazem uso de pelo menos alguma das operações básicas nos métodos de suas dobragens, por exemplo: fazer uma dobra que coloca um ponto sobre outro ponto. As operações básicas da geometria do origami definem todas as dobras que podem ser construídas através do alinhamento de pontos e linhas retas.

A preocupação em enumerar as possíveis construções de combinação de dobras e o interesse no estudo dos tipos de distâncias possíveis de construir através de diferentes combinações de pontos e linhas foram observados a partir da década de 1970. O grande destaque desse estudo foi o matemático e artista japonês-italiano Humiaki Huzita, ao descrever seis operações básicas, para definir uma única dobra, que ficaram conhecidas como axiomas de Huzita. Nessas seis operações cada dobra resulta do alinhamento de uma combinação de linhas e pontos dados (LANG, 2015).

Um sétimo axioma foi acrescentado por Koshiro Hatori em 2002. Este axioma apresenta uma única dobra que não é descrita pelos axiomas de Huzita, mas que pode ser obtida, também, através da combinação de dobras dos axiomas 2 e 4 de Huzita. A inclusão dele no conjunto dos seis axiomas é justificada por não ser necessário utilizar nenhum outro axioma de Huzita para definir a dobra do seu enunciado. Os sete axiomas ficaram conhecidos como axiomas de Huzita Hatori ou Huzita Justin, já que, segundo Lang (2015), esse conjunto de axiomas teria aparecido num artigo de Jacques Justin, publicado em 1989. Nesse artigo, foram enumeradas 7 combinações possíveis de alinhamentos, seis dessas combinações apresentaram as mesmas dobras encontradas por Huzita e a sétima foi a que Hatori também encontrou.

Por um tempo, não se sabia se haveria a possibilidade de acrescentar outro axioma à lista e essa incerteza a deixou duvidosa. A completude da lista dos sete axiomas foi provada, em 2003, pelo físico americano Robert J. Lang, tal demonstração e o conjunto dos sete axiomas podem ser encontrados em *Origami and geometric constructions*<sup>11</sup>. A seguir apresentamos os enunciados dos sete axiomas da geometria do origami e suas respectivas

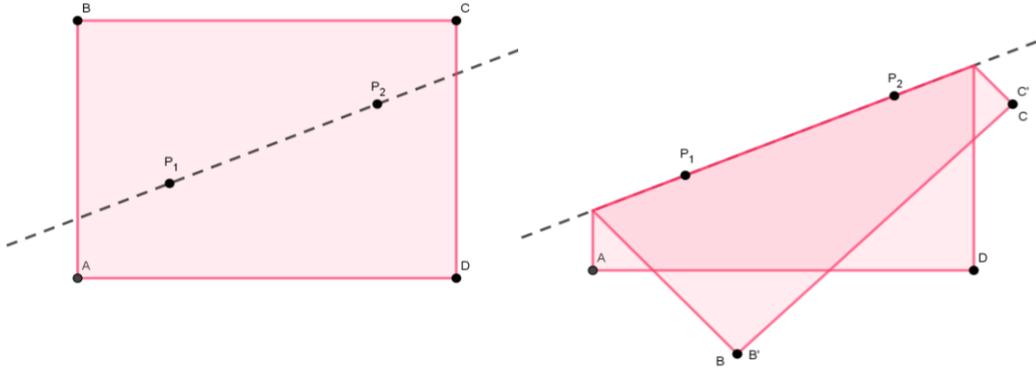
---

<sup>11</sup> [https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami\\_constructions.pdf](https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf). Acesso em: 10 de setembro de 2019.

representações.

- a) dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$ , existe apenas uma dobra que passa por eles;

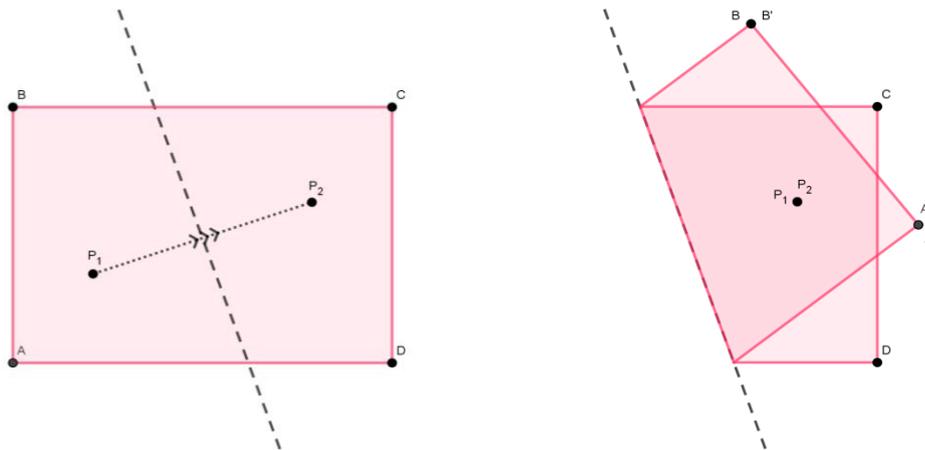
Figura 10 – Axioma 1 de Huzita



Fonte: Autora (2020)

- b) dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$ , existe apenas uma dobra que coloca  $P_1$  sobre  $P_2$ .

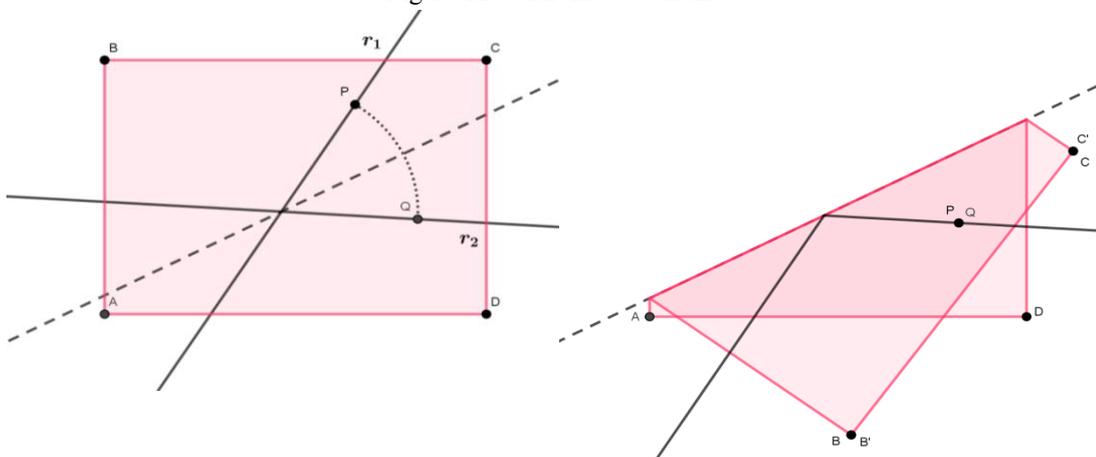
Figura 11 – Axioma 2 de Huzita



Fonte: Autora (2020)

- c) dadas as retas  $r_1$  e  $r_2$ , existe uma dobra que coloca  $r_1$  sobre  $r_2$ ;

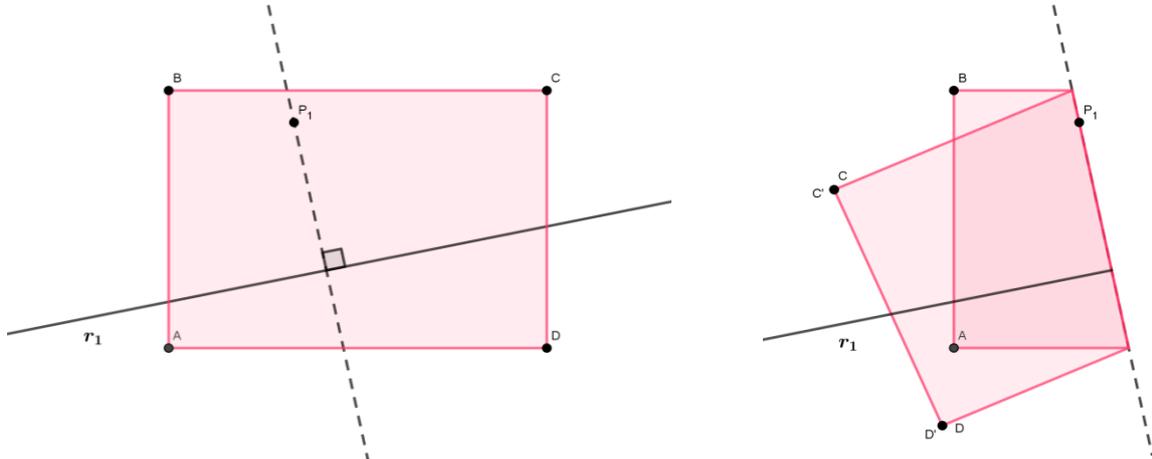
Figura 12 – Axioma 3 de Huzita



Fonte: Autora (2020)

- d) dados um ponto  $P_1$  e uma reta  $r_1$ , existe uma dobra única que é perpendicular a  $r_1$  e que passa por  $P_1$ ;

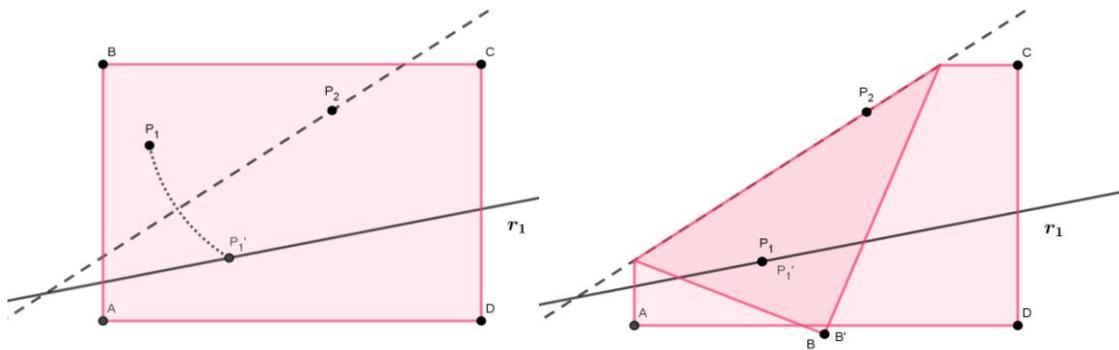
Figura 13 – Axioma 4 de Huzita



Fonte: Autora (2020)

- e) dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e uma reta  $r_1$ , existe uma dobra que coloca  $P_1$  sobre  $r_1$  e que passa por  $P_2$ ;

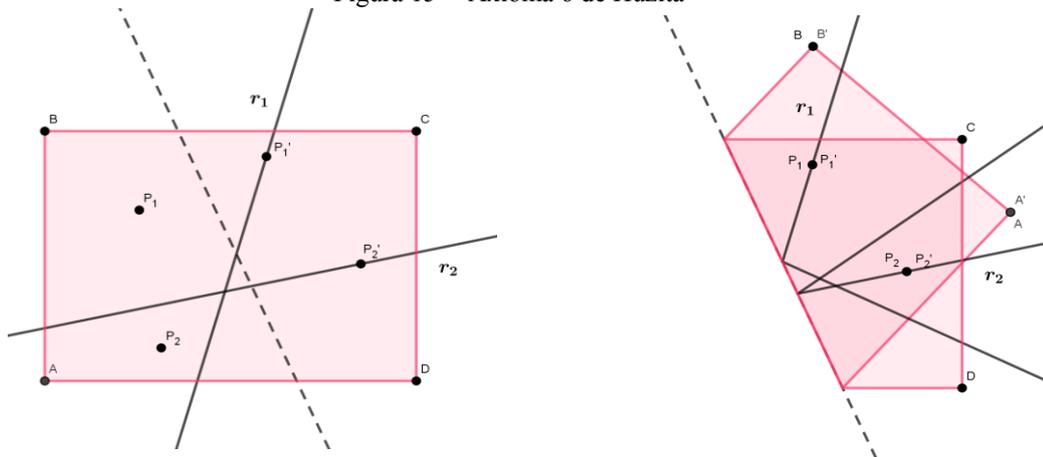
Figura 14 – Axioma 5 de Huzita



Fonte: Autora (2020)

- f) dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e duas retas  $r_1$  e  $r_2$ , existe uma dobra que leva simultaneamente  $P_1$  sobre  $r_1$  e  $P_2$  sobre  $r_2$ .

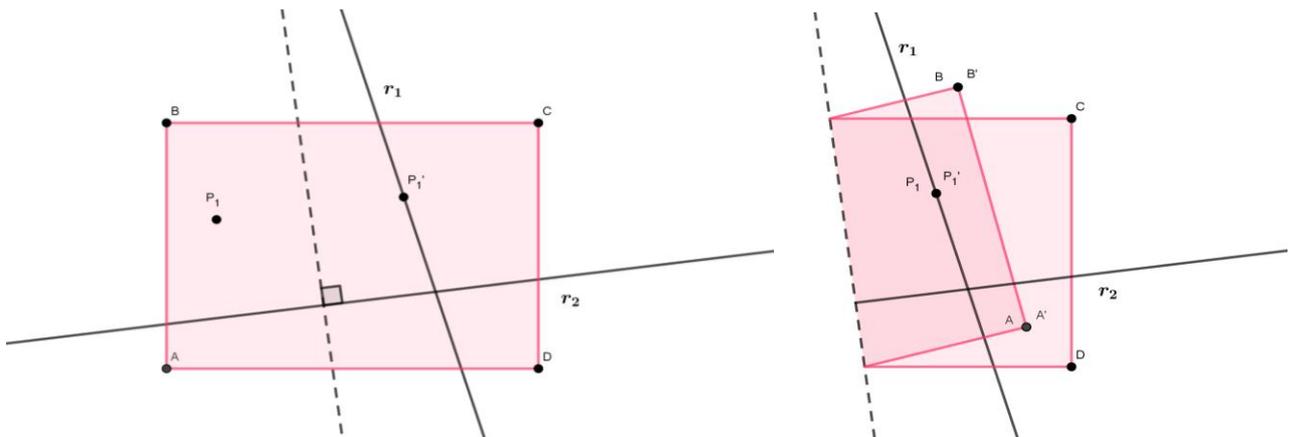
Figura 15 – Axioma 6 de Huzita



Fonte: Autora (2020)

- g) dados um ponto  $P_1$  e duas retas  $r_1$  e  $r_2$ , existe uma dobra que coloca  $P_1$  sobre  $r_1$  e que é perpendicular a  $r_2$ .

Figura 16 – Axioma 7 de Hatori



Fonte: Autora (2020)

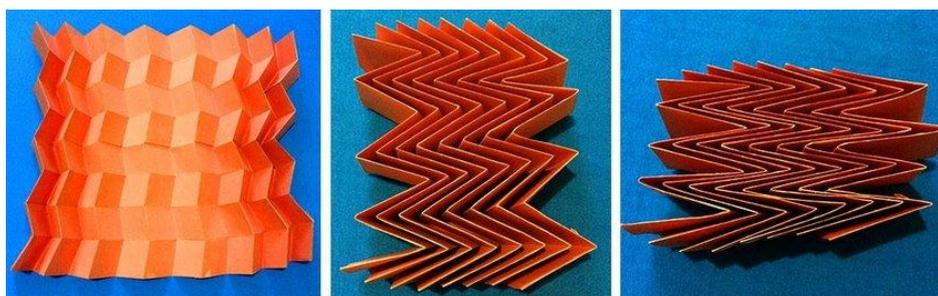
Robert Lang desenvolveu um software livre chamado *ReferenceFinder* que faz uso desse conjunto de sete axiomas para localizar pontos e linhas numa folha quadrada. Neste software é preciso inserir as coordenadas do ponto, dadas através de coordenadas cartesianas  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , mas são pontos pertencentes a um quadrante limitado, ou seja, um quadrado de vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,1)$ . Ao dar *enter*, o programa retorna mostrando através de diagramas como encontrar o ponto.

A técnica das dobras de origami e a teoria matemática envolvida estão tendo também aplicabilidade em áreas importantes tais como, medicina e engenharia. Segundo Martins e Caetano (2018, p.164):

Os médicos desenvolveram *stents* com base em origami. As *endopróteses* são introduzidas dobradas em vasos sanguíneos, e depois desdobradas dentro do nosso corpo. Os construtores de automóveis estão a usar os conhecimentos obtidos no origami para dobrar os *airbags*. E os engenheiros aeroespaciais usam princípios de origami para construir estruturas que são envidadas para o espaço dobradas, e que, já em órbita, são abertas de forma automática. Esta estrutura é um exemplo disso mesmo: a chamada dobra de Miura.

A dobra de Miura foi criada pelo astrofísico japonês Koryo Miura na década de 1980. Nesta técnica, são utilizados no padrão de dobra paralelogramos com ângulos bem definidos que permitem compactar e expandir o origami, de forma que o formato do objeto no espaço menor e no espaço maior não é alterado. Miura aplicou essa técnica na montagem de painéis solares, para que eles fossem enviados ao espaço dobrados e lá fossem planificados, sem modificar a sua estrutura dobrável. Nos últimos anos engenheiros vêm utilizando essa técnica como base para projetar outros origamis cada vez mais rígidos.

Figura 17 – Dobra de Miura



Fonte: Site researchgate<sup>12</sup>

De acordo com Kawano (2015), a prática do origami começou apenas como *hobby* para alguns pesquisadores, que depois passaram a ver nessa arte um objeto de estudo acadêmico. Segundo o autor, os matemáticos estão buscando obter fórmulas computacionais para criar passos de dobragens de origamis complexos e sofisticados e também estão trabalhando em problemas que envolvem polinômios para descobrir que tipo de origami pode resultar dos seus padrões de vincos quando ele estiver desdobrado.

Assim como cientistas, engenheiros, físicos e matemáticos vêm utilizando o conhecimento do origami na elaboração de seus projetos, outros têm investigado as possibilidades do uso dessa arte na prática de ensinar. A área da educação onde se encontram mais pesquisas sobre origami é no ensino de geometria, mas sabe-se que a arte do origami, como já foi observado, pode envolver muitos campos do saber.

Segundo os autores Hayasaka e Nishida (200?) os primeiros estudos do origami na

<sup>12</sup> Disponível em: <[https://www.researchgate.net/figure/Figura-6-O-origami-Miura-Ori-criado-por-Koryo-Miura\\_fig7\\_309765430](https://www.researchgate.net/figure/Figura-6-O-origami-Miura-Ori-criado-por-Koryo-Miura_fig7_309765430)> Acesso em: 25 de setembro de 2020.

educação foram iniciados pelo pedagogo alemão Friedrich Froebel, na Europa, em 1837, alguns anos mais tarde o Japão também passou a inserir o origami como ferramenta educacional. O método de ensino de Froebel fazia uso de três estágios: no primeiro momento a criança deveria conhecer os princípios geométricos ao manipular a folha de papel; em seguida deveria fazer representação de animais e plantas por meio de dobras e na última fase, as crianças deveriam expor suas construções como meio para despertar seu olhar artístico. Segundo este autor quem introduziu a arte do origami no Brasil, como ferramenta educacional no ensino fundamental, foi Yachiyo Koda, na década de 1960, através de oficinas ofertadas a educadores e professores.

A matemática envolvida no origami é bem perceptível, podendo dar liberdade para o professor relacionar álgebra, aritmética e geometria ao trabalhar com construções através de dobragens. Os primeiros a ver nas dobras um campo de estudo foram os mouros a partir do século VIII. Como eles não podiam criar figuras simbólicas de animais, devido à religião não permitir, então eles apenas estudavam a geometria presente nas formas e dobras.

Devido às diversas possibilidades do uso do origami na abordagem de conteúdos matemáticos, de forma lúdica proporcionada pela manipulação do papel, a sua prática, no ensino básico, apresenta-se eficaz no processo de ensino e aprendizagem. De acordo com Narvaz. *et al* (2007) :

O trabalho com dobraduras é enriquecedor, no que se refere também, às inúmeras possibilidades que ele oferece, nos diversos ramos da Matemática. Além de toda a exploração geométrica que é possível fazer com o Origami, as noções de proporcionalidade, frações, aritmética, álgebra e funções, além de outras, são fortemente evidenciadas nesta prática. A que se salienta que o aluno tem preferências significativas por este tipo de abordagem, uma vez que, envolve o lúdico, a manipulação e o prazer de aprender.

Essa característica divertida do ato de dobrar uma folha de papel e dar formas a objetos cria um ambiente atrativo para que o professor possa iniciar a abordagem de um determinado conteúdo e a partir das construções realizadas com a dobragem do papel, fazer as verificações necessárias a fim de obter resultado mais satisfatório na abordagem dos assuntos trabalhados.

### 3 ELEMENTOS GEOMÉTRICOS E ORIGAMI

Neste capítulo, com o uso de uma simples folha no formato retangular, faremos uma breve abordagem de alguns elementos geométricos da geometria plana que podemos identificar na manipulação do papel e, em seguida, apresentaremos o conjunto de possibilidades de dobragens do origami que resultam da combinação de pontos e linhas, buscando ao mesmo tempo mostrar passos de construções geométricas elementares por meio de tais dobras.

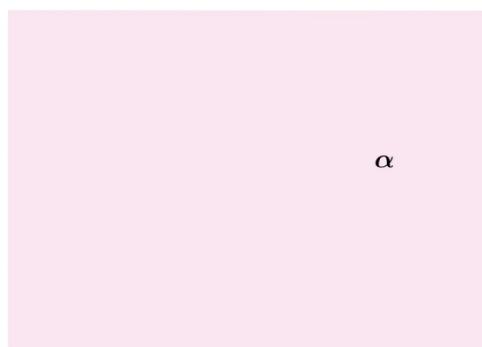
#### 3.1 Elementos geométricos básicos

##### 3.1.1 Ponto, reta e plano

Os elementos geométricos ponto, reta e plano são ditos entes primitivos, ou seja, não possuem definição, mas podemos representar esses seres geométricos através de objetos presentes no mundo físico.

A partir da superfície de uma folha de papel retangular, por exemplo, podemos ter a ideia de plano. Porém, devemos entender que a folha é apenas uma representação do plano, que é infinito e constituído por pontos e retas. Denotamos o plano através de letras gregas minúsculas, como pode ser observado na imagem a seguir:

Figura 18 – Folha de papel retangular representando o plano



Fonte: Autora (2020)

Os cantos inferiores e superiores da folha de papel retangular ou uma marca feita com a ponta de um lápis, em algum lugar dessa mesma folha, são alguns dos exemplos que nos dão a noção intuitiva de ponto. Para denotar os pontos, fazemos o uso das letras maiúsculas:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , etc. Observe a figura a seguir:

Figura 19 – Noção de ponto no plano extraída a partir de uma folha de papel retangular



Fonte: Autora (2020)

Note que os cantos inferiores, esquerdo e direito, foram denotados, respectivamente, pelas letras maiúsculas **A** e **B**. Para denotar os cantos superiores, esquerdo e direito, foram utilizadas, respectivamente, as letras **D** e **C**. Já, no interior da folha, para representar uma marca feita, por exemplo, através da ponta de um lápis, foi utilizada a letra maiúscula **E**.

Nas construções de representações de alguns animais e figuras utilizando uma folha de papel, em forma de um quadrado ou retângulo, costumamos combinar pontos como estes localizados na folha, criando assim uma dobra ou vinco, que é o resultado da dobragem da folha na região desejada seguida de uma pequena pressão, de forma a criar uma linha reta na folha de papel. Essa linha reta marcada é uma noção simples que podemos ter do que seja uma reta contida no plano.

A reta é constituída por um conjunto infinito de pontos, dessa forma, a sua representação através do vinco feito em uma folha precisa ser dado junto com prolongamento das extremidades do vinco. A notação da reta é dada por letras minúsculas, tais como: *r*, *s* e *t*. Ou por dois dos seus pontos conhecidos, conforme a seguir:

Figura 20 – Noção de reta dividindo um papel retangular ao meio



Fonte: Autora (2020)

Nas construções com origami, a combinação de pontos e vincos antigos determinam na folha novos pontos e vincos. O alinhamento preciso dessas combinações permite dar forma ao objeto desejado. Na figura 20, com uma única dobragem, foi possível determinar dois retângulos de mesma área. Para isso, os cantos inferiores, **A** e **B**, foram levados, respectivamente, sobre os cantos superiores, **D** e **C**, e ajustando a borda inferior sobre a borda superior, um vinco pôde ser construído. Este determinou nas bordas, esquerda e direita, dois novos pontos, **P** e **Q**, chamados de pontos de interseção. Ao fazer o prolongamento da dobra marcada, pelas suas extremidades opostas, foi determinada uma reta **r** que pode ser denotada, também, por dois pontos conhecidos por onde passa, assim temos  $r = \overleftrightarrow{PQ}$ . Utilizando esse mesmo raciocínio, temos que a reta que passa pelos pontos **A** e **D** é indicada por  $\overleftrightarrow{AD}$ . Note que a reta  $\overleftrightarrow{AD}$  passa também pelo ponto **P**, assim, temos que os pontos **A**, **P** e **D** pertencem à mesma reta. Quando temos pontos pertencentes a uma mesma reta, dizemos que eles são colineares; caso contrário, são ditos não colineares.

### 3.1.2 Semirreta , segmento de reta e ponto médio

A porção da reta que parte de um ponto de origem e sem um ponto de chegada chamamos de semirreta. Por um ponto **P** pertencente à reta, ficam determinadas sobre essa reta duas semirretas de origem **P**, porém de sentidos opostos. Na figura 20, por dois pontos **P** e **Q**, pertencentes à reta **r**, podemos indicar duas semirretas partindo de pontos distintos: a porção da reta de origem **P** que segue sem um ponto de chegada ao passar por **Q** representa a semirreta  $\overrightarrow{PQ}$  e da outra porção da reta de origem **Q** que, ao passar por **P**, segue na direção da reta sem um ponto final, temos a semirreta  $\overrightarrow{QP}$ . Veja que ambas as semirretas  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\overrightarrow{QP}$  são distintas e que possuem apenas um conjunto de pontos em comum pertencentes à parte **PQ** da reta, representando o segmento de reta.

Dados pontos distintos **P** e **Q** sobre uma reta, o segmento de reta com extremos **P** e **Q** é a porção da reta situada de **P** a **Q** (MUNIZ NETO, 2012). Na figura 20, temos, como exemplos de segmentos, as bordas e um vinco dividindo o papel ao meio. Podemos denotar esses segmentos da seguinte forma: a borda esquerda representa o segmento **AD** ou **DA**; a borda direita, o segmento **BC** ou **CB**; a borda inferior, o segmento **AB** ou **BA**; a borda superior, o segmento **DC** ou **CD**, e um vinco dividindo a folha retangular ao meio representa o segmento **PQ** ou **QP**. Os segmentos, ao contrário das retas e semirretas, podem ser medidos.

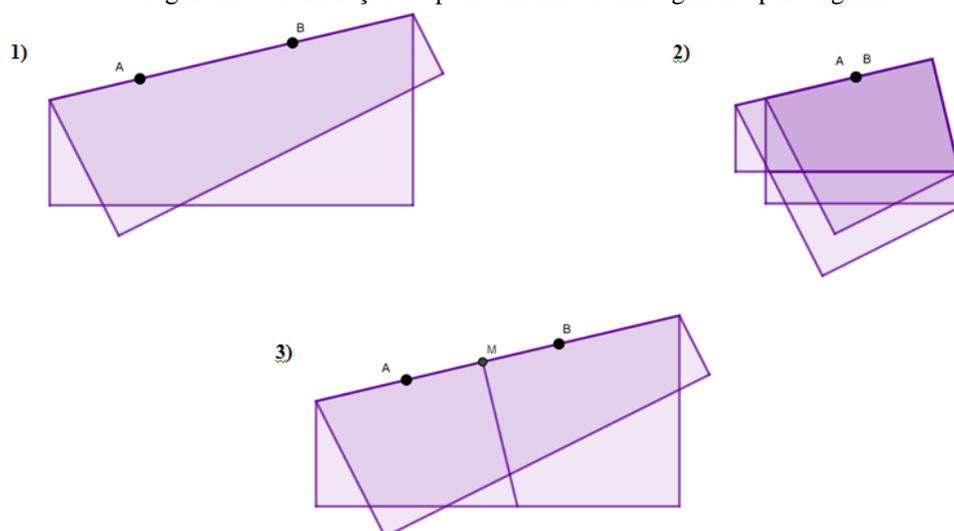
Tomando as bordas inferior e superior, para exemplificar, podemos indicar as suas respectivas medidas, como  $\overline{AB}$  ou  $\overline{BA}$  e  $\overline{CD}$  ou  $\overline{DC}$ .

Note que os segmentos  $AD$  e  $BC$  foram divididos pelas extremidades do segmento  $PQ$  em duas partes de comprimentos iguais e assim novos segmentos foram construídos:  $AP$ ,  $PD$ ,  $BQ$  e  $QC$ . Dizemos que os pontos  $P$  e  $Q$  são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos  $AD$  e  $BC$ .

Como podemos construir o ponto médio de um segmento qualquer com dobradura? Siga as instruções abaixo para encontrar o ponto médio de um segmento:

- dados dois pontos no papel, faça uma linha de dobra passando pelos dois pontos;
- faça uma segunda dobra levando o ponto  $A$  ao ponto  $B$ ;
- ao desdobrar temos um novo ponto  $M$  determinado pela interseção dos vincos, tal que  $M$  é o ponto médio do segmento  $AB$ .

Figura 21 – Construção do ponto médio de um segmento por origami



Fonte: Autora (2020)

Podemos observar, no passo 2, que o segmento  $AB$  foi dividido em duas partes que se sobrepõem e ao desdobrar temos três novos elementos criados: um ponto  $M$  e dois segmentos de mesmo comprimento  $AM$  e  $MB$ . Temos, por construção, que  $M$  é o ponto médio do segmento  $AB$ . Na verdade, a dobra que foi construída no passo 2 coincide com a mediatriz<sup>13</sup> do segmento  $AB$ , a qual garante, por propriedade, que todo ponto pertencente à mediatriz está a uma mesma distância das extremidades do segmento. Como  $M$  pertence à

<sup>13</sup> “A mediatriz de um segmento  $AB$  é a reta perpendicular a  $AB$  que contém o seu ponto médio” (WAGNER, 2007, p. 4).

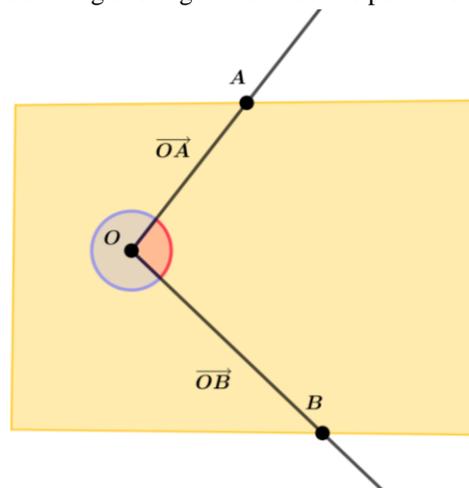
mediatriz e também pertence ao segmento  $AB$ , temos que os segmentos construídos,  $AM$  e  $MB$ , possuem o mesmo tamanho, de modo que  $M$  é o ponto médio do segmento  $AB$ .

### 3.1.3 Ângulo no plano

Dadas duas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , podemos obter duas regiões limitadas por essas semirretas, tais regiões são chamadas de ângulos. A origem comum  $O$  das semirretas é o vértice do ângulo e as semirretas são os lados do ângulo (MUNIZ NETO, 2012). Podemos indicar o ângulo de origem  $O$  e lados,  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , escrevendo  $\angle AOB$ ,  $A\hat{O}B$ ,  $\hat{O}$  ou representar por uma letra minúscula grega, como  $\theta$  (lê-se: teta).

Uma forma de visualizar essas regiões pode ser dada marcando um ponto  $O$  na folha e criando em seguida dois vincos partindo de  $O$ , conforme o exemplo dado a seguir:

Figura 22 – Regiões angulares limitadas por duas semirretas



Fonte: Autora (2020)

Na figura 22, pode-se observar que as semirretas marcaram na folha duas regiões: a região da direita é a região convexa, enquanto que a região da esquerda é não convexa ou côncava. Segundo Muniz Neto (2012), uma região é convexa quando dois pontos quaisquer pertencentes à região, digamos  $A, B \in \pi$  determinam um segmento contido na região,  $AB \subset \pi$ . Utilizando essa definição, é possível verificar, na imagem da figura 22, que nem todos os pares de pontos pertencentes à região da esquerda podem determinar um segmento contido nessa região, o que mostra que ela não é convexa.

Assim, dizemos, também, que o ângulo esquerdo é não convexo e que o ângulo direito é convexo. Para indicar a abertura do ângulo, podemos utilizar um pequeno arco de

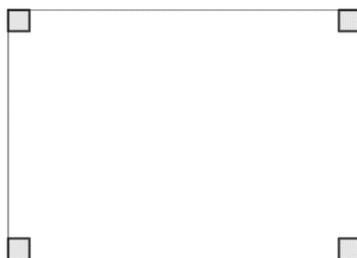
circunferência com origem no vértice do ângulo e extremidades sobre as semirretas, como pode ser visualizado na figura 22.

Um valor numérico costuma ser associado ao ângulo, indicando a sua medida de abertura. Utilizaremos aqui como unidade de medida do ângulo,  $1^\circ$  (um grau). Nas construções seguintes, com o origami, serão mencionados com frequência ângulos convexos, ou seja, ângulos com medida maior que  $0^\circ$  e menor ou igual a  $180^\circ$ , tais como: agudo, reto e obtuso.

Dizemos que um ângulo é reto quando sua medida corresponde a  $90^\circ$ ; agudo, quando mede mais que  $0^\circ$  e menos que  $90^\circ$ ; obtuso, quando mede mais que  $90^\circ$  e menos que  $180^\circ$ ; raso ou de meia volta, quando corresponde a  $180^\circ$ , que é equivalente também a dois ângulos retos; e nulo, quando corresponde a  $0^\circ$ .

Numa folha de papel quadrada ou retangular, todos os ângulos nos cantos da folha, formados pelas bordas adjacentes, são representantes do ângulo reto. Para simbolizar o ângulo reto, é feito um pequeno quadrado com um dos vértices coincidindo com vértice do ângulo reto.

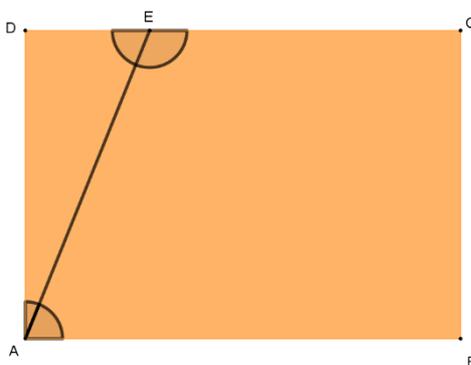
Figura 23 – Exemplos de ângulo reto



Fonte: Autora (2020)

Fazendo uma simples dobra na folha retangular, outros ângulos são determinados. Para isso, basta fazermos um vinco partindo de um dos cantos da folha.

Figura 24 – Ângulos determinados por um vinco no papel

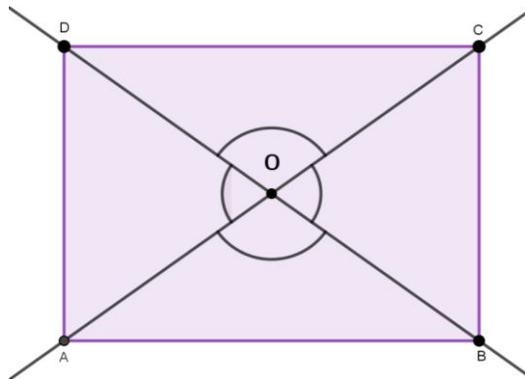


Fonte: Autora (2020)

Na figura 24, a dobra feita na folha determinou três ângulos agudos  $\angle BAE$ ,  $\angle DAE$  e  $\angle DEA$ , um ângulo raso  $\angle DEC$  e um ângulo obtuso  $\angle AEC$ . Podemos observar ainda que somando os ângulos  $\angle BAE$  e  $\angle DAE$ , temos a medida de  $90^\circ$ . Dois ângulos que somam  $90^\circ$  são ditos ângulos complementares. Na mesma figura, os  $\angle DEA$  e  $\angle AEC$  somam  $180^\circ$ , que é equivalente a medida do ângulo raso. Dois ângulos que somam  $180^\circ$  são ditos ângulos suplementares. Podemos dizer ainda que os pares de ângulos  $\angle BAE, \angle DAE$  e  $\angle DEA, \angle AEC$  são ângulos adjacentes, ângulos que não têm pontos internos em comum, mas que têm apenas o vértice e um lado comum.

No plano de uma folha ainda é possível determinar dois ângulos com mesmo vértice cujos lados são semirretas opostas. Ângulos com essa propriedade são ditos ângulos opostos pelo vértice.

Figura 25–Exemplo de pares de ângulos opostos pelo vértice



Fonte: Autora (2020)

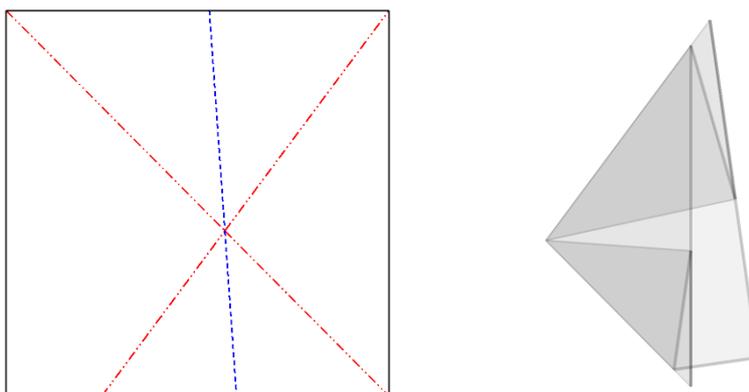
Na figura 25, dois vincos passando pelos cantos opostos de uma folha retangular representam as retas,  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BD}$ , que se intersectam no ponto O. Esse ponto determina sobre cada reta duas semirretas opostas. Os pares de ângulos  $\angle AOD, \angle BOC$  e  $\angle DOC, \angle AOB$  são ditos ângulos opostos pelo vértice O. Note nos pares de ângulos, com vértice em O, que cada lado de um ângulo, ou seja, que cada semirreta de um ângulo é oposta a uma semirreta do outro ângulo.

Há uma proposição da geometria euclidiana que envolve ângulos opostos pelo vértice, que é a seguinte: “Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais” (MUNIZ NETO, 2012, p.18). Podemos justificar essa proposição observando os elementos presentes na figura 25. Das semirretas opostas  $\overrightarrow{AO}$  e  $\overrightarrow{OC}$ , podemos concluir que  $\angle AOD + \angle DOC = \angle AOC = 180^\circ$ . Da mesma forma, podemos verificar que  $\angle BOC + \angle DOC = \angle DOB = 180^\circ$ . Subtraindo a última

igualdade da primeira igualdade temos que  $\angle AOD = \angle BOC$ . O mesmo raciocínio pode ser utilizado para verificar que  $\angle DOC = \angle AOB$ .

Para verificar por construção de origami que ângulos opostos são iguais, basta fazer uma dobragem simultânea que leve as semirretas de um ângulo sobre as semirretas do outro ângulo e obter a sobreposição dos ângulos opostos, como no modelo a seguir:

Figura 26 – Sobreposição de ângulos opostos pelo vértice com dobradura.



Fonte: Autora (2020)

A imagem acima foi construída no aplicativo para Android “ORIPA – Origami Pattern Editor”, a linha vermelha representa a dobra montanha e a linha azul representa a dobra vale.

### 3.2 Abordagem geométrica dos axiomas do origami

Nesta seção, os axiomas do origami serão abordados através da linguagem geométrica presente nas dobragens, com o objetivo de explorar conceitos e propriedades de algumas construções geométricas básicas, apesar de existir uma abordagem desses axiomas utilizando argumentos do método cartesiano por meio da equação da reta, da circunferência e da parábola, como pode ser visto em Monteiro (2008).

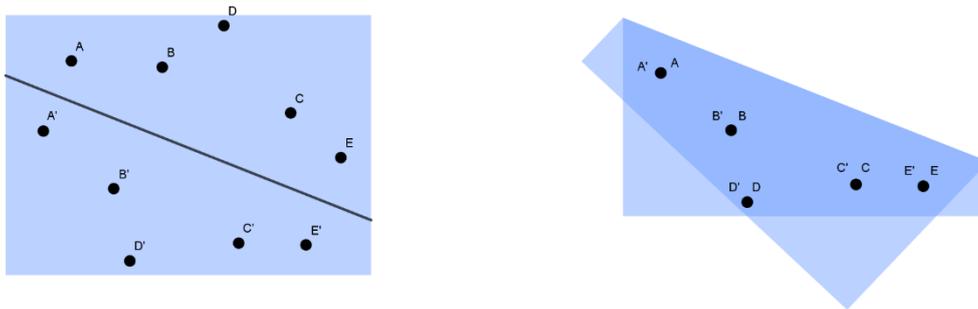
De fato, vimos que elementos da geometria são notórios nos axiomas do origami, os quais correspondem a um pequeno conjunto de possibilidades de dobragens que descrevem o que construir com uma dobra fazendo incidir pontos e retas: as retas resultam dos vincos feitos no papel; os pontos, da interseção dos vincos. Em todos os enunciados do conjunto de axiomas, os pontos e retas dados representam construções possíveis de se fazer com as possibilidades de dobras. Antes de iniciar a abordagem geométrica das possibilidades de

dobragens possíveis através do alinhamento de pontos e retas, vamos comentar sobre uma ferramenta geométrica imediata identificada no ato de dobrar e que faz parte das justificativas das construções geométricas com origami: a reflexão.

Segundo Carneiro e Spira (2015, p.16): "Seja  $r$  uma reta. Chama-se uma reflexão com respeito à reta  $r$  a transformação do plano que leva um ponto  $P$  ao ponto  $Q$ , simétrico de  $P$  em relação à reta, isto é, tal que a distância de  $P$  à reta  $r$  é igual à distância de  $Q$  a  $r$ ". A transformação no plano mencionada na definição é uma função que faz corresponder a cada ponto  $P$  do plano um ponto  $Q$  pertencente também ao plano, sendo  $Q$  a imagem de  $P$  pela transformação. Veja que, o par de pontos  $P, Q$  correspondem-se por reflexão, quando  $Q$  é a imagem refletida de  $P$  através da reta  $r$ , de modo que a distância de ambos à reta é a mesma. Podemos definir a distância de um ponto  $P$  à reta  $r$  como o comprimento do segmento  $PP_0$ , tal que  $P_0$  pertence a  $r$  ( $P_0 \in r$ ) e o ângulo formado pela reta  $\overline{PP_0}$  com a reta  $r$  é igual a  $90^\circ$ . Dizemos que  $P_0$  é a projeção ortogonal de  $P$  sobre  $r$ , isto é, que  $P_0$  é o pé da perpendicular baixada  $P$  sobre  $r$ .

Dado um conjunto de pares de pontos que se correspondem por reflexão em relação a uma reta  $r$  na superfície do papel, uma experiência prática para realizar um movimento de reflexão na folha é fazer uma dobragem de forma a criar um vinco sobre a reta.

Figura 27–Pares de pontos simétricos entre si em relação à  $r$  e coincidentes pela dobra



Fonte: Autora (2020)

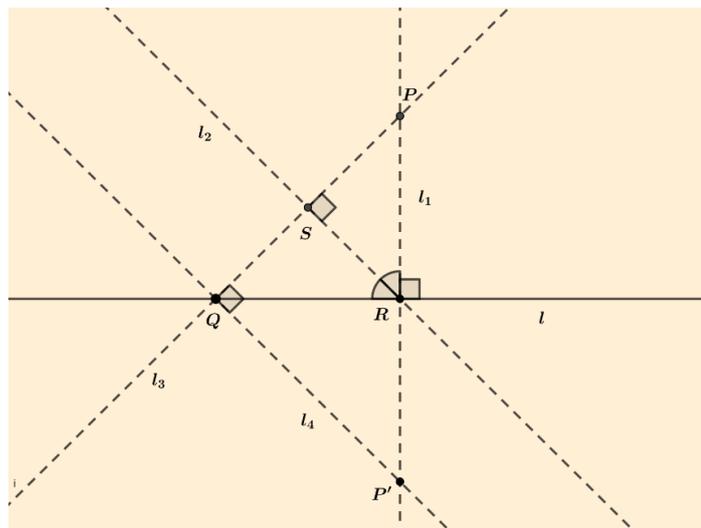
Veja que as imagens refletidas de pontos distintos acima da reta são únicas e também distintas em relação à reta  $r$ , na qual pode ser feito um vinco que faz coincidir os pontos que se correspondem por reflexão através de  $r$ . Podemos concluir que os pares de pontos que se sobrepõem com a dobragem de papel são imagem um do outro em relação à linha de dobra, que atua como eixo de simetria, e todos os pontos pertencentes a ela são levados sobre si mesmos, ou seja, são imagens de si mesmos. Assim, ao fazer uma dobragem no papel, estamos realizando imediatamente o movimento de reflexão: os pares de pontos

sobrepostos são os mesmos que se correspondem por uma mesma transformação por reflexão e o vinco construído nesse processo atua como eixo de reflexão ou eixo de simetria.

Segundo Wagner (2007), a reflexão é uma isometria, ou seja, preserva distâncias, transformando assim cada figura  $F$  em outra  $F'$  congruente a  $F$ . Por essa definição, dadas duas figuras no papel que se correspondem por uma transformação por reflexão, podemos fazer coincidir as figuras e encontrar a linha de dobra. Dessa forma, verifica-se de forma experimental que a distância de dois pontos quaisquer da figura  $F$  é igual à distância entre as suas imagens refletidas.

Dados uma reta  $l$  e um ponto  $P$  não pertencente a  $l$ , veja um modo de construir, por meio de duas operações do origami, a imagem de  $P$  refletida por  $l$ , ou seja, o simétrico de  $P$  em relação a  $l$ . Na construção, serão utilizados os axiomas 3 e 4. Primeiramente, utilizando o axioma 4, construa uma dobra  $l_1$  que seja perpendicular a  $l$  e que passe pelo ponto  $P \notin l$ . Logo em seguida, utilize o axioma 3 para encontrar a dobra  $l_2$  que faz coincidir as retas  $l$  e  $l_1$ . Agora, será preciso aplicar outra vez o axioma 4 para construir, por  $P$ , a linha  $l_3$  perpendicular a  $l_2$  e encontrar um ponto  $Q$ , o qual é ponto de interseção da reta  $l_3$  com a reta  $l$ . Por fim, deve ser executada novamente a dobra do axioma 4 para vincar  $l_4$ , linha que intersecta perpendicularmente  $l_3$  no ponto  $Q$ . O simétrico  $P'$  de  $P$  por  $l$  é o ponto em que a reta  $l_4$  toca a reta  $l_1$ , isto é,  $l_4 \cap l_1 = \{P'\}$ .

Figura 28 - Reflexão de um ponto  $P$  em relação a uma reta  $l$ .



Fonte: Autora (2020)

Os axiomas, 3 e 4, utilizados na construção anterior permitiram a construção de dois triângulos semelhantes  $\triangle SPR$  e  $\triangle QPP'$ , com razão de semelhança igual a  $\frac{PS}{PQ} = \frac{1}{2}$ , o que implicou  $\overline{P'R} = \overline{PR} = d(P, l)$ . Isto foi possível porque o axioma 3, que será explicado

ainda neste capítulo, permitiu bissectar o ângulo determinado por duas semirretas de mesma origem, assim, de  $l_2$ , tem-se, de acordo com a imagem 28,  $\angle QRS \equiv \angle SRP$ . Note também que  $l_3$ , linha perpendicular a  $l_2$  por  $P$ , intersecta  $l_2$  e  $l$ , respectivamente, em  $S$  e  $Q$ . Dessa forma, ficam determinados dois triângulos retângulos,  $\triangle QSR$  e  $\triangle PSR$ , congruentes pelo caso (ângulo, lado, ângulo)<sup>14</sup> ALA, pois  $\angle QRS \equiv \angle SRP$ ,  $RS$  é o lado comum e  $\angle RSQ \equiv \angle RSP$ . Daí, conclui-se que  $\overline{QS} = \overline{SP}$  e pode-se dizer ainda que  $Q$  é simétrico de  $P$  em relação à linha  $l_2$ . De  $l_4$ , que, por construção, intersecta perpendicularmente  $l_3$  no ponto  $Q$ , ficaram determinadas um par de paralelas,  $l_2$  e  $l_4$ , já que essas linhas são ambas perpendiculares a  $l_3$ , o que implicou na construção de dois triângulos retângulos semelhantes,  $\triangle PSR$  e  $\triangle PQP'$ , com  $\hat{S} \equiv \hat{Q}$ ,  $\hat{R} \equiv \hat{P}'$  e  $\hat{P}$  ângulo comum aos triângulos. Daí, dos lados correspondentes, foi encontrada a razão de semelhança igual a  $\frac{1}{2}$ , mostrando que  $\overline{P'R} = \overline{PR} = d(P, l)$ . De modo que o ponto  $P'$  construído é o simétrico de  $P$  em relação à linha  $l$ . Note que o problema de construir o simétrico de um ponto  $P$  através de uma reta  $l$  é o mesmo que encontrar a extremidade  $P'$  do segmento  $PP'$  tal que  $r$  seja perpendicular ao segmento  $PP'$  e que passe pelo ponto médio desse segmento. Daí, ao fazer um vinco sobre  $l$ , o ponto  $P$  é levado sobre o seu simétrico  $P'$ .

Outra forma de justificar, também, a construção anterior é perceber que das paralelas,  $l_2$  e  $l_4$ , determinadas por uma linha  $l_3$  perpendicular a ambas, tem-se  $\angle P'QR \equiv \angle QRS$  e da bissetriz  $l_2$  do ângulo  $\angle QRP$ , o qual mede  $90^\circ$ , conclui-se que o ângulo  $\angle QRS$  tem medida igual a  $45^\circ$ , implicando em  $\angle P'QR$  medindo também  $45^\circ$ . Como  $\angle PQP'$  é reto, pode-se concluir que  $\angle PQR$  é congruente a  $\angle P'QR = 45^\circ$ . Note que ficam determinados assim dois triângulos retângulos,  $\triangle P'RQ$  e  $\triangle PRQ$ , congruentes pelo caso (ALA), pois  $\angle QRP' = \angle QRP = 90^\circ$ ,  $RQ$  é o lado comum e  $\angle PQR = \angle P'QR$ . Isto mostra que  $\overline{P'R} = \overline{PR}$  e tais medidas representam, respectivamente, as distâncias dos pontos  $P'$  e  $P$  à reta  $l$ . Portanto, os pontos  $P$  e  $P'$  são simétricos um do outro por  $l$ .

Na abordagem geométrica dos axiomas do origami que serão apresentados a seguir, além dos conceitos básicos já apresentados e da breve revisão da definição de reflexão, também faremos uso de conceitos e resultados geométricos para explicar e obter as dobragens.

---

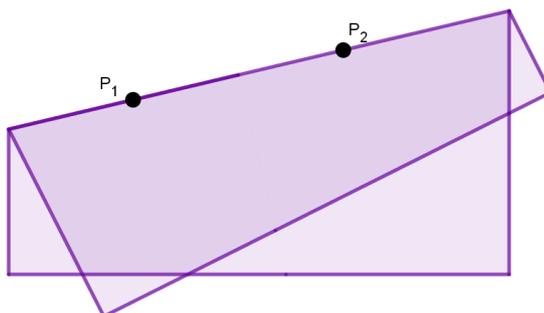
<sup>14</sup> Caso de congruência ângulo, lado, ângulo (ALA): “se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes” (MUNIZ NETO, 2012, p. 35).

### 3.2.1 Axioma 1 do origami

Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  podemos fazer uma dobra que passa por ambos.

A dobra que passa pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$  representa a reta definida por dois dos seus pontos conhecidos. Neste primeiro axioma, a linha que devemos encontrar coincide com a reta  $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ . Utilizando régua e lápis, uma linha reta pode ser construída passando pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$ . Essa linha traçada coincide com um vinco que passa por esses pontos. Ambas as construções representam a reta  $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ . Veja que podemos associar o axioma 1 do origami ao postulado<sup>15</sup> da geometria euclidiana que diz que por dois pontos distintos passa uma única reta, dessa forma apenas uma dobra passando por dois pontos pode ser construída, fazendo os pontos incidirem sobre si mesmos.

Figura 29 – construção da dobra do axioma 1



Fonte: Autora (2020)

### 3.2.2 Axioma 2 do origami

Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  podemos fazer uma dobra que coloca  $P_1$  sobre  $P_2$ .

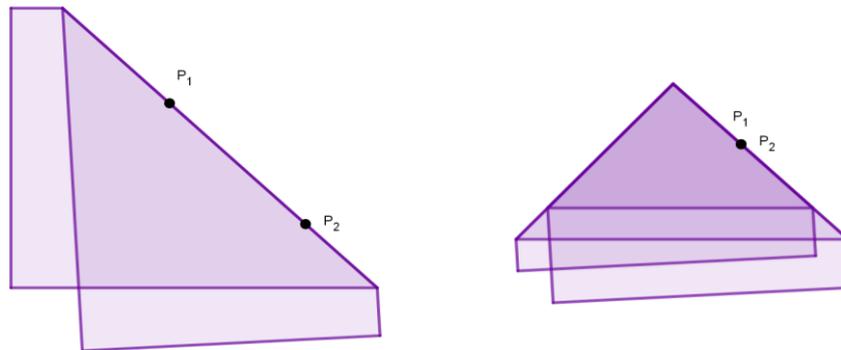
Note que a dobra que coloca  $P_1$  sobre  $P_2$  coincide com o eixo de reflexão, que faz corresponder  $P_1$  ao ponto  $P_2$ , sendo  $P_2$  o simétrico de  $P_1$  em relação à dobra. Conforme Wagner (2007, p. 73): “Dado uma reta  $r$ , dizemos que o ponto  $A'$  é simétrico do ponto  $A$  em relação à  $r$  quando  $r$  é mediatriz de  $A'A$ .” Dessa forma, construir a dobra do axioma 2 é o mesmo que construir a mediatriz do segmento  $P_1P_2$ . Ainda segundo Wagner (2007), a mediatriz de um segmento é a reta que intersecta perpendicularmente o segmento no seu ponto médio.

<sup>15</sup> Postulado é a afirmação que não necessita de demonstração.

Para a construção da Mediatriz do segmento  $P_1P_2$  por meio de dobras feitas na folha de papel, apresentamos estes simples passos:

- a) pelo axioma 1, faça uma dobra que passe pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , levando em seguida o ponto  $P_1$  sobre  $P_2$ ;

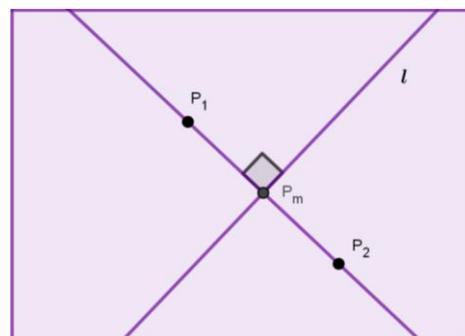
Figura 30 – Construção da mediatriz do segmento  $P_1P_2$ .



Fonte: Autora (2020)

- b) agora desdobre a folha para visualizar a dobra procurada.

Figura 31 – Mediatriz do segmento  $P_1P_2$



Fonte: Autora (2020)

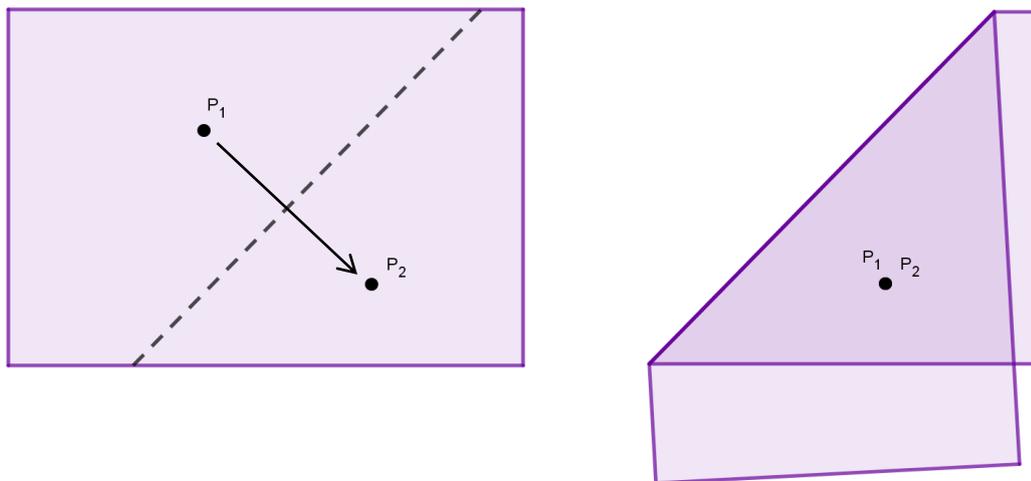
Veja, no primeiro passo, que a dobra pedida resulta da sobreposição dos pontos da linha reta  $\overleftrightarrow{P_1P_2}$  ao fazer dois de seus pontos conhecidos  $P_1$  e  $P_2$  coincidirem, nesse processo pode-se perceber que quatro ângulos obtidos pelos pares de ângulos opostos pelo vértice com origem na interseção das linhas são sobrepostos, isto significa que cada ângulo mede  $90^\circ$ . Note também que, por construção, o ponto de interseção da dobra que leva  $P_1$  sobre  $P_2$  com a linha  $\overleftrightarrow{P_1P_2}$  é igual o ponto médio  $P_m$  do segmento  $P_1P_2$ . A dobra assim obtida intersecta

perpendicularmente o segmento  $P_1P_2$  no ponto médio desse segmento, portanto, é mediatriz do segmento  $P_1P_2$ .

De fato, da construção feita na página 35, figura 28, construção do simétrico de um ponto  $P$  em relação a uma reta  $l$ , pode-se concluir que a dobra que coloca  $P_1$  sobre  $P_2$  coincide com a mediatriz do segmento  $P_1P_2$ . Note que os pontos  $P_1$  e  $P_2$  que se sobrepõem com a dobra  $l$ , correspondem – se por reflexão em relação a  $l$ , de modo que estão a uma mesma distância de  $l$ , isto é, a projeção ortogonal  $P_0$ , de  $P_1$  sobre  $l$ , é o ponto médio  $P_m$  do segmento  $P_1P_2$ . Portanto, a dobra que leva um ponto  $P_1$  sobre o ponto  $P_2$  é a mediatriz do segmento com extremidades nesses pontos.

Assim, a construção anterior pode ser feita com um único movimento: basta dobrar a folha levando o ponto  $P_1$  sobre  $P_2$  e fazer em seguida um vinco no papel, conforme o diagrama da figura 32.

Figura 32 – Construção da dobra do axioma 2



Fonte: Autora (2020)

### 3.2.3 Axioma 3 do origami

Dados duas linhas de dobra  $l_1$  e  $l_2$  podemos obter a dobra que põe  $l_1$  sobre  $l_2$ .

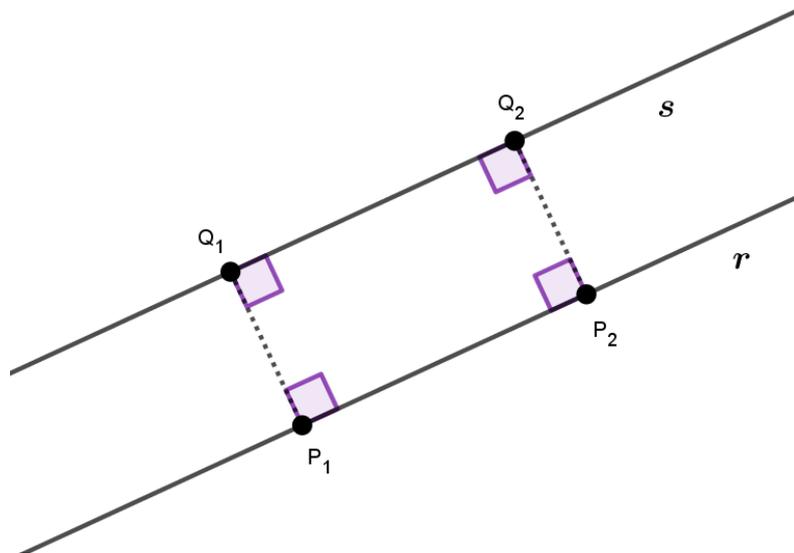
Neste axioma, dependendo da posição de uma linha em relação à outra, identificaremos outras propriedades geométricas na dobra que faz ambas as linhas coincidirem. Da posição relativa de duas retas  $r$  e  $s$  distintas no plano, temos que as retas podem ser: paralelas, quando as retas não possuem nenhum ponto em comum, ou concorrentes, quando as retas possuem apenas um ponto em comum.

Assim, a dobra que leva uma linha reta sobre a outra será explicada de acordo com dois casos: as linhas sendo paralelas e as linhas sendo concorrentes.

- a) Primeiro caso: dadas duas linhas de dobras paralelas devemos obter a dobra que põe uma sobre a outra;

Primeiramente, mostraremos a construção, por origami, da paralela a uma linha dada passando por um ponto fora dessa linha, tal dobra a ser construída pode ser obtida utilizando a definição de distância entre duas retas paralelas, que diz que “se  $r$  e  $s$  são retas paralelas, a distância entre  $r$  e  $s$  é o comprimento de qualquer segmento  $PQ$  tal que  $P \in r$ ,  $Q \in s$  e  $\overline{PQ} \perp r, s$ ” (MUNIZ NETO, 2012, p. 84).

Figura 33 – Distância entre duas retas paralelas

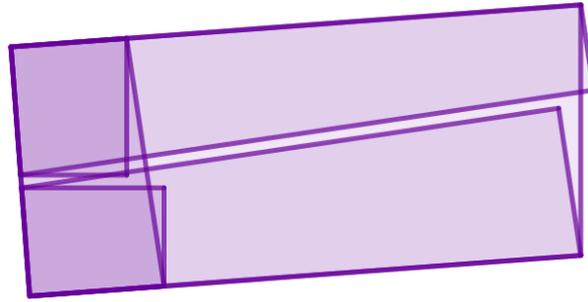


Fonte: Autora (2020)

Note, na figura 33, que as duas retas distintas,  $\overline{P_1Q_1}$  e  $\overline{P_2Q_2}$ , que intersectam perpendicularmente  $r$ , respectivamente, nos pontos  $P_1$  e  $P_2$  são também perpendiculares à reta  $s$  e determinam nessa reta, respectivamente, os pontos,  $Q_1$  e  $Q_2$ . Assim, do quadrilátero retangular  $P_1P_2Q_2Q_1$  obtido, tem-se  $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2}$ .

Pode-se concluir que, para obter uma linha  $l_2$  paralela à  $l_1$ , basta aplicar duas vezes o axioma da dobra que passa por um ponto dado e que é perpendicular a uma linha dada. Assim, pelo axioma 4, é possível construir, por  $P \notin l_1$ , a linha  $l_3$  perpendicular à linha  $l_1$  e, utilizando o mesmo axioma, pode ser obtida uma linha  $l_2$  passando por  $P$  e perpendicular a  $l_3$ , obtendo uma dobradura semelhante ao modelo a seguir :

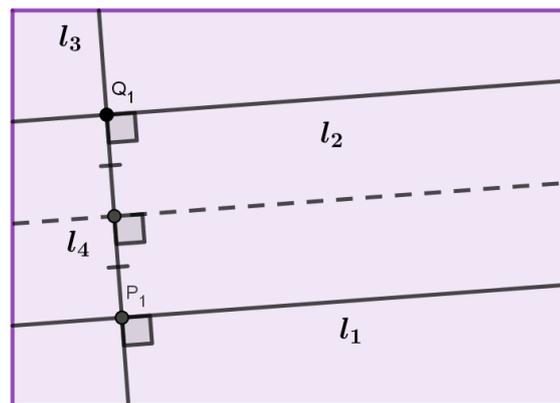
Figura 34 – Construção de linhas paralelas com origami



Fonte: Autora (2020)

Da construção acima, pode-se encontrar a dobra que faz coincidir duas retas paralelas de acordo com o seguinte passo: tome como referência os pontos onde a linha  $l_3$  intersecta as linhas  $l_1$  e  $l_2$ , ou seja, os pontos  $P_1, Q_1$  tais que  $l_1 \cap l_3 = \{P_1\}$  e  $l_2 \cap l_3 = \{Q_1\}$ ; agora ponha  $P_1$  sobre  $Q_1$ , obtendo a linha  $l_4$ , que é a dobra que faz coincidir as linhas  $l_1$  e  $l_2$ .

Figura 35 – Dobra que faz coincidir duas linhas paralelas



Fonte: Autora (2020)

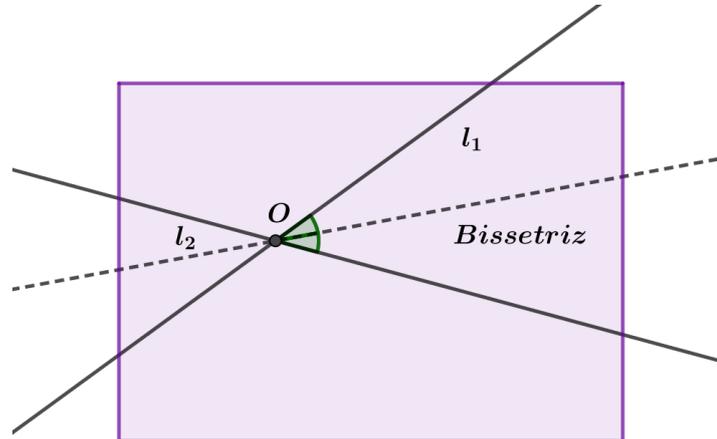
Veja na figura 35, que a linha  $l_4$  obtida é mediatriz do segmento  $P_1Q_1$ ; logo,  $l_4$  intersecta perpendicularmente à reta  $\overline{P_1Q_1}$  no ponto médio  $P_m$  do segmento  $P_1Q_1$ , o que garante que  $l_4$  seja uma dobra paralela às linhas, distando de ambas a metade da medida do segmento  $P_1Q_1$ . Note ainda que os pontos  $P$  e  $Q$  tal  $P \in l_1, Q \in l_2$  e  $\overline{PQ} \perp l_1, l_2$  são levados um sobre o outro pela linha  $l_4$ , dessa forma, essa linha leva todos os pontos da linha  $l_1$  sobre  $l_2$ . Para fazer a construção anterior bastaria levar a linha  $l_1$  sobre a  $l_2$  e criar um vinco.

- b) Segundo caso: dados duas linhas concorrentes devemos encontrar a dobra que coloca uma sobre a outra.

Nesse caso, a interseção das linhas concorrentes determinam dois pares de semirretas opostas e dois pares de ângulos opostos pelo vértice. A dobra que faz coincidir duas semirretas não opostas bissecta o ângulo formado por elas, de modo que construir tal

dobra é equivalente a encontrar à bissetriz do ângulo: “uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes” (DULCE; POMPEO, 1993, p.25).

Figura 36– Bissetriz do ângulo determinado pelas retas  $l_1$  e  $l_2$

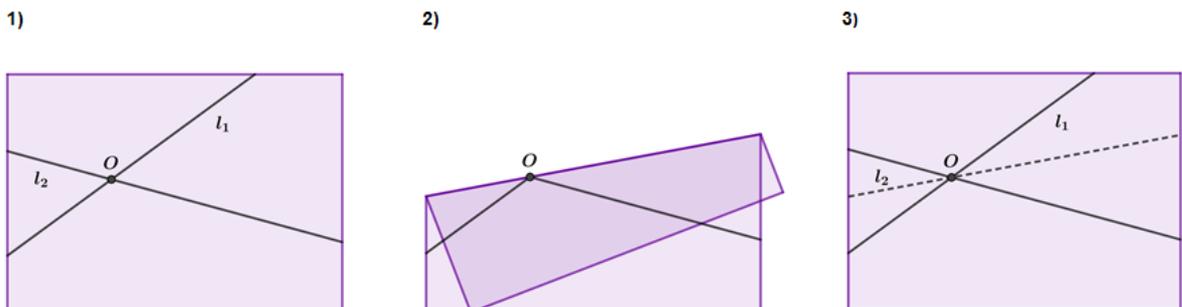


Fonte: Autora (2020)

Para fazer a construção da dobra que leva  $l_1$  sobre  $l_2$ , sendo tais linhas concorrentes, siga estes passos:

- Faça duas linhas  $l_1$  e  $l_2$  concorrentes na folha de papel e denote o ponto de interseção dessas linhas por O;
- Leve uma das semirretas determinadas pela interseção das linhas sobre outra não oposta, obtendo um vinco passando pelo ponto O. Observe que é possível encontrar assim duas linhas distintas que leva  $l_1$  sobre a  $l_2$  ;
- Desdobre a folha para visualizar a dobra procurada.

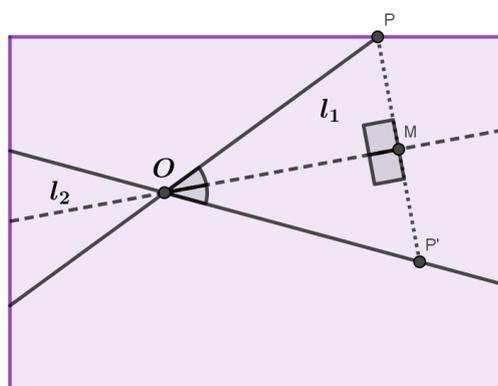
Figura 37 – Construção da dobra que faz duas linhas retas concorrentes coincidirem



Fonte: Autora (2020)

Para verificar se a dobra obtida no passo 3 é equivalente a bissetriz de um ângulo, pode-se considerar, no passo 2, que um ponto  $P$  qualquer pertencente a linha  $l_1$  é levado, por uma dobra que passa por  $O$ , sobre seu simétrico  $P'$  pertencente a linha  $l_2$ . O que indica que essa dobra construída passa pelo ponto médio  $M$  de um segmento  $PP'$  e é perpendicular a esse segmento. Após ser feito o desdobramento da folha, obtém-se dois triângulos retângulos congruentes pelo caso (lado, ângulo, lado) <sup>16</sup> LAL, pois  $\overline{P'M} = \overline{PM}$ ,  $\angle P'MO = \angle PMO$  e  $OM$  é um lado comum. Isto garante que os ângulos  $\angle P'OM$  e  $\angle POM$  sejam também congruentes, mostrando que a dobra bissecta o ângulo  $\angle P'OP$ .

Figura 38–Dois triângulos retângulos congruentes obtidos por reflexão em relação à dobra



Fonte: Autora (2020)

Agora, será apresentada a construção de um quadrado a partir de uma folha retangular. Nessa construção, pode-se aplicar a bissetção de um ângulo utilizando o axioma 3. Tal construção é importante, pois muitos diagramas de origami solicitam que a folha utilizada para fazer a construção do objeto seja da forma quadrada e, geralmente, o que temos disponíveis são folhas do formato retangular, como uma folha do tipo A4. Logo, vale verificar como obter essa figura geométrica, caso o papel que tivermos não seja uma folha quadrada. Veja a seguir como construir um quadrado a partir de uma folha no formato retangular utilizando a dobra do axioma 3:

Descrição dos passos:

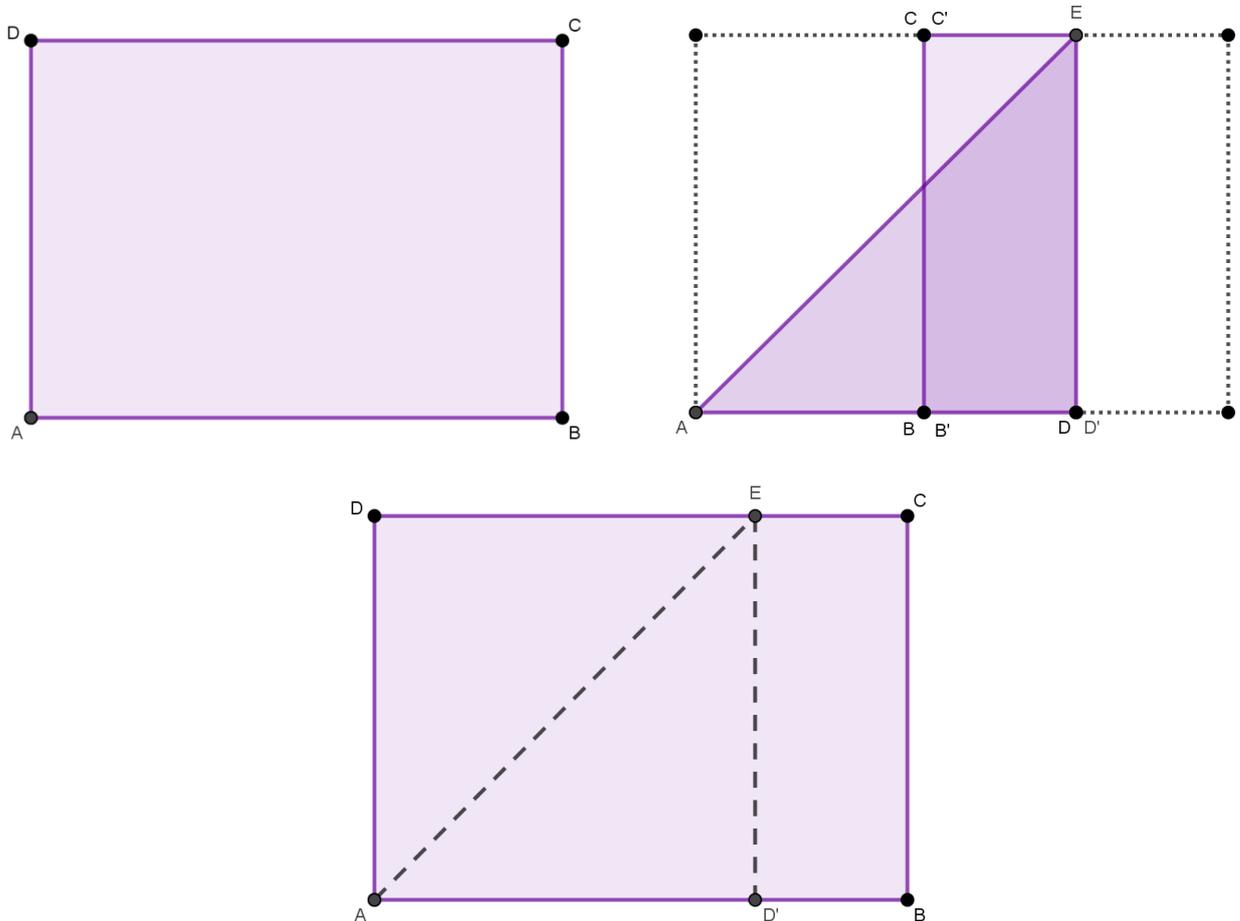
- a) Tome uma folha retangular e denote seus vértices por  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .
- b) Agora, utilize o axioma 3 para que o segmento  $AD$  seja colocado sobre o segmento  $AB$ , obtendo um vinco  $AE$ . Em seguida, com a folha dobrada pelo vinco  $AE$ , construa

<sup>16</sup> Caso de congruência lado, ângulo, lado (LAL): “se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes” (MUNIZ NETO, 2012, p. 34)

um vinco passando por  $D$  e  $E$ , sendo que  $D$  encontra-se agora numa nova posição, sobre seu simétrico  $D'$  obtido pelo vinco  $AE$ ;

c) Ao desdobrar o papel, tem-se um quadrado de vértices  $AD'ED$ .

Figura 39-Construção do quadrado a partir de uma folha de papel retangular



Fonte: Autora (2020)

Podemos verificar que, de fato, a construção obtida é um quadrado, pois por construção temos que  $\overline{AD} = \overline{AD'}$  e que  $\angle DAE = \angle D'AE = 45^\circ$ , já que a dobra que colocou  $AD$  sobre  $AD'$  dividiu o ângulo  $\angle DAD' = 90^\circ$  em partes iguais e isto implica na congruência dos triângulos  $\triangle ADE$  e  $\triangle AD'E$  pelo caso  $LAL$ , com  $AE$  sendo lado comum,  $\angle DAE = \angle D'AE$  e  $\overline{AD} = \overline{AD'}$ . Como o triângulo  $\triangle ADE$  é isósceles, uma vez que  $\angle DEA$  é o complemento de  $\angle DAE = 45^\circ$ , de modo que  $\angle DEA$  também mede  $45^\circ$ , então temos da congruência dos triângulos  $\triangle ADE$  e  $\triangle AD'E$  que os lados do polígono  $AD'ED$  possuem a mesma medida e que os ângulos internos desse polígono medem ambos  $90^\circ$ . Dessa forma, temos que  $AD'ED$  é um polígono regular de quadro lados, ou seja, um quadrado.

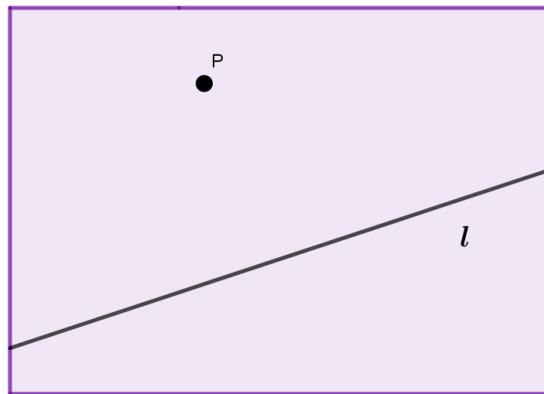
### 3.2.4 Axioma 4 do origami

Dados um ponto  $P$  e uma linha  $l$ , podemos fazer uma única dobra, por  $P$ , que seja perpendicular a  $l$ .

Note que a dobra procurada é equivalente à reta que concorre perpendicularmente com a linha  $l$  e que passa por um ponto  $P$ , o qual pode estar fora de  $l$  ou sobre  $l$ . Essas são as posições relativas entre o ponto e uma reta. Agora, teremos que verificar a construção da dobra deste axioma em dois casos:  $P \in l$  e  $P \notin l$ .

- a) 1º caso: Dados uma linha  $l$  e um ponto  $P \notin l$ . Construa, por  $P$ , a dobra perpendicular a  $l$ .

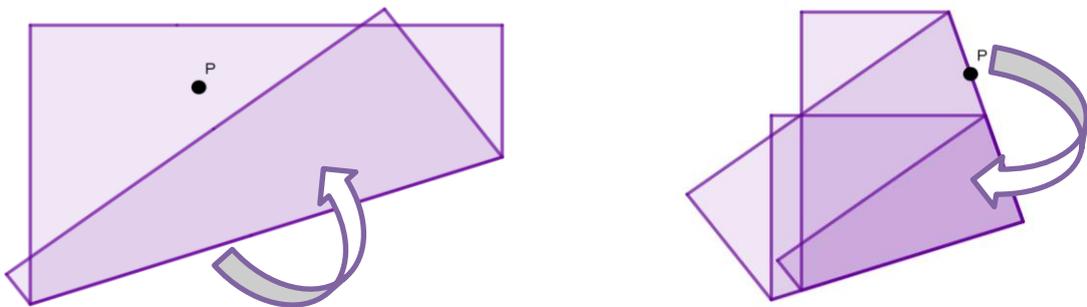
Figura 40 – Ponto  $P$  não pertencente a  $l$



Fonte: Autora (2020)

Dados uma linha  $l$  e um ponto  $P \notin l$ . Faça uma dobra sobre a linha  $l$ . Em seguida, fixe o ponto  $P$  e leve essa linha sobre si mesma, criando na folha um vinco passando por  $P$ . A última dobra construída, que passa por  $P$ , é a dobra perpendicular à linha  $l$ .

Figura 41 – Construção da dobra perpendicular a  $l$  por  $P \notin l$

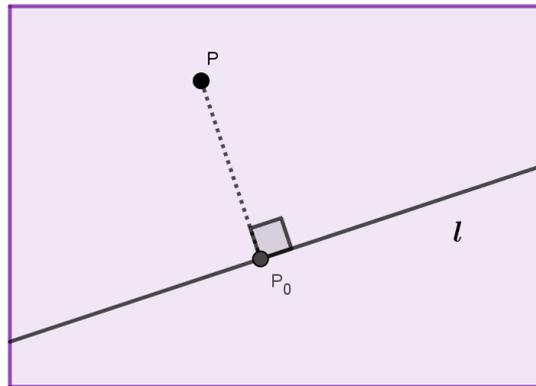


Fonte: Autora (2020)

- b) 2º caso: dados uma linha  $l$  e um ponto  $P \in l$ . Construa, por  $P$ , a dobra perpendicular a linha  $l$ .

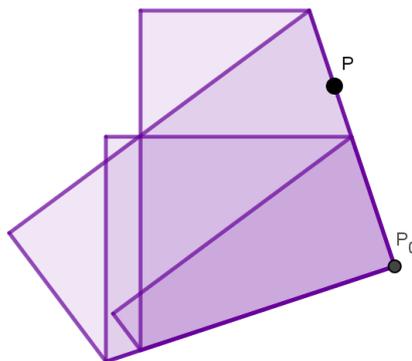
A construção dessa dobra é semelhante a anterior, porém o nosso ponto  $P$  de referência está localizado sobre a linha. Supondo que esse ponto seja a projeção ortogonal  $P_0$  do ponto  $P$  sobre a reta, então teremos a mesma construção final do caso anterior.

Figura 42 – Projeção ortogonal de um ponto  $P$  sobre  $l$



Fonte: Autora (2020)

Figura 43–Construção final da dobra que intersecta perpendicularmente  $l$  na projeção ortogonal  $P_0$  de um ponto  $P$  sobre  $l$ .



Fonte: Autora (2020)

Nessa última construção, foi preciso, primeiramente, fazer uma dobra sobre a linha  $l$ . Em seguida, uma segunda dobra foi obtida ao fazer coincidir duas semirretas de origem  $P_0$ , determinadas sobre  $l$ , de modo que do alinhamento necessário dessas semirretas pôde ser encontrado um vinco  $l$  passando por  $P_0$ .

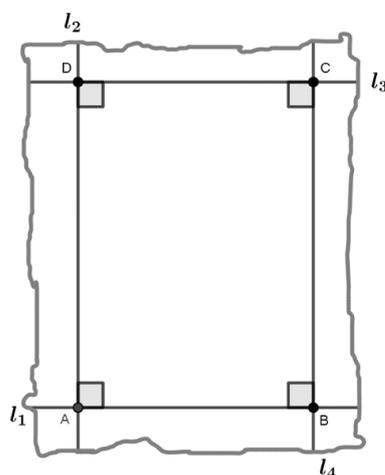
Observe que ambos os casos de construção da dobra perpendicular a  $l$  por um ponto  $P$ , pontos distintos  $Q, Q' \in l$  coincidem no procedimento da dobradura. De modo que a

dobra obtida passa por um ponto  $P$  e é mediatriz de um segmento  $QQ'$  contido em  $l$ , portanto é perpendicular a  $l$ .

Tal dobragem tem muitas aplicações em construções, através dela podemos encontrar altura relativa ao lado de um triângulo, podemos encontrar a projeção ortogonal de um ponto sobre a reta, vimos que podemos construir uma paralela a uma dobra dada. Dentre outras aplicações, o axioma 4 permite ainda esquadrear o papel, caso o seus contornos sejam curvos. Logo é uma ferramenta de dobragem interessante, que permite construir o material de construção de origami onde serão feitas as dobras pedidas, o qual é geralmente um papel na forma de um quadrado ou retângulo.

Como obter uma folha retangular a partir de um papel dado? Primeiramente, fazemos um vinco  $l_1$  próximo a uma das bordas do papel e, em seguida, com o papel dobrado pelo vinco construído, fixamos um ponto sobre  $l_1$  e fazemos coincidir as duas semirretas de origem nesse ponto, determinadas sobre  $l_1$ , obtendo um vinco  $l_2$  que passa pelo ponto fixado. Precisamos, na sequência, utilizar duas vezes o passo anterior para obter outros dois vincos,  $l_3$  e  $l_4$ . Veja que, utilizando esse passo, estamos construindo retas perpendiculares de modo a obter um polígono com quatro ângulos internos retos, conforme a representação da figura 44 a seguir:

Figura 44 - Construção de um retângulo a partir de um papel dado.



Fonte: Autora (2020)

### 3.2.5 Axioma 5 do origami

Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e uma linha  $l_1$  podemos encontrar uma linha que coloca  $P_1$  sobre  $l_1$  e que passa através do ponto  $P_2$ .

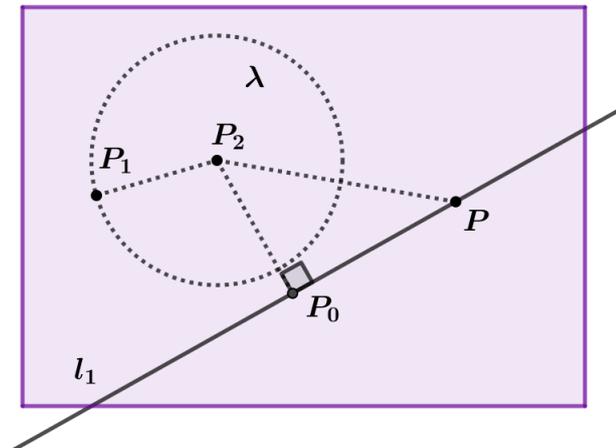
Neste axioma, note que, se existir alguma dobra que coloca  $P_1$  sobre  $l_1$  e que passa ao mesmo tempo por  $P_2$ , então podemos dizer que o ponto  $P_1'$ , simétrico de  $P_1$  refletido pela dobra, coincide com a interseção da circunferência de centro  $P_2$  e raio  $\overline{P_1P_2}$  com a linha  $l_1$ , pois a dobra obtida, que é mediatriz do segmento  $P_1P_1'$ , determina dois triângulos  $\Delta P_1P_mP_2$  e  $\Delta P_1'P_mP_2$  retângulos em  $P_m$ , ponto médio de  $P_1P_1'$ , e ambos são congruentes pelo caso (LAL), de modo que a medida dos segmentos  $P_1P_2$  e  $P_1'P_2$  são iguais, daí  $P_1'$  pertence a circunferência de centro  $P_2$  e raio  $r = \overline{P_1P_2}$ . Note nesse argumento a justificativa da propriedade da mediatriz de um segmento: “o conjunto de todos os pontos que equidistam dos extremos do segmento” (WAGNER, 2007, p.4). A partir de agora utilizaremos essa propriedade quando for necessário.

Sabendo que a dobra pedida neste axioma é o mesmo que encontrar a mediatriz de um segmento com extremidades sobre uma circunferência, sendo que uma dessas extremidades é ponto de interseção da circunferência com uma reta, temos que entender agora que as possibilidades de dobragens deste axioma dependem da posição relativa de uma circunferência e uma reta no plano. Esses elementos, de acordo com a geometria plana, relacionam-se de três formas: reta **secante** à circunferência, reta **tangente** à circunferência e reta **exterior** à circunferência; no primeiro caso, a interseção da reta com a circunferência consiste de dois pontos; no segundo, consiste de um único ponto e no último caso, a reta não possui nenhum ponto em comum com a circunferência.

Essas três posições relativas mostram que o axioma 5 pode ter 0, 1 ou 2 possibilidades de vincos que podem ser obtidos. Utilizaremos, agora, um critério que permite avaliar a posição entre uma reta e uma circunferência, dessa forma, poderemos encontrar os casos em que a dobra apresentada no axioma 5 pode ser obtida. Nesse critério deveremos comparar o raio  $r = \overline{P_1P_2}$  da circunferência com a distância do centro  $P_2$  da circunferência à linha  $l_1$ , podemos denotar essa distância por  $d(P_2, l_1)$ .

$$a) \quad d(P_2, l_1) > \overline{P_1P_2}$$

Se a distância de  $P_2$  à linha  $l_1$  é maior que a medida do raio  $r = \overline{P_1P_2}$ , e seja  $P_0$  a projeção ortogonal de  $P_2$  sobre  $l_1$ , então  $\overline{P_2P_0} = d(P_2, l_1) > \overline{P_1P_2}$ . Desse modo, temos que  $P_0$  é externo ao círculo de circunferência  $\lambda$ . Logo, qualquer outro ponto  $P \in l_1$  distinto de  $P_0$  também não pertence a  $\lambda$ , pois, pelo triângulo retângulo  $\Delta P_2P_0P$ , temos que  $\overline{P_2P} > \overline{P_2P_0} > \overline{P_1P_2}$ . Desse modo, não existem pontos em comum entre a reta  $l_1$  e a circunferência  $\lambda$ , ou seja,  $l_1$  é **externa** à circunferência. Nesse caso, não é possível construir, por  $P_2$ , uma dobra que leve  $P_1$  sobre a linha  $l_1$ .

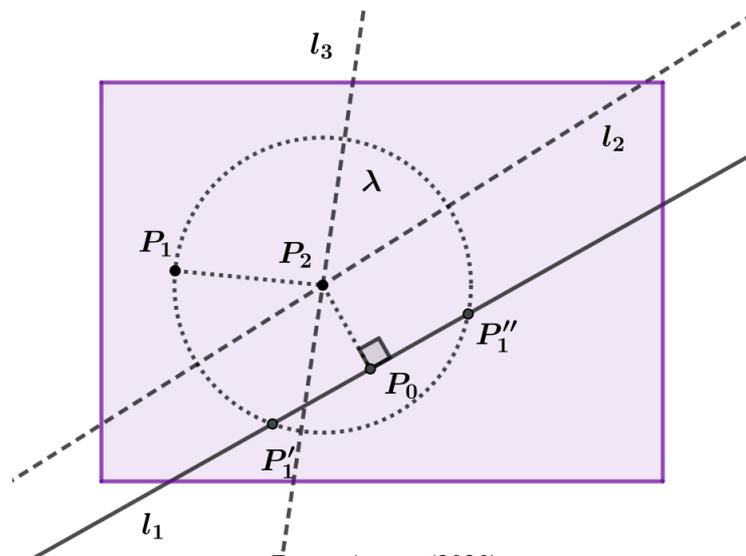
Figura 45 – Reta  $l_1$  externa à circunferência.

Fonte: Autora (2020)

$$b) d(P_2, l_1) < \overline{P_1P_2}$$

Seja o ponto  $P_0 \in l_1$  tal que  $\overrightarrow{P_2P_0} \perp l_1$ . Então  $P_0$  encontra-se no interior do círculo de circunferência  $\lambda$ , já que  $\overline{P_2P_0} = d(P_2, l_1) < \overline{P_1P_2}$ . Daí, pelo ponto  $P_0$ , é possível obter, em  $l_1$ , dois pontos,  $P_1'$  e  $P_1''$ , simétricos um do outro em relação ao ponto  $P_0$  e situados a uma distância do centro da circunferência igual à medida do segmento  $P_1P_2$ . Dessa forma, temos que  $l_1$  é **secante** à circunferência. Nesse caso, encontraremos duas dobras,  $l_2$  e  $l_3$ , para levar  $P_1$  sobre  $l_1$ , tais linhas são, respectivamente, as mediatrizes dos segmentos  $P_1P_1'$  e  $P_1P_1''$ .

Figura 46–Reta secante à circunferência



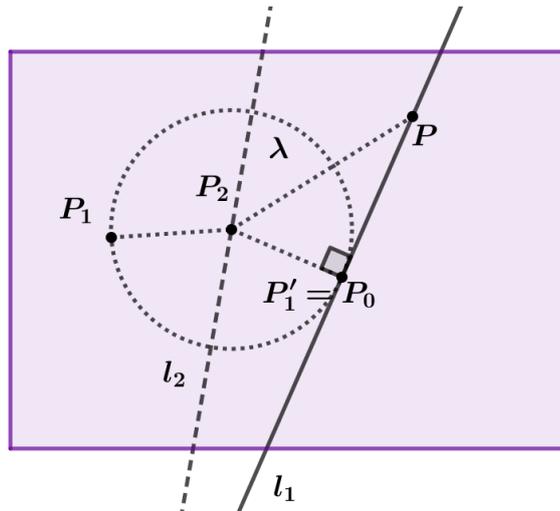
Fonte: Autora (2020)

$$c) d(P_2, l_1) = \overline{P_1P_2}$$

Seja o ponto  $P_0 \in l_1$  tal que  $\overrightarrow{P_2P_0} \perp l_1$ . Como  $\overline{P_2P_0} = d(P_2, l_1) = \overline{P_1P_2}$ , então temos que  $P_0$  encontra-se sobre a circunferência  $\lambda$ . Daí, utilizando a ideia de triângulo

retângulo, com seus vértices nos pontos  $P_2$ ,  $P_0$  e  $P$ , sendo  $P$  outro ponto sobre a linha  $l_1$ , segue que nenhum ponto  $P \in l_1$  distinto de  $P_0$  está a uma distância de  $P_2$  igual ao comprimento do raio da circunferência, portanto,  $l_1$  é **tangente** à circunferência  $\lambda$  no ponto  $P_0$  e, conseqüentemente, perpendicular ao raio  $r = \overline{P_2P_0}$ . Nesse caso, encontraremos apenas uma dobra  $l_2$  que passa por  $P_2$  e que leva  $P_1$  sobre  $l_1$ : a mediatriz do segmento  $P_1P_0$ .

Figura 47 – Reta  $l_1$  tangente à circunferência



Fonte: Autora (2020)

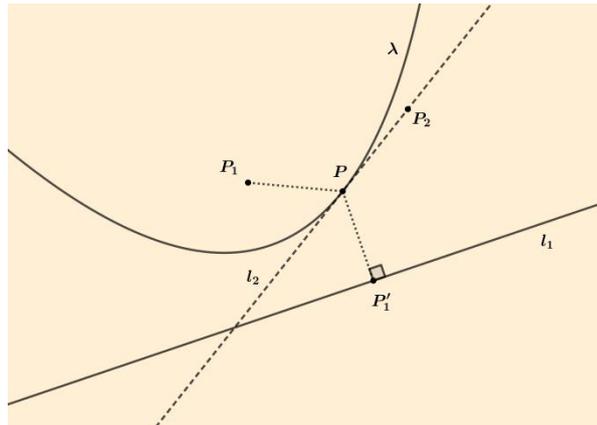
No axioma 5, vimos que as dobras possíveis de se obterem coincidem com as mediatrizes de segmentos  $P_1P_1'$  cujas extremidades estão sobre uma circunferência de centro  $P_2$  e raio  $r = \overline{P_1P_2}$ , mas as construções das mediatrizes dependem de  $P_1'$ , ponto de interseção da circunferência com uma reta dada. Essas dobras, quando verificadas através de outra propriedade geométrica, podem exercer também outra função, que é a de tangentes a uma parábola. Podemos enxergar que a dobra obtida no axioma 5 é também tangente a uma parábola, conforme a definição a seguir:

**Definição:** *Sejam  $l$  uma reta e  $F$  um ponto não pertencente a  $l$ . A parábola  $\lambda$  de foco  $F$  e diretriz  $l$  é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a  $F$  é igual a sua distância a  $l$ , ou seja,  $\lambda = \{P \mid d(P, F) = d(P, l)\}$*

Dessa forma, podemos dizer que a dobra que leva  $P_1$  sobre  $l_1$  e que passa por  $P_2$  é tangente à parábola de foco  $P_1$  e diretriz  $l_1$ , em algum ponto  $P$ . Basta admitirmos que o ponto  $P_1'$ , a imagem de  $P_1$  refletida pela dobra  $l_2$  sobre  $l_1$ , seja o pé da perpendicular a  $l_1$  baixada de  $P \in l_2$ . Como  $P$  está sobre a dobra, que é a mediatriz do segmento  $P_1P_1'$ , então a distância de  $P$  a  $P_1$  é igual  $d(P, P_1') = d(P, l_1)$ . Portanto, o ponto  $P$  pertence à parábola de foco  $P_1$  e

diretriz  $l_1$  e é o único ponto pertencente à dobra  $l_2$  com essa propriedade, pois qualquer outro ponto  $Q \in l_2$ , distinto de  $P$ , está a uma distância de  $l_1$  menor que  $Q$  de  $P_1'$  e, portanto, menor que a distância de  $Q$  a  $P_1$ . Logo, podemos concluir que a mediatriz do segmento  $P_1P_1'$ , passando por  $P_2$ , é também tangente à parábola em um único ponto  $P$  pertencente a ela.

Figura 48 – Reta  $l_2$  tangente à parábola  $\lambda$  de foco  $P_1$  e diretriz  $l_1$  no ponto  $P$  e que passa por  $P_2 \notin \lambda$ .



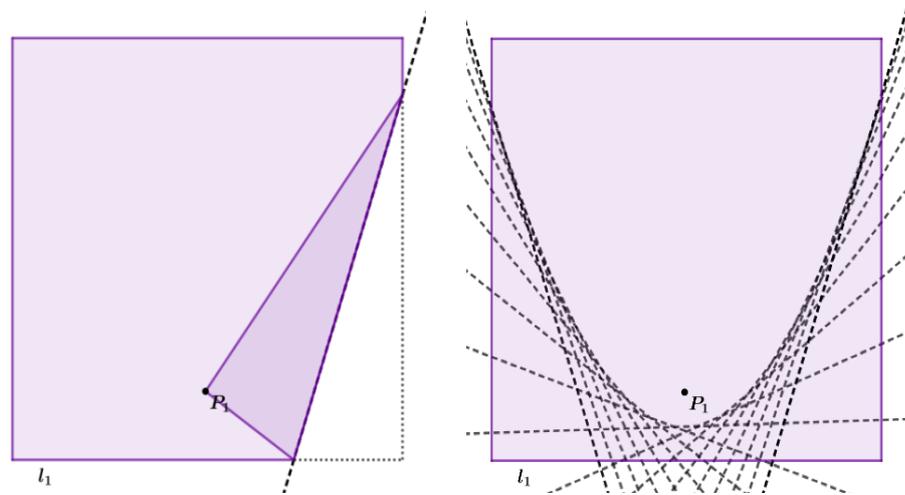
Fonte: Autora (2020)

Note neste axioma, que se a distância de  $P_2$  a  $l_1$  for igual à distância de  $P_2$  a  $P_1$ , então  $P_2$  será ponto de tangência da parábola de foco  $P_1$  e diretriz  $l_1$  com a dobra a ser construída. Caso tenhamos duas dobras distintas que levam  $P_1$  sobre  $l_1$  e que passam por  $P_2$ , então essas dobras vão ser tangentes à parábola de foco  $P_1$  e diretriz  $l_1$  e nesse caso o ponto  $P_2$  estará localizado na região externa determinada pela parábola. Para o caso em que não é possível obter a dobra, o ponto  $P_2$  encontra-se na região interna à parábola.

Podemos obter, no papel, uma aproximação para o traçado da parábola utilizando apenas a construção de mediatrizes. Para isto, precisamos considerar um dos lados de uma folha retangular ou quadrada como a diretriz  $l_1$  e construir um ponto  $P_1 \notin l_1$  para representar o foco da parábola. Em seguida, basta levar pontos da diretriz  $l_1$  sobre  $P_1$ , de forma a obter diversos vincos, ou seja, é preciso construir a mediatriz dos segmentos com uma das suas extremidades no ponto  $P_1$  e a outra no ponto  $P \in l_1$ . A envoltória<sup>17</sup> da família de mediatrizes obtidas na folha de papel utilizando a dobra que faz coincidir dois pontos mostra a aproximação que buscamos.

<sup>17</sup> A envoltória é a curva em que cada um de seus pontos é tangente com alguma curva de uma família de curvas no plano.

Figura 49 – Construção da aproximação do traçado de uma parábola de foco  $P_1$  e diretriz  $l_1$



Fonte: Autora (2020)

### 3.2.6 Axioma 6 do origami

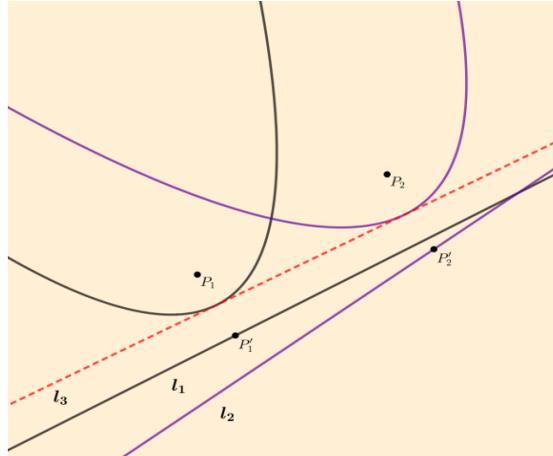
Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e duas linhas  $l_1$  e  $l_2$  podemos encontrar uma única linha que coloca  $P_1$  sobre  $l_1$  e  $P_2$  sobre  $l_2$ .

No axioma anterior, verificou-se que a dobra que leva um ponto  $P_1$  sobre uma linha  $l_1$  e que passa por um ponto  $P_2$ , por ser mediatriz, implica que também é tangente à parábola de foco  $P_1$  e diretriz  $l_1$  em algum ponto da parábola. Daí, pode-se concluir que a dobra procurada no axioma 6 é a mediatriz simultânea dos segmentos com extremidades no foco e num ponto  $P$  pertencente a diretriz correspondente e, portanto, essa mediatriz tangencia as parábolas de focos  $P_1$  e  $P_2$  e suas respectivas diretrizes  $l_1$  e  $l_2$ . Segundo Monteiro (2008), este axioma permite resolver equações cúbicas. E, de fato, resolve problemas de equações cúbicas, mostraremos no próximo capítulo problemas de construção que são solucionados por meio dessa dobra.

Neste axioma, a distância entre as retas tem que ser menor que a distância entre os pontos; caso contrário, não será possível construir a dobra procurada. Isto se justifica devido ao movimento de reflexão presente na construção de uma dobra na folha, em tal movimento uma das propriedades é preservar a distância entre pontos. Dessa forma, a distância entre as imagens refletidas de dois pontos é igual à distância entre esses pontos. Logo, a distância entre as duas retas dadas neste axioma não pode ser maior que a distância entre os dois pontos dados. Em alguns casos, devido à extensão do papel não ser o suficiente para realizar a dobragem, é necessário fazer alguns ajustes levando em consideração a correspondência ponto e reta, ou seja, devemos verificar a dobragem conveniente que leva ao mesmo tempo

dois pontos distintos sobre duas retas distintas; caso contrário, pode não ser possível construir a dobra no papel.

Figura 50 – linha  $l_3$  simultaneamente tangente a duas parábolas



Fonte: Autora (2020)

### 3.2.7 Axioma 7 do origami

Dados um ponto  $P_1$  e duas linhas  $l_1$  e  $l_2$ , podemos fazer uma dobra que coloca  $P_1$  sobre  $l_1$  e que é perpendicular a  $l_2$ .

Seja  $P_1$  um ponto não pertencente às linhas  $l_1$  e  $l_2$ , as quais não são linhas paralelas, pois, caso sejam, não será possível fazer a dobra pedida. A dobra  $l$  a ser construída neste axioma precisa colocar  $P_1$  sobre o seu simétrico  $P_1' \in l_1$  e concorrer perpendicularmente com  $l_2$ . Note que a dobra  $l$  determinada dessa forma é sempre perpendicular ao segmento  $P_1P_1'$ , já que é a mediatriz dele. Supondo que  $l_2$  seja também perpendicular a  $l$ , então as linhas  $\overleftrightarrow{P_1P_1'}$  e  $l_2$  são paralelas. Esse resultado pode ser garantido pelo seguinte corolário das paralelas: *se duas retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares a uma mesma reta  $t$ , então  $r$  e  $s$  são paralelas*. O que pode justificar o corolário é o fato de que se  $r$  e  $s$  não fossem paralelas, então as três retas formariam um triângulo com dois dos seus ângulos internos retos e isto seria um absurdo.

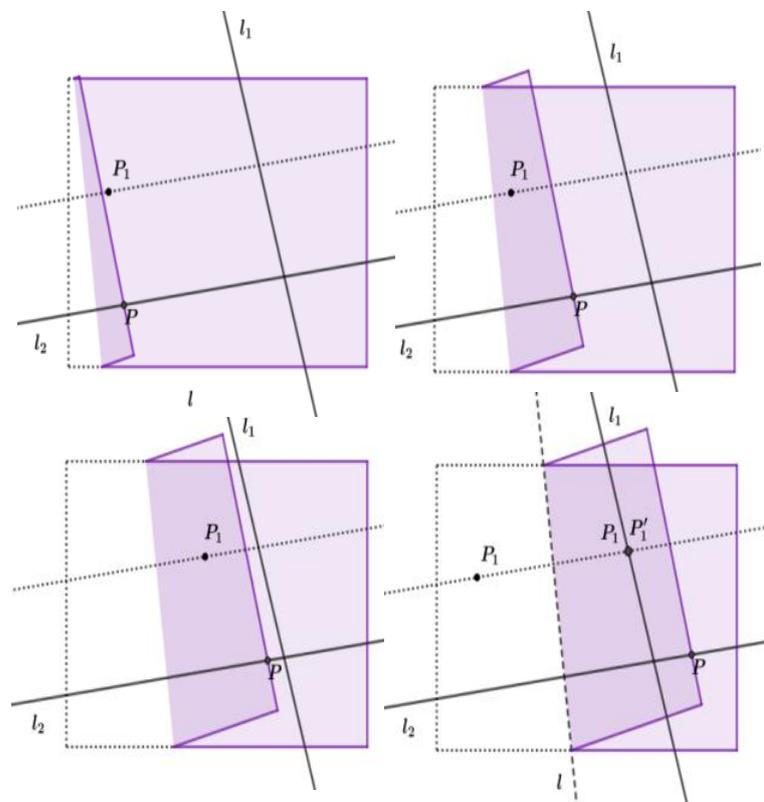
Partindo desse resultado, percebe-se que a dobra enunciada, neste axioma, requer a construção de uma linha  $l$  que leve um ponto  $P_1$  sobre o seu simétrico  $P_1' \in l_1$  e que seja perpendicular a duas linhas paralelas:  $l_2$  e a sua paralela passando pelo ponto  $P_1$  não pertencente a  $l_2$ , sendo única<sup>18</sup> com tal propriedade. Para fazer a construção da dobra, a

<sup>18</sup> A unicidade da paralela a uma reta dada que passa por um ponto fora dessa reta é garantida pelo quinto postulado ou postulado das paralelas, que diz que por um ponto  $P$  não pertencente a uma reta  $r$  dada passa uma única reta paralela a  $r$ .

instrução a seguir pode ser utilizada: faça uma perpendicular à reta  $l_2$  que passe por  $P_1$  e nomeie a dobra obtida como  $l_3$ ; agora construa, por  $P_1$ , a dobra  $l_4$  perpendicular a  $l_3$  e, por último, leve o ponto  $P_1$  sobre  $l_4 \cap l_1 = \{P'_1\}$ , obtendo assim a dobra  $l$  procurada. Seguindo os dois primeiros passos, temos a construção, por  $P_1$ , da dobra  $l_4$  paralela a  $l_2$  e, pelo último passo, temos a dobra  $l$  que leva  $P_1$  até  $l_1$  e que é perpendicular a  $l_2$ .

Veja que, na construção da linha  $l$ , utiliza-se duas dobras do conjunto dos axiomas: a dobra enunciada no axioma 4, o qual permite a construção da perpendicular a uma linha dada por um ponto  $P$ , e a dobra presente no axioma 2, o qual torna possível a construção da dobra que bissecta perpendicularmente um segmento determinado por dois pontos dados. Mas ambas podem ser desnecessárias na construção da dobra deste axioma, já que pode ser obtida através de um único movimento na folha de papel. Para isto, precisa-se marcar, primeiramente, algum ponto  $P$  sobre  $l_2$  que esteja a uma distancia maior que  $P_1$  de  $l_1$ ; em seguida, deve ser feito um movimento na folha fazendo  $P$  deslizar sobre a linha  $l_2$  até  $P_1$  ficar sobre  $l_1$ . Após encontrar o alinhamento necessário, um vinco deve ser construído ao manter fixos os pontos sobre as retas.

Figura 51 – Construção da dobra do axioma 7



## 4 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM ORIGAMI

### 4.1 Origami e construções da Geometria Euclidiana

Os cinco primeiros axiomas apresentados no capítulo 3 permitem a construção de todos os objetos obtidos através de régua e compasso, ou seja, todas as construções da geometria euclidiana, que utilizam as seguintes operações: traçar uma reta passando por dois pontos; dados um ponto **P** e segmento **AB**, traçar com o compasso a circunferência de centro **P** e raio **AB**; marcar os pontos de interseção de dois objetos, os quais são combinações de retas e círculos. Por meio das ferramentas de construção, régua não graduada e compasso, e das operações permitidas com esses instrumentos, as seguintes construções são possíveis: bissetriz, mediatriz, paralelas, construções em triângulos, números construtíveis e a soma, subtração, multiplicação, divisão e cálculo de raiz quadrada de números construtíveis. Algumas dessas construções foram apresentadas no capítulo anterior na abordagem dos axiomas do origami.

A geometria do origami também permite resolver problemas que têm lugar de destaque na matemática devido ao tempo e esforço que foram dedicados a eles na busca de solucioná-los. Segundo Carvalho (2009), três problemas de construção trouxeram grandes contribuições para a produção de conhecimento matemático e ficaram conhecidos como os três problemas clássicos da geometria: a trissecção de um ângulo, a duplicação de um cubo e a quadratura de um círculo.

Tais problemas foram resistentes ao método de construção dos gregos antigos, que exigia somente a utilização da régua não graduada e compasso. O problema da trissecção de um ângulo consistia em dividir um ângulo em três partes iguais. Já a duplicação do cubo consistia em construir o lado de um cubo, cujo volume é o dobro do volume de um cubo de lado conhecido. No caso do problema da quadratura do círculo, o objetivo era construir um quadrado que ocupasse o mesmo espaço de um círculo.

Por séculos, muitos matemáticos se empenharam em encontrar outros mecanismos para resolver o clássico da geometria. Além de terem conseguido solucionar os problemas, resultados obtidos nesse processo foram importantes para o avanço da ciência. E apenas no século XIX, com a descoberta dos números construtíveis, foi provada a impossibilidade de resolver apenas por meio de régua não graduada e compasso o famoso clássico da geometria.

De acordo com Wagner (2007, p.101) “um número só será construtível se for algébrico, de grau igual a uma potência de 2”. Ser algébrico, quer dizer ser raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros. E o que determina o grau do polinômio é a sua

forma irredutível, ou seja, quando não é possível decompô-lo em produto de dois outros polinômios, também de coeficientes inteiros, e de graus positivos menores.

O teorema da construtibilidade de um número garante não ser possível a construção geométrica dos três problemas por régua e compasso. Tomemos, por exemplo, o problema de duplicação do volume de um cubo, veja que para duplicar um cubo de aresta igual a 1, precisaríamos construir  $\sqrt[3]{2}$ , que é uma das raízes da equação  $x^3 - 2 = 0$ . Mesmo sendo algébrica, note que está na sua forma irredutível e não é de grau 2.

A geometria do origami fazendo uso do sexto axioma de Huzita apresenta soluções demonstradas de dois desses problemas que, como já foi mencionado, não são possíveis de serem resolvidos apenas por régua e compasso, tais problemas envolvem a resolução de equações cúbicas: a duplicação do cubo e a trisseção do ângulo. Segundo Monteiro (2008) a geometria do origami permite ainda a resolução de equações de grau superior a três, através da combinação de dobragens simultâneas incluindo o sétimo axioma de Hatori, sendo que este não pode resolver equações do primeiro, segundo e terceiro grau, que podem ser solucionados pelos axiomas de Huzita.

## 4.2 Alguns resultados geométricos e problemas de construção

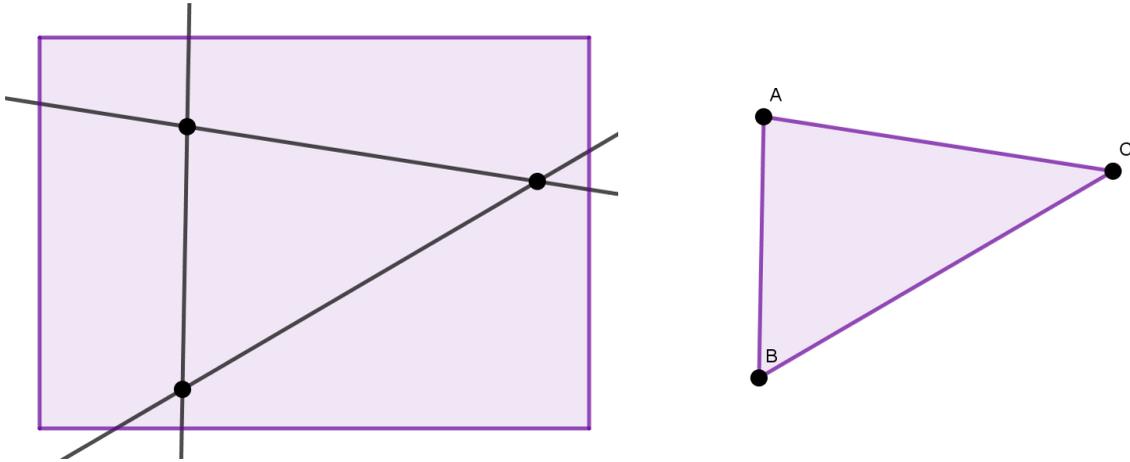
Nesta seção, o objetivo principal será utilizar a geometria do origami para apresentar alguns teoremas que são frequentemente utilizados em problemas de matemática e mostrar a resolução de alguns problemas que não têm solução somente por régua e compasso. Tais problemas resolvidos por dobras feitas no papel só reforçam como o origami pode ser um fator motivador e ainda mais interessante para o processo de ensino e aprendizagem.

Em cada passo das construções, é preciso também procurar executar as dobras através do alinhamento preciso entre pontos e linhas, para assim obter uma representação mais próxima possível do modelo geométrico pedido na construção, evitando conclusões erradas que podem resultar da imprecisão de dobras.

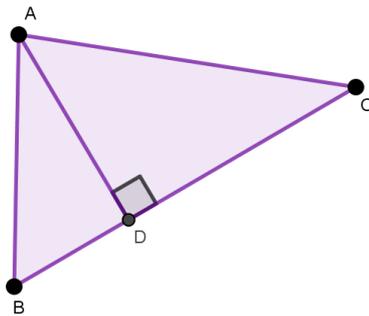
### 4.2.1 A soma dos ângulos internos de um triângulo

Veja a seguir como encontrar a soma dos ângulos internos de um triângulo por dobradura.

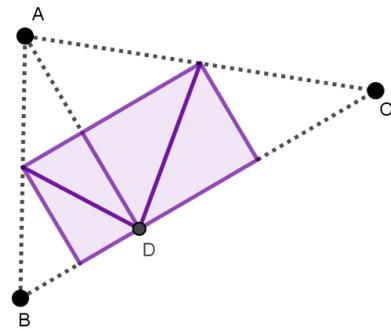
Figura 52- Soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer por origami



- 1) Numa folha de papel, determine um triângulo pela construção de três retas concorrentes entre si .
- 2) Recorte o triângulo da folha e denote os seus vértices por **A**, **B** e **C**, de modo que **A** seja o vértice do maior ângulo .



- 3) Construa, por **A**, um vinco perpendicular ao lado **BC**.



- 4) Faça vincos no interior do triângulo ao levar os vértices **A**, **B** e **C** sobre **D**, obtendo com as dobraduras dois retângulos congruentes.

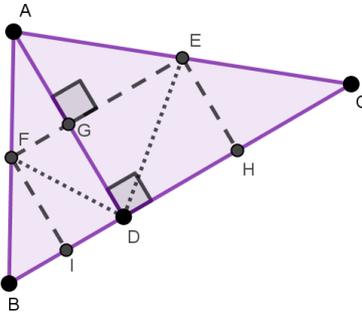
Fonte: Autora (2020)

Do último passo da construção apresentada na figura 52, pode-se concluir que, por construção, os ângulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  formam três ângulos adjacentes que somados correspondem à medida do ângulo raso  $B\hat{D}C = 180^\circ$ . Assim, esta construção demonstra através de dobras o seguinte teorema:

**Teorema:** *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ .*

Justificativa da construção:

Figura 53-visualização dos elementos geométricos obtidos após a construção apresentada na figura 52 .



Fonte: Autora (2020)

Do passo 3, temos  $AD \perp BC$  e do passo 4, temos  $EF \perp AD$ , de modo que  $EF \parallel BC$ . Portanto, os pares de ângulos correspondentes,  $\angle AFE, \angle ABC$  e  $\angle AEF, \angle ACB$ , são congruentes e os pares de ângulos alternos internos também congruentes,  $\angle CDE, \angle DEF$  e  $\angle BDF, \angle DFE$ . Ainda do passo 4, temos  $\angle AEF = \angle DEF$ ,  $\angle AFE = \angle DFE$  e  $\angle FAE = \angle FDE$ , pois a mediatriz do segmento  $AD$ , a reta  $\overleftrightarrow{EF}$ , determina dois triângulos congruentes,  $\triangle AEF$  e  $\triangle DEF$ , pelo caso (lado, lado, lado)<sup>19</sup> LLL. Assim, temos  $\angle FDE = \angle FAE = \angle BAC$ ,  $\angle CDE = \angle DEF = \angle AEF = \angle ACB$  e  $\angle BDF = \angle DFE = \angle AFE = \angle ABC$ . De modo que  $\angle BDC = 180^\circ = \angle BDF + \angle FDE + \angle CDE = \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB$ .

#### 4.2.2 Teorema de Pitágoras

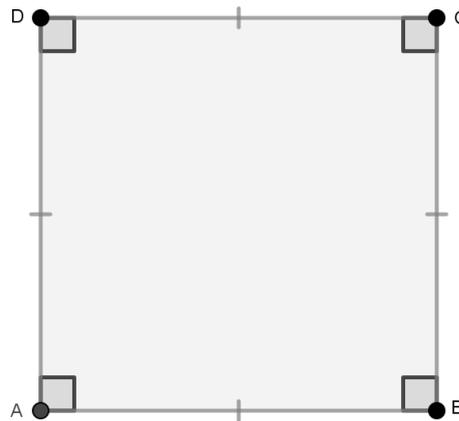
O objetivo da construção que será realizada a seguir é apresentar por origami a explicação clássica do teorema de Pitágoras. Essa é a justificativa mais simples e imediata desse teorema, que pode ser ainda mais interessante para abordar, pois, para ser verificada por construção no papel, basta fazer dobradura, sem necessidade de cortar ou fazer colagens.

Descrição dos passos:

- a) Primeiramente, tomamos uma folha de papel quadrada e denotamos seus vértices por  $A, B, C$  e  $D$ ;

<sup>19</sup> Caso de congruência lado, lado, lado (LLL): “se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes” (MUNIZ NETO, 2012, p. 37)

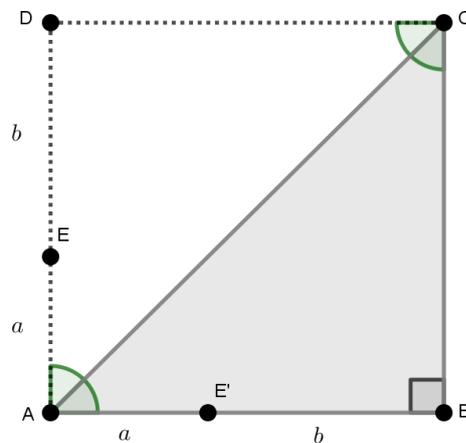
Figura 54 – Quadrado de vértices A, B, C e D



Fonte: Autora (2020)

- b) Marcamos sobre o lado  $AD$  um ponto  $E$ , tais que  $\overline{AE} = a$  e  $\overline{ED} = b$  e, em seguida, pelo axioma 3 do origami, colocamos o segmento  $AD$  sobre o segmento  $AB$ , obtendo um vinco passando por  $A$  e  $C$ , o qual é diagonal do quadrado;

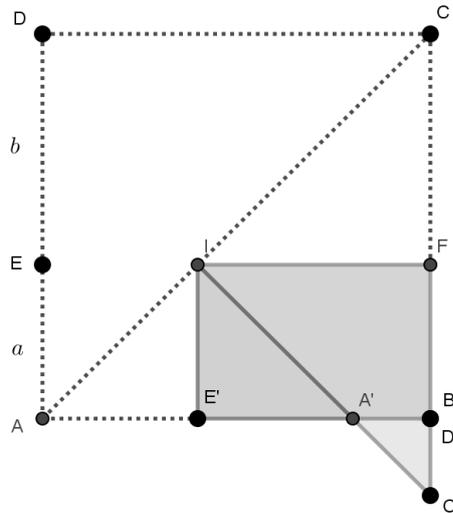
Figura 55 – Quadrado ABCD dobrado pela diagonal AC



Fonte: Autora (2020)

- c) Mantendo a folha dobrada pelo vinco  $AC$ , utilizamos o axioma 4 para construir, por  $E$ , que está agora sobre o seu simétrico  $E' \in AB$ , uma reta perpendicular ao lado  $AB$ , determinando um ponto  $I$  na diagonal do quadrado. Com a folha ainda dobrada construímos, por  $I$ , a perpendicular ao lado  $BC$ ;

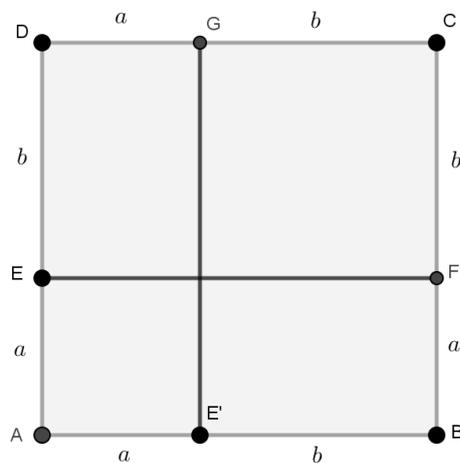
Figura 56– Construção de dois quadrados de áreas  $a^2$  e  $b^2$



Fonte: Autora (2020)

- d) Devemos agora desdobrar a folha para obter dois quadrados de áreas  $a^2$  e  $b^2$  e dois retângulos de área  $a \cdot b$ ;

Figura 57– Quadrado de lado  $a+b$  como a soma de dois quadrados de áreas  $a^2$  e  $b^2$  e dois retângulos de área  $a \cdot b$

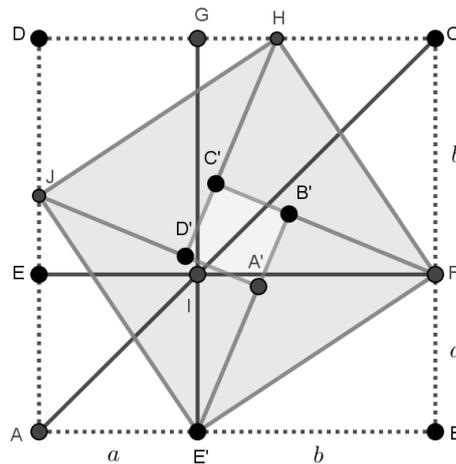


Fonte: Autora (2020)

- e) Agora, o canto inferior  $B$  da folha precisa ser levado sobre seu simétrico  $B'$ , que é a imagem de  $B$  refletida pelo vinco  $E'F$ . Em seguida, utilizando o axioma 3, devemos bissectar o ângulo  $\angle B'FC$  ao colocar  $\overline{FC}$  sobre  $\overline{FB'}$ , obtendo um vinco  $FH$ . Com  $C$  sobre o seu simétrico  $C'$ , refletido pelo vinco  $FH$ , precisamos bissectar o ângulo  $\angle DHC'$  e obtermos um vinco  $JH$ . Para finalizar o passo 5, colocamos  $D$  sobre seu

simétrico  $D'$  pelo vinco  $JH$  e em seguida levamos  $\overline{JA}$  sobre  $\overline{JD'}$ , construindo um vinco  $JE'$ . Por esses passos, temos a construção de um quadrado de lado  $c$  inscrito no quadrado de lado  $a + b$ .

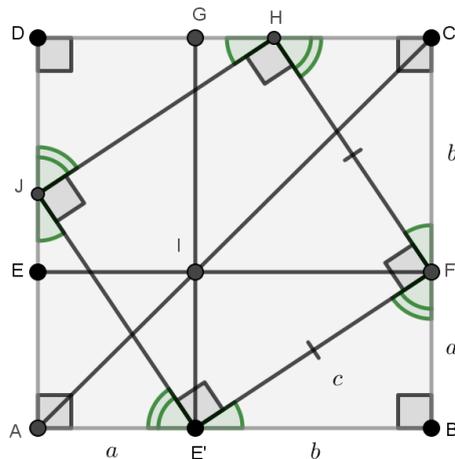
Figura 58– Construção de um quadrado de lado  $c$  inscrito em outro quadrado de lado  $a + b$



Fonte: Autora (2020)

- f) Ao desdobrar a folha, temos que verificar no passo anterior se o quadrilátero inscrito no quadrado  $ABCD$ , de fato, representa um quadrado de lado  $c$ . Devemos verificar ainda se o somatório das áreas dos triângulos retângulos obtidos nos cantos da folha corresponde à soma das áreas dos retângulos de áreas  $a.b$  e concluir que, em um triângulo retângulo de hipotenusa  $c$  e de catetos  $a$  e  $b$ ,  $c^2 = a^2 + b^2$ , conforme podemos visualizar na construção final abaixo

Figura 59–Verificação do teorema de Pitágoras.



Fonte: Autora (2020)

Do passo 5, temos que o ângulo raso  $B\hat{F}C$  é igual a soma dos ângulos  $B\hat{F}B'$  e  $B'\hat{F}C$ . Como cada ângulo foi bissectado, respectivamente, pelas dobras  $E'F$  e  $FH$ , então  $B\hat{F}C = 2 \times B\hat{F}E' + 2 \times C\hat{F}H$ . Daí segue que  $B\hat{F}E' + C\hat{F}H = 90^\circ$  e, conseqüentemente, temos que  $E'\hat{F}H = 90^\circ$ . Analogamente, podemos verificar que os ângulos  $F\hat{H}J$ ,  $H\hat{J}E'$  e  $J\hat{E}'F$  correspondem também a  $90^\circ$ . Agora, precisamos verificar se os lados do quadrilátero têm a mesma medida.

Notemos no triângulo retângulo  $\Delta E'BF$  que os ângulos  $B\hat{E}'F$  e  $B\hat{F}E'$  são complementares e, como os ângulos  $B\hat{F}E'$  e  $C\hat{F}H$  também têm essa propriedade, segue que  $B\hat{E}'F \equiv C\hat{F}H$ . De modo que os triângulos retângulos,  $\Delta E'BF$  e  $\Delta FCH$ , têm em comum outro ângulo com mesma medida: o ângulo  $B\hat{E}'F = C\hat{F}H$ . Podemos verificar ainda nesses triângulos que  $B\hat{E}'F = C\hat{F}H$ ,  $\overline{E'B} = \overline{FC}$  e  $E'\hat{B}F = F\hat{C}H$ ; logo, são congruentes pelo caso (ALA). Dessa congruência segue que  $\overline{E'F} = \overline{FH} = c$ , o que garante que os outros lados do quadrilátero medem também  $c$ , já que os lados opostos do quadrilátero  $E'FHJ$  são paralelos. Da congruência dos ângulos internos e dos lados do quadrilátero  $E'FHJ$ , temos que ele é um quadrado de lado  $c$ .

Para chegarmos à demonstração clássica do Teorema de Pitágoras, precisamos verificar se os triângulos retângulos nos vértices do quadrado  $ABCD$  são congruentes. Já, verificamos que  $B\hat{E}'F \equiv C\hat{F}H$ , pois tais ângulos são complementos de  $B\hat{F}E'$ . Utilizando o mesmo caminho que verificou a congruência desses ângulos, podemos concluir que  $C\hat{F}H \equiv J\hat{H}D$  e que  $J\hat{H}D \equiv E'\hat{J}A$ . Isto mostra que os ângulos  $B\hat{E}'F$ ,  $C\hat{F}H$ ,  $J\hat{H}D$  e  $E'\hat{J}A$  têm a mesma medida. Como cada triângulo retângulo obtido nos cantos da folha possuem hipotenusa  $c$ , ângulo adjacente igual à medida do ângulo  $B\hat{E}'F$  e ângulo oposto ao lado  $c$  de medida  $90^\circ$ , temos que esses triângulos são congruentes pelo caso (lado, ângulo, ângulo oposto ao lado) <sup>20</sup> ( $LAA_0$ ) e, portanto, ambos com área  $\frac{b \cdot a}{2}$ .

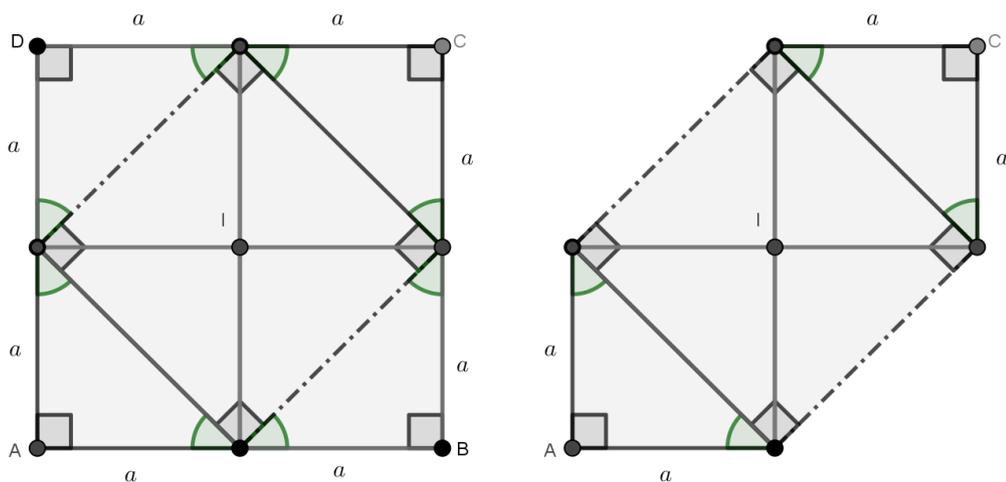
Pela demonstração clássica, podemos verificar geometricamente, como podemos visualizar na figura 59, que um quadrado de área  $(a + b)^2$  menos quatro vezes  $\frac{a \times b}{2}$ , corresponde a um quadrado de área  $c^2$ . De outra forma, podemos subtrair desse mesmo quadrado dois retângulos com mesma área  $a \times b$  e obtermos dois quadrados de áreas

<sup>20</sup> Caso de congruência lado, ângulo, ângulo oposto ao lado ( $LAA_0$ ): “Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes” (MUNIZ NETO, 2012, p. 56).

$a^2$  e  $b^2$ . Logo, a área do quadrado de lado  $c$  é igual à soma das áreas dos quadrados de lados  $a$  e  $b$ , isto é,  $c^2 = a^2 + b^2$ , sendo  $c$ ,  $a$  e  $b$ , respectivamente, a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. Tal demonstração justifica o teorema de Pitágoras, o qual diz que em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma do quadrado dos seus catetos.

Para verificação do teorema de Pitágoras por dobradura, foram apresentados passos de construção que podem ser seguidos para mostrar que vale o teorema para um triângulo retângulo qualquer. Mas podemos fazer uma construção particular para o caso do triângulo retângulo ser isósceles, nessa construção fica mais fácil ver a aplicação do teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo de catetos medindo  $a$ . Primeiramente, tomamos um quadrado de lado  $2a$  e o dobramos duas vezes ao meio, pelas mediatrizes dos lados do quadrado, de modo a obter quatro quadrados de área  $a^2$ . Em seguida, devemos criar quatro vincos ao levar cada vértice do quadrado inicial até o ponto de interseção das mediatrizes construídas, obtendo assim um quadrado de lado igual a diagonal dos quadrados menores. Dobrando dois cantos da folha quadrada inicial para trás, podemos visualizar imediatamente que dois quadrados de áreas  $a^2$  preenchem a área do quadrado inscrito cujo lado é a diagonal do quadrado de lado  $a$ , ou seja, o quadrado de lado medindo  $a\sqrt{2}$  corresponde ao dobro da área do quadrado de lado  $a$ .

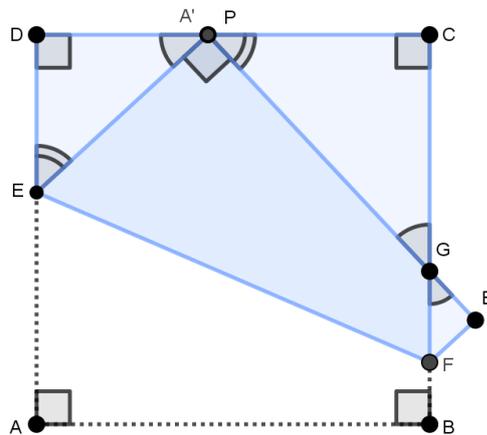
Figura 60-Verificação, por dobradura, do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo isósceles.



### 4.2.3 Construção de $\frac{1}{n}$ a partir do lado do quadrado utilizando o Teorema de Haga

Dado um papel quadrado de vértices  $A, B, C$  e  $D$ . Seja  $P$  um ponto sobre o lado  $DC$  da folha. Uma dobra  $EF$ , com  $E$  sobre  $AD$  e  $F$  sobre  $BC$ , que coloca o canto  $A$  sobre  $P$  determina três triângulos semelhantes  $\triangle EDP$ ,  $\triangle GCP$  e  $\triangle FB'G$ . Tal enunciado é conhecido como teorema de Haga e pode ser visualizado conforme a representação abaixo:

Figura 61- Teorema de Haga



Fonte: Autora (2020)

Podemos verificar a semelhança desses triângulos pelo caso (ângulo, ângulo) <sup>21</sup> AA. Notemos, primeiramente, que ambos os triângulos  $\triangle EDP$ ,  $\triangle GCP$  e  $\triangle FB'G$  possuem ângulo reto e que, do ângulo reto  $E\hat{P}G$ , temos  $D\hat{P}E \equiv P\hat{G}C$ , pois tais ângulos são complementos de  $G\hat{P}C$ . Podemos verificar ainda a congruência do ângulo  $P\hat{G}C$  com o ângulo  $F\hat{G}B'$ , por serem ângulos opostos pelo vértice G. Como os triângulos  $\triangle EDP$ ,  $\triangle GCP$  e  $\triangle FB'G$  são retângulos e  $D\hat{P}E = P\hat{G}C = F\hat{G}B'$ , então são semelhantes pelo caso (AA).

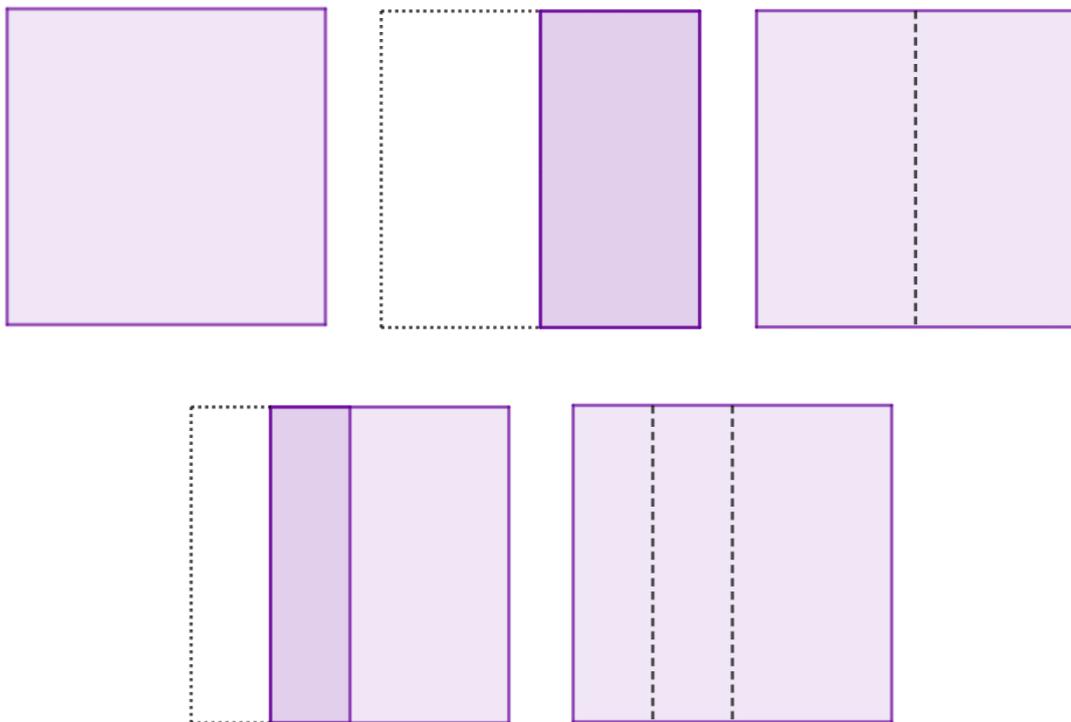
Tal teorema é muito útil nas dobraduras, pois da semelhança dos triângulos construídos podemos fracionar os lados do quadrado em  $2k$ ,  $2k + 1$  ou ainda em  $2^k$  partes congruentes, sendo  $k$  um inteiro maior ou igual a 1. Saber como construir essas divisões pode ser de grande ajuda em diagramas de origami, nos quais precisamos, às vezes, dividir primeiro o papel em um determinado número de retângulos congruentes. Antes de utilizarmos o teorema de Haga para obtermos  $1/n$  do lado do quadrado, devemos lembrar que, para

<sup>21</sup> Caso de semelhança de triângulos ângulo, ângulo (AA): “se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes” (DULCE; POMPEO, 1993, p. 204).

obtermos a metade de um segmento, precisamos realizar uma construção simples, na qual basta fazer uma dobra levando uma das extremidades do segmento sobre a outra. Esse procedimento foi apresentado na construção do ponto médio de um segmento, na página 29 . Para obtermos, por exemplo,  $\frac{1}{2^2}$  de um segmento, também não apresenta nenhuma dificuldade, já que basta realizarmos duas bissecções. Primeiramente, tomamos a metade do segmento inicial; em seguida, fazemos novamente a bissecção de um dos segmentos obtidos na primeira divisão.

Construir tais bissecções a partir de um quadrado também não é difícil, no qual podemos colocar os cantos, inferior e superior, do lado esquerdo sobre seus respectivos cantos adjacentes pertencentes ao lado direito do papel quadrado, obtendo a mediatriz simultânea das bordas inferiores e superiores do papel. No segundo momento, desdobramos o papel e construímos um segundo vinco ao alinharmos o lado esquerdo sobre essa mediatriz. E assim temos  $1/4$  do lado de um quadrado, conforme pode ser visualizado na imagem a seguir:

Figura 62-Construção de  $1/4$  de um segmento a partir de um quadrado

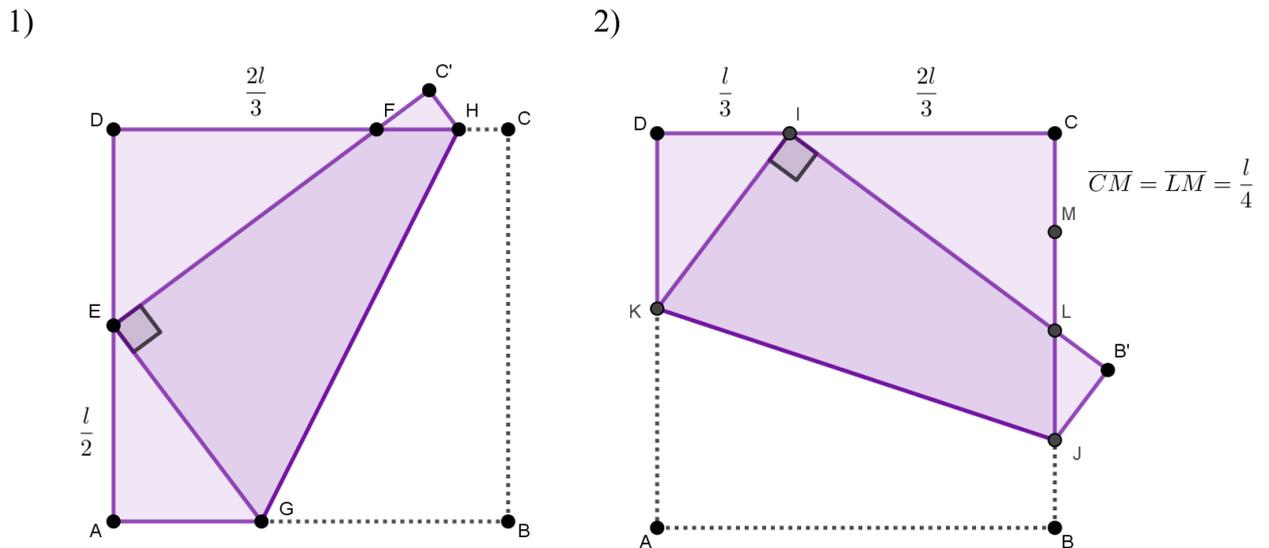


Fonte: Autora (2020)

Utilizando o *teorema de Haga*, veja como podemos obter  $1/4$  de um segmento ao tomar os pontos médios de segmentos sobre lados distintos do quadrado como pontos referência para as dobras pedidas. Dado um quadrado de lado  $l$  e de vértices  $A, B, C$  e  $D$ ,

constrói-se primeiro o ponto médio  $E$  do segmento  $AD$  e, em seguida, o vértice  $B$  é levado sobre  $E$ , obtendo-se um vinco  $GH$  tal que a extremidades  $G \in AB$  e  $H \in DC$ . O lado  $BC$ , sobre o seu simétrico  $EC'$  em relação ao vinco  $GH$ , determina no lado  $DC$  da folha um ponto  $F$  tal que a razão  $\frac{DF}{FC} = \frac{2}{1}$ . Em seguida, o vértice  $A$  é colocado sobre o ponto médio do segmento  $DF$  e desse alinhamento é obtido um vinco  $KJ$ , pelo qual o segmento  $AB$  é levado sobre o seu simétrico  $IB'$ , determinando em  $BC$  um ponto  $L$  tal que  $\overline{CL} = \frac{l}{2}$ . E, por fim, divide-se o segmento  $CL$  em duas partes iguais, de modo que tais partes nos dão a fração procurada, que é  $\frac{l}{4}$

Figura 63-Construção de  $1/4$  de um segmento aplicando o teorema de Haga



Fonte: Autora (2020)

Do primeiro passo, temos pelo teorema de Haga que os triângulos retângulos  $\triangle EAG$  e  $\triangle DEF$  são semelhantes. Logo, vale a proporção:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{DE}} \quad (4.1)$$

Notemos que  $\overline{AE} = \overline{ED} = \frac{l}{2}$  e que da mediatriz  $GH$  do segmento  $EB$ , segue que  $\overline{EG} = \overline{GB} = l - \overline{AG}$ . Daí, pelo teorema de Pitágoras decorre que:

$$(l - \overline{AG})^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AG}^2 \Leftrightarrow l^2 - 2.l.\overline{AG} + \overline{AG}^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \overline{AG}^2 \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{3l}{8} \quad (4.2)$$

Logo, temos da proporção (4.1),

$$\frac{\frac{l}{2}}{\overline{DF}} = \frac{\frac{3l}{8}}{\frac{l}{2}} \Leftrightarrow \frac{3l}{8} \cdot \overline{DF} = \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow \overline{DF} = \frac{2l}{3}. \quad (4.3)$$

No segundo passo da construção, podemos verificar nos triângulos  $\Delta IDK$  e  $\Delta LIC$  que

$$\frac{\overline{DI}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{IC}}, \quad (4.4)$$

e que, no triângulo  $\Delta KDI$ , segue do teorema de Pitágoras que

$$(l - \overline{DK})^2 = \overline{DI}^2 + \overline{DK}^2 \Leftrightarrow l^2 - 2.l.\overline{DK} + \overline{DK}^2 = \left(\frac{l}{3}\right)^2 + \overline{DK}^2 \Leftrightarrow \overline{DK} = \frac{4l}{9} \quad (4.5)$$

Como  $\overline{DI} = \frac{l}{3}$ ,  $\overline{DK} = \frac{4l}{9}$  e  $\overline{IC} = \frac{2l}{3}$ , decorre da proporção (4.4):

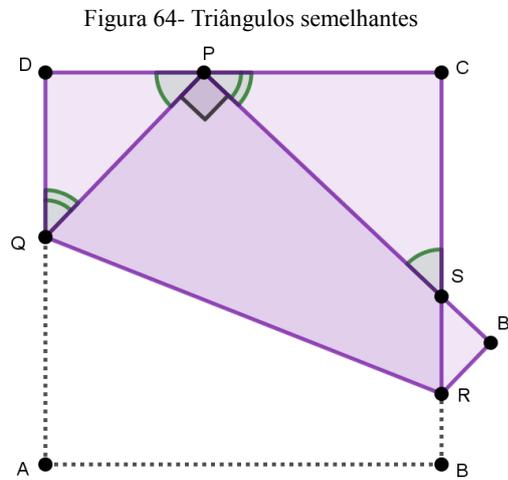
$$\frac{\frac{l}{3}}{\overline{CL}} = \frac{\frac{4l}{9}}{\frac{2l}{3}} \Leftrightarrow \frac{4l\overline{CL}}{9} = \frac{2l^2}{9} \Leftrightarrow \overline{CL} = \frac{l}{2}. \quad (4.6)$$

Daí, da bissecção do segmento  $CL$ , fica determinado  $\frac{1}{4}$  do segmento de medida  $l$ .

Podemos concluir da verificação da construção da figura 63, que tomando  $\frac{1}{2}$  do lado quadrado podemos fazer uma dobra que permite obter  $\frac{1}{3}$  de um lado adjacente e que tomando  $\frac{1}{3}$  podemos determinar  $\frac{1}{4}$ . Podemos ainda verificar que de  $\frac{1}{4}$  do lado quadrado devemos ter, sobre um lado adjacente,  $\frac{1}{5}$  do lado do quadrado.

De forma geral, dados  $n, i \in \mathbb{N} - \{0\}$  tal que  $1 \leq i < n$ , vamos verificar em um quadrado  $ABCD$  de lado  $l$  uma fórmula geral que nos dá a medida do segmento  $CS$  tomando

um ponto  $P \in DC$  tal que  $\overline{DP} = \frac{il}{n}$ . Utilizaremos para isso a representação a seguir:



Fonte: Autora (2020)

Pelo teorema de Haga, temos que os triângulos retângulos  $\Delta QDP$  e  $\Delta PCS$  são semelhantes. Daí decorre que

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{CS}} \quad (4.7)$$

Temos  $\overline{DP} = \frac{il}{n}$ , de modo que  $\overline{PC} = l - \frac{il}{n} = \frac{(n-i)l}{n}$  e  $\overline{DQ}$  segue do teorema de Pitágoras aplicado no triângulo  $\Delta QDP$ , isto é,  $\overline{PQ}^2 = \overline{DQ}^2 + \overline{DP}^2$ . Como  $\overline{PQ} = l - \overline{DQ}$ , então

$$(l - \overline{DQ})^2 = \overline{DQ}^2 + \overline{DP}^2 \quad (4.8)$$

$$\Leftrightarrow l^2 - 2.l.\overline{DQ} + \overline{DQ}^2 = \overline{DQ}^2 + \frac{i^2 l^2}{n^2} \quad (4.9)$$

$$\Leftrightarrow 2l\overline{DQ} = l^2 - \frac{i^2 l^2}{n^2} \quad (4.10)$$

$$\Leftrightarrow \overline{DQ} = \frac{n^2 l^2 - i^2 l^2}{2ln^2} \quad (4.11)$$

$$\Leftrightarrow \overline{DQ} = \frac{l^2(n^2 - i^2)}{2ln^2} = \frac{l(n^2 - i^2)}{2n^2} \quad (4.12)$$

Substituindo as medidas na proporção (4.7), temos

$$\frac{\frac{l(n^2 - i^2)}{2n^2}}{\frac{(n - i)l}{n}} = \frac{\frac{il}{n}}{\overline{CS}} \quad (4.13)$$

$$\Leftrightarrow \overline{CS} = \frac{il^2(n - i)}{n^2} \cdot \frac{2n^2}{l(n^2 - i^2)} \quad (4.14)$$

$$\Leftrightarrow \overline{CS} = \frac{2il(n - i)}{(n - i)(n + i)} = \frac{2il}{n + i} \quad (4.15)$$

Supondo que  $i = 1$  e  $n = 4$ , temos que:

$$\overline{CS} = \frac{2l}{5} \quad (4.16)$$

De modo que da bissecção do segmento  $CS$ , temos um segmento de medida igual a  $\frac{l}{5}$ . E, de fato, tomando  $\overline{DP} = \frac{l}{4}$ , podemos obter  $\frac{l}{5}$  do lado do quadrado de lado  $l$ . Notemos que podemos obter outro segmento sobre  $BC$  com tal medida, basta por  $i = 2$  e  $n = 3$ , então  $\overline{CS} = \frac{2 \cdot 2 \cdot l}{3+2} = \frac{4l}{5}$ . Daí, temos  $\overline{BS} = \overline{BC} - \overline{CS} = l - \frac{4l}{5} = \frac{l}{5}$ .

#### 4.2.4 Trisseccção do ângulo

Para a trisseccção do ângulo por dobradura, serão dados abaixo os passos da trisseccção de um ângulo agudo como exemplo. Tal construção, conforme dizem Cavacami e Furuya (2009) é creditada a Hisashi Abe. Compreendendo a estratégia da construção apresentada e fazendo algumas modificações, fica fácil obter a trisseccção do ângulo reto, assim como a trisseccção de um ângulo obtuso. Na trisseccção do ângulo obtuso, recomenda-se bissectar o ângulo e fazer, em seguida, a trisseccção dos ângulos determinados pela bissecção do ângulo inicial, de acordo com o modelo da trisseccção do ângulo agudo. Note que, assim,

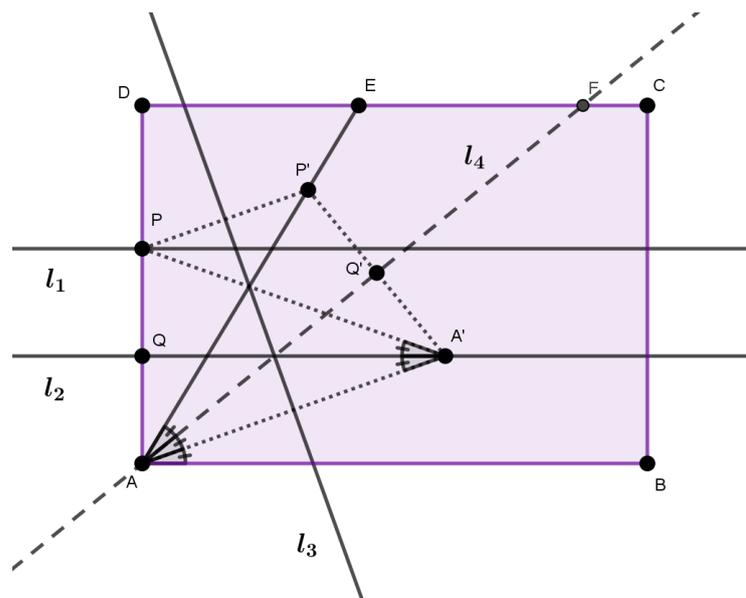
ficam construídos seis ângulos congruentes e a porção que representa  $2/6$  do ângulo obtuso é equivalente a  $1/3$  da trisseção desse ângulo.

Descrição dos passos da trisseção de um ângulo agudo:

- Primeiramente, pegue uma folha de papel no formato de um quadrilátero retangular ou faça a construção dessa figura, denotando em seguida os seus vértices por  $A, B, C$  e  $D$ ;
- Construa um vinco, no interior do ângulo reto  $\angle BAD$ , partindo de  $A$  e obtenha, assim, um ângulo agudo  $\angle BAE$ , com  $E \in CD$ ;
- Por um ponto  $P \in AD$ , construa uma linha  $l_1$  paralela à  $\overline{AB}$ . Em seguida, obtenha  $l_2$ , outra reta paralela à  $\overline{AB}$ , mas equidistante de  $l_1$  e  $\overline{AB}$ ;
- Faça uma dobradura levando ao mesmo tempo  $P$  sobre  $P' \in AE$  e  $A$  sobre  $A' \in l_2$ , obtendo um vinco  $l_3$ , dobragem possível pelo axioma 6 de Huzita.
- Mantendo a folha dobrada por  $l_3$ , com  $P$  sobre  $AE$  e  $A$  sobre  $l_2$ , construa um vinco ao levar  $P$  sobre  $A$ ;
- Coloque a folha na sua forma inicial, construa o vinco  $AA'$  e prolongue o vinco construído no passo anterior. O vinco prolongado passa por  $A$  e determina com o lado  $AB$  da folha, um ângulo que corresponde a  $2/3$  do ângulo agudo  $\angle BAE$ .

Observação: No passo três, faça a construção das linhas pedidas de modo que a construção final possa ficar dentro do espaço da folha. Dessa forma, fica mais fácil visualizar e entender a construção.

Figura 65 – Trisseção do ângulo agudo por origami



Fonte: Autora (2020)

### Justificativa

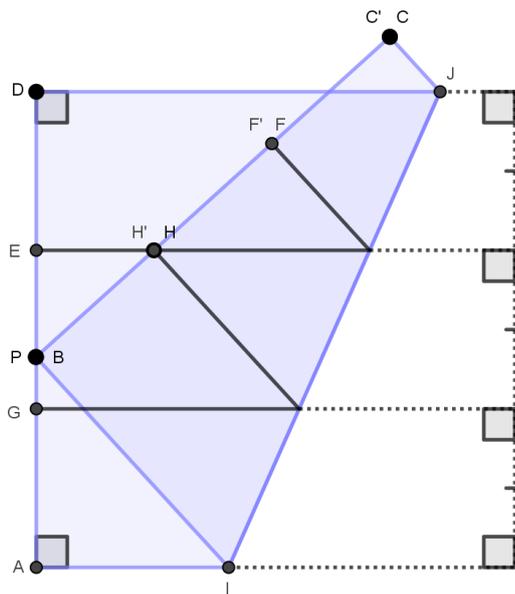
Como  $A'$  pertence à reta  $l_2$ , que é mediatriz do segmento  $PA$ , temos então pelo caso (LAL), que  $\Delta PQA' \equiv \Delta QA'A$  e, conseqüentemente,  $\angle PA'Q = \angle QA'A$  e  $\overline{PA'} = \overline{AA'}$ . Daí, podemos concluir que  $\Delta PA'A$  é isósceles e que  $l_2$  além de ser mediatriz do segmento  $AP$  é ao mesmo tempo bissetriz do ângulo  $\angle PA'A$ , o qual é igual a  $2 \cdot \angle BAA'$ , pois, de  $l_2$ , reta paralela à  $\overline{AB}$ , temos ainda que os ângulos alternos internos,  $\angle BAA'$  e  $\angle QA'A$ , determinados por uma reta que passa por  $A$  e  $A'$ , são congruentes. Agora, de  $l_3$ , temos tanto por construção quanto por reflexão, que  $\overline{PA} = \overline{P'A'}$  e que  $PP'$  é paralela à  $AA'$ , uma vez que o eixo de simetria  $l_3$  é a perpendicular bissetora dos segmentos  $PP'$  e  $AA'$ ; logo, o quadrilátero  $AA'P'P$  é um trapézio isósceles, no qual pode ser verificado que  $\angle PAA'$  é igual a  $\angle P'A'A$ . Novamente, pelo caso (LAL) de congruência de triângulos,  $\Delta PA'A \equiv \Delta P'AA'$ , já que  $\overline{PA} = \overline{P'A'}$ ,  $\angle PAA' = \angle P'A'A$  e o segmento  $AA'$  é lado comum. De  $\Delta PA'A \equiv \Delta P'AA'$ , temos que  $\Delta P'AA'$  também é isósceles e que  $\angle P'AA' = \angle PA'A = 2 \cdot \angle BAA'$ . Daí, no triângulo isósceles  $\Delta P'AA'$ , o vinco  $l_4$ , mediatriz relativa à base  $P'A'$ , passa por  $A$  e bissecta o ângulo  $\angle P'AA' = 2 \cdot \angle BAA'$ . Dessa forma, obtemos a trisseccção do ângulo e, de fato,  $\angle BAQ' = \frac{2}{3} \angle BAE$ .

#### 4.2.5 Duplicação do cubo

No problema da duplicação do cubo de lado  $l$ , precisamos construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro de  $l^3$ . Daí, a aresta procurada precisa ter medida igual a  $l\sqrt[3]{2}$ . A solução desse problema por origami, a qual será apresentada nesta subseção, é consequência da construção proposta por Peter Messer. Na construção de Messer, o quadrado ABCD deve ser primeiramente dobrado em três retângulos congruentes e, em seguida, usando o axioma 6 do origami, deve ser dobrado de acordo com a representação da figura 66. Assim, ficam determinados, por um ponto  $P$  sobre o lado  $AD$ , dois segmentos  $AP$  e  $PD$  tal que a razão

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{AP}} = \sqrt[3]{2}.$$

Figura 66 – Divisão do lado AD do quadrado ABCD na razão  $\overline{PD}/\overline{AP} = \sqrt[3]{2}$ , com  $P \in AD$ .



Fonte: Autora (2020)

Justificativa da construção:

Na construção acima, temos que o ângulo  $\angle H'PI$  é reto, já que é o ângulo refletido de  $\angle ABC = 90^\circ$  pela dobra  $IJ$ , daí da soma  $\angle EPH' + \angle H'PI + \angle API = 180^\circ$ , podemos concluir que  $\angle EPH' + \angle API = 90^\circ$ , mostrando que os ângulos  $\angle EPH'$  e  $\angle API$  são complementares. Do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é imediato percebermos que os ângulos,  $\angle API$  e  $\angle AIP$ , são também complementares, isto é, que  $\angle API + \angle AIP = 90^\circ$ . Daí segue que  $\angle EPH' = \angle AIP$ . O que mostra a semelhança dos triângulos retângulos  $\triangle PEH'$  e  $\triangle PAI$ , pelo caso  $(A, A)$ . Logo, vale a proporção a seguir:

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{PH'}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{PI}} \quad (4.17)$$

Precisamos desenvolver essa proporção, mas primeiramente devemos expressar as medidas  $\overline{PE}$ ,  $\overline{PH'}$ ,  $\overline{AI}$  e  $\overline{PI}$  em função das medidas  $\overline{AP}$  e  $\overline{PD}$ , as quais serão denotadas como  $\overline{AP} = p$  e  $\overline{PD} = q$ , respectivamente.

Notemos que  $\overline{PE} = \overline{PD} - \frac{(\overline{PD} + \overline{AP})}{3}$  e que  $\overline{PH'} = \frac{\overline{AP} + \overline{PD}}{3}$ , logo:

$$\overline{PE} = q - \frac{(q+p)}{3} = \frac{2q-p}{3} \quad (4.18)$$

e

$$\overline{PH'} = \frac{\overline{AP} + \overline{PD}}{3} = \frac{p+q}{3} \quad (4.19)$$

Podemos verificar também que  $\overline{PI} = \overline{AP} + \overline{PD} - \overline{AI}$ . Pondo agora  $\overline{AI} = r$  e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo  $\Delta PAI$ , temos que:

$$\overline{PI}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AI}^2 \quad (4.20)$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AP} + \overline{PD} - \overline{AI})^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AI}^2 \quad (4.21)$$

$$\Leftrightarrow (p+q-r)^2 = p^2 + r^2 \quad (4.22)$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 2pq + q^2 - 2(p+q)r + r^2 = p^2 + r^2 \quad (4.23)$$

$$\Leftrightarrow 2pq + q^2 - 2(p+q)r = 0 \quad (4.24)$$

$$\Leftrightarrow \overline{AI} = r = \frac{q^2 + 2pq}{2(p+q)} \quad (4.25)$$

Daí, substituindo  $r$  na equação  $\overline{PI} = p+q-r$ , segue

$$\overline{PI} = p+q - \frac{q^2 + 2pq}{2(p+q)} = \frac{q^2 + 2pq + 2p^2}{2(p+q)} \quad (4.26)$$

Substituindo as medidas na proporção  $\frac{\overline{PE}}{\overline{PH'}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{PI}}$ , decorre que:

$$\frac{\frac{2q-p}{3}}{\frac{p+q}{3}} = \frac{\frac{q^2 + 2pq}{2(p+q)}}{\frac{q^2 + 2pq + 2p^2}{2(p+q)}} \quad (4.27)$$

$$\frac{2q-p}{p+q} = \frac{q^2 + 2pq}{q^2 + 2pq + 2p^2} \quad (4.28)$$

$$2q^3 + 4pq^2 + 4p^2q - pq^2 - 2p^2q - 2p^3 = pq^2 + 2p^2q + q^3 + 2pq^2 \quad (4.29)$$

$$2q^3 + 3pq^2 + 2p^2q - 2p^3 = q^3 + 3pq^2 + 2p^2q \quad (4.30)$$

$$q^3 = 2p^3 \quad (4.31)$$

$$q = p\sqrt[3]{2} \quad (4.32)$$

De fato,

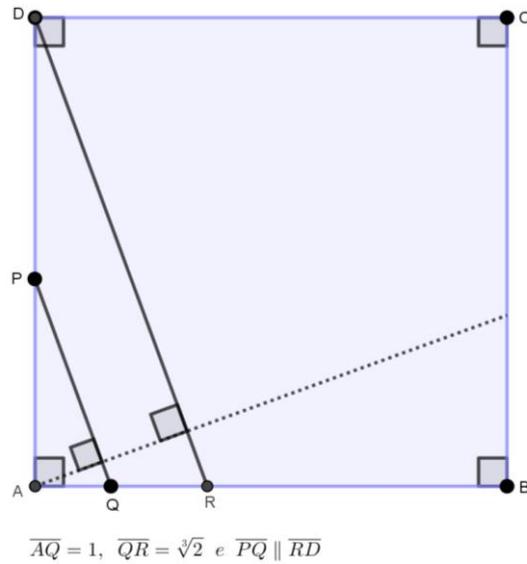
$$\frac{\overline{PD}}{\overline{AP}} = \frac{p\sqrt[3]{2}}{p} = \sqrt[3]{2} \quad (4.33)$$

Na figura 66, note que, se quiséssemos duplicar um cubo de aresta igual a  $\overline{AP}$ , o problema então estaria resolvido, já que  $\overline{PD} = \overline{AP} \times \sqrt[3]{2}$ . Agora, para que os segmentos obtidos na construção resolvessem, por exemplo, a duplicação de um cubo de aresta igual a 1, o quadrado dobrado na construção deveria coincidir com um quadrado de lado  $1 + \sqrt[3]{2}$ , sendo que  $\sqrt[3]{2}$  é o número que deve ser construído por origami para resolver a duplicação de um cubo de lado 1. Mas com as medidas  $\overline{AP}$  e  $\overline{PD} = \overline{AP} \times \sqrt[3]{2}$  encontradas na construção proposta por Peter Messer, podemos obter um segmento medindo  $1 + \sqrt[3]{2}$  e, conseqüentemente, o segmento de medida igual a  $\sqrt[3]{2}$ .

Após encontrar as medidas dos segmentos  $AP$  e  $PD$ , de acordo com esquema da figura 66, podemos construir um segmento cuja medida é igual a  $\sqrt[3]{2}$  utilizando a proporção  $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QR}}$ , na qual  $AQ$  é um segmento unitário e  $\overline{QR}$  é chamada de quarta proporcional das medidas  $\overline{AP}$ ,  $\overline{PD}$  e  $\overline{AQ}$ , seguindo essa ordem.

Para fazer a construção do segmento  $QR$ , tal que  $\overline{QR} = \sqrt[3]{2}$ , basta seguir estes passos: em um quadrado  $ABCD$  de lado maior que  $1 + \sqrt[3]{2}$ , no qual foram determinados sobre o lado  $AD$ , pela construção proposta por Peter Messer, dois segmentos  $\overline{AP}$  e  $\overline{PD}$ , tal que  $\overline{PD} = \overline{AP} \times \sqrt[3]{2}$ , marque agora um ponto  $Q$  sobre o lado  $AB$  desse quadrado, tal que  $\overline{AQ} = 1$ . Em seguida, construa o segmento  $PQ$  e, por último, construa por  $D$  uma dobra paralela ao segmento  $PQ$ , a qual intersecta  $AB$  no ponto  $R$ .

Figura 67 – A quarta proporcional das medidas  $\overline{AP}, \overline{PD} = \overline{AP} \times \sqrt[3]{2}$  e  $\overline{AQ} = 1$



Fonte: Autora (2020)

Aplicando o teorema de Tales nos triângulos, temos que:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QR}} \quad (4.34)$$

Daí,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AP} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\overline{QR}} \Rightarrow \overline{QR} = \sqrt[3]{2} \quad (4.35)$$

## 5 PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA TRABALHAR GEOMETRIA COM ORIGAMI EM SALA DE AULA

Neste capítulo serão apresentadas algumas sequências de atividades com origami que podem servir de apoio na abordagem de conteúdos matemáticos. Tais atividades abordarão alguns conteúdos de geometria por meio da construção de um determinado objeto, o qual no decorrer da atividade precisa ser justificado por meio de questionamentos sobre os passos solicitados na sua construção. Tais atividades foram elaboradas para serem aplicadas em turmas do 9<sup>a</sup> ano. Algumas das construções foram encontradas em materiais de pesquisa e foram adaptadas em forma de atividade, essas construções visam trabalhar habilidades que envolvem aplicação e verificações por meio de experimentações, como “resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes” (BRASIL, 2018, p. 319).

Os assuntos trabalhados nessas atividades envolvem teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos, aplicação do teorema de Tales e relações métricas no triângulo retângulo. Como é uma proposta de atividade, o professor que fizer uso desse material pode fazer suas próprias adaptações conforme a realidade de sua sala de aula. Contudo, é importante que seja apresentado aos alunos, antes de realizar as atividades, o seguinte conjunto de dobras que combinam pontos e linhas dados numa folha de papel:

- I. Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  podemos fazer uma dobra que passa por esses pontos.
- II. Dado dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  podemos fazer uma dobra que coloca  $P_1$  sobre  $P_2$ .
- III. Dados duas linhas de dobra  $l_1$  e  $l_2$  podemos obter a dobra que põe  $l_1$  sobre  $l_2$ .
- IV. Dados um ponto  $P$  e uma linha  $l$ , podemos fazer uma dobra que passa por  $P$  e que é perpendicular a  $l$ .
- V. Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e uma linha  $l_1$  podemos encontrar uma linha que coloca  $P_1$  sobre  $l_1$  e que passa através do ponto  $P_2$ .
- VI. Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e duas linhas  $l_1$  e  $l_2$  podemos encontrar uma única linha que coloca  $P_1$  sobre  $l_1$  e  $P_2$  sobre  $l_2$ .
- VII. Dados um ponto  $P_1$  e duas linhas  $l_1$  e  $l_2$  podemos fazer uma dobra, perpendicular a  $l_2$ , que coloca  $P_1$  sobre  $l_1$ .

Em cada atividade proposta a seguir, por envolver construções, é recomendável que seja dado um tempo necessário para que os alunos possam ler e compreender os passos pedidos para que, em seguida, esses passos possam ser executados. E nesse processo, o professor precisa fazer a leitura de cada passo da construção e questionar a turma sobre o que

está sendo solicitado, tirando dúvidas que possam surgir. Dessa forma, sugerimos que o tempo estimado para o desenvolvimento das sugestões de atividades com origami seja pelo menos 90 minutos, que deve ser distribuído entre dois momentos: primeiro momento, que envolve atividade de construção e segundo momento, que envolve a aplicação de exercícios elaborados com base na construção trabalhada.

### 5.1 Quadrado inscrito em outro quadrado

**Público alvo:** 9º ano

**Conhecimentos prévios:** Congruência de triângulos, Teorema de Pitágoras, área de triângulos, equações do segundo grau e cálculo de área mínima.

**Habilidade:** (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

**Objetivo específico:** Explorar a construção geométrica de um quadrado inscrito em outro quadrado para encontrar o quadrado inscrito de menor área.

**Materiais:** Folha de papel quadrada, lápis e borracha.

**Tempo sugerido:** 90 minutos

#### Orientações metodológicas:

Antes de iniciar a atividade, o professor pode fazer perguntas sobre os conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento da atividade por dobradura, direcionando os alunos sobre o conteúdo que irão estudar com a atividade.

No decorrer dessa atividade, que aborda a congruência de triângulos e o cálculo da área mínima, em certos momentos do desenvolvimento do trabalho, seria necessário revisar alguns conceitos de maior grau de dificuldades, levando o aluno a participar da construção de novos conceitos que promovam a aprendizagem, conforme o objetivo dessa atividade.

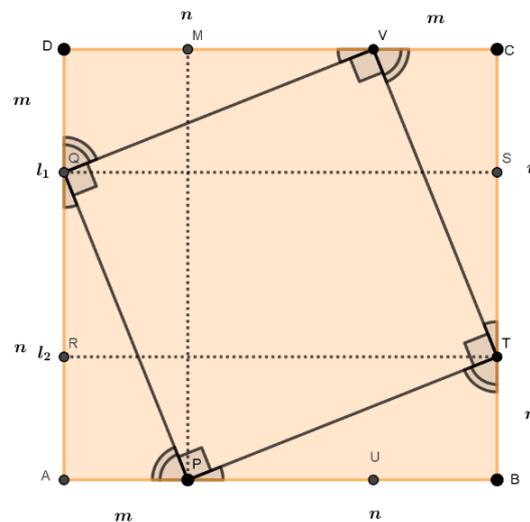
### DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

**1º momento:** O professor deve orientar os alunos no desenvolvimento dos seguintes passos de construção:

- a) Dada uma folha quadrada de vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ;
- b) Marque um ponto  $P$  sobre o lado  $AB$  do quadrado;

- c) Denote as medidas dos segmentos  $AP$  e  $PB$ , respectivamente, por  $m$  e  $n$ ;
- d) Utilize o axioma 4 para construir, por  $P$ , a perpendicular ao segmento  $AB$ , determinando sobre o lado  $DC$  o ponto  $M$ ;
- e) Leve os segmentos  $DM$  e  $AP$  sobre a perpendicular  $\overleftrightarrow{MP}$ , obtendo, respectivamente, os pontos  $Q$  e  $R$  sobre o lado  $AD$ ;
- f) Encontre as perpendiculares  $l_1$  e  $l_2$  ao segmento  $AD$  passando pelos pontos  $Q$  e  $R$ , determinando, respectivamente, sobre o lado  $BC$  os pontos  $S$  e  $T$ ;
- g) Obtenha os pontos  $U$  e  $V$  ao levar o segmento  $BT$  sobre  $l_2$  e o segmento  $SC$  sobre  $l_1$ ;
- h) Pelos passos anteriores, ficam determinados sobre o lado do quadrado  $ABCD$ , de lado  $a$ , segmentos de medidas  $m$  e  $n$ , identifique esses segmentos.
- i) Construa triângulos retângulos de catetos  $m$  e  $n$ ;

Figura 68-Quadrado inscrito em outro quadrado



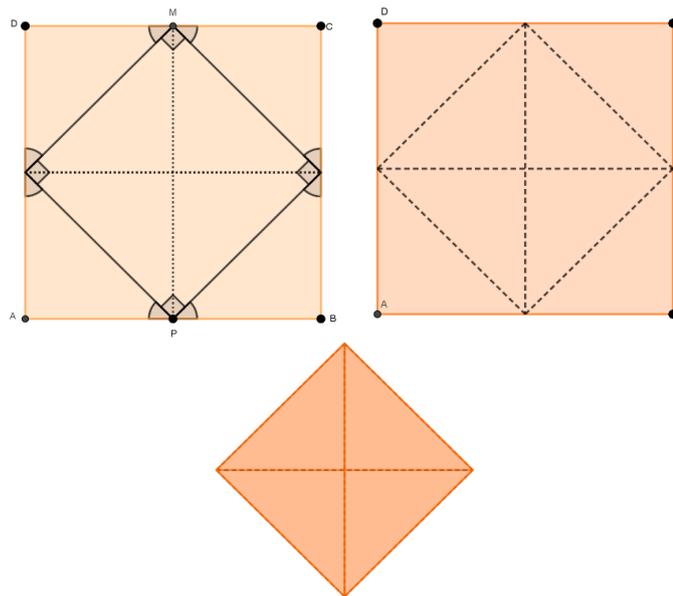
Fonte: Autora (2020)

**2º momento:** O professor deverá direcionar as seguintes questões aos alunos:

- j) Prove que o quadrilátero de vértices  $Q$ ,  $P$ ,  $T$  e  $V$  é um quadrado;
- k) Represente através de uma equação a soma das áreas dos triângulos que você obteve no passo  $i$ , da construção.
- l) Encontre a equação da área do quadrilátero  $QPTV$  subtraindo a equação que você obteve, na questão anterior, da área do quadrado  $ABCD$ .
- m) Aplique o teorema de Pitágoras sobre os triângulos retângulos e encontre o valor do quadrado da hipotenusa.

- n) O que podemos dizer das equações encontradas nas questões l e m?
- o) Represente a equação da área do quadrado  $QPTV$  em função de  $n$ .
- p) Pergunte aos alunos qual o tipo de equação representa a área do quadrilátero  $QPTV$  conforme o passo anterior.
- q) A equação permite encontrar área mínima?
- r) Encontre o valor da variável independente para que a área seja mínima e o valor da área para esse valor;
- s) Esboce o gráfico da equação e diga o domínio e a Imagem;
- t) Utilizando os passos de construção apresentados no primeiro momento da atividade e o valor da variável que encontrou na questão r, construa o quadrado de área mínima inscrito no quadrado de lado  $a$ .

Figura 69-Quadrado de área mínima inscrito em outro quadrado



Fonte: Autora (2020)

### Avaliação

A avaliação da aprendizagem será feita através da observação do desempenho do aluno em todos os momentos da atividade. Verificando a leitura, compreensão, argumentação e autonomia.

## 5.2 Dividindo um quadrado em três retângulos congruentes

**Público alvo:** 9º ano

**Conhecimentos prévios:** Segmentos proporcionais, semelhança de triângulos, ângulos alternos internos congruentes determinados por retas paralelas cortadas por uma transversal.

**Habilidades:**

(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

**Objetivos específicos:** Aplicar o teorema de Tales para encontrar a divisão de um segmento em três partes iguais

**Materiais:** Folha de papel quadrada, lápis e borracha.

**Tempo sugerido:** 90 minutos

**Orientações metodológicas:**

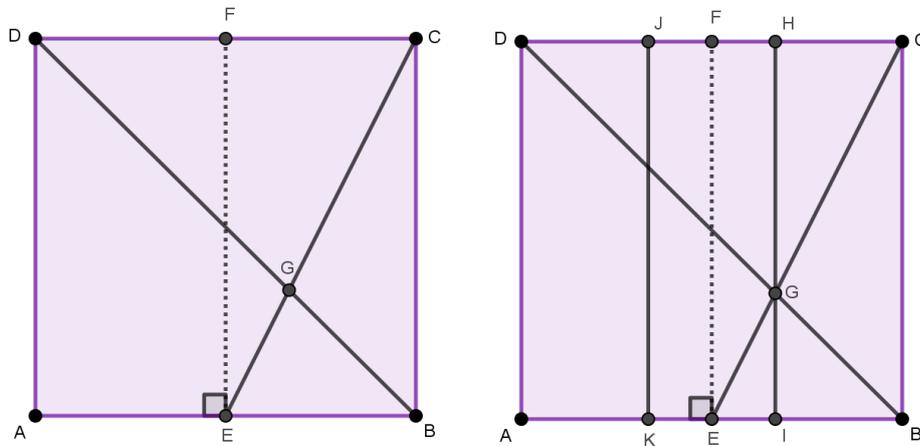
Antes de iniciar a atividade, o professor pode fazer perguntas sobre os conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento da atividade por dobradura, direcionando os alunos sobre o conteúdo que irão estudar com a atividade.

### DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

**1º momento:** O professor deve orientar os alunos no desenvolvimento dos seguintes passos de construção:

- a) Dada uma folha quadrada de vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ;
- b) Encontre os pontos médios dos segmentos  $AB$  e  $DC$ . Para isso, faça uma dobragem levando  $A$  sobre  $B$  e  $C$  sobre  $D$ , obtendo um segmento  $FC$  com  $F \in DC$  e  $E \in AB$ ;
- c) Construa os segmentos  $EC$  e  $BD$  e denote a interseção desses segmentos por  $G$ ;
- d) Construa, por  $G$ , um segmento perpendicular ao segmento  $AB$ , de extremidade  $H$  sobre  $DC$  e extremidade  $I$  sobre  $AB$ ;
- e) Obtenha um vinco  $KJ$  paralelo aos segmentos  $AD$  e  $IH$ , por uma dobragem pondo  $AD$  sobre  $IH$ ;

Figura 70 -Dividindo um quadrado em três retângulos congruentes



Fonte: Autora (2020)

**2º momento:** O professor deverá direcionar as seguintes questões aos alunos:

- f) Identifique os pares de ângulos alternos internos formados pelas retas  $\overleftrightarrow{DC}$ ,  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{EC}$  e  $\overleftrightarrow{DB}$ . Esses pares de ângulos são congruentes? Se sim, explique por quê.
- g) O que podemos dizer dos triângulos  $\triangle DGC$  e  $\triangle EGB$  determinados por essas retas?
- h) Encontre a razão entre os segmentos  $DG$  e  $GB$ .
- i) Observe que os segmentos  $IH$  e  $JK$  paralelos aos lados  $AD$  e  $BC$ , dividem os lados  $AB$  e  $DC$  em três partes. Agora, utilize o teorema de Tales e diga qual é a medida dessas partes.

### Avaliação

A avaliação da aprendizagem será feita através da observação do desempenho do aluno em todos os momentos da atividade. Verificando a leitura, compreensão, argumentação e autonomia.

### 5.3 Duplicação de um quadrado de lado dado

**Público alvo:** 9º ano

**Conhecimentos prévios:** Triângulo retângulo isósceles, triângulos congruentes.

**Habilidades:** (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

**Objetivos específicos:**

Aplicar o teorema de Pitágoras num triângulo retângulo isósceles utilizando dobradura de papel; dobrar a área de um quadrado utilizando origami.

**Materiais:** Folha de papel quadrada, lápis e borracha.

**Tempo sugerido:** 90 minutos

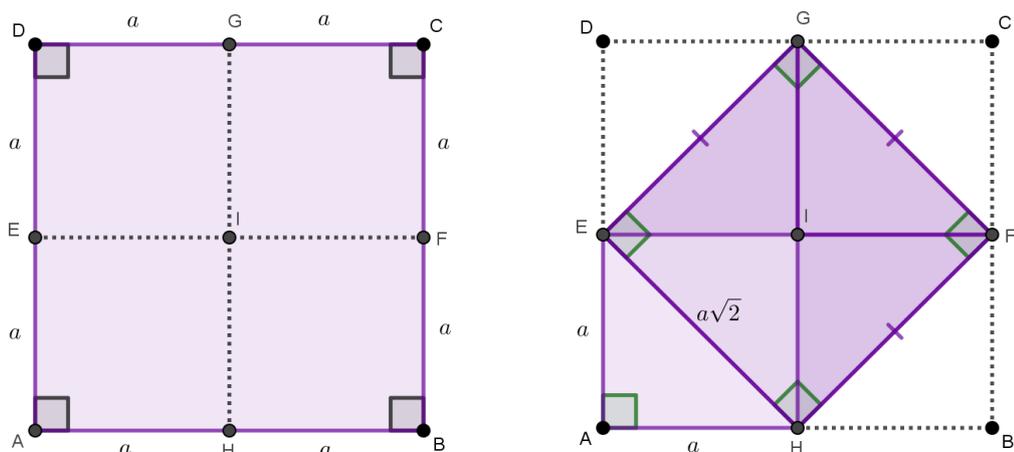
**Orientações metodológicas:** Antes de iniciar a atividade, o professor pode fazer perguntas sobre os conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento da atividade por dobradura, direcionando os alunos sobre os conteúdos que irão estudar com a atividade.

## DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

**1º momento:** O professor deve orientar os alunos no desenvolvimento dos seguintes passos de construção:

- Dado um quadrado de lado  $2a$ , tal que  $a$  representa a medida de outro quadrado, denote seus vértices por  $A, B, C$  e  $D$ .
- Faça uma dobra no quadrado levando  $A$  sobre  $D$  e  $B$  sobre  $C$ , encontrando um ponto  $E$  sobre  $AD$  e  $F$  sobre  $BC$ . Em seguida, leve ao mesmo tempo os vértices  $A$  e  $D$  sobre os vértices  $B$  e  $C$ , respectivamente, obtendo um ponto  $G$  sobre  $DC$  e  $H$  sobre  $AB$ .
- Construa os vincos  $EH, HF, FG$  e  $EG$  ao levar os vértices do quadrado até  $I$ , ponto de interseção das dobras obtidas no passo anterior.
- Agora desdobre apenas um desses vincos.

Figura 71- Duplicação de um quadrado de lado  $a$



Fonte: Autora (2020)

**2º momento:** O professor deverá direcionar as seguintes questões aos alunos:

- e) Das dobras construídas no passo 2 da construção, quais figuras geométricas foram obtidas?
- f) Dos vincos construídos pelo passo 3, verifique qual polígono encontra-se inscrito no quadrado de lado  $2a$ . Para isto, encontre as medida dos ângulos internos do polígono e a medidas dos seus lados;
- g) Verifique se o polígono  $EHFG$  compreende alguma quantidade inteira de vezes a área do quadrado  $AEIH$ ;
- h) Encontre as medidas dos lados do polígono  $EHFG$ .

### **Avaliação**

A avaliação da aprendizagem será feita através da observação do desempenho do aluno em todos os momentos da atividade. Verificando a leitura, compreensão, argumentação e autonomia.

### **5.4 Construção de um segmento cuja medida é a raiz quadrada da medida de um segmento dado.**

**Público alvo:** 9º ano

**Conhecimentos prévios:** triângulo isósceles, soma dos ângulos internos de um triângulo, triângulos retângulos semelhantes.

**Habilidades:** (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

**Objetivos específicos:** Aplicar relações métricas do triângulo retângulo

**Materiais:** Folha de papel quadrada, lápis e borracha.

**Tempo sugerido:** 90 minutos

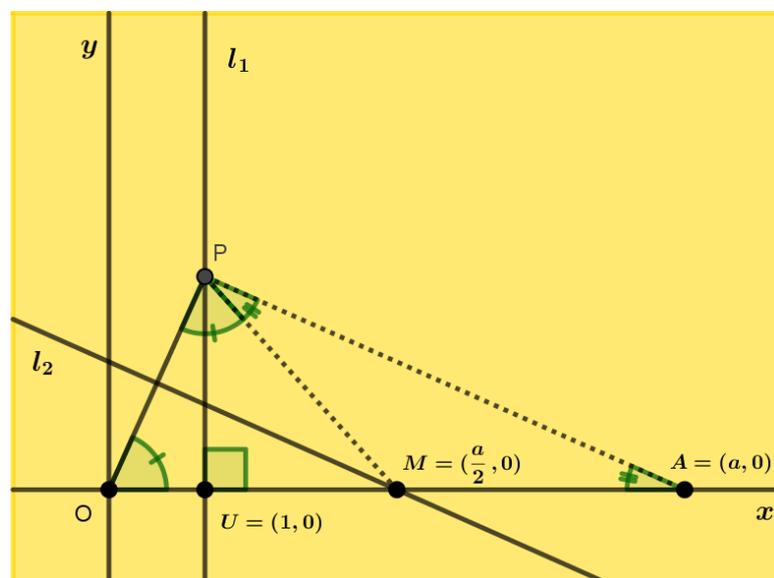
**Orientações metodológicas:** Antes de iniciar a atividade, o professor pode fazer perguntas sobre os conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento da atividade por dobradura, direcionando os alunos sobre o conteúdo que irão estudar com a atividade.

### **DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE**

**1º momento:** O professor deve orientar os alunos no desenvolvimento dos seguintes passos de construção:

- Construa na folha de papel um sistema de eixos ortogonais, para isso construa uma dobra representando o eixo  $x$  e, em seguida, faça um vinco perpendicular a  $x$ , esse segundo vinco obtido será a representação do eixo  $y$ . Denote a interseção do eixo  $x$  com o eixo  $y$  por  $O$ , representando a origem do sistema.
- Sejam  $OU$  um segmento unitário dado e  $AO$  um segmento de medida  $a$ . De modo que a medida do segmento  $OU$  está associada ao ponto  $U = (1,0)$  e a medida do segmento  $AO$  está associada ao ponto  $A = (a,0)$ . Localize tais pontos no eixo  $x$ .
- Construa agora o ponto médio  $M$  do segmento  $AO$ . Quais coordenadas representam esse ponto?
- Agora, utilize o axioma 4 para construir, por  $U$ , a perpendicular  $l_1$  ao eixo  $x$ .
- Utilize agora a dobra que passa por um ponto e que reflete outro ponto sobre uma reta, ou seja, aplique o axioma 5 do origami para por  $O$  sobre o seu simétrico  $P$  pertencente a linha  $l_1$  ao fazer uma dobra passando por  $M$  e colocando  $O$  sobre  $l_1$ .
- Construa os vincos  $OP$  e  $PA$ .

Figura 72-Construção de um segmento cuja medida é raiz quadrada da medida de um segmento dado.



Fonte: Autora (2020)

**2º momento:** O professor deverá direcionar as seguintes questões aos alunos:

- Os segmentos  $OM$ ,  $PM$  e  $MA$  são congruentes? Se sim, diga por quê.
- Quais são as medidas dos segmentos  $OM$ ,  $PM$  e  $MA$ ?
- Prove que  $\widehat{OPA} = 90^\circ$ .

- j) Encontre e aplique a relação métrica do triângulo retângulo que permite encontrar a medida de  $OP$ .
- k) Diga qual foi o objetivo da construção proposta por origami.

**Avaliação**

A avaliação da aprendizagem será feita através da observação do desempenho do aluno em todos os momentos da atividade. Verificando a leitura, compreensão, argumentação e autonomia.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação teve como objetivo propor atividades para o ensino de matemática, mais precisamente para o ensino de geometria, através de construções geométricas com origami. Tais atividades abordam alguns objetos de conhecimento relacionados à unidade temática de geometria indicados pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para 9º ano do ensino fundamental e buscam atender algumas das habilidades que os alunos desse ano escolar devem desenvolver conforme a BNCC. As habilidades envolvem, por exemplo, a aplicabilidade de conceitos trabalhados dentro da sala de aula, assim como verificações através de experimentações.

No presente estudo foi utilizada uma pesquisa do tipo bibliográfica, a qual permitiu conhecer o conjunto de axiomas do origami que permite representar objetos geométricos e seres da natureza através do alinhamento de pontos e retas. Esse conjunto, conforme foi apresentado na dissertação, é constituído por sete alinhamentos possíveis para definir uma única dobra fazendo incidir pontos e linhas dados. Na abordagem desses axiomas, verificou-se que definições e propriedades geométricas têm muita relação com a prática de dobrar papel. Este conjunto de axiomas faz do origami uma alternativa metodológica rica para ensinar geometria em sala de aula.

Buscou-se também verificar, na pesquisa, quais conteúdos de geometria podem ser trabalhados com origami. O resultado mostrou que vários conteúdos de geometria podem ser abordados através do origami, como pode ser verificado na dissertação, já que grande parte do texto produzido foi construído em diálogo com a Geometria e Geometria do origami; mostrando, portanto, algumas das várias possibilidades de materiais que podem ser obtidos através do estudo da arte de dobrar.

Conhecendo o conjunto de axiomas do origami e os conteúdos que podem ser abordados com eles, foi possível elaborar um conjunto de quatro atividades para trabalhar geometria com origami em sala de aula. Essas atividades estão nomeadas como: quadrado inscrito em outro quadrado; dividindo um quadrado em três retângulos congruentes; duplicação de um quadrado de lado dado, e construção de um segmento cuja medida é a raiz quadrada da medida de um segmento dado. Tais atividades foram apresentadas nesta dissertação como propostas de atividades para trabalhar geometria com origami em sala de aula.

Nestas atividades, dado um papel quadrado ou retangular, é solicitado em seguida uma sequência de passos de construção que determinam na folha elementos geométricos, tais

como: pontos médios, interseção de retas ou vincos, segmentos de retas, paralelas, perpendiculares, bissetrizes etc. Todas as construções pedidas resultam apenas das combinações de pontos e linhas dados e construídos na folha. Nessa etapa, os alunos podem ter a oportunidade de revisar conceitos e propriedades de figuras, assim como podem conhecer e utilizar as operações do origami para obterem os objetos pedidos. Acreditamos que a atividade possa ser interessante para o aluno, pois o próprio aluno constrói o objeto geométrico pedido de uma forma lúdica e a partir desse objeto é questionado sobre os passos que levaram a construção final, de modo que o aluno deverá fazer uso dos conceitos trabalhados dentro de sala para fazer a verificação desse objeto construído.

Vale destacar, ainda, que ao longo do texto desta dissertação foram apresentados por meio de origami os passos de construções geométricas elementares, passos de construção do ponto médio de um segmento, verificação da congruência de pares de ângulos opostos pelo vértice, a aproximação do traçado de uma parábola por meio de mediatrizes, verificação do teorema de Pitágoras, verificação do teorema dos ângulos internos do triângulo, a prova da duplicação do cubo de lado dado, a trissecção do ângulo e até mesmo resultados algébricos que garantem a divisão de um segmento em  $n$  partes iguais. Tais construções só reforçam a prática das dobraduras como uma ferramenta rica para introduzir e trabalhar conteúdos matemáticos dentro da sala de aula, despertando o interesse e participação dos alunos por meio de uma atividade prática e lúdica na qual os mesmos irão explorar e aplicar conhecimentos geométricos.

Dessa forma, considero relevante e viável o uso do origami como metodologia de ensino de geometria na educação básica. Como sugestão de trabalhos futuros, proponho uma investigação do uso do origami como recurso pedagógico na prática de ensino de geometria por meio das atividades aqui apresentadas.

Por fim, acreditamos que as atividades aqui propostas e todo o texto produzido nesta dissertação vão, certamente, contribuir com a minha atividade profissional e também com a formação inicial e continuada de professores da Educação Básica.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. [S.l.] 2018
- BRASIL, S. D. E. F. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, 1998
- CARVALHO, João Pitombeira de. **Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega**. (2009). Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila6.pdf>. Acesso em: 5 maio, 2020.
- CARNEIRO, Mário Jorge Dias; SPIRA, Michel. **Oficina de Dobraduras**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila9.pdf>. Acesso em: 10 setembro, 2019.
- CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. **Explorando Geometria com Origami** (2009). Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em: 10 setembro, 2019.
- DULCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar – volume 9: Geometria plana**. 7 ed. São Paulo: Atual, 1993.
- HATORI, Koshiro. **History of Origami**. K's Origami. [S.l.] [S.d] Disponível em: <https://origami.ousaan.com/library/historye.html>. Acesso em: 10 setembro, 2019
- HAYASAKA, Enio Yoshinori; NISHIDA, Silvia Mitiko. **Origami na Educação**. Unesp.br. [S.l.] [200-] Disponível em: [https://www2.ibb.unesp.br/Museu\\_Escola/Ensino\\_Fundamental/Origami/Documentos/indice\\_origami\\_educacao.htm](https://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami_educacao.htm). Acesso em: 12 setembro, 2019.
- HINDERS, Dana. **Uma breve história do origami**. The spruce crafts [S.I] (2019). Disponível em: <https://www.thesprucecrafts.com/brief-history-of-origami-2540653>. Acesso em : 10 setembro de 2019.
- KANEGAE, Mari. **Origami**. Atelier Kami Arte. São Paulo, (2019). Disponível em: <http://www.kamiarte.com.br/>. Acesso em: 10 de setembro de 2019
- KAWANO, Carmen. **A matemática do origami**. Galileu o prazer de aprender. (2015). Disponível em: <http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT516776-2680,00.html#:~:text=Na%20matem%C3%A1tica%2C%20o%20origami%20pode,topologia%20e%20pela%20geometria%20combinat%C3%B3ria.&text=Para%20desenvolver%20esse%20trabalho%2C%20eles,complexas%20e%20sofisticadas%20de%20origami>. Acesso em: 10 setembro, 2019
- LANG, Robert. J. **Origami and geometric constructions**. (2015). Disponível em: [https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami\\_constructions.pdf](https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf). Acesso em: 10 de setembro de 2019.
- LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? A Educação Matemática em Revista, São Paulo, SBEM, v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3 ed . Campinas, SP: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de professores)

MARTINS, Rogério; CAETANO, Tiago da Cunha. **Isto é Matemática**. Portugal: Texto, 2018.

MONTEIRO, L. C. N. **Origami**: História de uma Geometria Axiomática. 2008. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Matemática para o Ensino, Faculdade de Ciência, Departamento de Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa. 2008. Disponível em: [www.repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1309/1/19575\\_ulfc091371\\_tm\\_Origami\\_Historia\\_de\\_uma\\_Geometria\\_Axiomatica.pdf](http://www.repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1309/1/19575_ulfc091371_tm_Origami_Historia_de_uma_Geometria_Axiomatica.pdf). Acesso em: 21 setembro , 2019.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar – Volume 2: Geometria Euclidiana Plana**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NARVAZ, M. *et al.* **A geometria das dobraduras: trabalhando o lúdico e ressignificando saberes**. [S.I] (2007) Disponível em: [https://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro\\_Gaucha\\_Ed\\_Matem/cientificos/C03.pdf](https://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro_Gaucha_Ed_Matem/cientificos/C03.pdf). Acesso em: 12 setembro , 2019.

RÊGO, Rogéria Gaudêncio do; RÊGO, Rômulo Marinho do; GAUDÊNCIO JÚNIOR, Severino. **A Geometria do Origami**. João Pessoa, PA: Editora Universitária/ UFPB, 2003.

UENO, Thaís Regina. Do origami tradicional ao origami arquitetônico: uma trajetória histórica e técnica do artesanato oriental em papel e suas aplicações no design contemporâneo. 2003. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Desenho Industrial, Faculdade de Arquitetura, Artes e Comunicação, Universidade Estadual Paulista, Bauru. 2003. Disponível em: <https://www.faac.unesp.br/Home/Pos-Graduacao/Design/Dissertacoes/thaisueno.pdf>. Acesso em: 07 maio, 2020.

WAGNER, Eduardo. **Construções geométricas**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.