Mario Tanaka Filho
Organizador

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Profmat - Ufopa

10 anos

Comissão Editorial:

Angelica Francisca de Araújo
Aroldo Eduardo Athias Rodrigues
Hamilton Cunha de Carvalho

Mario Tanaka Filho
Organizador

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Profmat - Ufopa

10 anos

1ª edição

Brasília-DF, 2021

Rosivan
Diagramação & Artes Gráficas

© Mario Tanaka Filho (Organizador) 2021.

A reprodução não autorizada desta publicação, por qualquer meio, seja total ou parcial, constitui violação da Lei nº 9.610/98.

Capa, Projeto Gráfico e Diagramação
Rosivan Diagramação & Artes Gráficas

Catalogação da Publicação na Fonte.

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Profmat – Ufopa 10 anos [recurso eletrônico] / Organizado por Mario Tanaka Filho – Brasília: Rosivan Diagramação & Artes Gráficas, 2021
1 PDF.

ISBN 978-65-994437-5-6

1. Matemática. 2. Licenciatura. 3. Mestrado profissional. I. Tanaka Filho, Mario.

CDU 51
M586

Elaborada por Verônica Pinheiro da Silva CRB-15/692.

SUMÁRIO

Prefácio

Um marco na recente história da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), criada em 2009, foi sua adesão ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) em 2010. Com um corpo docente de jovens doutores, fruto do investimento de mais de 20 anos no ensino superior no interior da Amazônia, o polo do PROFMAT foi um passo importante de consolidação da pós-graduação desta jovem Universidade.

Desde a década de 80, a Universidade Federal do Pará (UFPA), por meio de uma ousada estratégia de interiorização, ofertou cursos de licenciatura em Santarém e na região Oeste do Pará. Com isto, a UFOPA nasce já com uma inovadora licenciatura integrada em Matemática e Física, trazendo essa larga experiência na formação de professores, inclusive com parte significativa de seu corpo docente tendo sido formada na própria região.

Por outro lado, a criação do PROFMAT foi a culminância de investimentos na Educação Básica, realizados pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), frutos do entendimento de que futuro da produção matemática brasileira, com excelência reconhecida internacionalmente, está no dia a dia da escola.

Este livro traz uma fotografia da jornada de 10 anos desses professores de Matemática, orientadores e egressos do PROFMAT – UFOPA. Aquele corpo docente, já não tão jovem como antes, mas com ainda mais coragem, tem sonhos mais altos e está dando passos na direção do Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática.

Honrado de compor esse corpo docente, tive a oportunidade de ser o primeiro coordenador. Hoje, atuando como Reitor, tenho ainda maior dimensão do impacto positivo e da importância deste programa para nossas comunidades. E para iniciar este livro, lembro uma alegoria trazida pelo matemático Elon Lages, um dos principais autores brasileiros na área da Matemática e idealizador do PROFMAT, durante a aula inaugural em 2011: "o ensino de Matemática é semelhante à educação sexual, no sentido de não se pode dizer logo tudo para a criança, mas nunca podemos mentir".

Hugo Alex Diniz

Introdução

Comemorar uma conquista é um momento marcante e alegre na vida de qualquer pessoa. E quando essa conquista rompe a barreira do âmbito pessoal e se torna uma conquista de toda uma instituição de ensino, ela deve ser lembrada como o resultado de todo o esforço de uma comunidade acadêmica. O livro que agora temos aqui é a materialização impressa desse esforço e marca um pouco da atuação no passado, no presente e com projeções futuras do Mestrado Profissional em Matemática (Profmat) da Universidade Federal do Oeste do Pará (Ufopa).

O Profmat é um programa de mestrado semipresencial na área de Matemática com oferta nacional. É formado por uma rede de instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil/Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa). O Profmat visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica que buscam aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio mais aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência.

O polo Santarém/Ufopa aderiu à rede no ano de 2011, e até o ano de 2020, abriu 10 turmas, com 15 alunos matriculados em cada uma delas, totalizando a oferta de 150 vagas para, majoritariamente, professores atuantes nas escolas públicas da porção da Amazônia brasileira composta pela região do oeste do estado do Pará. Seu corpo docente conta atualmente com 14 docentes, entre professores titulares e colaboradores, sendo que destes, 02 são professores egressos do próprio curso.

Composto por artigos derivados de alguns dos trabalhos de conclusão de curso (dissertações) de alunos egressos e de seus respectivos orientadores, a organização deste livro faz parte fundamentalmente do processo de consolidação de nosso curso de mestrado, fruto de um esforço de professores e professoras que ousaram desafiar as dificuldades e transformá-las em oportunidades de crescimento intelectual e profissional para aqueles que divulgam e trabalham com ensino de Matemática no interior da Amazônia. Nesse sentido, esta obra propõe fazer um resgate, ainda que parcial, desses 10 anos de existência do Profmat na Ufopa e divulgar os resultados obtidos nas pesquisas realizadas pelos autores dos artigos.

Uma boa leitura a tod@s.

Mario Tanaka Filho e Hamilton Cunha de Carvalho

Transformando o ensino da matemática usando metodologias ativas

Joelson Magno Dias[1]
Sebastian Mancuso[2]
José Ricardo e Souza Mafra[3]

Introdução

Este artigo visa a apresentar uma pesquisa-ação para desenvolver a autonomia dos discentes do 1º ano do ensino médio de uma escola da rede pública estadual paraense, localizada na zona urbana central do município de Santarém-PA, em relação ao processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Ressignificar os papéis de professores e estudantes, no contexto atual em que persiste a Educação Básica Brasileira, parece ser um caminho natural a se percorrer no século XXI, pois a educação bancária[4], com seus métodos antigos, ou seja, aquela em que o professor ainda é o transmissor do conhecimento, avaliando todos da mesma maneira,

1 SEDUC-PA. E-mail: joelson.dias@seduc.pa.gov.br
2 Ufopa. E-mail: sebastianmancuso@gmail.com
3 Ufopa. E-mail: jose.mafra@ufopa.edu.br
4 Educação que privilegia a transmissão das informações pelos professores. (VALENTE, 2014, p. 142)

ignorando as inteligências múltiplas[5]; não se mostra eficiente diante das transformações tecnológicas pelas quais a sociedade brasileira passou nas últimas décadas. O educador educa e é educado ao mesmo tempo, ou seja, é fundamental o diálogo com o educando, pois ambos são sujeitos do processo de ensino-aprendizagem. O ser humano tem uma bagagem de vários conhecimentos acumulados pelas suas experiências vividas, então é fundamental aprender a usar tais conhecimentos a favor da (re)construção dos saberes. Nesse sentido, Morán considera que:

> Só não podemos manter o modelo tradicional e achar que com poucos ajustes dará certo. Os ajustes necessários – mesmo progressivos - são profundos, porque são do foco: estudante ativo e não passivo, envolvimento profundo e não burocrático, professor orientador e não transmissor. (MORÁN, 2015, p. 22)

Por outro lado, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) indica que, as aprendizagens essenciais devem assegurar aos estudantes dez competências gerais para o pleno exercício da cidadania e o mundo do trabalho. A cultura digital, por exemplo, visa a desenvolver a compreensão, utilização e criação das TDIC de forma crítica, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares), suscitando estudos para promover tal competência. (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2018, p. 9)

---

[5] Na década de 1980, Howard Gardner, psicólogo e pesquisador da universidade de Harvard, nos Estados Unidos trouxe a teoria das inteligências múltiplas. Nos livros Estruturas da Mente (1983) e Inteligências Múltiplas – a teoria na prática (1995), afirma que elas são responsáveis por nossas habilidades, a capacidade do indivíduo caracterizar sua inteligência e a necessidade de estimulá-las, pois são desenvolvidas ao longo da vida e a combinação entre eles depende do próprio ser, de forma única. Ele elencou inicialmente oito inteligências, são elas: Inteligência linguística, inteligência lógico-matemática, inteligência musical, inteligência espacial, inteligência corporal-cinestésica, inteligência interpessoal, intrapessoal, inteligência naturalista e uma possível nona inteligência, a inteligência existencial (a que gera e tenta responder as maiores perguntas sobre natureza e preocupações humanas). (FREITAS; SOUZA; SANTOS, 2019). Disponível em: <https://cutt.ly/JkAg2W8>. Acesso em 27 de junho de 2019.

Segundo Valente (2017): As mudanças na sociedade e na cultura, advindas da disseminação das práticas sociais midiatizadas pelas Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação[6] (TDIC), são de tal envergadura que suscitam estudos gerados em distintas áreas do conhecimento. Na educação, há uma série de estudos que se valem dos avanços tecnológicos para facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Uma vertente de educadores aproveita as Metodologias Ativas de Aprendizagem[7] – MAA - (sala de aula invertida, atividades baseadas em grupo, em projetos, etc.), envolvendo os avanços tecnológicos, para desenvolver a ação ativa dos discentes em prol do processo de ensino-aprendizagem.

A proposta dessa pesquisa é apresentar um modelo de sala de aula invertida para desenvolver a compreensão e utilização das TDIC de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) de modo que o estudante exerça o protagonismo na vida pessoal e social, conforme sugere a BNCC. Desenvolver os estudos referentes à utilização dos avanços tecnológicos no processo de ensino-aprendizagem da matemática e verificar os efeitos da SAI no desenvolvimento da autonomia dos estudantes da turma do estudo de caso.

---

[6] O termo Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação – TDIC – conforme descreve Costa, Duqueviz & Pedrosa, para se referir as Novas Tecnologias. Publicado na Revista Quadrimestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional, SP. Volume 19, Número 3, Setembro/Dezembro de 2015: 603-610. (COSTA, DUQUEVI e PEDROZA, 2015, p. 604)

[7] As metodologias ativas surgiram na década de 1980 como alternativa a uma tradição de aprendizagem passiva, onde a apresentação oral dos conteúdos, por parte do professor, se constituía como única estratégia didática. Contrariamente ao ensino tradicional, as metodologias ativas procuram um ambiente de aprendizagem onde o aluno é estimulado a assumir uma postura ativa e responsável em seu processo de aprender, buscando a autonomia, a autorregulação e a aprendizagem significativa. (MOTA e WERNER DA ROSA, 2018, p. 263)

Tema da pesquisa

A pesquisa-ação[8] procurou responder a seguinte questão: Como projetar e testar uma proposta metodológica, baseada num modelo de Sala de Aula Invertida, usando os meios tecnológicos disponíveis pelos estudantes?

Com base na questão central, foram elaboradas algumas questões norteadoras:

1) Quais são os meios tecnológicos disponibilizados pelos estudantes para concretizar a SAI?

2) Como elaborar as sequências didáticas para o período de aplicação da SAI?

3) Como analisar os efeitos do modelo de SAI de matemática no processo de ensino-aprendizagem?

Para empreender o modelo da SAI, foi necessário verificar se os discentes dispunham dos meios tecnológicos (smartphone, computador, etc.) que facilitassem o diálogo fora do ambiente escolar e que dessem acesso às videoaulas e demais objetos digitais de aprendizagem (ODA), daí a necessidade da aplicação do questionário de sondagem.

O modelo SAI pode ser aplicado em qualquer bimestre do ano letivo. Então, as sequências didáticas foram planejadas e aplicadas para os conteúdos referentes ao 3º bimestre de 2019, no período de 19/08 a 24/10, dando ênfase à análise de modelos e à resolução de exercícios do livro-texto.

Objetivos

- **Geral:**

✓ Projetar uma proposta metodológica baseada num modelo de

[8] David Tripp no seu artigo "Pesquisa-ação: uma introdução metodológica*" defende que se encare a pesquisa-ação como uma das muitas diferentes formas de investigação-ação, a qual é por ele sucintamente definida como toda tentativa continuada, sistemática e empiricamente fundamentada de aprimorar a prática. (TRIPP, 2005, p. 1)

sala de aula invertida, utilizando os meios tecnológicos disponíveis pelos estudantes.

▪ **Específicos:**

✓ Identificar o perfil dos discentes da turma investigada quanto à utilização dos meios tecnológicos no cotidiano, bem como o uso das redes sociais para acesso às informações;

✓ Elaborar sequências didáticas de conteúdos referentes ao plano de curso do bimestre de aplicação: estudo das funções exponencial e logarítmica;

✓ Elaborar, executar e apresentar o projeto da III Jornada Científica da Escola;

✓ Aplicar sequências didáticas de conteúdos referentes ao plano de curso do bimestre;

✓ Analisar os efeitos do modelo da SAI de Matemática no processo de ensino-aprendizagem dos discentes.

A sociedade do conhecimento é baseada em competências cognitivas, pessoais e sociais, que não são adquiridas de forma convencional, logo, os métodos tradicionais de ensino, que privilegiam a transmissão de informações pelos professores, só faziam sentido quando o acesso à informação era difícil. Com a divulgação aberta de cursos e materiais, a sociedade como um todo, por meio dos seus órgãos gestores da educação (MEC, SEDUC e Secretarias Municipais de Educação), enfrentam a necessidade de reconfigurar e reconstruir a educação escolar básica. Essa pesquisa-ação educacional visa a apresentar uma possibilidade para essa reconstrução.

A elaboração da BNCC representa assim, um movimento de mudança. Em que pese as críticas a forma ou maneira de como foi concebida e proposta, constitui-se em uma proposta alternativa de reconstrução na esfera curricular das redes com o objetivo de atender às novas tendências educacionais. Junto a isso, dispõem-se novas ferramentas metodológicas e tecnológicas, que motivaram a realização dessa pesquisa.

Referencial Teórico

O foco dessa pesquisa foi desenvolver o protagonismo dos estudantes em relação ao processo de ensino-aprendizagem da matemática, ou seja, criar condições para a aprendizagem ativa dos educandos. O termo "aprendizagem ativa" é mais antigo que se imagina, começou a ser usado pelo professor inglês Reginald William Revans, nascido em 1907 na cidade de Portsmouth na Inglaterra. Foi um professor acadêmico, administrador e consultor de gestão. Durante as décadas de 1970 e 1980, escreveu seus livros mais famosos: *Developing Effective Managers* (1971); *As origens e o crescimento do aprendizado de ação* (1982) e o *ABC do aprendizado de ação* (1983). (BARKER, 2010, p. 30)

O pressuposto teórico fundamental das Metodologias Ativas de Aprendizagem (MAA) é tornar o estudante o protagonista do processo de ensino-aprendizagem. Isso cria uma autonomia no aprender-fazendo, então o professor passa a ser um mediador do processo.

Vários teóricos como Dewey (1940), Rogers (1973), Freire (2009), Morán (2015), entre outro, enfatizam, a importância de superar a educação bancária tradicional e envolver, motivar e dialogar com o estudante para que possa construir e reconstruir saberes.

Aprendizagem Baseadas em Grupo (TBL)

Atividades Baseadas em Grupos - Team Based Learning (TBL) que se distingue de outras metodologias, pois induz o estudante a uma preparação prévia sobre o tópico a ser discutido em sala de aula. Nelas, o ambiente de sala de aula fica mais democrático, passando para o professor a função de facilitador. A aprendizagem centrada no diálogo e na interação entre os estudantes, contemplando a comunicação e o trabalho coletivo. Segundo Bollela[9]:

---

[9] Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/rmrp/article/view/86618>. Acesso em 30 de agosto de 2019.

> É uma estratégia instrucional desenvolvida para cursos de administração nos anos 1970, por Larry Michaelsen, direcionada para grandes classes de estudantes. Procurava criar oportunidades e obter os benefícios do trabalho em pequenos grupos de aprendizagem, de modo que se possa formar equipes de 5 a 7 estudantes, que trabalharão no mesmo espaço físico (sala de aula). (BOLLELA, SENGER, *et al.*, 2014, p. 293)

A atividade baseada em grupos foi inserida, nesta pesquisa, nos momentos em sala de aula nos quais os estudantes se reuniram dentro de grupos formados a partir de um teste envolvendo os conteúdos estudados nas videoaulas. Nos encontros presenciais, os discentes deveriam discutir às questões dos relatórios de aprendizagem das videoaulas e responder alguns itens do livro-texto, determinadas pelo docente, para posterior socialização com a turma.

Análise de Modelos Matemáticos (AnM)

Para Barbosa, a modelagem[10] é um ambiente de aprendizagem no qual os estudantes são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. (BARBOSA, 2001, p. 6)

Um modelo pode ser considerado uma representação artificial de um sistema, representado por meio de imagens e objetos de escala ou de analogia (desenhos, fotos, esquemas, mapas, maquetes, moldes de roupas, gráficos, curvas de nível, sistema material, etc.).

O termo "Análise de Modelos" como uma abordagem pedagógica que utiliza modelos matemáticos prontos, dentro do contexto da Modelagem Matemática, é sugerido por Débora da Silva Soares em sua tese de doutorado intitulada: Uma Abordagem Pedagógica Baseada na

[10] Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/ Artigo Barbosa.pdf >. Acesso em 25 de abril de 2019.

Análise de Modelos para Estudantes de Biologia: qual o papel do software?[11]. (SOARES, 2012, p. 113)

A fim de contribuir para a prática docente do professor de Matemática, tanto no planejamento como na execução do método, Sousa (2019), apresenta o desenvolvimento prático de alguns conteúdos específicos do Ensino Médio, cuja execução ocorre, seguindo as etapas: Etapas da Análise de Modelos: 1ª) Apresentação das situações-problema; 2ª) Exploração e interpretação (dos modelos); 3ª) Resolução e desenvolvimento do conteúdo curricular; 4ª) Aplicação. (SOUSA, 2019, p. 11)

A análise de modelos foi inserida nessa pesquisa nos relatórios de aprendizagem, no qual os discentes após assistirem as videoaulas referentes a um determinado tópico deveriam responder a alguns itens sobre os conceitos estudados, porém um dos itens sempre envolvia a ideia da análise de modelos.

Aprendizagem Baseadas em Projetos (ABP)

A atividade baseada em projetos[12] é um modelo de ensino que consiste em permitir que os estudantes confrontem as questões e problemas do mundo real que consideram significativos, determinando como abordá-los e, então, agindo de forma cooperativa em busca de soluções (BENDER, 2012, p. 9)

A Aprendizagem Baseada em Projetos foi fundamentada em dois argumentos conceituais e teóricos. Um deles é o trabalho do filósofo da educação John Dewey, que enfatizou a importância do aprendizado através da experiência.

A experiência do mundo real, na qual os estudantes encontram um problema que estimula seu pensamento, estes são induzidos a pro-

---

[11] Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/teses/soares_ds_rcla.pdf>. Acesso em 30 de agosto de 2019.

[12] Disponível em: <https://books.google.com.br/books?hl=es&lr=&id=mBazCAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA1&dq =Atividades+baseada+em+projetos&ots=Al0zHSfTI0&sig=tTl8sPisnx8_HoJqdQDCJUtVW-o#v=onepage&q &f=false>. Acesso em 30 de agosto de 2019.

por soluções para o problema (MENDONÇA e ADAID, 2018). Por outro lado, a ABP inclui a teoria sociocultural de Vygotsky, que enfatizou a importância da participação do estudante em comunidades de aprendizagem cognitiva, onde o estudante troca e compara ideias com as de outras pessoas, interagindo ativamente para resolver problemas e o professor orienta seus esforços.

Nesse sentido, uma das sequências de atividades desenvolvidas com a turma de 1º ano do ensino médio (103), foi pensar numa problemática cotidiana dos integrantes da comunidade escolar e pesquisar uma solução para tal situação. As atividades estão descritas na secção 4.3 deste artigo.

Sala de Aula Invertida (SAI)

Esta metodologia permite criar distintos espaços de aprendizagem, nos quais os estudantes escolhem quando e onde estudam.

A sala de aula invertida trata de desenvolver estratégias nas quais os discentes estudem as definições e conceitos fora da sala de aula física; para que nos encontros presenciais da sala de aula, discutam as resoluções de exercícios, suas aplicações e aprofundem os estudos dentro de grupos, tudo sob a orientação do docente.

Durante a conferência internacional *Dias de Inovação da Universidade Internacional Educar para Transformar*, na *Universidade Europeia*, realizada em Madri, na Espanha, no trabalho com o título "A aplicação da sala de aula invertida no curso de gestão estratégica", Jaime (2015) descreve a SAI como: Trata-se de uma abordagem pela qual o discente assume a responsabilidade pelo estudo teórico e a aula presencial serve como aplicação prática dos conceitos estudados previamente. (SCHMITZ, 2016, p. 38)

Apresentaremos a seguir um esquema para entendermos a origem da Sala de Aula Invertida:

Instruction é um método de ensino interativo desenvolvido pelo Professor de Harvard Eric Manzur na década de 90. Consiste numa abordagem centrada no estudante que envolve reverter à sala de aula tradicional, transferindo as informações e trazendo a assimilação das informações para a sala de aula. O sistema de aprendizagem consiste em preparar os estudantes para aprender fora da sala de aula, fazendo leituras pré-aula. Isto resultou na publicação do livro: *A User's Manual em 1997*. (MANZUR, 1997)

Just-in-Time Teaching[13] (ou, em tradução livre: Ensino sob Medida) é uma metodologia ativa proposta em 1996 por Gregory M. Novak. Esta metodologia apresenta alguns objetivos, entre eles temos:

- Desenvolver a capacidade de comunicação oral do estudante;
- Desenvolver a capacidade de trabalhos em grupo;
- Fazer do estudante autor do seu próprio aprendizado.

O desenvolvimento se dá através de momentos de pré-aula, em que o estudante é submetido a leituras de capítulos de livros, artigos ou até sugestões de vídeos (ou semelhantes a cargo do (a) professor (a) regente) sobre o assunto a ser trabalhado nas aulas seguintes.

Após a leitura, ainda fora de sala de aula, são apresentadas algumas questões conceituais sobre o texto/vídeo cujas respostas serão uti-

[13] Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/116360>. Acesso em 20 de novembro de 2019.

lizadas pelo professor para focar as aulas nas principais dificuldades dos estudantes. Entretanto, ainda propõe que a aula preparada não seja com o foco no professor, ao contrário disso, os estudantes serão expostos as suas próprias respostas e então é sugerida a discussão entre eles para que corrijam uns aos outros ou que cheguem num consenso. (OLIVEIRA; VEIT; e ARAUJO, 2015)

Em 2006, Salman Khan, um graduado do Instituto de Tecnologia de Massachusetts e da Universidade de Harvard, começou a gravar vídeos para auxiliar uma sobrinha a superar dificuldades em matemática. As gravações foram colocadas em um site de *streaming* de vídeos e se tornaram um sucesso entre estudantes que buscavam materiais para reforçar seus estudos[14]. (SANTOS e GOMES, 2019, p. 590)

Em 2006 e 2007, Aaron Sams e Jonathan Bergmann encontraram um software de captura de tela, *screencast*, que gravava apresentações em *Powerpoint*, isso os levou a pensar que se os estudantes assistissem ao vídeo como dever de casa, teria mais tempo em sala de aula para ajudá-los com conceitos que não compreendiam. Assim, transformaram em projeto as aulas produzidas em vídeos.

De acordo com Valente (VALENTE, 2014, p. 86), a partir de 2010, o termo Flipped classroom traduzido no Brasil como sala de aula invertida, foi lançada por volta de 2008, começou a ser utilizado como uma grande chave, impulsionado por publicações internacionais e surgiram escolas de Ensino Básico e Superior que começaram a adotar essa abordagem.

Utilizando conteúdos dirigidos, educadores pensam em como usar o modelo *Flipped* para ajudar estudantes na compreensão conceitual e determinam o que precisam ensinar e quais materiais os estudantes devem acessar por conta própria. É rotulado de Educador Profissional. É mais exigente e é continuamente demandado fornecendo *feedback* imediato em aula, avaliando o trabalho. Conecta-se com outros facilitadores, aceita críticas e tolera o caos controlado em aula.

---

[14] Disponível em: <https://sol.sbc.org.br/index.php/wie/article/view/13207>. Acesso em 20 de novembro de 2019.

Nos Estados Unidos há uma organização com mais de 25000 educadores. A rede de aprendizagem *Flipped*[15] é uma comunidade on-line que pode ajudar educadores a aprender mais sobre a sala de aula invertida e as práticas de aprendizagem invertida e compartilhar suas experiências para o crescimento mútuo.

> A "FLN" é a comunidade on-line original sem fins lucrativos para educadores utilizando ou interessados em aprender mais sobre a sala de aula invertida e as práticas de aprendizado invertidas. Iniciada em 2012 por pioneiros reconhecidos como Jon Bergmann, Aaron Sams, Gudenrath April, Kristin Daniels, Troy Cockrum, Brian Bennett e outros, a FLN revisou sua missão em 2016 para focar mais diretamente em ser o centro online onde educadores de todo o mundo podem compartilhar e acessar recursos, dicas, ferramentas e muito mais. Flipped Learning Network - divulga conceitos sobre aprendizagem invertida para que educadores possam implantá-la com sucesso. (FLIP LEARNING, 2014)

No Brasil, algumas escolas e universidades já aplicam a sala de aula invertida, como é o caso do Colégio Dante Alighlieri, das universidades UNIAMÉRICA, UNISAL, PUC do Paraná e Universidade Positivo, e do Instituto Singularidades que, em 2010, foi incorporado pelo Instituto Península e que atua na formação de professores. (SCHMITZ, 2016, p. 51)

Nessa pesquisa-ação, a SAI teve foco primordial no desenvolvimento do protagonismo dos estudantes em relação ao processo de ensino-aprendizagem da matemática, como veremos a seguir na descrição da metodologia e dos resultados alcançados.

Metodologia

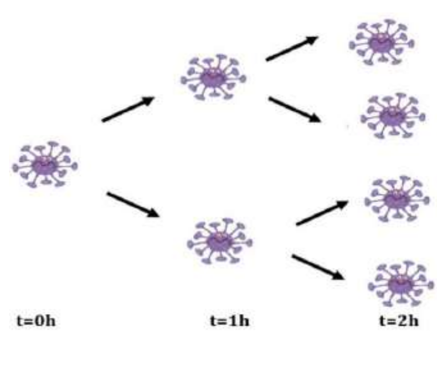
Essa pesquisa foi realizada com a turma (M1TR01) do turno vespertino, composta de 39 estudantes do 1º ano do Ensino Médio, em

[15] Disponível em: <https://flippedlearning.org/>. Acesso em 10 de fevereiro de 2019.

uma escola na cidade de Santarém/PA, com média de idade aproximada de 15 anos, buscando interagir com os discentes dentro do modelo pensado sobre Sala de Aula Invertida. Optou-se em fazer uma exploração qualitativa, ou seja, observando o comportamento dos estudantes durante o desenvolvimento das atividades presenciais e fora do âmbito da unidade escolar. (DIAS, 2019)

A partir de 22 de agosto 2019, os estudantes começaram a assistir às videoaulas referentes ao estudo das funções exponencial e logarítmica, os discentes deveriam responder os itens propostos e entregar no primeiro encontro presencial. Tais questões foram baseadas na análise de modelos (AnM)[16] para a educação básica – uma proposta de ensino de matemática para o ensino médio (SOUSA, 2019) – e não possuíam viés de produzir uma nota e sim de analisar as dificuldades apresentadas pelos discentes. Veja a seguir, o 1º item do 2ª relatório de aprendizagem, envolvendo o estudo da função exponencial:

> As bactérias se reproduzem mais comumente de forma assexuada por bipartição ou cissiparidade. Ocorre a duplicação do DNA bacteriano e uma posterior divisão em duas células. As bactérias multiplicam-se por este processo muito rapidamente quando dispõem de condições favoráveis.
> Suponha que uma determinada bactéria se divide a cada 1h e que no instante t=0 h havia somente uma bactéria, como mostra a figura a seguir:



[16] O termo "Análise de Modelos" é uma abordagem pedagógica que utiliza modelos matemáticos prontos dentro do contexto da Modelagem Matemática. (SOARES, 2012).

> Vale ressaltar nessa atividade que, durante os intervalos de tempo, a bactéria ainda está se reproduzindo e não dividiu definitivamente.
> Com base nas informações, responda:
> a) É possível expressar a quantidade de bactérias em uma potência de base igual para todos os casos? Justifique.
> b) Tome A, o conjunto formado pelo tempo em horas e B, o conjunto da quantidade de bactérias. Existe alguma relação entre esses conjuntos? Justifique.
> c) Qual o número de bactérias em exatamente 5 horas?
> d) Quantas bactérias existirão em t horas? Expresse a lei que relaciona o número de bactérias ao tempo t. Pode-se garantir que essa lei é uma função? Justifique. (DIAS, 2019, p. 112)

No primeiro ano do ensino médio, são ministrados três tempos ou horas aula de matemática por semana, nas quais foi abordada a análise de modelos e resolução de situações-problema, deixando, para atividades de casa, assistir às videoaulas teóricas que envolviam os conceitos e definições em estudo. Alguns estudantes compartilharam, durante os encontros presenciais, as suas repostas, de modo que o professor regente foi o moderador das discussões.

As resoluções dos exercícios do livro-texto foram realizadas nos grupos de estudo durante os encontros presenciais. A apresentação da resolução de exercícios, a autoavaliação do discente e o questionário individual foram aplicados aos estudantes para verificar suas percepções e sugestões para o aprimoramento da metodologia.

A análise quantitativa se deu através do Exame Integrado (avaliação que compõe a nota bimestral da unidade de ensino). Verificando a quantidade de acertos nas questões de múltipla escolha e comparando com os resultados dos estudantes das turmas M1TR02 e M1TR03, onde as aulas ocorreram sem a utilização da Sala de Aula Invertida.

Por fim, os estudantes foram convidados a analisar sua própria aprendizagem. Esse momento de autoavaliação visava a despertar, nos discentes, a responsabilidade pelo desenvolvimento na sua aprendizagem, ou seja, o próprio estudante pôde avaliar a sua dedicação aos estudos durante o bimestre, o quanto evoluiu na aprendizagem de novos conhecimentos, a capacidade de organização dos horários de estudo, enfim, os elementos fundamentais para um processo avaliativo. Vale ressaltar que o conceito fornecido pelo estudante compôs a sua nota bimestral que foi lançada no boletim (DIAS, 2019).

O professor regente realizou os seguintes passos metodológicos:

- Verificou as possibilidades de acesso dos estudantes da turma em relação às TDIC;
- Criou os ambientes de ensino online;
- Explicitou sobre as metodologias ativas de aprendizagem à turma;
- Realizou pesquisas e edição de videoaulas;
- Produziu e aplicou os relatórios de aprendizagem e testes de formação de grupos;
- Analisou constantemente o desenvolvimento da turma, para direcionar a metodologia.

Ambientes online utilizados como canal de comunicação com a turma

Para fornecer os materiais de estudo (videoaulas, relatórios de aprendizagem, testes de formação de grupos, dirimir dúvidas e trocar ideias, etc.), foi criada uma turma específica no *Classroom* e no *WathsApp*, facilitando a comunicação fora da escola. Veja na figura 1:

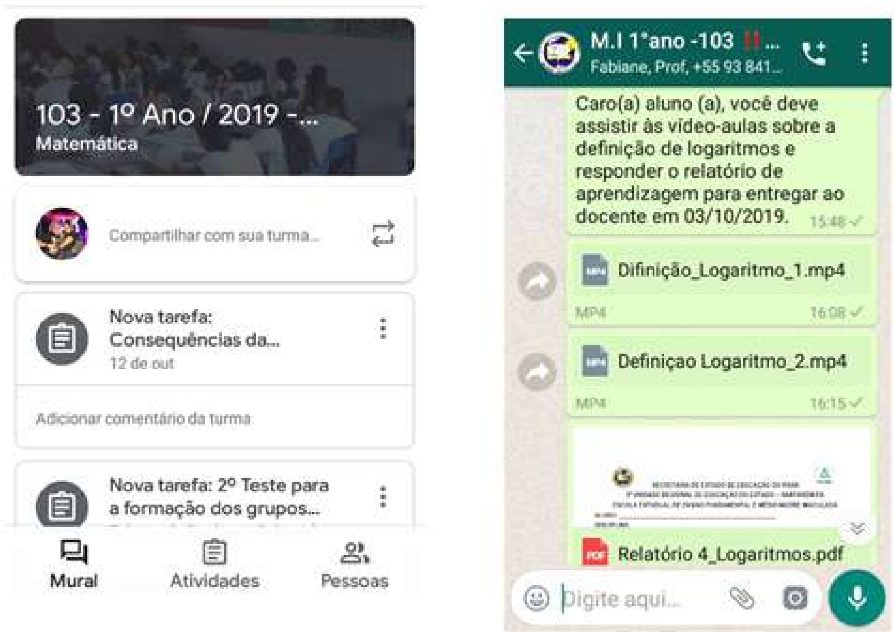


Figura 1: Imagem do Classroom e whatsapp da turma
Fonte: (DIAS, 2019)

Os materiais postados para uma sequência de estudos foram disponibilizados tanto no classroom quanto no grupo de whatsapp da turma, facilitando a comunicação entre docente e discente.

3.2 Rotinas da sala de aula invertida

Na figura 2, temos o modelo proposto para as rotinas da SAI:

Figura 2: Produto final SAI
Fonte: (DIAS, 2019)

Seguindo o roteiro, temos:

- O relatório de aprendizagem contemplou os conteúdos das videoaulas, porém foi inserida uma questão baseada na Análise de Modelos[17], com intuito de fazer os discentes pesquisarem novas videoaulas ou conteúdos que o auxiliem na sua resolução. (SOUSA, 2019).

Cada relatório de aprendizagem conteve no máximo cinco questões.

[17] Material didático disponibilizado durante a realização do minicurso de **Análise de Modelos (AnM) como um Método de Ensino de Matemática na Educação Básica**, realizado no período de 01 a 12 de abril de 2019, na Unidade Rondon da Universidade Federal do Oeste do Pará do Campus de Santarém e nas Escolas Públicas da Rede Estadual e Federal.

- A partir de cada sequência de atividades, foi aplicado um teste de formação de grupos com os conteúdos das videoaulas e feito um rodízio nos grupos de resolução de itens e problemas.
- Definidas as atividades para resolução dentro dos grupos, a função do docente foi de mediar às resoluções. Para a socialização, foi feito um sorteio de um relator de cada grupo.
- A 1ª sequência de atividades da SAI foi realizada no período de 22/08 a 23/09, durante 14 encontros presenciais. Cada sequência de videoaulas esteve conectada com uma sequência de itens/situações-problemas e/ou análise de modelos envolvendo o estudo da função exponencial.
- A 2ª sequência de atividades da SAI foi realizada no período de 07/10 a 24/10, durante 4 encontros presenciais. Cada sequência de videoaulas esteve conectada com uma sequência de itens/situações-problemas e/ou análise de modelos envolvendo o estudo da função logarítmica.
- A 3ª sequência de atividades da SAI foi realizada no período de 18/08 a 18/10, durante 10 encontros presenciais foi organizado o produto apresentado pela turma na III Jornada Científica da Escola, com sua culminância em 18/10/2019.

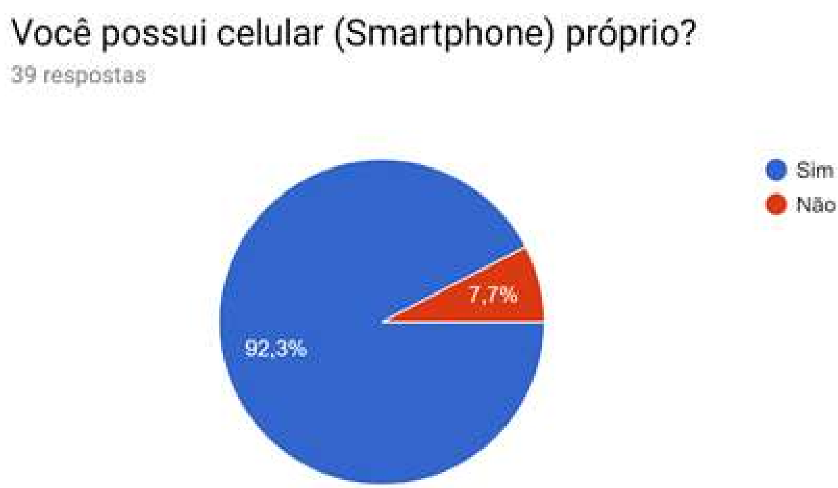
Resultados alcançados e discussões

Após a aplicação do questionário de sondagem (realizado em abril de 2019) foram iniciados os estudos para aplicar a SAI no 3º bimestre, os estudantes forneceram vários insights ao professor regente. Ao final do período foi aplicado um questionário para coletar as opiniões dos estudantes. E ainda houve a aplicação do exame integrado. Os resultados da experiência educacional estão descritos a seguir:

4.1 Aplicações do questionário de sondagem da turma M1TR01

Em abril de 2019, o questionário apontou que: 92,3 % dos estudantes dispunham de smartphone próprio que possibilitasse ter acesso aos materiais de estudo (videoaulas, relatórios de aprendizagem, testes de formação de grupos, dirimir as dúvidas e trocar ideias, etc.). Veja no gráfico 1:

Gráfico 1: Resposta do estudante ao ser questionado se possuía celular (smartphone) próprio para ter acesso às videoaulas e demais materiais didáticos.



Fonte: Google formulários

O questionário foi aplicado utilizando o *link* curto do Google Formulário, sendo o *link* postado no grupo de *whatsapp* da turma. Os dados indicaram que havia condições razoáveis para reverter à sala de aula, já que os estudantes teriam condições mínimas de acesso às videoaulas e demais materiais didáticos relacionados aos objetos do conhecimento estudado, em casa ou noutro lugar fora do ambiente físico da escola, conforme ressaltou o Prof. Manzur no seu método *Peer Instruction* (MANZUR, 1997).

Análises dos relatórios de aprendizagem

O professor regente percebeu que os estudantes se mostraram desafiados pelas questões propostas envolvendo a análise de modelo, gerando várias discussões enriquecedoras durante os encontros presenciais. Um dos principais *insights* foi apresentar maneiras distintas e corretas para responder um determinado item da análise de modelos, conforme destaca Sousa no seu material didático resultante da sua tese de doutoramento. (SOUSA, 2019)

Análises do produto produzido para a III Jornada Científica da Escola

Para a construção do projeto da Jornada Científica, houve, inicialmente, uma barreira: O que investigar? Como começar um processo investigativo? As orientações para trabalhos científicos no ensino fundamental da MOSTRATEC[18] encaminharam os passos a ser seguidos.

Foi sugerido à turma pesquisar sobre o saneamento básico, já que, no município de Santarém, é precário. As seguintes perguntas-problemas nortearam a pesquisa: Quais as condições do saneamento básico na residência dos estudantes do turno vespertino da escola onde se realizou a pesquisa? Como destinar de forma sustentável a água utilizada nas atividades domésticas, nas residências sem coleta de esgoto? Para a construção e execução do projeto foram usados dez encontros presenciais conforme o horário da disciplina de matemática e três sábados letivos.

O grupo de *whatsapp* e o *classroom* contribuíram consideravelmente para a organização do projeto. Nesses ambientes virtuais de comunicação (AVCom) foram postadas as referências bibliográficas acerca do tema e organizados os grupos de estudo dos tópicos: drenagem plu-

---

18 FUNDAÇÃO LIBERATO. ORIENTAÇÕES PARA TRABALHO DE PESQUISA NO ENSINO FUNDAMENTAL. Novo Hamburgo, 2017. Disponível em:<https://www.mostratec.com.br/wp-content/uploads/2020/07/orientacoes_para_trabalhos_de_pesquisa_jr-2017-revisado.pdf>. Acesso em 25 de março de 2019.

vial, resíduos sólidos, abastecimento de água e esgotamento sanitário (diagnose, prognóstico e soluções). A aprendizagem foi centrada no diálogo e na interação entre os estudantes, contemplando a comunicação e o trabalho coletivo. (BOLLELA, SENGER, *et al.*, 2014)

Após a leitura, ainda fora de sala de aula, os estudantes de cada grupo foram instigados a apresentar suas observações em relação ao seu tópico de estudo auxiliando na pesquisa de uma solução para o esgotamento sanitário. De acordo com Dewey (2018), nessa experiência do mundo real, os estudantes encontraram um problema que estimulasse seu pensamento, os induzindo a propor soluções para o problema (MENDONÇA e ADAID, 2018).

Figura 3: Folder contendo a proposta de sumidouro sustentável
Fonte: Acervo pessoal

A equipe responsável pelo abastecimento de água, sob a orientação do pesquisador, aplicou um questionário aos estudantes do turno vespertino com objetivo de analisar as condições do saneamento básico nas residências dos discentes das turmas do 9º ano do ensino fundamental e o ensino médio. Foram entrevistados 136 estudantes: 35,2 % responderam que lançam a água, usada nas atividades domésticas, na rua ou no quintal, sendo que 44,1 % utilizam o sumidouro. Então a equipe do esgotamento sanitário pesquisou um modelo de sumidouro sustentável para propor, como solução às famílias de menor poder aquisitivo, durante a apresentação do projeto na III Jornada Científica[19]. Veja na figura 3, o folder produzido pelos estudantes, com a proposta de sumidouro sustentável:

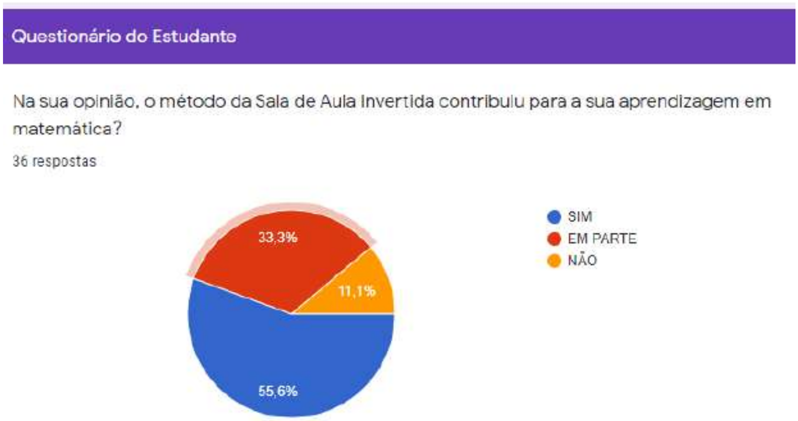
Vale ressaltar que durante a apresentação do projeto foi confeccionado um protótipo para mostrar aos visitantes o resultado final. O pesquisador considera essa atividade baseada em projetos gerou o engajamento da maioria dos estudantes da turma, pois confrontaram um problema do mundo real que consideraram significativo, agindo de forma cooperativa em busca de soluções. (BENDER, 2012)

Análises das respostas obtidas no questionário aplicado aos estudantes após o encerramento do 3º bimestre de 2019

Um item relevante do questionário foi a pergunta: Em sua opinião, o método da Sala de Aula Invertida contribuiu para a sua aprendizagem em matemática? Por quê? Veja o resultado no gráfico 2:

[19] Evento realizado na escola de aplicação da pesquisa em 18 de outubro de 2019.

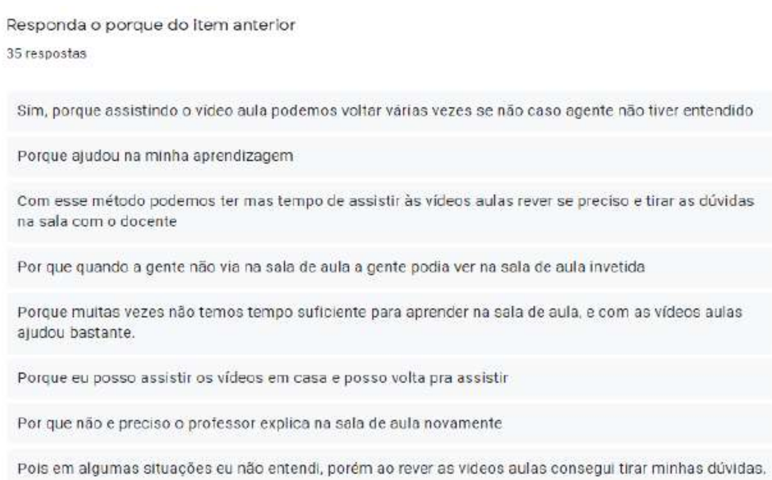
Gráfico 2: Pergunta do questionário do estudante



Fonte: Google formulários

Diante do que foi colocado anteriormente; 88,9 % dos estudantes acredita que a SAI contribuiu de forma positiva para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos abordados durante o 3º bimestre do ano letivo de 2019.

A seguir algumas das respostas do porquê a SAI foi positiva. Veja na figura 3:


Responda o porque do item anterior

35 respostas

Sim, porque assistindo o video aula podemos voltar várias vezes se não caso agente não tiver entendido

Porque ajudou na minha aprendizagem

Com esse método podemos ter mas tempo de assistir às vídeos aulas rever se preciso e tirar as dúvidas na sala com o docente

Por que quando a gente não via na sala de aula a gente podia ver na sala de aula invetida

Porque muitas vezes não temos tempo suficiente para aprender na sala de aula, e com as vídeos aulas ajudou bastante.

Porque eu posso assistir os vídeos em casa e posso volta pra assistir

Por que não e preciso o professor explica na sala de aula novamente

Pois em algumas situações eu não entendi, porém ao rever as videos aulas consegui tirar minhas dúvidas.

Fonte: Google formulários

Verificamos que as respostas do formulário foram bem positivas em relação à metodologia ativa envolvendo a SAI. Enfatizando a possibilidade de acessar as videoaulas postadas no AVCom, ou seja, corroborando como grande chave da "*Flipped Classroom*" com suas origens no ensino híbrido (misturado, mesclado, combinado), conhecido como *Blended learning*, que emergiu como uma técnica usada por professores tradicionais para melhorar o engajamento dos estudantes. (FLIP LEARNING, 2014)

Análises dos resultados das turmas M1TR01, M1TR02 e M1TR03 no exame integrado do 3º bimestre

Veja na tabela - 1 o quadro comparativo de acertos nas cinco questões objetivas do exame integrado, nas três turmas de 1º ano na disciplina de Matemática:

Tabela 1: Percentual de acertos por questão de matemática, aplicadas no Exame Integrado do 3º bimestre da escola.

PERCENTUAL DE ACERTOS POR QUESTÃO DO EXAME INTEGRADO						
TURMA	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	TOTAL DE ESTUDANTES
M1TR01	35,90%	38,50%	48,70%	41,00%	12,80%	39
M1TR02	34,30%	31,40%	37,10%	14,30%	22,20%	36
M1TR03	26,90%	26,90%	46,20%	30,80%	7,70%	26

Fonte: Acervo pessoal

Nos indicadores da tabela acima, a turma M1TR01, a qual experimentou o trabalho didático com a Sala de Aula Invertida, obteve um percentual melhor de acertos em quatro das cinco questões. É um indicador interessante, pois as aulas ministradas foram ressignificadas conforme apontado ao longo deste artigo, enquanto que as turmas M1TR02 e M1TR03 receberam apenas aulas presenciais. (Bergmann & Sams, 2016)

Considerações finais

A sala de aula vai além do espaço físico. Podemos construir espaços digitais de aprendizagem, compartilhamento de informações e construção do conhecimento. Quando se criou o *Classroom* e o *WhatsApp* da turma para compartilharmos as informações, tais espaços foram fundamentais na organização das atividades da SAI, mas não ficaram restritos, outras atividades da escola foram discutidas e organizadas pelos aplicativos retromencionados (DIAS, 2019).

Houve algumas dificuldades apresentadas pelos estudantes quanto ao acesso às TDIC, pois alguns discentes não dispunham de smartphone que comportasse as atividades metodológicas. Outros continuaram mostrando desinteresse, ainda não sensibilizados para a riqueza do processo educacional. Para o pesquisador, os indicadores desse trabalho apontam que para alcançar o nível da definição dada por Jaime (SCHMITZ, 2016, p. 2), seria primordial trabalhar a autonomia dos estudantes desde as séries finais do ensino fundamental, porém são as provocações das próximas pesquisas.

É um desafio mudar a cultura dos estudantes da escola, porém um humilde passo foi dado - primeiramente com a transformação pessoal do professor envolvido nessa pesquisa. Aprender a ter o prazer de aprender, essa é a lição que fica para o professor que narrou um pouco do que foi experimentado durante o ano letivo de 2019.

Referências bibliográficas

BARBOSA, J. C. MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O DEBATE TEÓRICO. REUNIÃO ANUAL DA ANPED. Caxambu, p. 1-30. 2001.

BARKER, A. E. Lembrando Reg Revans: o principal pioneiro do aprendizado de ação. AE Barker - Aprendizado de ação, 2010 -

Springer, 2010. Disponivel em: <https://link.springer.com/chapter/10.1057/9780230250734_2>. Acesso em: 11 novembro 2019. Aprendizado de ação - Aprendizado de ação.

BENDER, W. N. Atividade baseada em PROJETOS: EDUCAÇÃO DIFERENCIADA PARA O SÉCULO XXI. Tradução de Fernado de Siqueira Rodrigues. 2014. ed. Porto Alegre: Penso, 2012.

BERGMANN, J.; SAMS, A. Sala de Aula Invertida - Uma metodologia Ativa de Aprendizagem. Tradução de Afonso Celso da Cunha Serra. Rio de Janeiro: LTC, 2016. 433 p.

BOLLELA, V. R. et al. Aprendizagem baseada em equipes: da teoria à prática., 2014.

COSTA, S. R. B.; DUQUEVI, B. C.; PEDROZA, R. L. S. Tecnologias Digitais como instrumentos mediadores. Revista Quadrimestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional, São Paulo, v. 19, p. 601-610, Setembro / Dezembro 2015.

DIAS, J. M. METODOLOGIAS ATIVAS: O ENSINO APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO NA PERSPECTIVA DA SALA DE AULA INVERTIDA (Dissertaço do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Instituto de Educação, Universidade Federal do Oeste do Pará. Santarém: [s.n.], 2019. 136 p.

FLIP LEARNING. FLIP LEARNING. flippedlearning.org, 2014. Disponivel em: <https://flippedlearning.org/>. Acesso em: 10 fevereiro 2019.

FREITAS, C. C.; SOUZA, J. L. D.; SANTOS, M. I. M. Inteligências Múltiplas na Prática Escolar Aplicadas ao Ensino Hibrido: Relatos de Uma Experiência com o Ensino Numa Escola Particular de Sergipe.

Revista Pleiade, Foz do Iguaçu, v. 12, n. 25, p. 79-95, abril 2019.

MANZUR, E. Peer Instruction: A User's Manual. Tradução de Anatólio Laschunk. [S.l.]: Pearson Education, v. Maria Eduarda Fett Tabajara, 1997. Publicado no Brasil pela Editor Penso em Porto Alegre - RS.

MENDONÇA, S.; ADAID, F. A. P. PROMETEUS-FILOSOFIA. EXPERIÊNCIA E EDUCAÇÃO NO PENSAMENTO EDUCACIONAL DE JOHN DEWEY: TEORIA E PRÁTICA EM ANÁLISE, Janeiro-Maio 2018. 136-150.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Base Nacional Curricular Comum. [S.l.]: [s.n.], 2018.

MORÁN, J. Mudando a educação com metodologias ativas. Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens. Vol. II, Ponta Grossa, 2015. 15-33.

MOTA, A. R.; WERNER DA ROSA, C. Ensaio sobre metodologias ativas: reflexões e propostas, p. 261-276, 28 maio 2018. Disponivel em: <http://seer.upf.br/index.php/rep/article/view/8161>. Acesso em: 28 junho 2019.

OLIVEIRA, W.; VEIT, E. A.; ARAUJO, I. S. Relato de Experiência com os métodos de Ensino sob Medida (Just-in-Time Teaching) e Instrução pelos Colegas (Peer Instruction) para o Ensino de Tópicos de Elétromagnetismo no nível médio. Caderno Brasileiro do Ensino de Física. Porto Alegre, p. 180 - 206. 2015.

SANTOS, Y. B. D. D. F.; GOMES, A. V. Análise da utilização da plataforma Khan Academy para a educação matemática. ANAIS DO WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA, Porto Alegre, p. 589 - 597, 2019.

SCHMITZ, E. X. D. S. SALA DE AULA INVERTIDA: UMA ABORDAGEM PARA COMBINAR METODOLOGIAS ATIVAS E ENGAJAR ALUNOS NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM, Santa Maria, p. 185, Dezembro 2016. Disponivel em: <https://nte.ufsm.br/images/PDF_Capacitacao/2016/RECURSO_EDUCACIONAL/Ebook_FC.pdf>. Acesso em: 10 fevereiro 2019. (Dissertaço apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Tecnologias Educacionais em Rede): Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS): [s.n.], 2016. 185 p.

SOARES, D. D. S. Tese de Doutorado: Uma abordagem pedagógica baseada na análise de modelos para aluno de bilologia: qual o papel do software? Rio Claro: STATI - Biblioteca da UNESP, 2012.

SOUSA, E. S. Qualificação de Doutorado: ANÁLISE DE MODELOS. In: SOUSA, E. S. Análise de Modelos: um método de ensino de Matemática na Educação Básica. Santarém: By autor, 2018. p. 100.

TRIPP, D. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica*, São Paulo, 31, n. 3, set/dez 2005. 443-466. Disponivel em: <https://www.scielo.br>. Acesso em: 15 Agosto 2019.

VALENTE, J. A. Comunicação e a Educação baseada no uso das tecnologias digitais de informação e comunicação. Revista UNIFESO – Humanas e Sociais, Teresópolis, 2014. 141-166.

VALENTE, J. A.; ALMEIDA, M. E. B. D.; GERALDINI, A. F. S. Metodologias ativas: das concepções às práticas, Curitiba, p. 456-478, Abril/Junho 2017.

Uma engenharia didática para o ensino das operações com frações

Francirley Moura Porto[1]
Rodrigo Medeiros dos Santos[2]

Introdução

Atualmente as estratégias utilizadas no ensino de Matemática são, em sua maioria, baseadas em metodologias tradicionais. O ensino se desenvolve em um contexto em que o aluno é mais um expectador do que um sujeito participante. O cumprimento do programa tende a ser a maior preocupação do professor e há pouca articulação entre o conteúdo e a metodologia utilizada com o objetivo de que o ensino favoreça a inserção social do aluno, para o seu desenvolvimento e interação com o meio.

Fleith e Alencar (2010, apud KRUSCHEWSKY, 2016) relacionam a desmotivação dos alunos com as estratégias de ensino pouco eficientes. Afirmam que uma metodologia de ensino que tem como centro o professor, pouca expectativa do docente com relação ao desenvolvimento do aluno e procedimentos rígidos com padronização de conteúdo, são fatores que cooperam para reduzir a motivação dos alunos.

[1] Seduc-Pa. E-mail: Sirrley@yahoo.com.br
[2] Ufopa. E-mail: rodrigomedeiros182@hotmail.com

Por outro lado, Brousseau (2008) alerta para o fato de que aprender não consiste em cumprir ordens ou copiar soluções para problemas, afirma ainda que o conhecimento dos alunos, de fato, se manifesta apenas nas decisões que ele toma em situações apropriadas, e, dessa forma, o professor não pode dizer o que faça, e nem determinar as suas decisões. Portanto, é importante para o educador utilizar metodologias de ensino que valorizem a construção do conhecimento por parte do aluno, que não o deixem como mero espectador do que o professor pretende ensinar, e que tenha como foco, conforme sugere a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) (BRASIL, 2015), a formação social do aluno.

Assim, esta pesquisa, produto da dissertação de mestrado de Porto (2019), parte da hipótese de que a aplicação da sequência didática deve facilitar a aprendizagem por proporcionar ao aluno condições favoráveis à construção e institucionalização dos conceitos envolvidos, elaboramos uma proposta de sequência didática e aplicamos em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental. Esta proposta justifica-se por sua utilidade como modelo aplicável em diversos contextos na medida em que pode integrar os acervos disponíveis que servem como apoio ao professor e ao estudante de licenciatura interessados em alternativas não tradicionais de ensino, tendo como aporte a teoria da Engenharia Didática.

Referencial Teórico

A noção de Engenharia Didática surgiu oficialmente no início dos anos oitenta, na França, como metodologia de pesquisa e teoria educacional. Segundo Artigue (1996, *apud* PAIS 2011), a Engenharia Didática expressa uma forma de trabalho didático comparável com o trabalho de um engenheiro, na realização de um projeto arquitetônico. Essa comparação está relacionada às fases de concepção, planejamento e implantação de um projeto fundamentado em conhecimentos científicos e que pode ser desenvolvido tanto por um educador quanto por um pesquisador em didática, que, no caso do educador, organiza um plano de aula, e o pesquisador, um plano de pesquisa.

Segundo Pommer (2013) a Engenharia Didática, pode ser utilizada como metodologia qualitativa de pesquisa na área de Matemática, mas também é útil para a elaboração de situações didáticas que configurem um quadro de aprendizagem significativa em sala de aula. Na perspectiva de uma metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática tem como principal característica um esquema experimental baseado na concepção, realização, observação e análise de uma sequência de ensino, formada por um número adequado de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem.

De acordo com Artigue (1988, apud BERENGUER 2010), podem se distinguir dois níveis de pesquisa em engenharia didática o da Microengenharia e o da Macroengenharia. A Microengenharia está relacionada às pesquisas que têm por objeto de estudo um assunto específico, são realizadas de forma local e analisam principalmente a complexidade dos acontecimentos de sala de aula. A Macroengenharia são aquelas pesquisas que possibilitam estabelecer a complexidade dos estudos da Microengenharia com a dos fenômenos ligados à duração nas relações de ensino e aprendizagem. Esses tipos de pesquisa são complementares e, portanto, indispensáveis.

Seguindo a concepção de Pommer (2013), podemos destacar quatro principais fases da Engenharia Didática:

- *Análises Preliminares:* fase na qual é feito um levantamento a respeito do objeto matemático em estudo. As análises são feitas levando-se em consideração o quadro teórico didático sobre o qual o pesquisador se apoia e os conhecimentos didáticos já obtidos a respeito do tema em estudo. Faz-se uma análise epistemológica dos conteúdos envolvidos no ensino; se avalia como vem sendo desenvolvido o ensino atual do referido assunto e suas implicações, faz-se uma análise da percepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que se mostram diante do saber apresentado.

- *Concepção e Análise a Priori:* nesta fase serão definidas algumas varáveis de comando do Sistema Didático, que podem interferir na constituição do fenômeno. Estas variáveis serão articulas e analisadas no transcorrer da sequência didática.
- *Experimentação:* Fase da pesquisa na qual o professor/pesquisador vai a campo para a aplicação da sequência didática, onde entra em prática o saber didático. De acordo com os pressupostos da Engenharia Didática, esta aplicação deverá envolver uma abordagem metodológica que favoreça a criticidade e a reflexão numa perspectiva de construção de um saber consciente.
- *Análise a Posteriori E Validação:* Esta fase se apoia sobre os dados colhidos no decorrer da aplicação da sequência didática, é o conjunto de resultados que se chega a partir das observações realizadas na transcorrência de cada sessão de ensino. Analisam-se os construtos didáticos dos alunos, as observações feitas em relação ao desempenho deles durante a aplicação da sequência didática, além de todas as outras anotações feiras durante a experimentação.

Metodologia

A presente pesquisa é caracterizada como descritiva, segundo os seus objetivos, e naturalista ou de campo, segundo o processo de coleta de dados. Descritiva porque, segundo Fiorentini e Lorenzato (2012) estamos desenvolvendo uma pesquisa que deseja caracterizar com detalhes, uma situação, um fenômeno ou problema; e naturalista ou de campo, pois, de acordo com os mesmos autores, é a modalidade de investigação em que a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o fenômeno acontece e pode dar-se por diversos meios, entre eles, observação participante, teste e aplicação de questionários.

A hipótese da nossa pesquisa foi a de que a aplicação da Sequência Didática para o ensino de frações, noções inicias de área de figuras planas e produtos notáveis, facilite a aprendizagem desses conteúdos que são estudados no Ensino Fundamental, considerando que essa metodologia alternativa pode proporcionar ao aluno condições favoráveis à construção desses conceitos.

A metodologia da investigação adotada neste trabalho foi Engenharia Didática. De acordo com as ideias de Almouloud (2007) a Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa e teoria educacional que surgiu na França no início dos anos 80 no campo específico da Didática da Matemática. Por meio da Engenharia Didática une-se teoria e prática docente, pois a sua principal característica é um esquema experimental, baseado na construção, realização e análise de sessões de ensino, levando em consideração não só o desempenho individual de cada aluno, mas o processo como um todo.

Ao utilizarmos a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa pudemos fazer a validação dos resultados internamente, a partir de observações feitas em sala de aula e da análise da construção didática dos alunos, sem a necessidade de um pré-teste ou pós-teste.Quanto ao nível da investigação, trata-se de uma Microengenharia (ARTIGUE 1988, apud ALMOULOUD e SILVA, 2012), pois estamos interessados em fenômenos que ocorrem em sala de aula.

A aplicação da sequência didática ocorreu na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Deputado Américo Pereira Lima, na Cidade de Juruti-PA. Nesta fase, coletamos os dados por meio da produção dos alunos, em uma perspectiva de observação do tipo etnográfica, definida como um tipo de estudo em que o observador frequenta os locais onde os fenômenos acontecem e a coleta de dados é realizada junto aos comportamentos naturais das pessoas (FIORENTINI e LORENZATO, 2012) e fizemos registros em diário de campo e filmagens.

Após a fase de aplicação foi feita a análise dos resultados, com o objetivo de comparar as expectativas inicias com os resultados obtidos.

Procuramos fazer essa análise levando em consideração não só o desempenho dos alunos na resolução das atividades, mas a experiência como um todo. Utilizamos, portanto, uma abordagem predominantemente qualitativa, porém, para a análise de alguns aspectos considerados na experimentação, buscamos uma abordagem quantitativa.

Aplicamos as sequências didáticas em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental do turno da tarde, nos dias 29 e 30 de novembro de 2018 e 06 de dezembro de 2018. Cada encontro teve duração de duas aulas de 45 minutos cada. Os sujeitos tiveram a identidade preservada e são referidos no trabalho a partir de códigos formados por letras e números.

No final das atividades solicitamos que os alunos respondessem a um questionário misto para termos uma melhor impressão a respeito da experiência e para entendermos melhor a aceitação dos alunos em relação ao método de ensino empregado.

Resultados e Discussões

No dia 26 de outubro de 2018, ocorreu o primeiro contato com a direção da Escola Américo Pereira Lima, ocasião em que pudemos apresentar nossa proposta de investigação. O primeiro encontro com a turma do 6º ano ocorreu dia 29 de novembro de 2018. Inicialmente nos apresentamos, em seguida, para reforçar o estabelecimento do Contrato Didático, explicamos para a turma como seria a atividade e observamos que a mesma não deveria ser encarada como uma avaliação para eles, e sim como mais um momento de aprendizagem, e que era importante a participação de todos.

A primeira atividade, nos itens a) e b) (Figura 1) explorou uma situação de ação. Ao elaborarmos a Sequência Didática, procuramos iniciar as atividades com uma questão bastante simples, mas que tem como objetivo apresentar a concepção de fração parte-todo para o aluno, e ao mesmo tempo fazer com que o aluno se envolva com o desenvolvimento dessa concepção. Na Figura 1, temos desenvolvimento da atividade 1, itens a) e b) do aluno 6F.

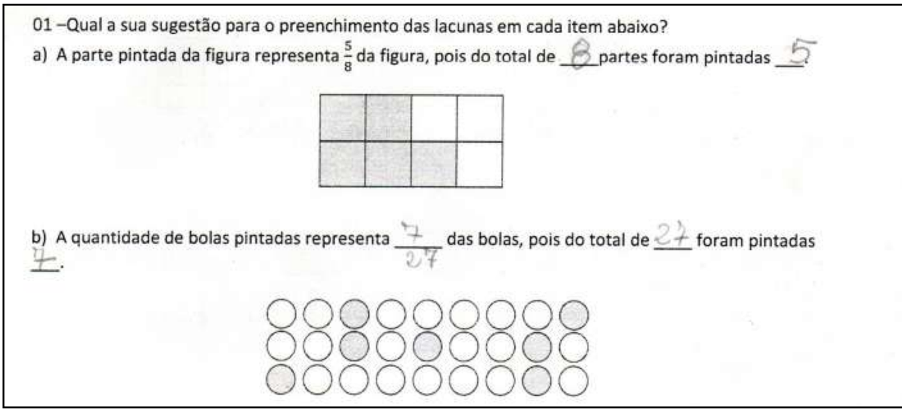


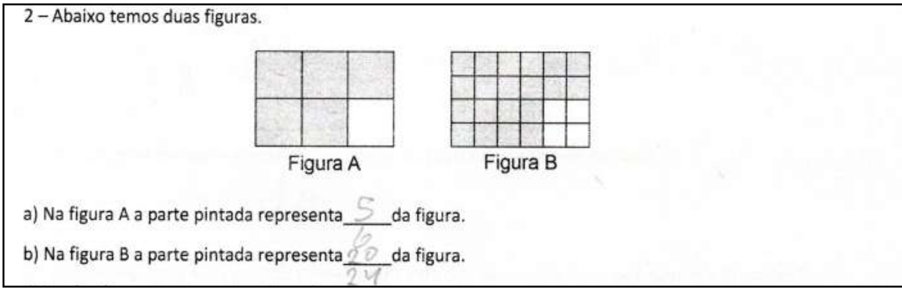
Figura 1 - atividade 1 itens a) e b) do aluno 6F

A nossa expectativa foi a de que os alunos desenvolvessem essa atividade sem dificuldades, e que iriam fazer uso da concepção parte-todo, juntamente com a dupla contagem das partes a partir da referência figural para outras atividades dessa sequência.

Na análise das atividades bem como nas observações feitas em sala de aula percebemos que os alunos desenvolveram as atividades de forma satisfatória, sem demonstrarem dificuldades e que, assim como havíamos previsto, utilizaram-na em outras atividades. Todos os alunos desenvolveram corretamente o item a), e no item b) 80% das atividades estavam desenvolvidas corretamente.

Na atividade 2, de forma mais geral, buscamos desenvolver uma situação em que fosse explorado o conceito de frações equivalentes.

Ao elaboramos os itens a) e b) (Figura 2), esperávamos que os alunos, de posse da concepção de fração desenvolvida na atividade 1, escrevessem as frações correspondentes nas lacunas. Objetivamos, portanto, estabelecer uma situação de ação, na qual o aluno pudesse utilizar o que aprendeu no desenvolvimento da atividade 1, a representação das frações a partir da dupla contagem das partes e a partir da concepção de fração parte-todo. Na Figura 2, temos o desenvolvimento da atividade 2, itens a) e b), do aluno 6B.

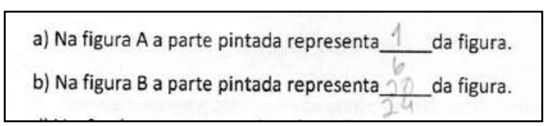

2 – Abaixo temos duas figuras.

a) Na figura A a parte pintada representa $\frac{5}{6}$ da figura.

b) Na figura B a parte pintada representa $\frac{20}{24}$ da figura.

Figura 2 - atividade 2 itens a) e b) do aluno 6B.

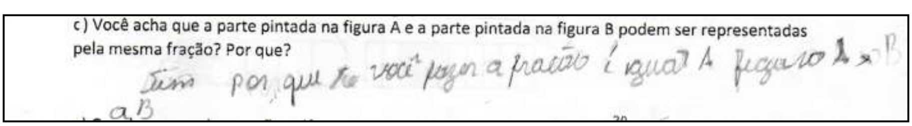
Cerca de 87% dos alunos deram a resposta correta para o item a) dessa atividade e todos os alunos deram a resposta correta para o item b). Houve casos, como do aluno 6H (Figura 3) que respondeu corretamente um dos itens, porém o outro item estava incorreto. No geral, o desenvolvimento dos alunos para essa atividade correspondeu com às nossas expectativas na análise *a priori*.


a) Na figura A a parte pintada representa $\frac{1}{6}$ da figura.

b) Na figura B a parte pintada representa $\frac{20}{24}$ da figura.

Figura 3 - Atividade 2 itens a) e b) do aluno 6H.

A Figura 4 apresenta a formulação feita no item c) da atividade 2 pelo aluno 6D, a qual ele descreveu para a turma quando solicitamos.


c) Você acha que a parte pintada na figura A e a parte pintada na figura B podem ser representadas pela mesma fração? Por que?

Sim por que se você fazer a fração é igual A figura A e B
a B

Figura 4 - Atividade 2 itens c) do aluno 6D.

A nossa expectativa com esse item da atividade era a de que o aluno começasse a perceber, a partir de reflexões provocadas pela atividade, que uma mesma fração pode ser representada de mais de uma forma, preparando o seu entendimento das frações equivalentes, para mais tarde, na institucionalização, apresentarmos uma definição formal desse conceito.

Os alunos tiveram dificuldade em formular a resposta para esse item nas folhas com as atividades, mesmo aqueles que demostraram ter compreendido o conceito abordado e, possivelmente, isto causou-lhes insegurança também na hora de responder ao serem questionados pelo professor. Na Figura 5, temos a reposta do aluno 6I para o item c) da atividade 2.

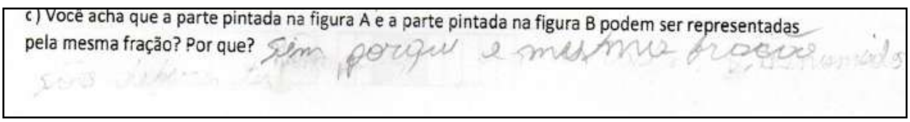

c) Você acha que a parte pintada na figura A e a parte pintada na figura B podem ser representadas pela mesma fração? Por que? Sim porque é mesma fração

Figura 5 - Atividade 02 itens c) do aluno 6I.

Na análise das atividades verificamos que 61% dos alunos não formularam uma resposta adequada para este item, alguns por dificuldades na formulação da resposta e outros por não terem compreendido que a fração representa o quanto desta figura está pintada em relação à figura toda. Na 6, temos a resposta do aluno 6V para o item c) da atividade 2, onde pudemos verificar que o aluno 6V ainda não havia compreendido a definição de frações equivalentes, pois para ele, frações com valores de numerador e denominador diferentes não podiam representar a mesma quantidade e a comparação da região pintada nas duas figuras não disse nada a ele. Na institucionalização, que ocorreu no terceiro encontro, buscamos favorecer com que esses obstáculos didáticos fossem superados.

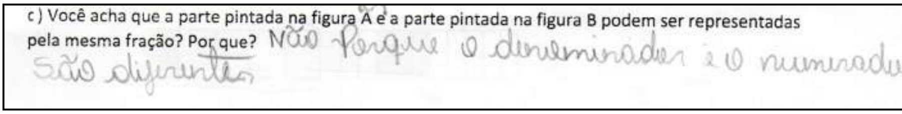

c) Você acha que a parte pintada na figura A e a parte pintada na figura B podem ser representadas pela mesma fração? Por que? Não Porque o denominador e o numerador são diferentes

Figura 6 - Resposta do aluno 6V para o item c) da atividade 2.

No item d) da atividade 2 (veja Figura 7), tivemos uma situação de formulação. Esperamos que o aluno tivesse percebido com o auxílio dos itens a), b) e c) desta atividade, que as frações $\frac{20}{24}$ e $\frac{5}{6}$ representavam a mesma quantidade.

Neste item, aproximadamente 35% dos alunos responderam de forma satisfatória e, boa parte dos alunos que havia respondido corretamente o item c), também respondeu corretamente este item, e a maioria dos que erraram o item anterior também respondeu de forma incorreta aqui. Abaixo temos, na Figura 7, a resposta do aluno 6D para o item d) da atividade 2.

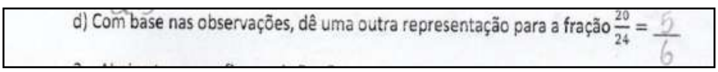

d) Com base nas observações, dê uma outra representação para a fração $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

Figura 7- Resposta do aluno 6D para o item c) da atividade 2.

Na Figura 8, temos a resposta incorreta do aluno 6V para o item d) da atividade 2. Este aluno havia respondido de forma incorreta o item c). Esta resposta para o item d) confirma que ele ainda não compreendeu de forma significativa o conceito de frações equivalentes.


d) Com base nas observações, dê uma outra representação para a fração $\frac{20}{24} = \frac{24}{20}$

Figura 8 - Resposta do aluno 6V para o item d) atividade 2.

Na atividade 3 (Figura 9) objetivamos colocar o aluno frente a uma situação de ação que, assim como na atividade anterior, buscou favorecer o desenvolvimento do conceito de frações equivalentes. Na Figura 9, temos a resolução do item a) da atividade 3 do aluno 6Q:

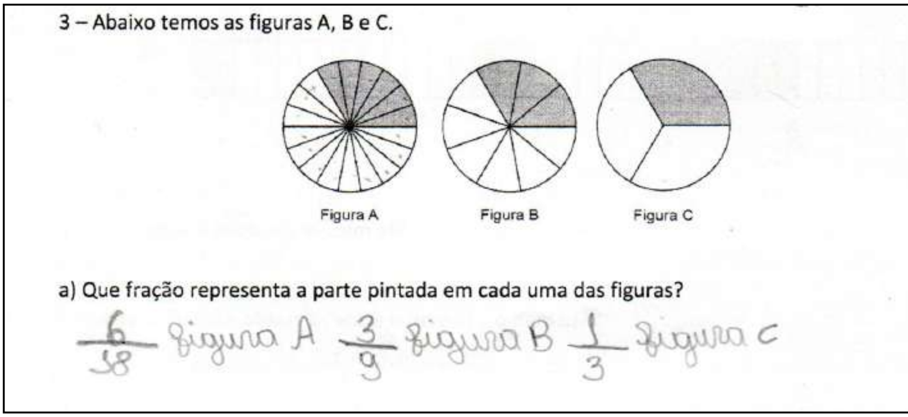


Figura 9 - Resposta do aluno 6Q para o item a) da atividade 3.

Nesse item todos os alunos chegaram às respostas esperadas. No item b) dessa atividade (Figura 10) tivemos uma situação de formulação, na qual esperávamos que o aluno tivesse percebido que qualquer uma das frações relacionadas ao problema pode ser representada por $\frac{1}{3}$. Utilizamos este item para exemplificar a simplificação de frações no terceiro encontro, durante a fase de institucionalização.

A nossa expectativa com esse item da atividade era que o aluno formulasse, baseado na representação figural, uma justificativa para o fato de $\frac{1}{3}$ poder representar as outras frações: $\frac{6}{18}, \frac{3}{9}$. Na Figura 10, temos a resposta do aluno 6O para o item b) da atividade 3.

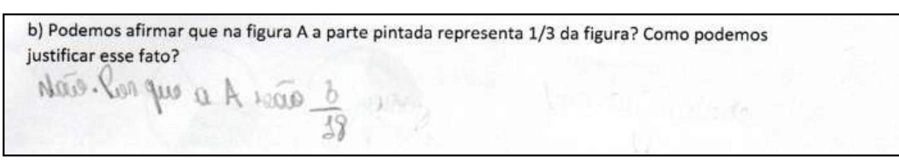


Figura 10 - Item b) da atividade 3 aluno 6O.

Apesar de termos observado resultados satisfatórios para o item a) dessa atividade, com todos os alunos respondendo de forma correta, para o item b) isso ocorreu apenas com 41% dos alunos. Nesse item também percebemos que os alunos, mesmo quando já perceberam alguma propriedade ou conceito envolvido com a atividade, sentiram dificuldade em formular, como podemos observar na atividade do aluno 6S na Figura 11.

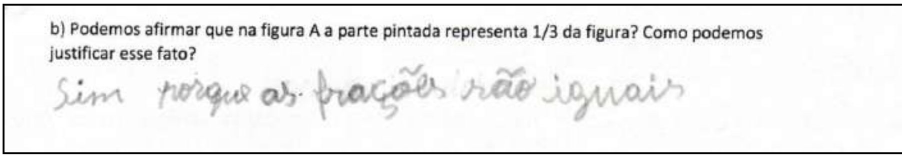


Figura 11 - Item b) atividade 3 do aluno 6S

Após essa etapa, foi pedido para eles continuassem a resolução com as outras duas atividades seguintes.

Na atividade 4, itens a) e b) (veja Figura 12), a partir da referência da representação figural, o aluno deveria somar as frações com mesmo denominador. No item c) retiramos a representação figural, e esperamos que o aluno procedesse da mesma forma que nos itens a) e b). Temos então nesses itens uma situação de ação cujo objetivo é promover a aprendizagem da soma de frações com mesmos denominadores. A Figura 12 apresenta os itens a), b) e c) da atividade 4 desenvolvida pelo aluno 6J.

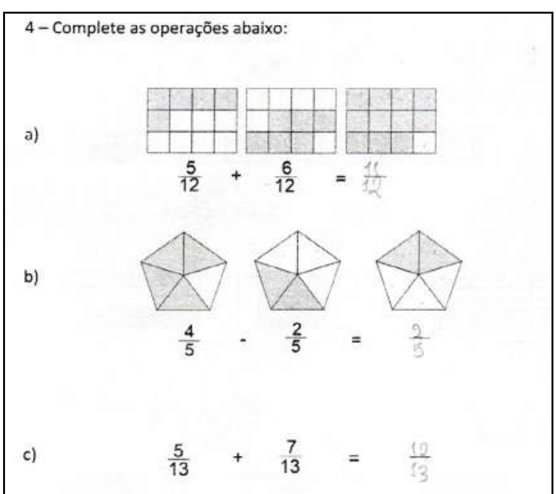
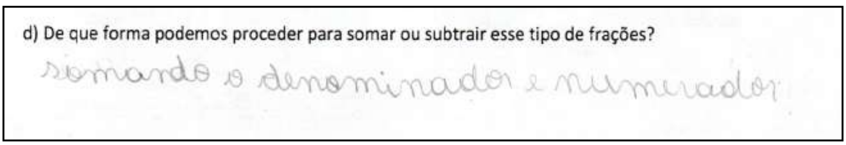


Figura 12 - Atividade 4 itens a) a c) do aluno 6J.

Como esperado, os alunos utilizaram a representação figural como referência bem como a dupla contagem para chegar aos resultados. E no item c), que não tinha a representação figural, operaram da mesma forma que nos demais itens, demonstrando terem percebido a propriedade da soma de frações com mesmos denominadores.

No decorrer do desenvolvimento das atividades 4 e 5, solicitamos novamente que um aluno de cada grupo declarasse para a turma a resposta dada para o item d) da atividade 4 e os itens c) e d) da atividade 5. Vejamos o item d) da atividade 4 (Figura 13) com a atividade do aluno 6J.

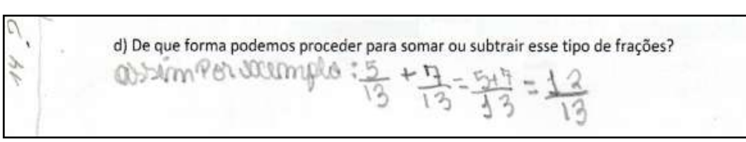

d) De que forma podemos proceder para somar ou subtrair esse tipo de frações?

somando o denominador e numerador

Figura 13 - Atividade 4 item d) do aluno 6J.

Nesse item, verificamos nas folhas com as atividades desenvolvidas que a metade do total de alunos chegou a uma formulação satisfatória. Como podemos observar, esse aluno desenvolveu corretamente os itens a), b) e c) dessa atividade, mas em uma situação de formulação não apresentou o desenvolvimento esperado.

No desenvolvimento dessa atividade, o aluno 6W nos chamou e perguntou se poderia pôr um exemplo como resposta para esse item, respondemos que sim. Tínhamos a expectativa que esse aluno, além de mostrar o exemplo, iria explicar de alguma maneira o que havia feito. Na Figura 14, temos o desenvolvimento da atividade desse aluno.


d) De que forma podemos proceder para somar ou subtrair esse tipo de frações?

assim por exemplo: $\frac{5}{13} + \frac{7}{13} = \frac{5+7}{13} = \frac{12}{13}$

Figura 14 - Atividade 4 item d) aluno 6W.

Esse fato nos chamou bastante atenção porque mais uma vez nos mostrou a dificuldade de formulação dos alunos. Nesse caso, o aluno já sabia como efetuar a operação, mas não soube explicar o que havia feito. Assim, decidiu utilizar um exemplo para mostrar, à sua maneira, como proceder.

Para a soma de frações com denominadores diferentes, a princípio, usamos como estratégia levar o aluno a somar de duas maneiras diferentes os mesmos valores, com o uso de frações equivalentes.

Vejamos o desenvolvimento da atividade 5, itens a), b), c) e d), do aluno 6T (Figura 15).

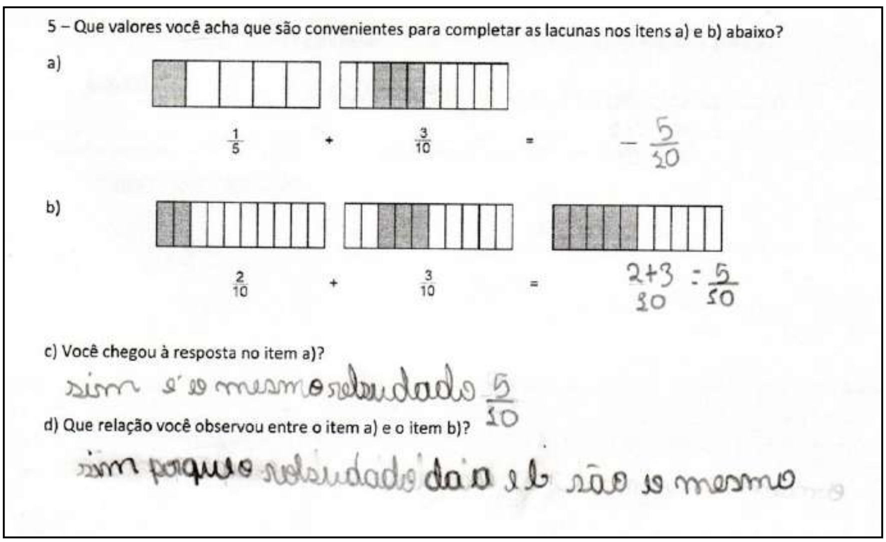


Figura 15 - Atividade 5 do aluno 6T

Nos itens a) e b) temos situações de ação, onde o aluno deveria operar com frações com denominadores diferentes no item a), utilizando o item b) como apoio, a partir da dupla contagem das partes e da representação figural.

A nossa expectativa era a de que o aluno percebesse que tanto o item a) quanto o item b) levavam ao mesmo resultado, já que o que muda é a introdução de uma fração equivalente para a primeira parcela da soma no item b), fazendo com que voltemos a ter uma soma de frações com mesmos denominadores. Nesse caso, 43% dos alunos chegaram ao resultado esperado no item a), associando ou não com o item b), cuja porcentagem de respostas corretas foi de 87%.

Em sala de aula, percebemos algumas discussões dos alunos na tentativa de formular uma resposta para o item d) dessa atividade. Um aluno explicou ao outro “esse pedaço é esse aqui...”, se referindo a parte pintada na primeira figura do item a) e a da primeira figura do item b). Nesse caso em especial não pudemos julgar a partir desse comentário do aluno se ele havia percebido alguma relação entre as figuras e os resultados, ou se foi apenas um comentário ao acaso, a fim de não incidirmos no *efeito jourdain*. Nesse item o percentual de formulação correta foi de 30%.

Nos itens e) e f) dessa mesma atividade, conforme podemos ver na Figura 16, consta o desenvolvimento do aluno 6S para esses itens, seguimos a mesma estratégia dos itens a) e b), mas com figuras de geometrias diferentes.

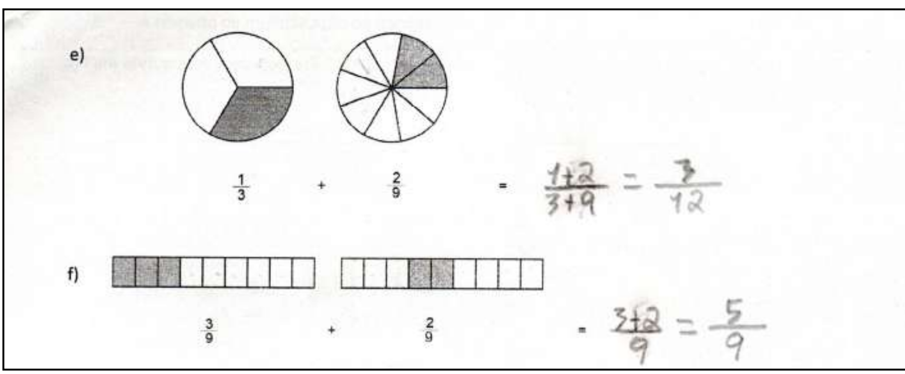


Figura 16 - Atividade 5 itens e) e f) do aluno 6S.

No item e) o percentual de desenvolvimento correto foi de 30% e no item f) foi de 78%. Nesse caso a mudança no referencial da figura, na qual colocamos figuras com geometrias diferentes, parece ter influenciado na percepção de que se tratavam de dois cálculos para se chegar ao mesmo resultado.

Percebemos a necessidade de, na fase de institucionalização, reforçar as concepções de frações, para que esses obstáculos fossem superados.

Nos itens g) e h) da atividade 5 (Figura 17), propusemos que o aluno calculasse a soma de frações cujos denominadores eram primos entre si, a partir da sugestão dada pela representação figural, na qual as partes foram divididas novamente para se obter partes congruentes de um mesmo todo. Na Figura 17, consta a atividade desenvolvida do aluno 6T.

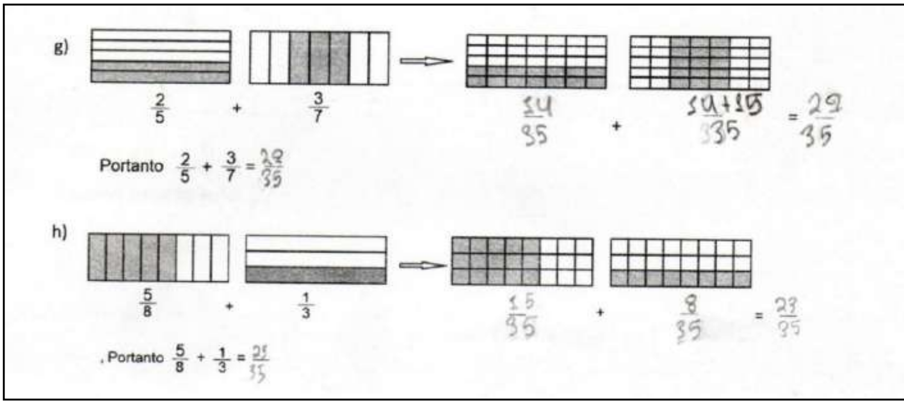


Figura 17 - Atividade 5 itens g) e h) do aluno 6T.

A maioria dos alunos desenvolveu de forma satisfatória esses itens, com 78% e 87% de respostas corretas para os itens g) e h), respectivamente.

No item i), conforme podemos ver na Figura 18, no desenvolvimento atividade do aluno 6X, o objetivo foi promover uma situação de validação na qual o aluno deveria descrever como fez para somar as frações dos itens g) e h).

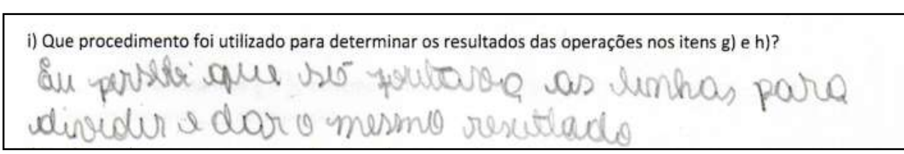
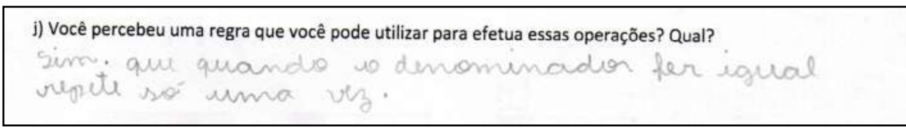


Figura 18 - Atividade 5 item i) do aluno 6X.

Somente 30% dos alunos descreveram de forma satisfatória a sua resolução. A maioria não soube descrever o procedimento que usou para efetuar a soma das frações.

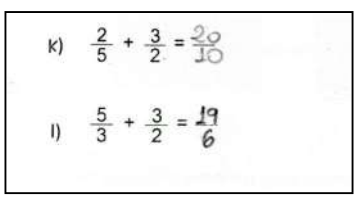
Para o item j) dessa atividade (Figura 19) buscamos favorecer uma situação de validação, na qual o aluno deveria descrever alguma regra que ele tenha percebido no desenvolver da atividade para a soma de frações. Mais uma vez percebemos a dificuldade que os alunos sentiam ao tentar argumentar. 74% deles não souberam formular alguma resposta adequada. O aluno 6K, como podemos ver na Figura 19, percebeu que na soma de frações quando os denominadores são iguais basta repetir o denominador e somar os numeradores, mas não soube expressar completamente essa sua percepção.


j) Você percebeu uma regra que você pode utilizar para efetua essas operações? Qual?

Sim. que quando os denominador for igual repete só uma vez.

Figura 19 - Atividade 5 item j) do aluno 6K.

Em seguida, nos itens k) e l) (Figura 20) dessa atividade, o aluno deveria resolver as duas somas de frações com denominadores diferentes, agora sem a referência da representação figural. Na Figura 20, temos a resolução do aluno 6M desses itens.


k) $\frac{2}{5} + \frac{3}{2} = \frac{20}{10}$

l) $\frac{5}{3} + \frac{3}{2} = \frac{19}{6}$

Figura 20 - Atividade 5 itens k) e l) do aluno 6M.

Verificamos que, ao retirarmos a referência da representação figural, aumentou significativamente a quantidade de alunos que não efetuaram a soma da forma correta. A quantidade de respostas erradas para esses itens foi 45% para o item j) e 41% para o item k). Na Figura 21, temos a resolução do aluno 6U, ele somou diretamente numerador e denominador das frações.

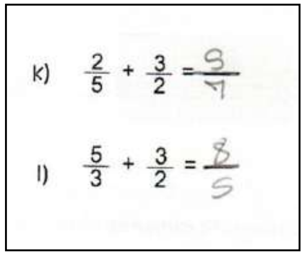


Figura 21 - Atividade 5 itens k) e l) do aluno 6U.

Na fase de institucionalização que ocorreu no terceiro encontro, além de discutirmos a resolução dessa atividade com os alunos, mostramos mais exemplos envolvendo somas de frações com denominadores diferentes e formalizamos a seguinte regra: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$. Nesse momento preferimos não inserir a regra que utiliza o Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.), pois acreditamos que essa regra deve vir posteriormente, após o aluno se familiarizar com esse tipo de cálculo. Concordamos com Almouloud e Silva (2008) quando afirmam que apresentar as operações de soma e subtração com números fracionários de denominadores diferentes a partir de tal procedimento prejudica a sua compreensão.

O segundo encontro ocorreu no dia 30 de novembro de 2018, ocasião em que foi desenvolvida a atividade 6, que trata da multiplicação de frações. Inicialmente, nos itens a) a b) (Figura 22) planejamos uma situação de ação, na qual o aluno deveria multiplicar um número inteiro por uma fração, seguida de uma situação de formulação, em que o aluno deveria descrever, mesmo que à sua maneira, o procedimento.

Utilizamos, nesse caso, a concepção de fração como medida, a referência da reta numérica e um esquema para auxiliar na multiplicação de um inteiro por uma fração. Esse esquema, como podemos ver na atividade do aluno 6V, itens a) a b) (Figura 22), baseia-se na soma de parcelas iguais dessa fração na mesma quantidade de vezes quanto representa esse número inteiro, partindo, dessa forma, conforme sugere

Brousseau (2008) de um conceito que o aprendiz já deve ter conhecimento – neste caso, o da multiplicação de números inteiros.

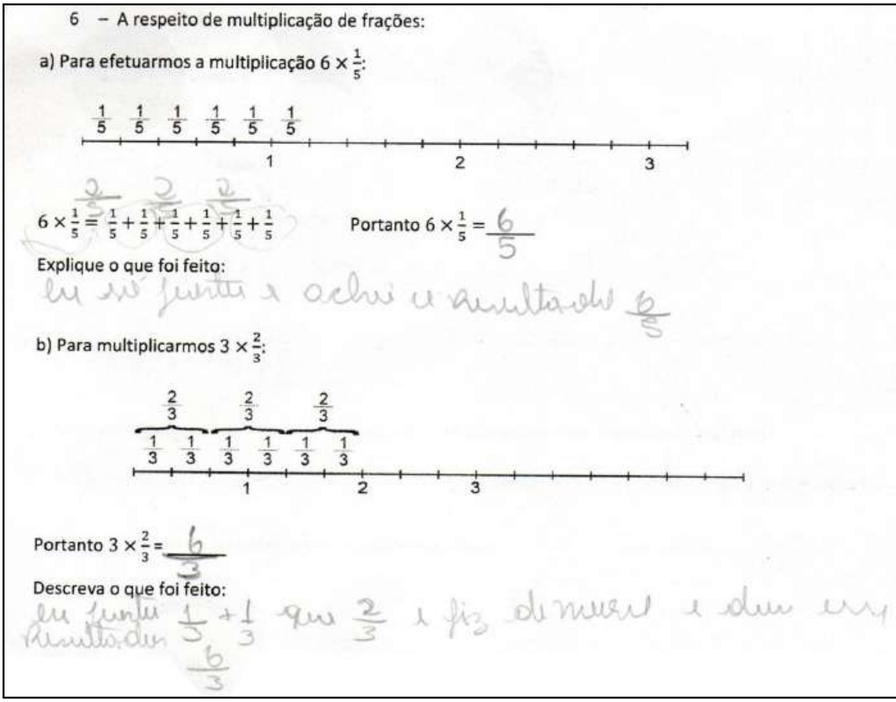


Figura 22 - Atividade 6 itens a) e b) do aluno 6V.

Nesses itens da atividade os alunos tiveram um desempenho de 68% e 64%, respectivamente, para os itens a) e b), desconsiderando os erros gramaticais na construção do texto e a caligrafia muitas vezes de difícil compreensão.

Para a multiplicação de uma fração por outra, no item c) dessa atividade (veja Figura 23) buscamos envolver o aluno em uma situação de ação, na qual ele foi motivado a agir e a refletir sobre a operação a partir da referência da representação figural e da sugestão dada pelo esquema a ele apresentado.

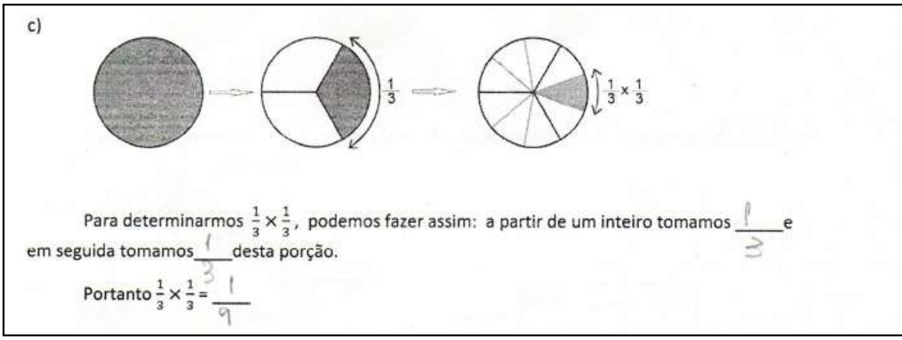


Figura 23 - Atividade 6 item c) aluno 6F.

Observando o desenvolvimento em sala de aula, e na análise das atividades após a aplicação, concluímos que tivemos um resultado satisfatório para esse item. O percentual de acerto foi de 86%.

Nos itens d) e e) (veja Figura 24) tivemos situações de formulação, nas quais o aluno deveria, a partir da referência do esquema a ele apresentado, explicar como proceder para multiplicar duas frações. Nesse caso, mesmo com o incentivo do esquema apresentado, apenas 23% dos alunos formularam algum procedimento para se chegar ao resultado. Alguns alunos apenas apresentaram o cálculo, como o aluno 6G cuja atividade está ilustrada na Figura 24.

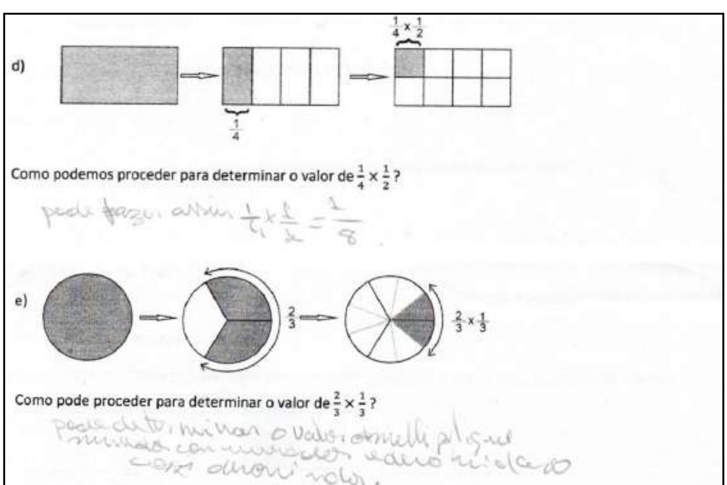


Figura 24 - Atividade 6 itens d) e e) do aluno 6G.

Verificamos no desenvolvimento da atividade 6, item e), do aluno 6G (Figura 24), que esse aluno já havia percebido que podia chegar ao produto de duas frações multiplicando os numeradores e denominadores das duas frações.

Nos itens f) e g) desta atividade (veja Figura 25), o aluno deveria multiplicar as frações, agora sem a referência da representação figural. Na análise das atividades verificamos que 64% e 59% dos alunos operaram corretamente nos itens f) e g), respectivamente. Na Figura 25 temos a atividade do aluno 6R.

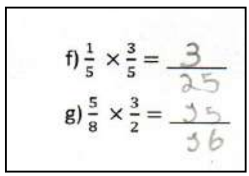


Figura 25 - Atividade 6 itens f) e g) do aluno 6R.

Para o item h) (Figura 26) planejamos uma situação de validação. Aqui esperávamos que o aprendiz, a partir da sua percepção no decorrer dos outros itens dessa atividade, descrevesse alguma regra para a multiplicação de duas frações. Veja a atividade do aluno 6V na Figura 26.

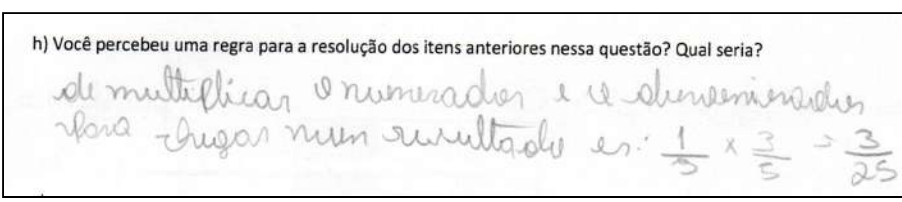


Figura 26 - Atividade 6 item h) do aluno 6V.

Nesse item, apenas 23% dos alunos fizeram alguma formulação adequada, mesmo que a maioria tenha desenvolvido corretamente os cálculos dos itens anteriores dessa atividade, mostrando mais uma vez a dificuldade de argumentação dos alunos.

Notamos no decorrer da aplicação da Sequência Didática que em alguns grupos os seus integrantes buscavam a resolução de forma conjunta, enquanto que em outros cada integrante buscava a resolução individualmente. Havia um grupo cujos componentes eram exclusivamente do sexo feminino que parecia mais empenhado na resolução conjunta da atividade. Nesse grupo houve uma maior interação entre os membros e também foi o que mais se reportou ao professor fazendo perguntas, buscando desenvolver as atividades, e na análise das atividades pudemos verificar que os membros desse grupo tiveram um maior percentual de acerto.

O terceiro encontro foi no dia 6 de dezembro de 2018. Esse foi o momento da institucionalização, fase importante dentro do referencial da Teoria da Situações Didáticas, pois nela é feita a oficialização dos conceitos desenvolvidos na Sequência Didática. Nesta fase, validamos algumas formulações feitas pelos alunos. Evitamos fazer isso no decorrer das atividades para dar oportunidade para todos refletirem e chegar a algumas conclusões corretas ou não, favorecendo o fortalecimento da aprendizagem.

Considerações Finais

A sequência didática aqui explorada foi estruturada para a abordagem das operações com frações, trazendo um significado a partir da representação figural. Pudemos notar no decorrer da aplicação dessa sequência que a representação figural ajudou na descoberta das propriedades das operações com frações, promovendo, portanto, uma aprendizagem a partir de algo mais próximo ao cotidiano do aluno. Percebemos a necessidade de retomar alguns conteúdos na fase de institucionalização, que ainda não haviam sido compreendidos de forma satisfatória por parte dos alunos, tais como o conceito de frações equivalentes e a regra relacionada à divisão de uma fração por outra.

No desenvolvimento das atividades que favoreciam situações de ação, os alunos tiveram um melhor desempenho nas operações de soma e subtração, em especial quando as frações tinham os mesmos denominadores, e também na operação de multiplicação de frações. A maior dificuldade nessas situações foi nos itens relacionados a operação de divisão.

Nas situações de formulação e validação, as quais exigiam que os alunos descrevessem alguma propriedade que eles haviam percebido ou alguma regra para essas operações, foi observado que os alunos muitas vezes compreendiam e utilizavam a propriedade relacionada à situação, mas sentiam dificuldades em se expressar.

Adotando a Engenharia Didática como metodologia, realizamos todas as análises internas e, por este meio, pudemos verificar a validade das atividades concebidas, elaboradas e aplicadas. O aporte da Teoria das Situações Didáticas oportunizou aos alunos participação, socialização e reflexão no desenvolver das atividades. Dessa forma, diante do ambiente de investigação proporcionado aos alunos em sala de aula, propiciamos, por meio das sequências didáticas, a estruturação de situações didáticas que apresentaram o potencial de permitir a sua reaplicação por outros professores/pesquisadores que tenham interesse em métodos de ensino não tradicionais.

Deixamos como sugestão para outras pesquisas afins a utilização de outros recursos didáticos agregados às sequências didáticas. Uma possível alternativa seria a utilização da calculadora científica com representação fracionária, que deverá ser útil na abordagem das operações com frações, em especial na operação de divisão, na qual os alunos sentiram mais dificuldades, devendo propiciar aos alunos uma melhor percepção das regras relacionadas a essas operações.

Ficou evidenciada, no decorrer da investigação, a dificuldade dos alunos em formular as suas percepções no decorrer da aplicação das atividades. Seguindo os objetivos da pesquisa, não realizamos uma investigação e/ou discussão mais aprofundada a respeito dessa dificuldade apontada. Uma investigação nesse sentido apresenta-se, portanto, como possibilidade para trabalhos futuros que derem continuação a essa pesquisa, ou de outras pesquisas semelhantes.

Julgamos que os conceitos desenvolvidos no decorrer das atividades devem ser retomados ao longo da vida escolar do aluno no ensino básico, para que a sua aprendizagem se consolide. Observamos ainda que, apesar dos resultados anotados anteriormente nessa discussão, ponderamos ser importante a alternância dos métodos de abordagem dos conteúdos em sala de aula, evitando que os alunos fiquem entediados com a repetição do mesmo padrão de atividade. E a Engenharia Didática, enquanto teoria educacional, mostrou-se útil como uma das alternativas não tradicionais para essa abordagem.

Rerefências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. As Operações com frações e seus Significados a Partir da Concepção Parte-todo. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, p. 55-78, 2008.

BERENGUER, M. I. S. **A Aplicação da Engenharia Didática no Ensino das Ciências Exatas**. Rio de Janeiro: Universidade Candido Mendes, 2010.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 9394 de 20 de Dezembro de 1996**. [S.l.]: Câmara dos Deputados, 2015. Disponivel em: <www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1996/lei-9394-20-dezembro-1996-362578-normapl.html+&cd=4&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>. Acesso em: 25 setembro 2018.

BROUSSEAU, G. **Intordução ao Estudo das Situações Didáticas:** Conteúdos e Métodos de Ensino. São Paulo: Ática, 2008.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** Pecursos Teóricos e Metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

KRUSCHEWSKY, A. A. **A Importância da Motivação para a Participação e Aprendizagem Matemática dos Alunos**. Vitória da Conquista – BA: UESB, 2016.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula:** Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. São Paulo: [s.n.], 2013.

PORTO, F. M. **Uma engenharia didática para o ensino das operações com frações e dos produtos notáveis**. Dissertação (mestrado em Matemática). Programa de Ciências Exatas, Universidade Federal do oeste do Pará, p. 136. 2019.

Modelo de Van Hiele em relatos de experiência

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues[1]
Sebastián Mancuso[2]
Rudinei Alves dos Santos[3]
Toni Aldenis Ferreira Silva[4]

Introdução

A despeito da necessidade que o professor tem de conhecer o conteúdo que ensina, pois só se pode ensinar aquilo que se sabe, há uma necessidade ainda maior de conhecer metodologias adequadas à aprendizagem dele, pois embora o domínio do conteúdo pelo professor seja uma condição necessária para a aprendizagem, não é também uma condição suficiente para ela.

Embora haja já muito trabalho e muita pesquisa desenvolvida no âmbito da Educação Matemática, há uma enorme necessidade de fazer com que todo esse conhecimento produzido chegue até os docentes. Por isso, faz-se necessário que diferentes abordagens de ensino sejam divulgadas entre os professores de matemática, de modo

[1] Ufopa. E-mail: aroldo.athias@gmail.com
[2] Ufopa. E-mail: sebastianmancuso@gmail.com
[3] IFPA. E-mail: rudinei.da.matematica@gmail.com
[4] SEDUC-PA/SEMED-STM. E-mail: tonialdenis@gmail.com

que o esforço dos pesquisadores possa se converter em benefício concreto para a aprendizagem de crianças, jovens e adultos espalhados por salas de aula no mundo todo.

O texto apresentado neste capítulo vem fazer coro a esse esforço de divulgação de abordagens de ensino que, embora não possam ser consideradas novas, tampouco são bem conhecidas ou foram incorporadas às práticas dos professores que ensinam matemática em nosso país.

É por isso que, na próxima seção, é apresentado um resumo dos níveis, das propriedades e das fases que constituem o modelo do desenvolvimento do pensamento geométrico proposto pelo casal Van Hiele, que embasou as duas experiências de ensino-aprendizagem apresentadas a seguir. Cada um dos relatos constitui uma seção diferente deste capítulo.

A primeira dessas experiências foi aplicada em uma turma do ensino fundamental com estudantes do 7º ano e abordava o cálculo da área de figuras planas. A outra envolveu alunos do 2º ano do ensino médio e tratou do tema dos poliedros de Platão. Portanto, temos uma experiência envolvendo geometria plana e outra espacial, realizada, cada uma, em uma etapa diferente da educação básica.

Finalmente, há uma última seção para nossas considerações a respeito destes dois curiosos relatos de experiência. Vamos conhecer então ao modelo de Van Hiele.

Descrição do Modelo

Em 1957, um casal de professores holandeses, Pierre Marie Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof apresentaram em suas teses de doutorado, o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico (PASTOR, 1993), que foi utilizado como referencial para as atividades apresentadas neste artigo.

Esse modelo serviu de base para o currículo de matemática que foi implementado na primeira metade da década de 1960, na União

Soviética, recebendo atenção dos americanos somente em meados da década de 1970 (PASTOR, 1993).

Sobre o modelo em si, Silva, L. nos esclarece que:

> Apoiado em experiências educacionais apropriadas, a teoria afirma que no processo de aprendizagem de geometria, o estudante passa por cinco níveis de raciocínio sequenciais e ordenados. Para assimilar conceitos e propriedades próprios de um nível é preciso dominar o nível anterior. Os Van Hiele afirmam que o progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que da idade ou da maturidade do aluno e propuseram cinco fases de aprendizagem. Afirmam que a instrução desenvolvida de acordo com essa sequência promove a aquisição de cada um dos níveis (2014, s/p).

O modelo de Van Hiele do pensamento geométrico permite avaliar em que nível de aprendizagem o aluno se encontra, pelas habilidades demonstradas nas atividades desenvolvidas sobre um determinado assunto. A seguir, apresentamos com base em Crowley (1994), uma síntese dos níveis, das propriedades e das fases do modelo dos Van Hiele. Para a construção da síntese dos níveis e das fases foi consultado, também, o artigo de Silva, L. (2014).

NÍVEIS DE COMPREENSÃO

Nível 0: visualização ou reconhecimento

O aluno reconhece os objetos e conceitos de maneira global sem levar em consideração suas propriedades ou suas partes. Além disso, reproduz figuras dadas, descreve formas geométricas comparando com objetos físicos e pela posição em que se encontram, assim como reconhece formas específicas. O vocabulário é básico.

Nível 1: análise

O aluno consegue analisar informalmente os conceitos geométricos, pelas observações e experiências. Também reconhece as figuras por suas propriedades ou pelas partes que as compõem. Mas não faz inter-relações entre as propriedades ou entre as figuras, nem entendem definições.

Nível 2: dedução informal ou classificação

Os alunos compreendem definições e formulam argumentos informais, misturando resultados empíricos com técnicas de dedução. Estabelecem, também, inter-relações entre as propriedades da mesma figura ou de figuras diferentes. Além disso, compreendem que classes de figuras podem estar inclusas umas nas outras e entendem demonstrações formais, mas não conseguem elaborá-las.

Nível 3: dedução formal

Os alunos compreendem a função dos axiomas, teoremas, postulados, definições, demonstrações e entes primitivos, bem como as inter-relações entre eles. Enxergam também a possibilidade de se obter diferentes provas para um mesmo resultado. Além disso, a linguagem deles passa a ser precisa e são capazes de elaborar demonstrações.

Nível 4: rigor

A geometria é vista no plano abstrato, por outro lado, há a compreensão de sistemas axiomáticos distintos, podendo mesmo estabelecer comparações entre estes.

PROPRIEDADES DO MODELO

Propriedade 1: sequencial

Para ter sucesso em um determinado nível, os alunos devem ter assimilado as estratégias exigidas pelos níveis anteriores.

Propriedade 2: avanço

O nível no qual o aluno se encontra não está, necessariamente, associado a sua faixa etária. Não é possível saltar níveis por nenhum método de instrução.

Propriedade 3: intrínseco e extrínseco

Objetos inerentes a um nível transformam-se em objetos de estudo no nível posterior.

Propriedade 4: linguística

Cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e seus próprios sistemas de relações que ligam esses símbolos. Por outro lado, uma relação considerada "correta" em um nível é modificada em outro nível.

Propriedade 5: combinação inadequada

A instrução (material didático, conteúdo, vocabulário, etc.) deve estar no mesmo nível do aluno, do contrário, o aprendizado pode não ocorrer.

FASES DO APRENDIZADO

Fase 1: interrogação ou informação

Nesta fase, verificam-se os conhecimentos prévios dos alunos, orientando-os quanto à forma como as atividades serão realizadas e quanto aos objetivos que se pretende alcançar. Além disso, é feita a introdução do vocabulário específico do nível.

Fase 2: orientação dirigida

Os alunos familiarizam-se com as características do nível e realizam atividades estruturadas de forma sequencial, com aumento gradativo de dificuldade. As mesmas devem ser pequenas e com repostas específicas.

Fase 3: explicação

O professor fomenta a discussão entre os alunos sobre o objeto de estudo com base nas experiências anteriores, bem como os orienta para uso de linguagem adequada e precisa. O papel do docente é mínimo.

Fase 4: orientação livre

Os alunos devem utilizar os conhecimentos adquiridos nas fases anteriores para fazer atividades com várias etapas e/ou com final aberto e que possam ser respondidas de diversas maneiras. Essas atividades não devem ser aplicações diretas dos conhecimentos adquiridos antes. A interferência do professor deve ser mínima, de modo que haja formalização de conceitos pelos alunos através da própria descoberta.

Fase 5: integração

Com a contribuição do professor, os discentes revisam e sintetizam o conteúdo estudado sem que sejam apresentadas novas ideias.

Compreender as características do modelo do casal Van Hiele do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico é importante para que o leitor possa acompanhar o desenvolvimento das atividades apresentadas nos relatos de experiências que serão abordados nas próximas seções.

Relato 1: Calculando Áreas no Ensino Fundamental

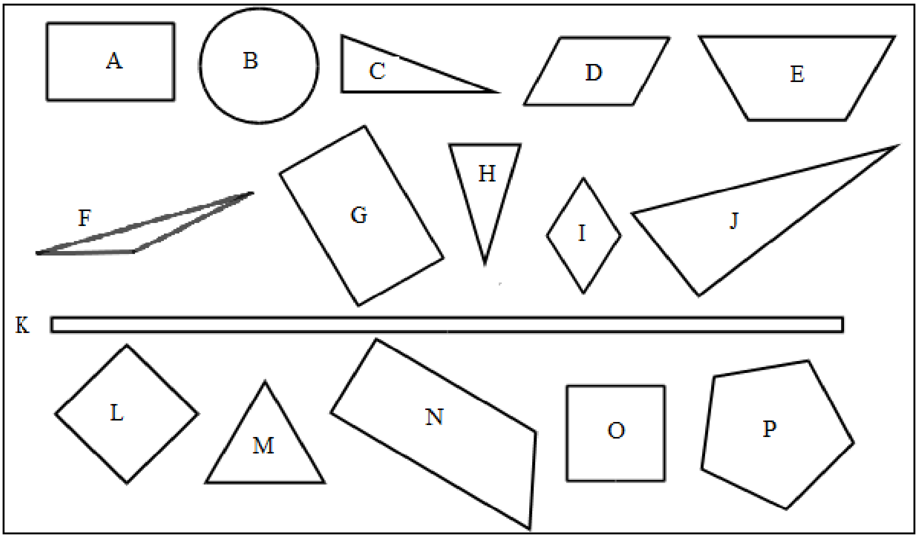
A pesquisa foi aplicada na Escola Municipal de Educação Infantil e Ensino Fundamental Maria de Lourdes Almeida, uma unidade educacional pertencente à rede municipal. Os estudos foram realizados em uma turma do 7º ano do turno matutino, 41 alunos estavam regularmente matriculados nessa turma, sendo que um deles era deficiente auditivo (DA) e dois alunos faziam dependência em matemática.

De acordo com a metodologia dos Van Hiele, independentemente do nível que se esteja trabalhando, o aluno deve passar por cinco fases da aprendizagem que são: interrogação ou informação; orientação dirigida; explicação; orientação livre e integração.

No primeiro encontro com a turma, referente à fase 1 (Interrogação ou Informação) foi realizada a aplicação de um teste de sondagem, para verificar o conhecimento que os 40 alunos presentes já possuíam em relação às figuras planas e suas áreas e, então, decidir em que direção os estudos prosseguiriam. Ele era composto por quatro questões, todas subdividas em itens.

Na primeira questão do teste, foram apresentadas várias figuras planas (Figura 1) e em seguida solicitado aos alunos, em 9 diferentes itens, que informassem quais eram: (a) quadriláteros, (b) triângulos, (c) triângulos retângulos, (d) retângulos, (e) quadrados, (f) paralelogramos, (g) losangos, (h) trapézios ou (i) que não se enquadravam em nenhuma dessas categorias.

Figura 1 – Questão 1 do teste de sondagem.



Fonte: Os autores.

Com esta questão esperava-se verificar até que ponto os alunos eram capazes de classificar figuras planas, isto é, se os alunos efetuavam a classificação meramente por sua experiência visual, por meio das propriedades que estas figuras possuíam ou até que ponto conheciam tais figuras, mesmo que de uma forma superficial.

Quadro 1 – Quantidade de alunos por figura em cada item da questão 1

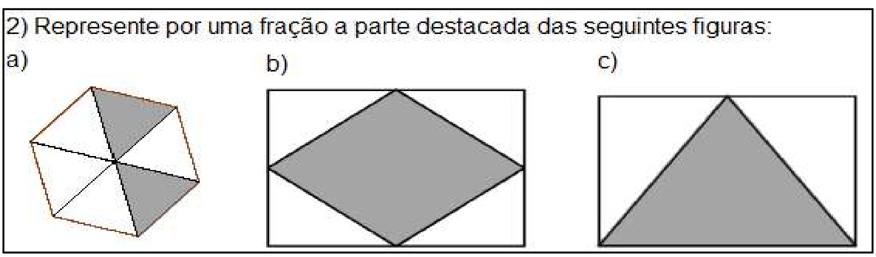
FIGURAS / PERGUNTAS	quadriláteros	triângulos	triângulos retângulos	retângulos	quadrados	paralelogramos	losangos	trapézios	não se enquadram
A	25	0	0	19	11	1	0	0	0
B	0	0	1	1	0	1	5	0	23
C	1	9	20	2	0	2	3	3	2
D	31	0	4	2	2	4	9	5	0
E	16	0	1	1	0	7	2	14	1
F	1	6	3	0	0	6	4	5	7
G	19	1	1	24	4	1	3	0	0
H	1	28	3	0	0	3	1	0	5
I	13	0	4	1	0	6	18	5	2
J	1	11	19	1	0	3	4	5	3
K	8	0	2	18	0	4	4	0	8
L	17	0	4	1	7	3	11	3	1
M	0	39	4	1	0	0	0	0	2
N	10	0	4	4	0	9	3	6	2
O	15	0	0	0	37	1	1	0	0
P	1	0	1	1	1	7	4	13	4

Fonte: Os autores.

No Quadro 1, usamos a fonte preta para indicar que a figura deveria ser incluída naquele item e a azul para indicar que deveria ser excluída. Assim, o desejado seria que os números pretos estivessem próximo de 40 e os azuis próximos de zero, indicando que a maioria dos alunos efetuou a classificação de forma correta. Um excessivo desvio dos resultados desejados foi indicado pelo fundo amarelo. Por "excessivo desvio" entendemos que menos de 25% dos alunos presentes incluíram um item que deveria ter sido incluído ou, que mais de 25% incluíram um item que não deveria ter sido incluído. Desse quadro podemos inferir que os alunos desta turma encontravam-se no nível 0, segundo a teoria de Van Hiele, isto é, não compreendem que classes de figuras podem estar inclusas umas nas outras, habilidade que só será obtida quando estes alunos alcançarem o nível 2. O fato de que as únicas figuras classificadas corretamente por mais de 90% dos alunos foram o triângulo M e o quadrado O (respostas com fundo verde no QUADRO 1) evidencia que a classificação feita pelos alunos foi baseada apenas na experiência visual, já que estas são as figuras padrão apresentadas para descrever triângulos e quadrados para crianças pequenas.

A segunda questão era composta por três itens. Em cada item o aluno deveria, considerando a Figura 2, informar qual a fração correspondente a parte destacada.

Figura 2 – Questão 2 do teste de sondagem



Fonte: Os autores.

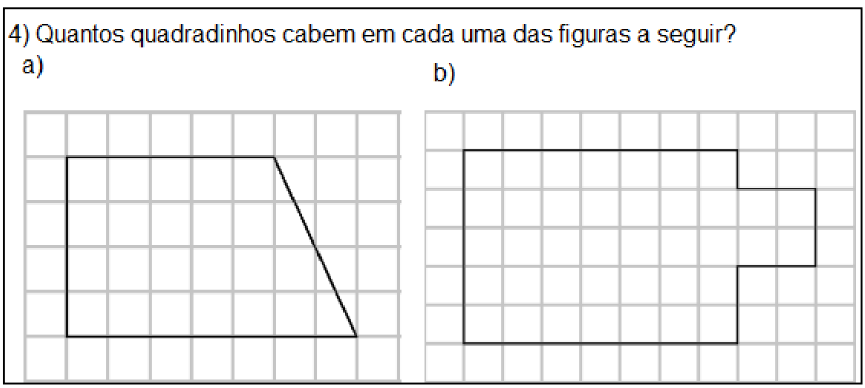
Verificamos que 25 alunos acertaram o item (a), 2 o item (b) e 3 o item (c).

A terceira questão tinha como objetivo verificar se os alunos conheciam as principais relações de cálculo de área do retângulo, do triângulo e do paralelogramo. Além disso, verificar se o aluno compreende que a altura do triângulo considerado deve ser aquela referente ao lado tomado como base.

Nesta questão percebe-se que os alunos não dominavam as principais relações utilizadas no cálculo de área de figuras planas. Pois, somente 9 calcularam corretamente a área do retângulo e nenhum aluno calculou corretamente a área do triângulo, do paralelogramo e do polígono formado por um triângulo sobre um retângulo.

A quarta questão tinha como objetivo verificar a capacidade que os alunos tinham de obter a área de uma figura plana a partir da comparação com a área de uma outra figura tomada como referência, neste caso os quadrados que compõem a malha quadriculada. Dessa forma, foram dadas duas figuras na malha quadriculada para que os alunos contassem quantos quadradinhos cabiam em cada uma delas (Figura 3).

Figura 3 – Questão 4 do teste de sondagem



Fonte: Os autores.

No item (a) dessa questão, os alunos apresentaram quatro tipos de respostas: 22, 24, 26 ou 37. Vinte e cinco alunos chegaram na resposta esperada, isto é, 24. Não se pode afirmar que o fizeram por compreenderem perfeitamente a noção de área, pois não sabemos a estratégia por eles utilizada. Quanto ao item (b), 37 alunos chegaram à resposta esperada, que era 39.

O segundo encontro com a turma foi referente à fase 2 (orientação dirigida). Nesse dia, foram realizadas seis atividades simples com respostas objetivas, de acordo com o nível verificado na fase anterior, para os estudantes irem se familiarizando com o conceito de área. Essas seis atividades foram distribuídas uma de cada vez para os alunos.

Primeiro, foi solicitado aos alunos que construíssem no papel quadriculado um retângulo e depois que contassem quantos quadradinhos cabiam nesse retângulo.

Todos os alunos desenharam corretamente o retângulo e o construíram com lados de medidas diferentes, sempre com os lados sobre as linhas do papel quadriculado e com o lado maior na horizontal, provavelmente porque essa é a memória visual que eles tinham de um retângulo.

Dos 40 alunos presentes, 28 contaram ou calcularam corretamente a quantidade de quadradinhos que continham os retângulos que construíram e 12 erraram a contagem ou o cálculo dessa quantidade. Na resolução dessa questão, observa-se a heterogeneidade da turma, pois alguns resolveram simplesmente fazendo a contagem, enquanto outros multiplicaram a base pela altura.

Na segunda atividade, foi distribuída aos alunos uma folha de papel que continha um retângulo na malha quadriculada de dimensões 16 x 28, para que os mesmos contassem quantos quadradinhos cabiam no retângulo.

Nessa atividade, verificou-se um excelente desempenho dos alunos, 37 calcularam corretamente a quantidade de quadradinhos do retângulo e apenas 3 erraram a contagem. Observou-se também que, alguns alunos multiplicaram a quantidade de quadradinhos da base do retângulo pela quantidade de quadradinhos da altura.

Em seguida, foi solicitado para os alunos que construíssem no papel quadriculado um triângulo retângulo (antes de ser realizada esta atividade foi esclarecido o que é um triângulo retângulo) e solicitado que contassem quantos quadradinhos cabiam nesse triângulo.

Na correção da terceira atividade, verificou-se que 37 dos 40 alunos desenharam corretamente o triângulo retângulo, desenhando os catetos sobre as linhas do papel quadriculado. Uma aluna construiu um triângulo que não era triângulo retângulo e dois alunos presentes não fizeram essa atividade. Apenas 13 alunos chegaram a quantidade de quadradinhos esperada de acordo com o triângulo que construíram.

Na quarta atividade, foi solicitado aos alunos que construíssem no papel quadriculado um triângulo que não fosse um triângulo retângulo e que contassem quantos quadradinhos cabiam nesse triângulo.

Na análise das resoluções da quarta atividade, percebemos que praticamente todos os triângulos desenhados eram isósceles e os que não eram se assemelhavam a triângulos deste tipo. Além disso, todos esses triângulos tinham um dos lados na posição horizontal, quase sempre com o vértice oposto a esse lado ocupando a posição superior, apenas três optaram por desenhar o triângulo "de cabeça para baixo". A forma sob a qual triângulos usualmente são representados foi a forma escolhida por praticamente todos os alunos. No entanto, 14 dos 40 alunos construíram triângulos retângulos. Desses, 10 chegaram ao resultado esperado, afinal, no caso de triângulos retângulos isósceles, os quadradinhos parcialmente contidos no triângulo correspondem sempre à metade de um quadradinho, o que facilita o processo de contagem. Quanto aos 26 alunos que não construíram triângulos retângulos, apenas 6 destes encontraram a quantidade de quadradinhos esperada e 3 encontraram um resultado próximo do esperado.

Como já era esperado que os alunos construíssem triângulos isósceles, na quinta atividade, optou-se por distribuir para os alunos um triângulo já impresso na malha quadriculada. Isso dificultou a estratégia de contagem adotada por aqueles que construíram triângulos retângulos isósceles na atividade anterior. Mesmo assim, apenas 5 alunos aparentemente adotaram a estratégia de calcular o número de quadradinhos como metade da quantidade de quadradinhos contidos no retângulo associado ao triângulo dado, sendo que apenas 4 destes chegaram ao resultado correto.

Por último, foi solicitado aos alunos que construíssem, no papel quadriculado, um retângulo de tal maneira que nenhum dos lados ficasse sobre as linhas do papel e tal que seus vértices fossem o encontro de duas linhas. Em seguida os mesmos deveriam contar quantos quadradinhos continha o retângulo desenhado por eles. Nesta atividade verificamos que 20 dos alunos construíram o retângulo de acordo com as orientações dadas, 18 construíram um quadrilátero qualquer e dois alunos não fizeram essa atividade. Também constatamos que 9 dos 20 alunos que construíram um retângulo obtiveram a quantidade esperada de quadradinhos, ou seja, o valor que corresponderia a área do retângulo caso tomássemos os quadradinhos da malha como unidade de medida.

Com as atividades desenvolvidas nesta fase os alunos foram se familiarizando de maneira gradual com o conceito e o cálculo de área que estava sendo trabalhado na pesquisa. Veremos, na descrição da próxima fase, como o professor orientou os alunos para o aprofundamento destas ideias.

No terceiro encontro, referente a fase 3, que é a da explicação, foi realizada a socialização das atividades que os alunos fizeram na fase 2. O professor foi fazendo perguntas com o objetivo de instigar os discentes e conforme as respostas surgiam, quando necessário, intervinha para orientá-los quanto ao uso da linguagem adequada. Primeiro, foi perguntado para os alunos como tinham feito para contar a quantidade de quadradinhos de um dos retângulos na fase 2. O professor projetou então na lousa a malha quadriculada do GeoGebra e construiu dois retângulos, um com as dimensões 5 x 4,5 e o outro de dimensões 5,5 x 4,5. A seguir pediu para os alunos que tinham calculadora que efetuassem o produto das dimensões e solicitou de alguns alunos que viessem ao quadro e contassem a quantidade de quadradinhos. A turma notou que os resultados das multiplicações e os das contagens dos quadradinhos coincidiam. Foi então explicado que quando eles estão contando quantos quadradinhos cabem no retângulo, estão na verdade calculando sua área e que, nessa situação, o quadradinho representa a unidade de área.

Para explicar os casos do triângulo retângulo, do triângulo não retângulo e do retângulo inclinado o professor procedeu de modo análogo.

No quarto encontro com a turma, referente à fase 4 (orientação livre) da aprendizagem, os alunos presentes realizaram uma atividade contendo 5 itens na qual deveriam informar a quantidade de quadradinhos da malha quadriculada que corresponderiam a área de um losango, um trapézio, um hexágono, uma estrela e um círculo. Essa atividade exigia que os alunos dividissem adequadamente as figuras em retângulos ou triângulos de tal forma que recaíssem nos casos vistos anteriormente, ou seja, que resolvessem os problemas por etapas, até encontrar a resposta final. O objetivo das quatro primeiras atividades era justamente desenvolver, com o aluno, esta percepção.

Os alunos tiveram um excelente desempenho para encontrar a área do losango, pois, 36 deles acertaram este item. Entretanto, não mantiveram o mesmo aproveitamento para calcular as áreas do trapézio, do hexágono e, principalmente, a da estrela. Dos 39 alunos presentes, 23 calcularam corretamente a área do trapézio, 25 a do hexágono e o valor correto da área da estrela foi encontrado por apenas 4 alunos. Em relação ao círculo 21 alunos encontraram uma boa aproximação para área.

No quinto encontro com a turma, referente a fase 5 (integração), o professor resgatou o que foi estudado nas fases anteriores e fez uma síntese do conteúdo sem apresentar novas ideias.

Fazendo associações com as atividades realizadas anteriormente o professor relembrou as fórmulas utilizadas para calcular as áreas de um retângulo e de um triângulo e lembrou que a área de um polígono pode ser calculada dividindo o mesmo em triângulos e retângulos. Como exemplo, mostrou que a área do losango pode ser calculada dividindo-o em dois triângulos congruentes, que o trapézio pode ser dividido em dois triângulos e um retângulo ou, simplesmente em dois triângulos, e que a área do hexágono pode ser obtida dividindo-o em triângulos e retângulos.

Infelizmente não há aqui espaço suficiente para um maior detalhamento das atividades realizadas e das análises feitas a partir dela, assim, recomendamos ao leitor desejoso de tais informações que consulte Silva (2018), que é uma das referências deste artigo e que se encontra disponível no banco de dissertações do Profmat.

RESULTADOS

Um aspecto que pode ser observado é que, nesta experiência, não se propôs uma abordagem comparativa entre duas turmas utilizando metodologias diferentes, embora este também fosse um caminho possível, como será visto na próxima seção. Ao invés disso, optou-se por analisar a produção da própria turma, tirando o professor suas conclusões a respeito dos aspectos positivos e negativos da abordagem adotada com base em suas experiências anteriores no ensino.

Um dos pontos positivos, observado na aplicação das atividades, foi o empenho da maioria dos alunos em resolver as atividades propostas (mesmo que algumas vezes de forma incorreta). Isso revela o interesse dos alunos pelas atividades propostas.

Entretanto, nos encontros nos quais as ideias deveriam ser socializadas, foi observada a falta de participação de alguns educandos para expor os conhecimentos obtidos a partir das experiências, o que se explica pela falta de familiaridade destes com a metodologia, visto que estavam entrando em contato com práticas que não haviam, até então, sido adotadas por nenhum de seus professores.

Outra barreira encontrada, foi a limitação do tempo para a aplicação do trabalho de campo, que acabava se refletindo no tempo fornecido para que aluno respondesse às questões que lhe eram propostas em cada atividade. Assim, na tentativa de conciliar a metodologia com o pouco tempo disponível para sua aplicação, é possível que o professor tenha intervindo mais do que o desejado em algumas fases, as quais exigiam a participação mínima do professor.

Essas dificuldades, contudo, parecem nos dizer mais sobre a forma como está estruturado hoje o sistema de ensino brasileiro que sobre o modelo de Van Hiele. Reflexão que retomaremos nas considerações no final deste capítulo. Por ora, seguiremos para o relato da outra experiência.

Relato 2: Poliedros de Platão no Ensino Médio

O presente trabalho trata de um estudo qualitativo acerca da produção de alunos da segunda série do ensino médio de uma escola da rede estadual de ensino do Estado do Pará, envolvidos por atividades construídas de acordo com os três primeiros níveis do Modelo do casal Van Hiele e que exploram conceitos relacionados aos poliedros de Platão. A metodologia adotada foi a “pesquisa participante”. De acordo com Severino (2007, p.120), "é aquela em que o pesquisador, para realizar a observação dos fenômenos, compartilha a vivência dos sujeitos pesquisados, participando, de forma sistemática e permanente, ao longo do tempo da pesquisa, das atividades".

Tal escola está localizada na cidade de Santarém/PA, atendendo a uma clientela muito diversificada, em relação ao nível social.

A pesquisa iniciou-se no quarto bimestre do ano letivo de 2012, no momento em que todas as três turmas selecionadas (A, B e C) já haviam explorado geometria plana e geometria espacial, sem terem abordado os Poliedros de Platão. Assim, as três turmas estavam no mesmo ponto do conteúdo e com os mesmos conteúdos explorados.

As três turmas selecionadas foram submetidas as mesmas atividades:

• Pré-teste e pós-teste sobre geometria plana: retirados do livro "Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele" do Projeto Fundão coordenado;

• Teste de verificação: construídos com questões que exploram geometria plana, espacial e, em particular, questões sobre os Poliedros de Platão.

A turma "A" estava lotada no turno matutino e era composta por 28 alunos, em sua maioria do sexo feminino, contudo, devido infrequência nas aulas, aproximadamente 54% dos alunos foram submetidos a todas as atividades da pesquisa. Sendo assim, apenas 15 alunos foram avaliados, dez do sexo feminino e cinco do sexo masculino, com idades de quinze a dezoito anos.

A turma "B" pertencia ao turno vespertino e era composta por 26 alunos, em sua maioria, também, do sexo feminino. Também por infrequência nas aulas, aproximadamente 89% foram submetidos a todas as atividades. Assim, dos alunos avaliados, doze são do sexo feminino, onze do sexo masculino e suas idades variam de quinze a vinte anos.

A turma "C" estava lotada no turno vespertino e era composta por 24 alunos, em sua maioria do sexo feminino. Devido infrequência nas aulas, aproximadamente 84% foram submetidos a todos os testes, doze do sexo feminino e oito do sexo masculino, com idades que variam de quinze a dezenove anos.

Após aplicação do pré-teste, as turmas iniciaram seus estudos sobre os Poliedros de Platão. Em seguida, aplicou-se, o pós-teste e, logo depois, o terceiro teste composto de dez questões distribuídas entre objetivas e discursivas, com intuito de verificar o aprendizado.

Procedimentos Metodológicos

Na turma "A", o conteúdo foi explorado através de aulas expositivas e sem a utilização de nenhum material concreto. O professor utilizou, somente: o livro didático adotado pela escola, quadro branco e pincel. O conteúdo foi explorado em oito horas-aula de 40 minutos cada.

Como o professor utilizou somente o livro didático, desenvolveu suas atividades da seguinte forma:

• Três horas-aula para expor o conteúdo e resolver exemplos no quadro branco;

• Duas horas-aula para que a turma pudesse tentar resolver as atividades propostas;

• Uma hora-aula dando vistos nos cadernos dos alunos e prestando orientação individual.

• Duas horas-aula corrigindo as atividades propostas no quadro branco.

Vale ressaltar que, entre exemplos e atividades propostas, foram resolvidas pelo professor no quadro branco treze questões.

Na turma "C", o conteúdo foi explorado com a utilização de material concreto, que foi previamente construído pelo professor. Além do material concreto, o professor utilizou o livro didático adotado pela escola, o quadro branco e o pincel. O conteúdo foi explorado em doze horas-aula de 40 minutos cada, distribuídas da seguinte forma:

• Cinco horas-aula expondo o conteúdo com auxílio do material concreto. O professor manipulava os poliedros de Platão e em seguida entregava a turma que também manipulava observando os conceitos explorados;

• Duas horas-aula resolvendo exemplos no quadro branco;

• Duas horas-aula para que os alunos pudessem tentar resolver as atividades propostas;

• Uma hora-aula dando visto nos cadernos e prestando orientação individual;

• Duas horas-aula corrigindo as atividades propostas em sala.

Durante o desenvolvimento das aulas foram resolvidas dez atividades no quadro branco, entre exemplos e atividades propostas.

A turma "B" foi submetida ao Modelo de Van Hiele e a aplicação aconteceu em 16 horas-aula de 40 minutos cada. Além disso, como o uso do Modelo de Van Hiele requer que o professor supervisione as atividades propostas de forma bem particular e diante da necessidade de realizar orientações constantes, além de anotações referentes a aplicação do Modelo, decidiu-se dividir a turma "B" em cinco grupos compostos de no máximo cinco componentes por grupo.

Para melhor organização das atividades, em cada grupo havia:

1) Um coordenador: líder do grupo, com a função de estimular os membros a participarem das discussões, além de garantir que o secretário acompanhe as discussões e realize corretamente as anotações.

2) Um secretário: responsável por anotar corretamente as observações realizadas pelo grupo e, ao final da discussão, ler as anotações aos membros do grupo.

3) Um comunicador: responsável pela apresentação oral à turma e ao professor dos resultados obtidos durante a discussão.

Todos os grupos formados tiveram contato com os cinco Poliedros de Platão e a cada atividade desenvolvida, os grupos, tiveram um coordenador, secretário e comunicador diferente.

Após orientações dadas sobre a dinâmica do trabalho em grupo, iniciou-se a aplicação do Método de Van Hiele.

As atividades iniciaram com uma breve abordagem sobre o Filósofo Platão e seu interesse místico acerca dos poliedros que seriam abordados. Em seguida, ainda, com o objetivo de motivar e tornar a atividade mais lúdica, as equipes foram nomeadas com os nomes que Platão associou aos seus poliedros: FOGO, TERRA, AR, ÁGUA e UNIVERSO, como destacado por Iezzi et al (2007, p.428).

Todas as atividades desenvolvidas junto a turma "B" podem ser encontradas no trabalho original de Santos (2014) que é uma das referências deste capítulo e encontra-se disponível no banco de dissertações do PROFMAT.

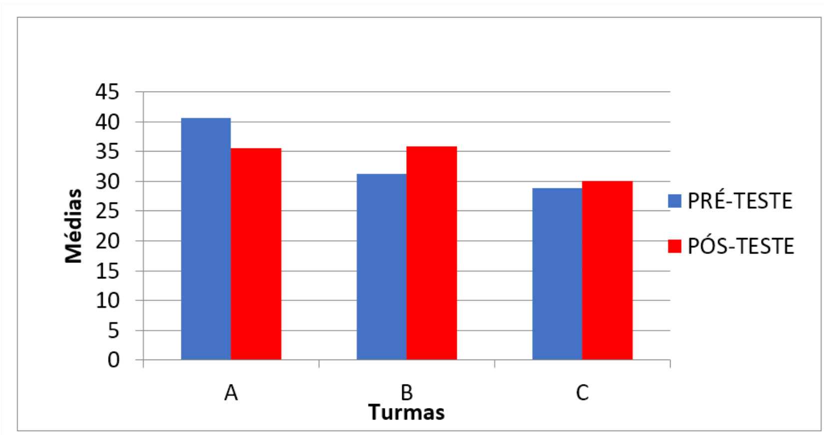
Resultados

O pré-teste e pós-teste são compostos pelas mesmas 15 questões que abordam conceitos da geometria plana. Essas questões foram distribuídas igualmente entre os três primeiros níveis de Van Hiele. Ademais, na correção dos testes, o autor do trabalho optou por uma escala de pontuação que vai de 0 a 75 pontos. Sendo atribuídos 25 pontos para cada um dos níveis explorados neste trabalho.

As médias das turmas foram baixas, todas inferiores a 55% do total. Fato que aponta em direção do pouco domínio de conceitos básicos de geometria plana e que podem levar a dificuldades de compreensão dos conceitos explorados em geometria espacial. Moura (2018) destaca que segundo Van Hiele (1986), o pensamento geométrico segue uma ordem hierárquica. Nesse sentido, é difícil se obter resultados satisfatórios acerca da aquisição do conhecimento geométrico sem conhecimento de conceitos prévios, importantes para construção de novos conhecimentos. Neste caso particular, referentes aos Poliedros de Platão.

Analisando as médias das turmas no pré-teste e pós-teste, verifica-se que o melhor resultado no pré-teste foi o da turma "A" e no pós-teste foi o da turma "B". Sendo que a turma "B" obteve maior crescimento percentual, na comparação das médias obtidas. Outrossim, chama atenção a redução na média da turma "A" no pós-teste, pois tratava-se do mesmo teste aplicado como pré-teste e o cálculo da média levou em consideração apenas as notas dos alunos que participaram de ambos os testes. Fato que pode conduzir a muitas hipóteses, como o desinteresse pela atividade desenvolvida e marcação aleatória das questões objetivas. Veja Gráfico 1.

Gráfico 1: Médias das turmas no pré-teste e pós-teste

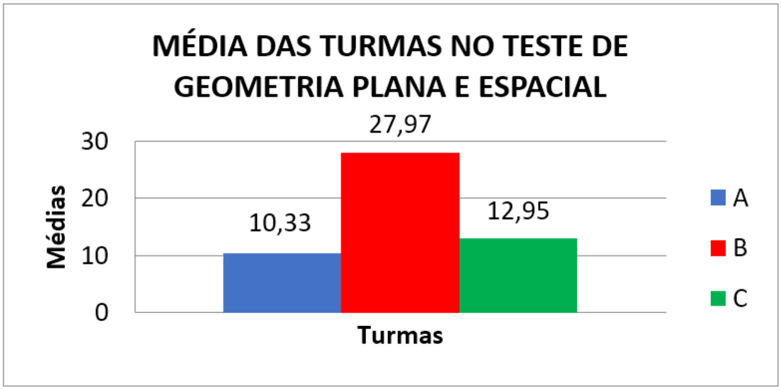


Fonte: Santos (2014, p.48)

O outro teste realizado, o teste de verificação do aprendizado, composto de 10 questões, abordou alguns tópicos de geometria plana, geometria espacial e questões especificamente relacionadas aos Poliedros de Platão. Distribuídas da seguinte forma: as questões 1 e 4 referem-se ao NÍVEL 0; as questões 2, 3, 6, 7 e 8 ao NÍVEL 1 e as questões 5, 9 e 10 ao NÍVEL 2 do modelo de Van Hiele. Esse teste foi corrigido usando-se uma escala de 0 a 70 pontos, sendo que as questões 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 10 são de múltipla escolha, com apenas uma alternativa correta. Cada uma dessas questões assinaladas corretamente vale 5,0 (cinco) pontos e questões assinaladas incorretamente recebem nota zero.

As médias das turmas nesse teste também foram baixas, mesmo assim ressalta-se a superioridade da média obtida pela turma "B", submetida ao Modelo de Van Hiele (Gráfico 2), com média que superou em mais de 63% a turma "A" e em mais de 53% a turma "C".

Gráfico 2: Médias das turmas no teste de geometria plana e espacial



Fonte: Santos (2014, p.53)

É importante salientar que a construção dos conceitos matemáticos não acontece rapidamente, desta forma é necessário ir além dos resultados numéricos obtidos. O professor precisa analisar a postura dos alunos frente ao processo de ensino, para assim poder direcionar e/ou redirecionar suas atividades. Diante disso, ressalta-se a fala da aluna "X" (turma "A"), quando questionada sobre a metodologia de ensino adotada em sua turma para o ensino dos Poliedros de Platão: bom na verdade, ele, o ensino foi bom. Só que, na verdade, sempre dá pra melhorar. Porque a gente tinha mais aquela questão da aula teórica, então acabou faltando mais a questão da aula prática.

De posse das impressões dos alunos sobre o processo de ensino e aprendizagem, além do conhecimento acerca de outras abordagens metodológicas, o professor poderá buscar maior dinamismo para o ensino da matemática, com intuito de obter mais participação dos alunos e, assim, oportunizar um processo de ensino e aprendizagem mais satisfatório para todos os envolvidos. É o que se percebe na fala do aluno "Y" (turma "B"), quando questionado sobre o ensino dos poliedros de Platão: Foi bem interessante, porque você foge de toda uma metodologia tradicional que é professor, pincel, quadro, aluno, caderno, fórmulas e... esse método que é de Van Hiele nos ajudou é... a reconhecer esses sólidos de Platão é... de uma forma que deixou bem inusitada. Porque você começa a reconhecer, identificá-los como se você usasse eles no seu dia-a-dia.

É importante salientar a necessidade de os alunos poderem experimentar momentos práticos durante o processo de ensino e aprendizagem, nos quais possam interagir com os demais alunos, professor e entes geométricos estudados. Moura (2018, p.59) destaca que é interessante propor aos alunos "atividades que proporcionam a utilização de materiais manipuláveis para ampliar as habilidades de síntese e análise".

Essa necessidade evidencia-se nas falas dos alunos, quando questionados sobre o uso de material concreto. É o que diz o aluno "Z" (turma "C"): Bom, o ensino foi um pouco de explicar no quadro, também um pouco de pegar nos sólidos e verificar os vértices, as arestas. [...] uma técnica muito boa, porém o que faltou foi isso, nós não participamos da montagem dos sólidos. Também mencionada pela aluna "W" (turma "A"): [...] é fundamental a gente aprender a parte prática também. Não só a teórica. Com certeza ajudaria muito.

Tais respostas demonstram a necessidade do aluno de fazer parte do processo, não apenas como mero receptor de informações, mas agente ativo do ensino e da aprendizagem. Postura estimulada pelo Modelo de Van Hiele que através de suas Fases, Níveis e Propriedades busca sempre estimular a interação do aluno com os objetos de aprendizagem, para promoção do avanço gradativo do conhecimento geométrico.

Esse processo deve ser mediado pelo professor que guia as ações e propõe atividades cada vez mais complexas, conduzindo o aluno até a quinta fase de cada nível, na qual poderá sintetizar o conhecimento abordado. De acordo com Kaleff et al (1994, p.7), "o papel do professor nesta fase é o de auxiliar no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem, todavia, introduzir ideias novas ou discordantes". Além disso, Machado (2011, p. 57-58), salienta a necessidade de "perceber, na escalada dos níveis, a crescente complexidade do objeto concreto: dos elementos básicos passou-se às suas propriedades, às relações entre propriedades, às cadeias de propriedades e às propriedades das cadeias".

Assim, o aluno é capaz de perceber e acompanhar sua evolução cognitiva, podendo fazer um paralelo do antes e depois do ensino. Fato percebido na fala do aluno "Y", quando questionado sobre a clareza de conceitos vistos anteriormente: Claro eles não estavam, mas com esse projeto que nós tivemos no 2º ano ficou claramente visto que a metodologia tradicional, ela pode ser aplicada, mas ela não, não... como eu posso dizer? Ela não é 100% aprendizagem, porque nesse método de Van Hiele nós temos o contato com o sólido, as planificações, nós podemos construir, contar as arestas visivelmente, os vértices e tudo mais.

Os alunos envolvidos pelo Modelo de Van Hiele deixaram impressões positivas acerca do Modelo, como afirma a aluna "K" (turma "B"), ao responder a pergunta: O que você prefere, o ensino tradicional ou a Metodologia de Van Hiele? Com certeza a metodologia de Van Hiele, porque é muito mais fácil a gente aprender por ela, do que simplesmente um desenho no quadro ou o professor falando horas e horas. Nesse sentido, a aluna "L" (turma "B"), destaca sua preferência pelo Modelo: Porque nós temos um contato melhor. Tem uma base de entendimento melhor. Você passa é... a ter é... como se fala? Ter um contato, a ter... a saber como isso foi construído, o que é uma aresta, o que é um vértice. Você tem entendimento melhor.

Desta maneira, a partir das falas dos alunos e resultados nos testes, aponta-se o Modelo de Van Hiele como um caminho viável e motivador, que envolve e pode dinamizar o ensino da geometria espacial, através da valorização do conhecimento prévio, construção e manipulação de materiais didáticos. Diante disso, fica claro que não se pode negar ao aluno o direito de desfrutar de estratégias de ensino diferentes das normalmente praticadas nas aulas de Matemática, como é o caso do modelo de Van Hiele, apresentado aqui como opção.

Considerações

Os relatos de experiência socializados neste capítulo procuraram mostrar sequências de atividades que visavam a introdução de alguns conceitos associados à área de figuras planas e aos Poliedros de Platão, bem como as ideias que estão por trás de algumas das fórmulas apresentadas aos estudantes. Optou-se por esse caminho devido a crença de que uma abordagem mais rigorosa dos conceitos explorados não seria pertinente, pois não estaria de acordo com o nível de aprendizagem no qual os alunos se encontravam. A opção por esta estratégia é corroborada pela resposta dada por Nasser (1991), com base no modelo de Van Hiele, a pergunta: Por que os alunos têm dificuldade em geometria? "Por que, em geral, o ensino é dado no nível 3 (Van Hiele) e os alunos, na maioria, não passam do nível 1. Portanto, não pode haver entendimento, e a aprendizagem é apenas por memorização e repetição" (NASSER, 1991, p. 34).

Entre as dificuldades enfrentadas, ressalta-se a adoção de uma metodologia com a qual os envolvidos não estavam familiarizados. Ademais, o tempo para a aplicação do trabalho de campo em função de fatores diversos, os quais vão desde as exigências da academia até a realidade da escola, podem ter contribuído para aceleração dos procedimentos inerentes ao modelo. Então, questiona-se: Será que o tempo fornecido era suficiente para que os alunos respondessem a cada questão proposta? Qual o momento adequado para apontar caminho que conduza as respostas autônomas? Questões difíceis de serem respondidas, principalmente diante de turmas tão heterogêneas.

Não se pode negar que questionamentos acerca do tempo de aplicação são importantes para análise dos resultados, contudo as metodologias possuem características e fins distintos. Enquanto, por exemplo, a metodologia tradicional do ensino de Matemática prioriza o conteúdo que é abordado através da resolução de exercícios, visando o aprendizado por meio da repetição, o Modelo de Van Hiele firma-se no aprendizado crítico, analítico e construído com o aluno, a partir de sua vivência e conhecimento informal, viabilizando uma avaliação mais qualitativa do ensino de Matemática.

Considerando os pontos destacados neste trabalho, é fundamental lembrar que SABER e SABOR possuem a mesma origem etimológica o que nos leva ao questionamento: se há métodos, como o de Van Hiele, que podem tornar o processo ensino/aprendizagem mais envolvente, dinâmico, motivador e por que não dizer, "saboroso", por que não os utilizar?

Devemos abandonar o uso de modelos como o proposto pelo casal Van Hiele, que contém todas as características para obter uma aprendizagem mais efetiva segundo os estudos de Hattie et Al. (2018)? Ou devemos provocar a mudança na forma como estão hoje estruturados os sistemas de ensino no Brasil, mesmo que as políticas públicas não facilitem este processo? Tais reflexões, que não esgotam esta discussão, quiçá iniciem perturbações que conduzam a novas práticas para o ensino de geometria.

Referências

CROWLEY, M. L. O modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. [org.]. Apreendendo e ensinando geometria. São Paulo: Atual, 1994. p. 1-20.

HATTIE, John et Al.; Visible Learning for Mathematics, Grades K-12 What Works Best to Optimize Student Learning. California: SAGE Publications Ltd., 2017.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. Matemática: volume único. São Paulo: Editora Atual, 2007.

KALEFF, Ana Maria; HENRIQUES, Almir de Souza; REI, Duke Monteiro; FIGUEIREDO, Luiz Guilherme. Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele. Bolema, Rio Claro. v. 9, n. 10, 1994, p. 01 – 08. ISSN 1980-4415. Disponível em: https://cutt.ly/6kEk5if. Acesso em: 24 jan 2020.

MACHADO, Nílson José. Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MOURA, L. K. J. Visualização dinâmica no ensino de geometria. 2018. 265 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá, 2018. Disponível em: <https://cutt.ly/skEzlUD>. Acesso em: 09 set. 2019.

NASSER, Lilian. Níveis de van Hiele: Uma explicação definitiva para as dificuldades em geometria? In: Boletin GEPEM/UFRJ, n. 29, p. 31-35, Rio de Janeiro, 1991. Disponível em: http://costalima.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/48/30. Acessado em 10/07/2020.

PASTOR, A. J. Aportaciones a la Interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. la evaluación del nivel de razonamiento. 1993. Disponível em: https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textos pdf/Jai93.pdf. Acesso em: 10 jul. 2017

SANTOS, R. A. Poliedros de Platão: Uma Abordagem Segundo o Modelo de Van Hiele de Desenvolvimento de Pensamento Geométrico. 2014. 99 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática. Santarém, 2014. Disponível em: https://cutt.ly/QkEBj4D. Acesso em: 21 fev 2020.

SEVERINO, Antônio Joaquim. Metodologia do trabalho científico. 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA, L. Modelo de aprendizagem de geometria do casal Van Hiele. 2014, Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=1236228. Acesso em : 05 maio 2016

SILVA, T. A. F. Área de figuras planas: uma abordagem segundo o Modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico no 7º ano do ensino fundamental. 2018. 89 fl. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional, Santarém, 2018. Disponível em: https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes. Acesso em: 04 jan 2021.

Uma proposta de base tecnológica para o ensino de funções

José Ricardo e Souza Mafra[1]
Sérgio Silva de Sousa[2]

Introdução

Sabe-se que, em pleno século XXI, os dispositivos tecnológicos passaram a ocupar um espaço cada vez mais permanente na prática cotidiana das pessoas. A exemplo disso, na esfera educacional, essa realidade não poderia ser diferente, já que o uso dessa ferramenta, no contexto da sala de aula, passou a ser vista e tida como uma necessidade do professor, na formação de seus alunos para enfrentar os desafios proporcionados pelo mercado de trabalho.

O conhecimento de tais recursos tecnológicos e a forma de como utilizá-los são fatores primordiais nesse processo de inovação, pois só o fato do aluno se deslocar para um laboratório de informática já traz para si um mundo de possibilidades. Dentre essas possibilidades está um novo olhar sob a matemática, transformando o ensino tradicional em uma moderna, estimuladora e dinâmica relação de ensino e aprendizagem.

Sendo a Matemática uma disciplina significativa, que traz no seu

[1] Ufopa. E-mail: jose.mafra@ufopa.edu.br
[2] Ufopa. E-mail: pfsergiosousa@yahoo.com.br

bojo uma série de aplicações voltadas para o mercado de trabalho, e que contribui de forma decisiva para o desenvolvimento de conhecimentos de outras áreas, passa a ser vista e tida como um instrumento indispensável para a contribuição de outros aprendizados, nas mais diversas esferas curriculares. Tais aprendizados passam a ser mais significativos para a vida das pessoas quando se buscam verdadeiros aprimoramentos alicerçados nas novas tecnologias.

Nessa perspectiva, esta pesquisa tem como objetivo geral realizar uma investigação, a partir da utilização do *software Geogebra* como um suporte tecnológico ou base de apoio para o ensino e aprendizagem do conceito de função afim para a 4ª etapa/EJA (equivalente ao 8º e 9º ano do Ensino Fundamental). O objetivo principal está centrado na localização de potencialidades educacionais, com base em recursos tecnológicos, capazes de apresentar elementos satisfatórios de validação para a compreensão do conceito da função afim, bem como de seus elementos estruturantes e característicos, sejam eles algébricos ou geométricos. Assim, esta pesquisa é parte de uma dissertação de Mestrado intitulada "SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE APOIO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES AFINS NA 4ª ETAPA/EJA (8º E 9º ANO - ENSINO FUNDAMENTAL", desenvolvida por SOUSA (2015).

Estudos desenvolvidos (SILVA, 2019; SOUSAa, 2014; SOUSAb, 2014) com base em experiências docentes, apresentam em suas considerações que o estudo de funções polinomiais, trabalhado na forma tradicional (literalmente, o uso do quadro e giz) não motiva o aluno. Do ponto de vista contextual, há, no município de Santarém, escolas em que há uma completa falta de estrutura tecnológica, quando não minimamente ou subutilizados (como, por exemplo, utilizados apenas para trabalhos com editores de textos, planilhas eletrônicas etc, e, às vezes, para assistir vídeos).

Assim, a proposta deste estudo é o de apresentar um possível cenário educacional para a aprendizagem da função, como um elemento motivador do ensino, principalmente na EJA (Educação de Jovens e Adultos), uma vez que o aluno dessa etapa apresenta uma realidade escolar bastante diferenciada em relação aos alunos que estudam em tempo regular.

Diante das animações que o *software* oferece, o aluno tem a possibilidade de observar de perto o comportamento da respectiva função, quando da variação de seus parâmetros e ter uma compreensão rápida e dinâmica das características e comportamentos dessas funções. Assim, uma adequação possível dos recursos didáticos, com base tecnológica, busca substituir o tradicionalismo por métodos inovadores que facilitam o aprendizado e despertam o interesse pelo ensino da matemática. A partir desse fato, surge a necessidade de desenvolver a pesquisa em torno do seguinte questionamento: De que forma o professor de Matemática poderá usar o laboratório de informática e os recursos computacionais em sala de aula, como ferramenta de aprendizagem, tornando o ensino diferenciado e de qualidade?

Em se tratando de procedimentos metodológicos, o estudo apresenta elementos de uma pesquisa qualitativa e descritiva, trazendo elementos de estudos bibliográficos, a partir do levantamento de referenciais teóricos (GIRALDO, 2012; VALENTE, 1997; REGO, 2000; AVILA, 2006; dentre outros) e o desenvolvimento de atividades planejadas. Além disso, o estudo possui diretrizes de uma pesquisa de campo, através da entrevista dialogada e observação direta, realizada em um laboratório de informática de uma escola pública, localizada no município de Santarém, cidade do estado do Pará, caracterizando assim um estudo com características de um caso.

Assim, espera-se, com esse estudo, trazer uma contribuição alternativa em termos de métodos de ensino, com base tecnológica, capaz de fornecer um estimulo e motivação ao aluno, no processo de ensino-aprendizagem diferenciado e de qualidade. Almeja-se possibilitar momentos em que sejam possíveis a discussão de características conceituais, envolvendo a matemática, capazes de apresentar uma motivação maior em processos de transformação de aprendizagens possíveis.

Notas Teóricas Introdutórias

Em decorrência dos grandes avanços e transformações tecnológicas, a sociedade vem exigindo do cidadão o desenvolvimento de formas rápidas de pensar e raciocinar, ou seja, a apropriação de conceitos e das técnicas que permitam o uso e o pensar matemático, em diferentes situações possíveis de uso e empregabilidade.

Em termos escolares é de se esperar que seja dada aos docentes e discentes a oportunidade de poder manusear tecnologias, de forma a possibilitarem o desenvolvimento de atividades, em ambientes tecnológicos, que dizem respeito as suas práticas do cotidiano. Assim, esse encaminhamento, pode ser relevante no sentido de permitir a importância e a dimensão da funcionalidade de cada uma dessas ferramentas para que o ensino-aprendizagem da matemática seja realmente de qualidade.

Diante das possibilidades de poder manusear essas ferramentas tecnológicas, esbarra-se em problemas enfrentados pelas escolas, tais como a ausência de profissionais qualificados; disponibilidade de carga horaria para elaboração das atividades e, acima de tudo, os problemas de gestão também interferem e contribuem para desenvoltura dos recursos computacionais de que a escola dispõe.

Nesse aspecto, Valente (1997) reforça a ideia de que o computador pode se tornar um grande aliado na criação de ambientes de aprendizagem ativa, que favoreçam o desenvolvimento de um cidadão com uma postura autônoma, crítica, criativa e reflexiva, capaz de aprender a aprender, saber tomar decisões e saber buscar informações de que necessitam, construindo seu próprio conhecimento. Com isso, entende-se por uso inteligente do computador aquele que busca e tenta provocar mudanças na abordagem pedagógica vigente ao invés de colaborar com o professor apenas para tornar mais e ciente o processo de transmissão de conhecimento PENTEADO (2003).

Nessa busca de provocar mudanças, o professor de matemática dispõe do s*oftware Geogebra*[3]. Essa ferramenta é um diferencial metodológico que pode ser abordada de forma dinâmica, permitindo várias formas de representações, facilitando cada vez mais a compreensão da matemática pelos alunos da EJA (Educação de Jovens e Adultos). Sabe-se também que, na medida em que os alunos podem explorar exemplos de forma orientada pelo professor da disciplina, problemas e conceitos matemáticos, procedimentos matemáticos são executados de forma mais rápida, deixando esses alunos com mais tempo disponível para tomada de decisões, reflexão e análise de resultados obtidos. Isso é muito importante para aqueles alunos que querem buscar novas descobertas, novos conhecimentos e novas informações para o enriquecimento de seu aprendizado.

Assim, diante desses pressupostos teórico-práticos, entende-se que os recursos computacionais são relevantes para o ensino da função afim, na 4ª etapa EJA. Esses recursos são importantes não apenas para a aplicabilidade desse tipo de função, mas para todos os conteúdos curriculares de matemática exigidos pelo sistema educacional das instituições de ensino.

Nesse aspecto, compreende-se que as aulas de matemática, com base nessa perspectiva metodológica, para alunos da EJA contribuem para que esses alunos possam explorar as mais diversas possibilidades tecnológicas. Em adição, possam descobrir uma nova proposta ou postura para ensinar e aprender, a partir da utilização de estratégias tecnológicas, tais como a sugerida na discussão.

Os recursos computacionais vêm se transformando cada vez mais e de forma bem gradativa, em estratégias inovadoras para o ensino da matemática, em especial a aplicabilidade no ensino de funções. Tais recursos, quando utilizados e aplicados de forma adequada e sistematizada, podem se transformar em novos modelos metodológicos e didáticos para os professores dessa disciplina. A aplicabilidade do *software Geogebra* para alunos da 4ª etapa EJA contribui para o ensino e aprendizagem mais interativo, dinâmico e transformador da disciplina

[3] Disponível em http: //www.geogebra.org

matemática, uma vez que esses alunos, considerados diferenciados por causa da faixa etária, almejam um mercado de trabalho mais rápido.

Em geral, esse aluno chega a escola com grande receio de não conseguir cumprir com as exigências institucionais e, ao mesmo tempo, apresenta uma visão empirista de educação. Isto o leva a refutar propostas de ensino que sejam distintas do conhecido modelo de uma aula transmitida via quadro de giz, com pouco dialogo, muita cópia e repleta de exercícios repetitivos para que o aluno execute. Assim sendo, o *software Geogebra* se mostra um recurso alternativo para os processos de ensinar e aprender, sob uma perspectiva inovadora e que possa apresentar elementos de transformação da realidade de ensino desse aluno.

O geogebra e o estudo da função afim

O Geogebra é um *software* livre de geometria dinâmica direcionado para o ensino de conceitos matemáticos, capaz de permitir uma série de estudos e possibilidades que envolvem o geométrico, o algébrico e aritmético de conceitos matemáticos. Para isso, a escolha de um *software* educacional, em sua aplicabilidade em sala de aula, deve levar em consideração uma série de fatores, tais como: a confiabilidade, facilidade no manuseio, simplicidade e praticidade, possuidor de ambiente de trabalho agradável, facilitador e favorecedor de aprendizagem, além de adequação didática (MEDEIROS FILHO e COSTA, 2012).

Nesse sentido, é fundamental ter domínio do *software* quando se vai trabalhar com o estudo de função, de forma a proporcionar situações que tenham realmente significado aos alunos.

Para que isso ocorra, o planejamento é um pré-requisito essencial para o sucesso da aula, de forma que o assunto a ser abordado possa ser explorado ao máximo, tanto por ele quanto pelos alunos. Além disso, o docente de matemática deve conhecer o sistema operacional adotado pela escola para poder adequar o uso do *software* ao estudo da função, proporcionando assim, condições de acessibilidade do aplicativo pela escola e pelos alunos.

A importância dessa certificação do acesso ao *software* é necessária, pois a gratuidade dessa ferramenta, na maioria das vezes, é capaz de facilitar muito mais rápido a sua instalação pela escola, onde a compra de qualquer material sempre exigiu dos seus gestores uma série de procedimentos que podem dificultar a aquisição em tempo real.

As aulas de matemática que envolvem o estudo de funções, com a utilização do *software Geogebra*, tornam-se interativas para os alunos do 4ª etapa EJA pelo fato de transmitir uma série de possibilidades articuladas as suas várias representações, uma vez que na realidade prática de sala de aula, os livros didáticos ofertados pelo Governo Federal trazem os assuntos de forma bem simplificada, faltando a cada um desses assuntos os detalhes, os pormenores, as descrições e os indicativos necessários e indispensáveis ao aprendizado dos alunos.

Considerando-se o domínio do *software* pelo professor, a sua adequação ao conteúdo abordado e acessibilidade dessa ferramenta pela escola e pelos alunos, Giraldo (2012, p. 65) assegura que:

> Os recursos dinâmicos do software Geogebra permitem reconhecer e explorar concretamente relações funcionais entre objetos geométricos. É possível, também, explorar relações entre as propriedades algébricas e o comportamento qualitativo de gráficos de famílias de funções dependendo de parâmetros. Os recursos gráficos possibilitam o controle dos valores numéricos dos parâmetros por meio de uma ferramenta chamada "controle deslizante", propiciando uma nova perspectiva de exploração de funções.

Com base nesses indicativos, é possível no estudo da função, com o auxílio do Geogebra, evidenciar, de forma bem simplificada, as propriedades das funções, a exemplo das que se referem aos coeficientes angular e linear de uma determinada função. A partir disso, sabe-se, também, da importância de representar uma função no Geogebra, de forma a observar o comportamento do gráfico, a partir da variação dos seus coeficientes.

Face a importância do estudo da função, com o auxílio do Geogebra, e da relevância substantiva da utilização das tecnologias para a efetivação de um ensino-aprendizagem diferenciado e de qualidade em relação as ideias de funções, Rego (2000, p. 76) assegura que:

> As principais vantagens dos recursos tecnológicos, em particular o uso de computadores, para o desenvolvimento do conceito de funções seriam, além do impacto positivo na motivação dos alunos, sua eficiência como ferramenta de manipulação simbólica, no traçado de gráficos e como instrumento facilitador nas tarefas de resolução de problemas. A utilização de computadores no ensino provocaria, a médio e longo prazo, mudanças curriculares e de atitude profundas, uma vez que, com o uso da tecnologia, os professores tenderiam a se concentrar mais nas ideias e conceitos e menos em algoritmos.

Assim, o uso das novas tecnologias, de forma planejada e bem sistematizada, pode proporcionar novas formas de aprendizagens, despertando nos alunos o interesse pela curiosidade e pela investigação. Isso se torna fundamental, porque com a utilização dessa ferramenta, é possível existir uma interação entre as dimensões algébricas e geométricas, além do fator economia de tempo que se faz presente nesse processo de investigação e análise matemática.

Dessa forma, é importante a interatividade e a aquisição de conhecimentos prévios capazes de subsidiar a construção de novos conhecimentos e saberes. Nesse processo, em que as tecnologias oferecem possibilidades de mediação na relação de ensino-aprendizagem, os professores de matemática são os orientadores que auxiliam os alunos a adquirirem o caráter autônomo de construção de sua própria aprendizagem.

A caracterização do *locus* da pesquisa e os procedimentos metodológicos utilizados nesta investigação

A escola na qual a investigação foi desenvolvida situa-se na cidade de Santarém/PA, sendo que a mesma Funciona nos turnos matutino (1º ao 5º anos do nível fundamental menor), vespertino (6º ao 9º anos fundamental maior) e noturno (EJA - 3ª etapa/6º e 7º ano e 4ª etapas/8º e 9º ano), atendendo a um público de 576 alunos, sendo que o quadro funcional da escola é composto por 47 funcionários. A escola apresenta uma clientela oriunda do próprio bairro e de outros próximos da escola. A escola possui uma equipe de professores graduados e especialistas e além do ensino regular, a escola contempla turmas da educação de jovens e adultos.

Os sujeitos de investigação foram 20 (vinte) alunos da 4ª. Etapa (correspondente ao 8º e 9º anos do Ensino Regular), matriculados na turma 402 da Educação de Jovens e Adultos (EJA), turno noturno, com idades entre 16 e 45 anos.

Os procedimentos metodológicos foram iniciados com um levantamento bibliográfico no qual buscou-se informações sobre as contribuições do assunto abordado e publicados por meios escritos e eletrônicos (BECKER, 2003).

Após, foram organizados grupos de atividades matemáticas, com base no estudo da função afim[4] e características tais como: seu conceito inicial, tipologia envolvendo gráficos e a noção algébrica e geométrica relacionada com o significado de domínio e imagem de uma função.

Além disso, o crescimento e decrescimento de uma função, bem como as análises relacionadas com estes e demais elementos[5] caracterís-

---

4 Uma função afim é toda função do tipo . $\begin{array}{l} f: IR \to IR \\ x \mapsto f(x) = ax + b \ com \ a \neq 0. \end{array}$.

5 Em resumo, as características da função afim são:
1) Se a ≠ 0 seu Dm = IR e Im = IR o coeficiente a é chamado de taxa de variação $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ou coeficiente angular(geometria analítica) e b é denominado de coeficiente linear, o gráfico da função corta o eixo y no ponto P(0,b) pois f(0) = a.0 + b = b.
2) Seu gráfico é uma reta não vertical desde que $x_1 \neq x_2$. Se a > o a função será crescente e se a < 0 a função será decrescente.
3) A função afim f(x) = ax + b corta o eixo das abscissas no ponto $\left(\dfrac{-b}{a}, 0\right)$, denominado de zero ou raiz da função.
4) Se b = 0 a função afim é chamada de linear f(x) = ax que é o modelo matemáti-

ticos de uma função, tais como o estudo dos coeficientes e resolução de equações lineares, integraram a composição e planejamento das atividades executadas na sala de aula e no laboratório de informática da escola, tendo como suporte o *software Geogebra*.

Antecedendo o desenvolvimento das atividades foram realizadas incursões iniciais, com os participantes da pesquisa, em relação a familiarização com o aplicativo em sessões de atividades, onde foram apresentados aos alunos os principais recursos e características de operação e manipulação do *software*, dando início assim, a pesquisa de campo efetiva.

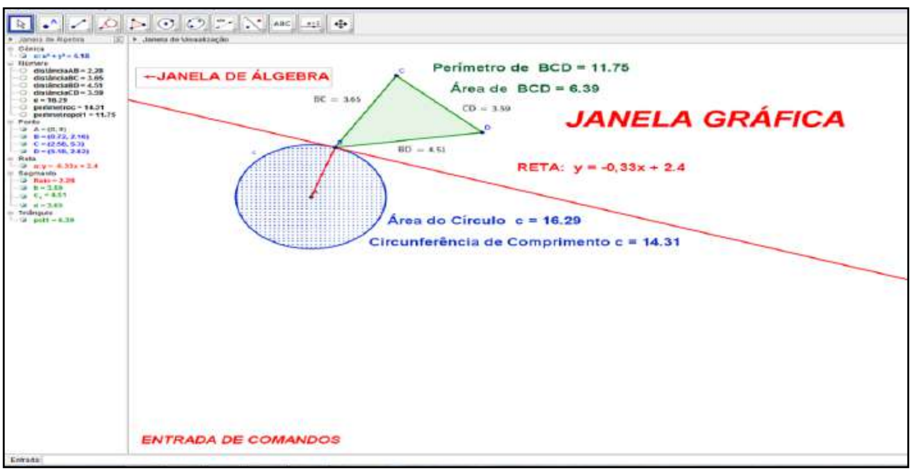


Figura 01: ***Apresentação do*** **software** ***Geogebra***
Fonte: *Software GeoGebra* versão 4.4

Segundo Leopardi (2002), entende-se que o propósito da pesquisa de campo é o de aproximar-se das pessoas, de modo a compreender um problema ou situação, a partir de seu cenário natural, sem uma estrutura ou controle, por ele imposta. Normalmente é realizada pela observação direta, ou seja, um levantamento de casos, a exemplo desta

---

co para problemas que envolvam proporção, seu gráfico é uma reta passando pela origem. Se a = 1, a função linear recebe o nome de função identidade f(x) = x cujo gráfico é bissetriz do I e III quadrantes.
5) Se a = 0, a função afim se transforma na função constante f(x) = b de domínio IR e Im = {b}, sendo seu gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

pesquisa, que ainda tem se deparado com professores de matemática que não utilizam os recursos computacionais em suas aulas, para que o ensino-aprendizagem se efetive com qualidade, em detrimento desses recursos didático-metodológicos.

Por sua vez, este estudo aponta para uma abordagem quantitativa e descritiva, buscando compreender a relação desse tema com a práxis educativa de sala de aula, considerando esse ambiente como ponto de partida para interpretar a realidade dos sujeitos investigados.

Segundo Teixeira (2003, p. 126), "a pesquisa quantitativa utiliza a descrição matemática como uma linguagem, ou seja, a linguagem matemática é utilizada para descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis". Nesse sentido, o papel da estatística é estabelecer a relação entre o modelo teórico e os dados observados no mundo real, a exemplo dos questionários utilizados com alunos e dos gráficos que mostraram o percentual dos resultados obtidos.

Esta pesquisa também é descritiva, pois conforme Bogdan e Biklen (1994, p.56), ao recolher os dados descritivos, os investigadores abordam o mundo de forma minuciosa, já que essa abordagem de investigação percebe o mundo como não trivial e que "tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo".

Para Oliveira (2008, p. 68), uma pesquisa descritiva exige um planejamento quanto à descrição de métodos e técnicas para coleta e análise de dados e, por ser um estudo bastante amplo, "permite o desenvolvimento de uma análise para identificação de fenômenos, e explicação das relações de causa e efeito desses fenômenos".

O recolhimento e a organização dos dados foram realizados entre os meses de maio e junho de 2014, especificamente no laboratório de informática, por meio de exposição didática, exercício orientado, e com a utilização de notebooks, sendo que durante a execução do projeto a professora titular da disciplina matemática cedeu parte da carga horária para a aplicação das atividades.

Em relação aos aspectos éticos dessa investigação, os informantes foram codificados para a garantia do anonimato. O consentimento foi obtido verbalmente após a explicação dos objetivos da pesquisa e finalidade dos resultados. Por isso, o estudo visou buscar referenciais que contribuíssem com o trabalho dos alunos envolvidos, por meio de uma oficina, articulada em três linhas de pensamento: a educação com base tecnológica, o estudo da função afim e o desempenho discente.

Atividades desenvolvidas pelos alunos

As atividades foram iniciadas com a socialização da proposta aos alunos e a professora da turma. Após, foram realizadas sessões em que o objetivo básico era o de fazer com que os alunos se familiarizassem com o *software Geogebra.*

Seguiu-se atividades envolvendo construção básica de estruturas geométricas (o Teorema de Tales, por exemplo), assim como estruturas mais elaboradas tais como sistemas lineares e, outra - sobre a função afim - para reconhecimento das raízes, coeficiente angular, linear, função crescente, decrescente e função constante.

Nessa proposta, optou-se por começar com uma atividade de geometria plana (Teorema de Tales), por ser um assunto do conteúdo do 9º ano que, segundo Lima (2006, p. 89) descreve:

> Procure, sempre que possível, ilustrar seus conceitos com exemplos de conjuntos dentro da matemática. Além de contribuir para implantar a linguagem de conjuntos, este procedimento pode também ajudar a relembrar, ou até mesmo, fatos interessantes sobre Geometria, Aritmética etc.

Nesse sentido, foi importante para os alunos porque puderam manipular o *software* e descobrir as suas potencialidades. Com isso, as atividades que foram desenvolvidas ao longo da pesquisa, serviram como estímulo para a revisão e aprofundamento de conceitos envolvendo geometria e a noção de função afim.

Devido ao espaço e limitação para este artigo, apresenta-se a seguir um exemplo dentre as atividades desenvolvidas. A atividade *Explorando os coeficientes a e b da função afim y = ax + b e resolução de sistemas lineares formados por duas retas*.

Atividade(2) - Explorando os coeficientes a e b da função afim y = ax + b e resolução de sistemas lineares formados por duas retas.
Objetivo Geral: • **Resolver graficamente um sistema linear com o uso *software Geogebra* e interpretar a sua solução bem como entender os efeitos dos coeficientes a e b no gráfico da função afim y = ax + b**
Objetivos Específicos: • **Reconhecer o ponto de intersecção de duas funções como a solução de um sistema linear formado pelas duas funções.** • **Identificar as raízes de uma função através de seu gráfico e qual é o seu efeito na função.** • **Reconhecer que o ponto onde o gráfico corta o eixo y é o coeficiente linear (b).** • **Identificar o coeficiente angular da reta e reconhecê-lo como uma taxa de variação.** • **Saber identificar se a função é crescente ou decrescente apenas pela análise do sinal do parâmetro "a" da função.**

Na atividade (2) solicitou-se a construção da resolução gráfica de um sistema linear, com o suporte do *software Geogebra*, com base nas funções abaixo, utilizando-se o mesmo plano cartesiano:

a) y = 2x + 4 b) y = -2x + 8

O roteiro de construção, conforme tutorial elaborado abaixo, a partir de etapas planejadas, foi pensado de forma a orientar os alunos, nos passos de construção no *software*.

Roteiro de construção:

1) Com o *software Geogebra* aberto digite na janela de entrada as seguintes funções afins y= ax + b e pressione enter.

a) y = 2x + 4 b) y = -2x + 8

2) Escolha a ferramenta (8) e a opção inclinação de um clique com o botão esquerdo do mouse nos gráficos das funções (a) e (b).

3) Escolha a ferramenta (2) e a opção interseção de dois objetos , clique com o botão esquerdo do mouse no gráfico da função (a) e no gráfico da função (b).

Encontrando raízes (Graficamente a raiz de uma função é o ponto onde gráfico intercepta o eixo das abscissas eixo x)

4) Escolha a ferramenta (2) e a opção interseção de dois objetos , clique com o botão esquerdo do mouse no gráfico da função (a) e no eixo x, novamente no gráfico (a) e no eixo y, repita o procedimento para a função (b)?

5) Digite no campo de entrada x = - 1 e pressione enter, faça o mesmo para x = 3.

6) Escolha a ferramenta (2) e a opção interseção de dois objetos , clique com o botão esquerdo do mouse na reta que representa x = - 1 no gráfico da função (a) e da função (b),respectivamente. Faça o mesmo para a reta x = 3.

7) Realçando os gráficos: clique com o botão direito do mouse no gráfico da função (a) e escolha propriedades, cor vermelha, estilo 5. Faça o mesmo para a função (b) escolhendo a cor azul.

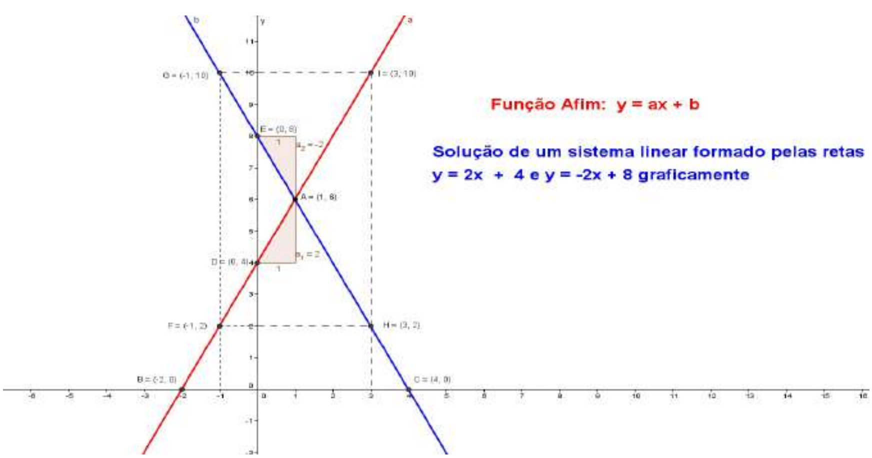


Figura 02: ***Solução de um sistema linear formado por duas retas***

Fonte: *Software GeoGebra* versão 4.4

Após a elaboração, pelos alunos, das soluções geométricas propostas da atividade, foi solicitado que os mesmos respondessem ou indicassem respostas a questões relacionadas aos propósitos conceituais e característicos da atividade em questão.

Explorando conceitos:

a) Qual o valor do ponto (par ordenado (x;y)) de encontro (interseção) da função (a) e da função (b)? R=__________________________

b) Substitua a abscissa desse ponto (valor de x) na função (a) y = 2x +4 e na função (b) y = -2x + 8. Qual foi o valor encontrado para y? R=__________________________

c) Qual é o ponto onde o gráfico da função (a) intercepta o eixo y? R=__________________________

d) Qual é a relação da ordenada (valor de y) desse ponto com o coeficiente b da função (a) y = 2x + 4? R=__________________________

e) Qual é o ponto onde o gráfico da função (a) corta o eixo x (eixo das abscissas)?

R=__________________________

f) Substitua a abscissa desse ponto (o valor de x encontrado no item e) na função (a). O que você observa? R=__________________________

g) Qual é o ponto onde o gráfico da função (b) corta o eixo x (eixo das abscissas)?

R=__________________________

h) Substitua a abscissa desse ponto (o valor de x encontrado no item g na função (b). O que você observa? R=__________________________

Obs: O valor de x que zera a função (y = 0) é chamado de raiz da função

i) Quando x_1 = - 1 na função (a) qual é o valor correspondente de y_1 =_____ (ponto F(-1,2)) e quando x_2 = 3 ainda na função (a) qual é o valor de y_2=_____ (ponto I(3,10))?

j) Quanto foi que x aumentou (variação de x $\Delta x = x_2 - x_1$) quando este passou de x_1 = -1 para x_2 = 3 na função (a) ?

R=________________

k) E quanto y aumentou ou diminuiu nesse mesmo intervalo (variação de y $\Delta y = y_2 - y_1$) na função (a)? R=________________

Obs: O símbolo Δ é uma letra grega e se chama delta.

l) Qual é a razão entre o aumento em y sobre o aumento em x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

m) Qual a relação dessa razão com o coeficiente a da função y = 2x + 4.

R=________________

Obs: Esse valor é chamado de taxa de variação da função ou coeficiente angular da reta, quer dizer que para o aumento de uma unidade no eixo x, o eixo y sofrerá um aumento de 2 unidades, e mais, se esse valor for positivo a > o esta função será chamada de função crescente, ou seja, a medida que o valor de x aumentar o valor de y também aumentará.

n) Quando x_1 = -1 na função (b) qual é o valor correspondente de y_1 =_____ (ponto G) e quando x_2 = 3 ainda na função (b), qual é o valor de y_2=_____ (ponto H)?

o) Quanto foi que x aumentou (variação de x $\Delta x = x_2 - x_1$) quando este passou de x_1 = -1 para x_2 = 3 ? R= Δx =_____________

p) E quanto y aumentou ou diminui nesse mesmo intervalo (variação de y $\Delta y = y_2 - y_1$) na função (b)? R= $\Delta y = y_2 - y_1$ =_____________

q) Qual é a razão entre o aumento em y sobre o aumento em x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

r) Qual a relação dessa razão com o coeficiente a da função y = -2x +8. R=________________

Obs: Esse valor é chamado de taxa de variação da função, quer dizer que para o aumento de uma unidade no eixo x, o eixo y sofrerá uma diminuição de 2 unidades, e como esse valor é negativo a<o, esta função é chamada de função decrescente, ou seja, à medida que o valor de x aumentar o valor de y diminuirá.

Uma vez familiarizados com o *software*, os alunos então passaram a entender mais claramente a respeito da taxa de variação da função, em relação à unidade no eixo x e no eixo y, levando em consideração a sua ocorrência como crescente ou decrescente.

Figura 03: Alunos desenvolvendo as atividades
Fonte: Sousa (2015)

Nesse aspecto, a experiência foi muito válida porque os alunos se envolveram ainda mais nas atividades propostas, e em um processo de interação coletiva, cada um foi ajustando a dúvida do outro diretamente nos exercícios propostos com a ajuda e orientação do acadêmico, durante o tempo previsto para essas atividades.

Algumas Conclusões E Considerações Sobre As Atividades Desenvolvidas

Em relação as atividades desenvolvidas, os alunos passaram a conhecer ainda mais sobre o uso do *software Geogebra* como uma alternativa para o ensino e aprendizagem de matemática. As questões propostas aguçaram a curiosidade de cada um por ser para eles um programa novo, inédito, mas que com a utilização dessa ferramenta, o ensino de matemática torna-se mais interessante e prazeroso, tanto para professores quanto para alunos. Isso se torna gratificante, principalmente quando se percebe na fisionomia de cada aluno um ar de satisfação e de dever cumprido.

Apesar de toda essa satisfação durante a realização das atividades com os alunos, também se deparou com uma série de dificuldades nesse encontro. Primeiro, porque se trabalhou (EJA), os quais apresentam muitas dúvidas em relação aos conteúdos de matemática e, segundo, porque a escola não dispõe de profissional capacitado e qualificado para administrar um laboratório de informática, com capacidade bem limitada (das 18 máquinas existentes, somente 10 estavam funcionando, quando do desenvolvimento das nossas atividades). Mas, apesar dos problemas e dificuldades encontradas, o alcance dos objetivos propostos superou toda e qualquer expectativa, principalmente quando os próprios alunos testemunham a veracidade.

Após o desenvolvimento das atividades, um questionário foi proposto como uma forma de inquirir o posicionamento dos alunos diante do uso do *software Geogebra* como uma base (proposta) metodológica de ensino e aprendizagem de matemática. As questões versaram sobre diversos aspectos, relacionados aos propósitos deste trabalho. Devido a limitação de espaço, para este trabalho, apresenta-se um recorte de resposta, emitidos pelos alunos.

Evidenciou-se, com as respostas fornecidas, a importância do computador como uma ferramenta que auxilia e facilita a aprendizagem dos alunos nas aulas de matemática, além de colaborar com o professor para tornar mais eficiente o processo de transmissão de conhecimento (PENTEADO, 2003).

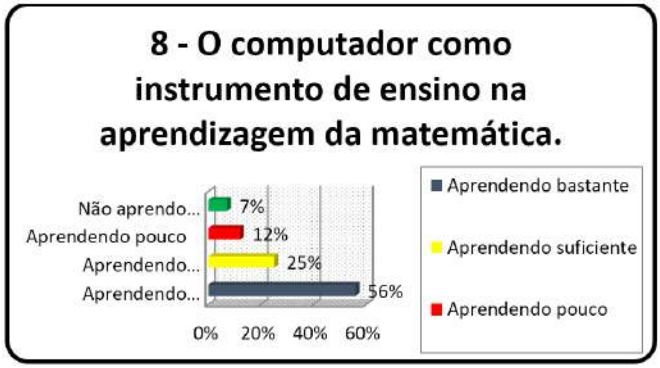


Gráfico 01: ***O computador como instrumento de ensino na aprendizagem da matemática.***
Fonte: Sousa (2015)

O auxílio do computador, nas aulas de matemática, para a maior parte dos alunos (81%), facilita a aprendizagem, embora ainda haja uma porcentagem de 19% que sente dificuldades ao utilizá-lo.

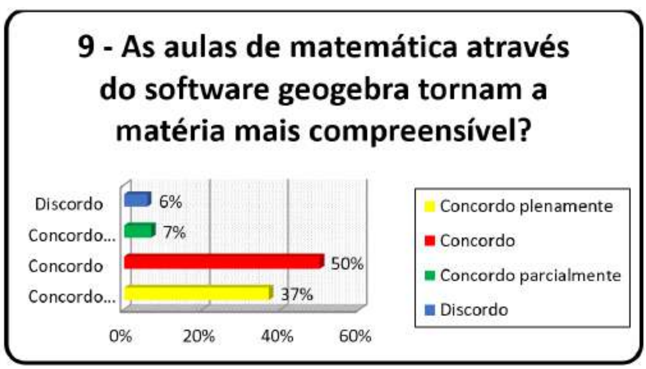


Gráfico 02: ***As aulas de matemática através do* software Geogebra *tornam a matéria mais compreensível?***
Fonte: Sousa (2015)

Quando perguntados se as aulas de matemática através do *software Geogebra* tornam a matéria mais compreensível, a maioria respondeu positivamente e declararam que as aulas de matemática se tornam mais compreensíveis com a utilização do *software*, principalmente por permitir reconhecer e explorar relações funcionais entre objetos geométricos (GIRALDO, 2012, p. 65).

O uso do aplicativo contribui para o entendimento de certos conteúdos da disciplina matemática (87% da amostra), mesmo que, para alguns, não seja tão eficiente (13%).

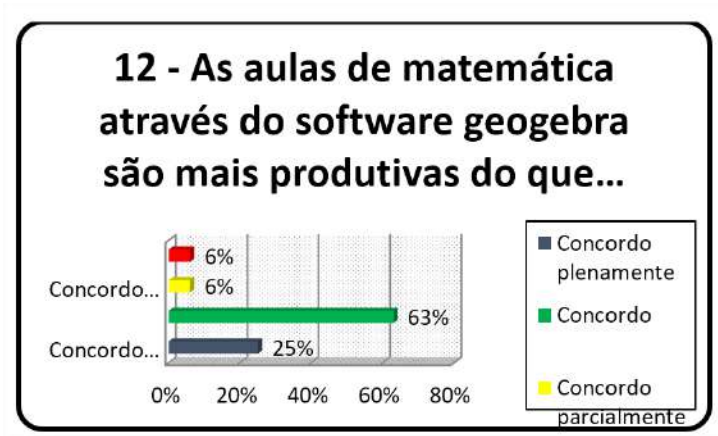


Gráfico 03: ***As aulas de matemática através do*** **software Geogebra** ***são mais produtivas do que o modelo tradicional de ensino?***
Fonte: Sousa (2015)

Mostrou-se aos alunos e, conforme suas respostas apresentadas acima, a quase totalidade (88%), confirma que o *software* é uma ferramenta de ensino matemático que pode tornar a aula mais produtiva do que o modelo tradicional de ensino, principalmente por facilitar a compreensão e aprendizagem dos conteúdos programáticos (ÁVILA, 2007 apud ALLEVATO, 2005).

É importante salientar que através do questionário realizado entre os alunos, chega-se à um parecer de que o uso do *software Geogebra* no ensino de matemática pode ser um facilitador de aprendizagem e que, apesar dos alunos sentirem uma dificuldade inicial no seu manuseio, com treinamento essa dificuldade poderá ser reduzida. O aplicativo pode ser uma ferramenta interessante e motivadora do ensino de matemática, principalmente de geometria e funções, pois cada vez mais o jovem está manuseando o computador. Isso faz com que a aula tradicionalista seja incrementada com a utilização da máquina e dos programas computacionais. As ferramentas de trabalho docente, antes quadro e giz, passam a ser o computador e os *softwares*.

Portanto, a contribuição da tecnologia é a de favorecer a assimilação de conteúdos que, antes eram complexos e difíceis, passam a ser mais fáceis e compreensíveis. A dificuldade e a insegurança diante da ferramenta computacional está sendo superada, gradativamente, mediante a prática docente eficiente. Assim, busca-se um ensino diferenciado com qualidade que refletirá no próprio comportamento discente, para que se tenham sujeitos mais participativos, dinâmicos, críticos e transformadores da sociedade.

Considerações finais

A introdução da informática e de seu personagem principal "o computador" na educação tem provocado uma verdadeira revolução educacional. As diferentes modalidades de uso da informática e a quantidade de programas educacionais existentes mostram que esta tecnologia pode ser bastante útil no processo de ensino-aprendizagem.

Para a implantação da informática na educação, são necessários basicamente quatro componentes: o computador, o *software* educativo, o professor capacitado para usar o computador como meio educacional e o aluno. Todos eles têm igual importância.

O computador, junto com o professor, tem a função de ensinar o aluno, ou seja, ao invés de fazer uso do papel ou do livro, é usado o computador como instrumento de ensino. Para este fim, é necessário que se adquiram *softwares* com fins educativos e para o ensino de funções e geometria plana. O aplicativo *Geogebra* por ser um *software* livre e o mesmo oferecer várias possibilidades de testar conjecturas e aferir resultados pode contribuir nesse sentido.

Importante destacar que não se trata de uma substituição das aulas tradicionais, e, sim, de mais uma ferramenta de apoio para ajudar os professores, pois hoje se vive num mundo dominado pela tecnologia e por processos que ocorrem de maneira muito rápida. Nessa perspectiva, o estudo revelou que o computador é uma ferramenta motivadora no processo de ensino-aprendizagem, uma vez confirmada pelos alunos a sua importância e eficiência no ensino de matemática. Com isso, a maioria dos alunos demonstrou não sentir tantas dificuldades em trabalhar com o *software*, haja vista que este facilita a aprendizagem, contribui para o entendimento de certos conteúdos da disciplina, evidenciando um ensino diferenciado, com o auxílio de uma ferramenta tecnológica avançada.

O estudo revelou, porém, que uma minoria de alunos ainda adota traços da educação tradicional, com insegurança ao utilizar o computador, apresenta dificuldade de manuseio do programa, comprometendo com isso o ensino e a aprendizagem. Mesmo com as vantagens e/ou desvantagens comprovadas na pesquisa, fica registrada a importância do computador e a utilização eficaz do *software Geogebra* na aprendizagem dos alunos. Não esquecendo, contudo, que para um bom rendimento da aula baseada no *software* é de fundamental importância que professor prepare a aula, teste no *software* os resultados e peça ajuda dos responsáveis pelos laboratórios de informática das escolas para auxiliá-lo. Em suma, na educação não se deve ter medo do novo e, sempre que possível, há de se fazer algo diferente para melhorar o ensino, apesar das dificuldades encontradas, tais como: pessoal qualificado para assumir os espaços pedagógicos, cursos de capacitação para esses profissionais e políticas públicas efetivadas pelo governo.

Dessa forma, acredita-se que o estudo da função afim, atrelado ao *software Geogebra* como ferramenta de apoio para um ensino-aprendizagem diferenciado e de qualidade, favorece a verdadeira aprendizagem dos conceitos que realmente importam nesse processo, e que o uso das novas tecnologias em sala de aula só traz benefícios valiosos e de suma relevância para a prática educativa dos professores de matemática.

Uma implicação direta destes resultados é a localização de domínios destes aspectos, por parte dos estudantes, de forma a perceberem a vantagem e aplicabilidade dos recursos tecnológicos para aprender e compreender conceitos matemáticos, caracterizando assim, uma prática social importante para a crítica e transformação da sociedade

Referências

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Associando o computador à resolução de problemas fechados:** análise de uma experiência. Rio Claro: UNESP, 2005.

ARAÚJO, Luís Cláudio; NÓBRIGA**,** Jorge. **Aprendendo Matemática com o Geogebra.** São Paulo: Atual, 2010.

ÁVILA, Geraldo Severo de Sousa. **Análise Matemática para licenciatura**, 3. ed. rev. e ampl. São Paulo: Blucher, 2006.

BECKER, Juçara. **Metodologia da Pesquisa.** Manual do Curso de *Telemarketing* e Vendas-CEDAEM – Centro de Desenvolvimento Acadêmico e Empresarial, 2003.

BOGDAN, Robert & BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação.** Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

________. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

CRESPO, Antônio Arnot. **Matemática Comercial e Financeira,** 13. ed. São Paulo: Saraiva, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo** é Matemática**.** Ensino Fundamental – 5. à 8. Séries, 4 Volumes. São Paulo: Ática, 2005.

DOLCE, Osvaldo & POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar 9:** geometria plana. 8.ed. São Paulo: Atual, 2005.

GIRALDO, Victor et al. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática.** Rio de Janeiro: SMB, 2012.

IEZZI, Gelson & MURAKAMI, Carlos**. Fundamentos de Matemática Elementar 1**: **conjuntos, funções.** 8.ed. São Paulo: Atual, 2004.

LEOPARDI, Maria Tereza. **Metodologia**: pesquisa de campo. 2. ed. rev. e atual. Florianópolis: UFSC, 2002.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio.** 9.ed. Vol. 1. Rio de janeiro: Sociedade brasileira de Matemática, 2006. Coleção do professor de Matemática.

MACHADO, Nilson José. **Coleção Questões de Nossa Época.** 6. ed. V. 43, São Paulo: Cortez, 2012.

MARCONI, Marina de Andrade & LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de pesquisa**: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisas, elaboração, análise e interpretação de dados. 6. ed. Reimpr. São Paulo: Atlas, 2007.

MEDEIROS FILHO, Fernando e COSTA, Rodrigo A. **Uma proposta de Método para a avaliação de Softwares educacionais através de uma visão psicopedagógica.** Revista Tecnológica na Educação. Ano 4, número 7, Rio de Janeiro, dezembro de 2012.

NETO, Antônio Caminha Munhoz. **Tópicos de Matemática Elementar: introdução à análise.** 1. ed. Vol. 3, Rio de Janeiro: SBM, 2012.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer pesquisa quantitativa e descritiva**. 5. ed. São Paulo, 2008.

PAIVA, Manoel. **Matemática – Volume Único.** 1. ed. São Paulo: Moderna, 2005.

PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática constituindo cenários de investigação matemática para a sala de aula.** Rio Claro: UNESP, 2003.

PONTE, João Pedro. **O conceito de função no currículo de Matemática.** Revista Educação e Matemática, APM, Portugal, n. 15, p. 3-9, 1990.

RÊGO, Rogéria Gaudêncio. **Um estudo sobre a construção do conceito de função.** Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte: UFRN, 2000.

SILVA, Aniele Domingas Pimentel. **Modelagem matemática e tecnologias digitais para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos**. 2019. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação). Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Instituto de Ciências da Educação (ICED), Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém/PA, 2019.

SOUSA, Sergio Silva de. Software Geogebra como ferramenta de apoio para o ensino e aprendizagem de funções afins na 4ª etapa/ EJA (8º e 9º ano - ensino fundamental). 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) Programa de Pós-graduação em Matemática em rede Nacional. Instituto de Ciências da Educação (ICED). Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém/PA, 2015. Disponível em: https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=&titulo=&aluno=S%C3%A9rgio+Silva+de+Sousa Acesso em 20/12/2020.

SOUSAa, Miguel Ângelo Moraes de. **Experimentos de trigonometria em sala de aula.** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) Programa de Pós-graduação em Matemática em rede Nacional. Instituto de Ciências da Educação (ICED). Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém/PA, 2014.

SOUSAb, Reilson Matos de. **O uso do Geogebra no ensino de função quadrática.** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) Programa de Pós-graduação em Matemática em rede Nacional. Instituto de Ciências da Educação (ICED). Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém/PA, 2014.

TEIXEIRA, Elizabeth. **As três metodologias**: acadêmica, da ciência e da pesquisa. 6. ed. Belém-Pará, 2003.

VALENTE, José Armando. **O Uso inteligente do Computador na Educação.** Pátio – Revista Pedagógica. Ano 1, N. 1, Rio de Janeiro: Artes Médicas, 1997.

Estudando função com alunos com deficiência visual no multiplano

Maria Aldete de Souza[1]
Mario Tanaka Filho[2]

Introdução

A Educação Especial deve oferecer o Atendimento Educacional Especializado aos alunos com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades. Dentre os que possuem deficiência, encontram-se os com deficiência visual sejam cegos ou baixa visão. Os esforços para a inclusão desses alunos e oportunidades para o efetivo aprendizado são evidentes, principalmente entre os profissionais da modalidade Educação Especial e familiares.

Este trabalho apresenta de forma sucinta o estudo realizado pela autora e defendida na dissertação de mestrado profissional em Matemática pela Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA com o título Introdução ao Estudo de Função para Alunos com Deficiência Visual com o auxílio do Multiplano. Buscando propiciar oportunidades iguais de aprendizagem, enfatizam-se aqui os recursos pedagógicos aplicados a deficiência visual, frente às exigências das políticas educacionais, con-

1 SEDUC-Pa. E-mail: souzadet@gmail.com
2 Ufopa. E-mail: tanakafi@gmail.com

templando a diversidade no contexto da Educação Inclusiva e também contextualiza essa modalidade de atendimento na cidade de Santarém.

O referencial teórico baseia-se na dissertação de Souza (2015) que se fundamenta nas pesquisas do psicólogo russo Lev Vygotsky e em outras dissertações, dentre elas a de Ferronato e de Oliveira. Culminando com uma Sequência Didática que foi aplicada em duas escolas da Rede Estadual de ensino, entretanto a análise dos resultados restringiu-se aos casos de alunos com deficiência visual.

A sequência proposta foi motivada a partir das atividades da dissertação de Oliveira. Tal sequência diferencia-se dos modelos de ensino, propostos nas escolas da rede estadual em Santarém, para introduzir o conceito de função, nos quais os professores levavam gráficos prontos sem que o aluno com deficiência visual, muitas vezes, não soubesse o real significado daquelas marcas.

O instrumento Multiplano desenvolvido por Rubens Ferronato representa uma possibilidade para as dificuldades dessa clientela no que tange ao ensino da matemática, propiciando uma oportunidade concreta de visualização, ainda que tátil, fator importante para as abstrações.

Nesta proposta de um ensino inclusivo, vários recursos pedagógicos foram explorados, dentre eles o multiplano. Destaca-se também a dificuldade da aprendizagem dos alunos, assim como as inquietações oriundas da ação docente no ensino de matemática aos mesmos. Neste contexto, o aluno precisa fazer a sua parte para que o aprendizado se torne o menos desgastante possível, segundo Mosquera (2010), não existe, portanto, um método ideal, e sim, a necessidade em apresentar os materiais apropriados ao aluno e explicar o funcionamento de cada um deles.

Os objetivos do PROFMAT e da SBM: "Estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis" assim como o Projeto de Lei 8035/2010 (Plano Nacional de Educação) que coloca para o decênio 2011 – 2020 "Formar cinquenta por cento dos professores da educação básica em nível de pós-graduação lato e stricto sensu e garantir a todos formação continuada em sua área de atuação". O suporte teórico dessa pesquisa ajuda a concretizar a Meta 4 deste plano: Universalizar, para a população de quatro a dezessete anos, o atendimento escolar aos estudantes com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades na rede regular de ensino.

Neste contexto, o Pacto Nacional pela Alfabetização na idade certa: Educação Inclusiva Brasil (2014), traz a reflexão que a Educação Inclusiva assume um lugar central na sociedade contemporânea e do papel da escola: é necessário garantir o acesso à escola e as condições de aprendizagem para todos os alunos. Além disso, faz-se necessário a formação de professores que, na escola, dizem-se incapaz de lidar com alunos diferentes daqueles com os quais está habituado.

Referencial Teórico

O estudo realizado por Souza (2015) na sua dissertação afirma que formar conceitos matemáticos não é fácil, principalmente para alunos com deficiência visual. Mas o foco deve voltar-se para as atitudes a serem tomadas com tais alunos que, muitas vezes, são deixados à margem do sistema educacional e para ajudar a superar essa realidade, a utilização do Multiplano será apresentada como uma possibilidade, fazendo uma aplicação na aquisição do conceito de função e estudo de gráfico, pois se trata de uma aplicação direta na sala de aula, contribuindo para o enriquecimento do ensino da disciplina. Os outros materiais sugeridos também são acessíveis a todos, abrindo caminhos onde a inclusão possa emergir de fato nas escolas, significando não somente número, mas qualidade do atendimento, sem que este se configure de forma distinta.

No caderno de Educação Inclusiva do Pacto Nacional pela Alfabetização na idade certa Brasil (2014), diz que o "saber" é uma das razões de ser da escola, mas é justamente com ele que os professores passam a ter, hoje, dificuldades para lidar: nos meios sociais mais próximos as escolas a "diferença" vem ganhando evidência nas políticas governamentais, com discursos construídos em torno a "tolerar" e "respeitar", como se tolerância e respeito resolvessem, por si só, os problemas das práticas excludentes nos espaços escolares. Respeitar e necessário, sim, mas não basta apenas "aceitar" ou "tolerar", é fundamental considerar as diferenças e a partir delas, pensar e planejar uma intervenção pedagógica que contemple as funções que, institucionalmente, é a competência da Escola enquanto espaço da Educação.

Neste estudo, faz-se uma reflexão acerca de estratégias para a aprendizagem de todos e em especial das pessoas com deficiência visual, respeitando suas necessidades, desejos e particularidades ou singularidades. Neste sentido, Fernandes (2006) lembra que "o desenvolvimento cognitivo da criança cega é bastante complexo, pois, por um lado ela é completamente dependente do mediador vidente e, por outro está dissociada da concepção que o mediador tem do mundo", requerendo que o docente possua condições mínimas de recursos para fazer com que este aluno possa adquirir conhecimento.

Segundo o Ferronato (2002), no Brasil, o desejo de oportunizar às pessoas com deficiência gera um paradigma próprio de países subdesenvolvidos. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, reserva o capítulo V a Educação Especial, onde assegura a oferta da educação escolar preferencialmente na rede regular de ensino, que converge ao aumento do número de alunos pertencentes a esse grupo nessas escolas. Assim, a escola inclusiva é entendida por uma parcela da população como aquela que abarca uma quantidade de alunos com deficiência na rede regular. Mas como quantidade não significa qualidade, muitas vezes esses alunos só frequentam as classes, mas não participam. No caso de educandos com deficiência visual, algumas adaptações se fazem necessárias, como o uso do Sistema Braille de escrita, necessário para fazer suas anotações e leitura. Só que, na grande maioria, os professores não estão preparados para atendê-los e nem tão pouco, esforçam-se no sentido de amenização da situação. Ferronato (2002) frisa que a presença de um especialista se faz necessária, por que "ele" conhece o braille, "ele" sabe trabalhar as especificidades peculiares a tal deficiência.

De acordo com Souza (2015) a dissertação faz uma viagem pela história da Educação Especial, desde a época do abandono até a Institucionalização, donde perpassou pelos três paradigmas apontados por Romero e Souza (2014), além de mostrar algumas mobilizações em busca da garantia do direito a educação, as contribuições de Vygotsky relacionadas a Educação Especial, alguns termos específicos a deficiência visual, a contextualização da Educação Especial em Santarém no ano de 2014 e possibilidades de alternativas para um ensino inclusivo do conhecimento matemático, além de estratégias que buscam garantir a equidade de oportunidades educacionais, dando condições para alguns esclarecimentos acerca dos conceitos que pairam sobre a Educação Especial.

Quanto a Escrita Braille, mostrou-se seu resgate histórico, a relação entre a escrita braille e o código binário na introdução ao estudo de combinações e os conceitos matemáticos explorados com a linguagem braille, tais como o Princípio Multiplicativo da Contagem e as Combinações retirado destas atividades a partir da criptografia de Pedro Luiz Malagutti (2013) em uma das apostilas do material da OBMEP (Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas).

A autora Souza (2015) fundamentada na dissertação de Ferronato (2002) descreve o instrumento Multiplano em si, a necessidade que deu origem a ideia do material, sua descrição, as possibilidades de aplicação e as informações necessárias para que seja reconhecido pelos possíveis leitores como mais uma alternativa que aproxima conceitos aparentemente limitados às pessoas com deficiência visual.

O Ensino de Funções, mostrando o desenvolvimento da noção de função, evidenciando as principais dificuldades para compreensão de seu conceito foi retirada da dissertação de Oliveira (2010). Os autores Cerqueira e Ferreira (2000) definem os Recursos Didáticos na Educação Especial, relacionando os critérios para alcance da eficiência de utilização desses materiais didáticos e as adaptações de materiais necessárias para possibilitar o ensino de função para os alunos com deficiência visual.

Todas as atividades propostas na Sequência Didática foram retiradas da dissertação de Oliveira (2010) que se baseou nos livros "Construindo o Conceito de Função" e "Álgebra: das variáveis as equações e funções". O objetivo geral da sequência didática é possibilitar o aluno com deficiência visual o entendimento do conceito de função, traçar e analisar gráfico da função afim com auxílio do multiplano e outros recursos pedagógicos concretos. Já o objetivo de cada questão está definido, indicando os conceitos matemáticos abordados, quais aspectos da aprendizagem desses conceitos pretendem-se enriquecer e outros procedimentos da aplicação da sequência.

Metodologia

Foram realizados cinco encontros com os alunos regularmente matriculados no 1o EJA do ensino médio das escolas estaduais Madre Imaculada (código 15011623) e Ezeriel Mônico de Matos código (15011550) todos elucidados por Souza (2015). As informações quanto à modalidade e quantitativo de alunos citadas se baseou nos dados finais do Censo Escolar 2014, publicados no Diário Oficial da União no dia 09 de janeiro de 2015. Fez-se análise dos resultados das atividades e salienta-se que mesmo havendo alunos com deficiência auditiva e outros com deficiência intelectual, os mesmos foram citados superficialmente, pois o foco da pesquisa é a pessoa com deficiência visual, sejam cegos ou baixa visão.

A primeira aplicação com o Multiplano aconteceu na UEEs - Unidade Educacional Especializada Dr. José Tadeu Duarte Bastos, sem o engessamento do tempo limitado aos 40 a 45 minutos de aula da escola. As aplicações seguintes foram nas escolas dos alunos com o professor regente do Ensino Regular da respectiva turma em um horário extraclasse, na Sala dos Professores.

Do total de alunos da escola Madre Imaculada, dois possui deficiência visual. A turma escolhida tinha 15 alunos, no turno noturno, dos quais um era cego. Do total de alunos da Escola Ezeriel Mônico de

Matos, três possui deficiência visual (01 cego e 02 baixa visão). A turma escolhida tinha 20 alunos, no turno vespertino, dos quais uma (01) era cega, dois (02) com baixa visão, cinco (05) surdos e dois (02) com déficit intelectual. A composição da turma é pouco comum, pelo fato de possuir tantas matriculas de alunos especiais, causando estranhamento e fator complicador para a aplicação da sequência.

Concordando com Ferronato (2002), a utilização deste material concreto nas salas de aula a contribui para que a inclusão seja uma realidade, especificamente no que tange a inserção de alunos com deficiência visual nas classes regulares, sem que os mesmos fiquem isolados num "cantinho", perdidos em meio as suas dúvidas. Além do mais, entre os alunos pode haver um compartilhamento maior de informações, sem que haja constrangimento ou medo em ajudar. Quando a confiança emerge no ambiente, todas as atividades são facilitadas, inclusive as relações humanas, tão difíceis de chegarem a um consenso nos tempos atuais. Confiando no outro, o aluno aprende a confiar em si mesmo e busca maximizar suas potencialidades.

Resultados e discussões

Os resultados e discussões ilustrados por Souza (2015) descrevem que na atividade 1, o aluno deveria descrever a sequência observada com suas palavras e identificar as figuras. Os alunos perceberam as regularidades nos problemas, mas tiveram dificuldades na nomenclatura dos polígonos. No entanto, a aprendizagem dos alunos com deficiência auditiva, a dificuldade começava pela comunicação, diminuía na presença do professor de AEE. Os alunos com deficiência intelectual desconheciam qualquer nomenclatura.

A atividade 2, consistia em apresentar conjuntos ordenados de retângulos cuja cardinalidade gerava uma sequência numérica. Nesta atividade figurava um questionamento: "Quantos retângulos terão a figura ocupando uma posição P qualquer?" e consideravelmente, este foi o ponto mais crítico, generalizar algebricamente, pois o uso das variáveis é muito abstrato para a maioria dos alunos. O aluno cego recebeu inicialmente uma atividade impressa, mas faria com ajuda do ledor. Em seguida recebeu as atividades em braille, as figuras geométricas confeccionadas com papel emborrachado (EVA), os retângulos impressos em braille. Nas duas escolas os alunos cegos realizaram as atividades, com dificuldade igual ou inferior aos demais.

A atividade 3 permitia o registro das regularidades numa sequência através de uma situação tátil. Feito o seguinte questionamento: "Se alguém quiser saber quantos palitos serão usados para formar um número n qualquer de triângulos, você saberia escrever uma expressão para ajudá-lo?". Desta vez nenhuma tentativa sequer.

Ao longo da atividade 4, foram feitas relações entre a quantidade de recortes de camisas e a quantidade de pregadores necessários para pendurá-los. Ao solicitar uma expressão matemática que representasse o problema, somente um aluno tentou e acertou.

Na atividade 5 não houve qualquer tipo de material adaptado. Seu propósito foi gerar uma situação não tátil, através da discussão sobre o preço de uma moto que decrescia em progressão geométrica ao longo do tempo. Com esta atividade, os alunos puderam perceber regularidades e realizar generalizações envolvendo a divisão. A maioria dos alunos resolveu a questão.

Na atividade 6, deviam perceber as regularidades e generalizar através do uso da variável n e seus possíveis valores. As turmas não conseguiram bons resultados, houve reclamação quanto ao grau de dificuldade. Mesmo após outros exemplos de sequências, continuaram as dificuldades para generalizar algebricamente. A intenção era mostrar a construção do conceito de função através de problemas do cotidiano. O aluno cego resolveu todas as atividades, sentiu-se estimulado em receber os triângulos confeccionados com palitos na atividade 3, os recortes de papel das camisas e o fio de varal para pendurá-las na atividade 4. Não demostrou dificuldade na atividade 5 nos cálculos de divisão e nem na atividade 6, onde realizou cálculos mentais com habilidade na simulação de comprar e receber troco na compra de pães, mesmo com valores em centavos, ou seja, realizou multiplicação e subtração com decimais. A aluna cega apresentou dificuldade na atividade 5. Não conseguiu representar algebricamente a questão 6, embora saiba explicar o quanto pagar e o troco a receber.

Na atividade 7, a maioria conseguiu entender a regra usada, completando as lacunas com números inteiros positivos; com os inteiros negativos e decimais a dificuldade aos poucos eram minimizadas. Quanto as frases, todos entendiam a regra e usavam somente a linguagem coloquial com propriedade.

Para a atividade 8, o aluno cego recebeu um geoplano em isopor e pregos, assim como massinha de modelar para localizar pontos, enquanto que os outros, uma folha de papel quadriculado. Os cegos tinham a prática de apenas tatear gráficos prontos com relevos, identificando as coordenadas (x, y) do ponto solicitado. Os alunos com baixa visão localizaram em um papel com o plano cartesiano ampliado, sem grandes dificuldades. Embora no início da atividade discutiu-se quanto o comportamento dos números em relação a sua localização no plano cartesiano.

A atividade 9 descrevia uma família contendo seis integrantes, localizados em um gráfico que relacionava suas alturas (abscissas) e idades (ordenadas). Deviam identificar, dadas algumas características, cada integrante da família, alguns possuíam a mesma altura e outros, a mesma idade. Com o objetivo de auxiliar na manipulação e interpretação de gráficos, deveriam interpretar e descobrir tais informações através das perguntas inseridas no problema. E posteriormente, deveriam representar no papel quadriculado ou no Geoplano o mesmo gráfico, invertendo a conotação dos eixos: eixo vertical (alturas) e eixo horizontal (idades). Fato que a maioria dos alunos sentiu muita dificuldade, pois os pontos estavam identificados por números e não por letras maiúsculas. O gráfico em braille, segundo eles, não auxiliou na compreensão em virtude de ter ficado muito espaçado. Mas soube interpretar cada eixo cartesiano apresentado, identificando cada membro da família após as explicações. Realizou a construção do gráfico no Geoplano, com os eixos cartesianos invertidos, com dificuldades.

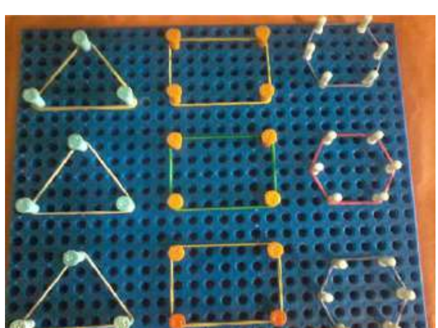
Na atividade 10, obtiveram auxílio coletivamente na interpretação do gráfico dividindo-o em intervalos: 0h às 2h, 2h às 5h e 5h em diante. Com isso, perceberam que nos intervalos a temperatura decresce, se mantém constante e cresce, respectivamente. Assim, a análise e interpretação foram realizadas pela maioria dos alunos.

Na atividade 11, o aluno cego completou a tabela rapidamente sem necessitar de auxílio, uma vez que recebeu uma imagem em braille que representava um reservatório cheio d'água. A construção gráfica foi feita de forma satisfatória.

A Análise dos resultados das atividades realizadas com o Multiplano atendeu as expectativas propostas. Durante a aplicação, a motivação foi uma constante quanto ao toque simultâneo da questão proposta para todos alunos. Importante lembrar que cada aluno demonstrou suas dúvidas e limitações que foram trabalhadas individualmente.

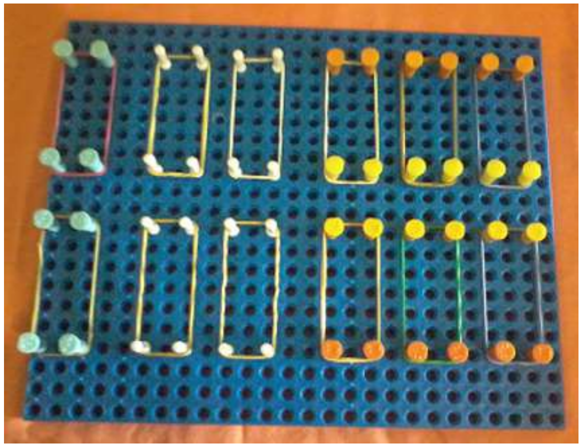
Nas atividades do primeiro dia (Regra Sequencial e Sequência de Retângulos) as figuras 1 e 2 mostram a possibilidade de desenhar figuras planas e, por conseguinte resolver as questões. Ressalta-se que os desenhos podem ser feitos por um colega de sala, professor regente, sem necessariamente precisar ser conhecedor da escrita braille.

Figura 1: Sequência com três figuras geométricas que se repetem periodicamente



Fonte: Autores

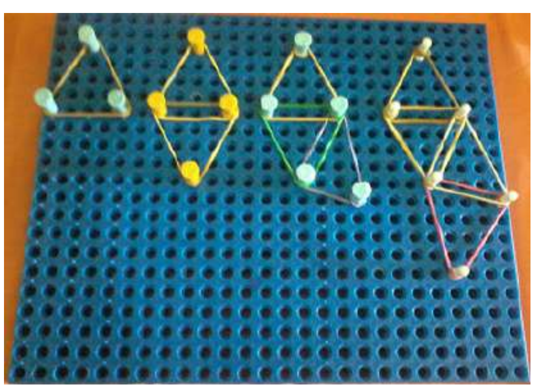
Figura 2: Sequência de Retângulos



Fonte: Autores

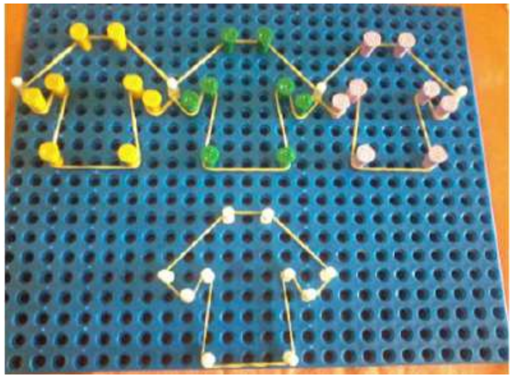
Nas atividades do segundo dia (Triângulos com palitos, Camisas penduradas), as figuras 3 e 4 mostram a possibilidade de desenhar os triângulos e contorno das camisas. A praticidade do uso, no primeiro caso, é a substituição dos palitos, nem tanto pelos palitos, mas pela cola (tempo necessário para fixar); no segundo, representa mais uma possibilidade de manusear o formato das camisas.

Figura 3: Triângulos com palitos



Fonte: Autores

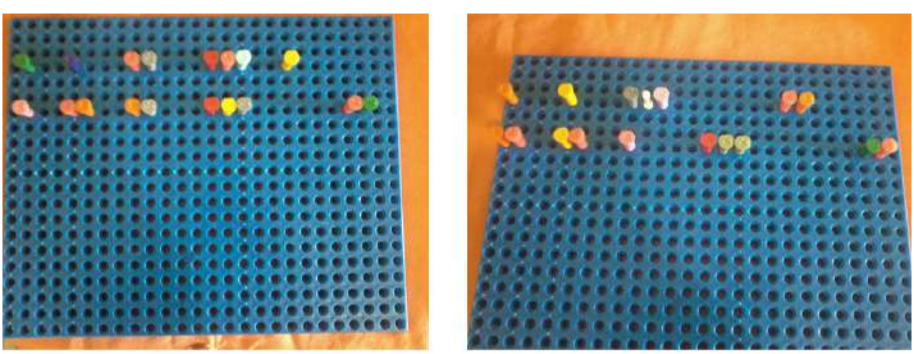
Figura 4: Recortes de papel em forma de camisas



Fonte: Autores

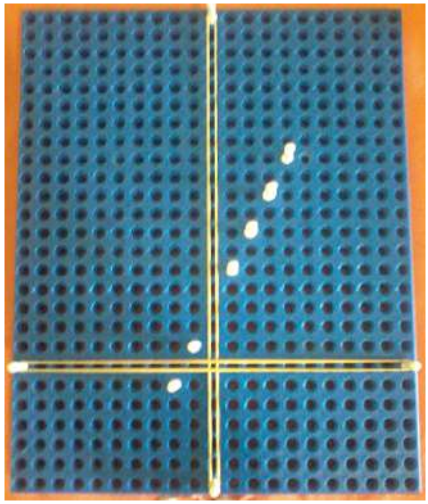
Nas atividades do terceiro dia (Jogo das Regras numéricas e Localização Geométrica de Pontos), a figura 5 mostra a possibilidade de representar os dados numéricos de um quadro, caso o professor AEE não esteja na sala, visto que os números estão representados nos rebites tanto na escrita braille quanto na escrita comum. Os pares ordenados (número dito, número respondido) foram representados no plano cartesiano, conforme figura 6.

Figura 5: Quadro dos itens a) e b) da atividade 7



Fonte: Autores

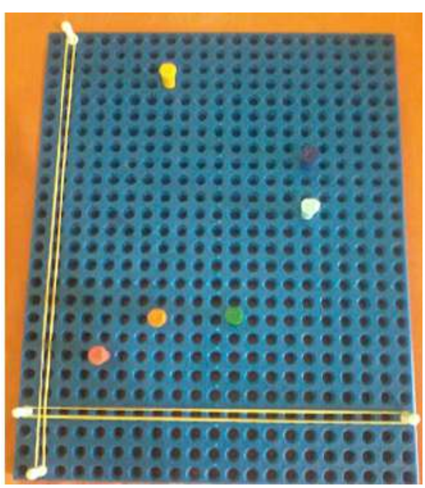
Figura 6: Representação gráfica dos pares ordenados do quadro 7.c)



Fonte: Autores

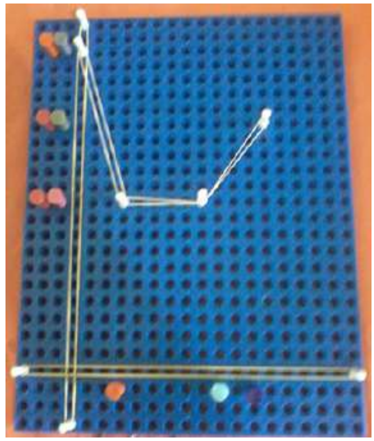
Nas atividades do quarto e quinto dia (Análise de gráficos: Família de Seis Integrantes, A Temperatura, O Reservatório), as figuras 7, 8 e 9 mostram a possibilidade de traçar gráficos simples.

Figura 7: Família de seis integrantes



Fonte: Autores

Figura 8: Temperatura



Fonte: Autores

Figura 9: Representação do reservatório

Fonte: Autores

Os alunos cegos, principalmente aqueles com cegueira congênita (desde o nascimento ou nos primeiros meses de vida) possuem grande dificuldade na exploração tátil bidimensional devido, entre outros fatores, as práticas inteiramente lineares de leitura e escrita em braille. Assim, a maioria das atividades com exploração bidimensional precisava da interferência seja do professor da sala de aula, seja do professor especialista do AEE. Dessa forma, verifica-se a importância do auxílio do professor para ajudar na superação do costume de ler e escrever linearmente, sendo fundamental que o professor trabalhe desenhos e outras representações bidimensionais, como a construção de tabelas e gráficos, a fim de acostumá-los a ler em duas dimensões.

Durante a aplicação das atividades com o Multiplano, foi observada a evolução quanto ao uso da notação matemática tanto no que concerne à leitura quanto à escrita. Antes, os estudantes davam uma solução particular para as questões, dificilmente pensavam em generalizar. Demonstraram a grande dificuldade enfrentada quanto ao uso das letras nas resoluções dos exercícios. Todas as vezes que necessitavam encontrar uma solução envolvendo uma letra, apresentavam receio, respondiam em forma de interrogação, demonstrando insegurança. Neste sentido, vale ressaltar a importância da aplicação de atividades que visavam a abstração e a generalização, buscando o entendimento do uso das letras como variáveis. Os alunos com baixo visão não tiveram muitas dificuldades na concepção da sua tabela, mas também não compreenderam o significado da variável utilizada no contexto de cada exercício. De modo geral, podem até perceber a variação como um todo, mas desconhecem o que de fato está variando. Um dos pontos que vale destacar é a percepção que tiveram da importância da introdução de fórmulas nas tabelas, principalmente quando percebiam e entendiam que a cada substituição das letras por valores numéricos nestas fórmulas o conceito de variável começava a fazer sentido para os alunos.

A Interação Professor x Aluno tem grande importância no processo, pois foi verificada na prática que qualquer material didático utilizado necessita da intervenção do professor a fim de orientar e esclarecer dúvidas que surgem, muitas vezes, de forma inesperada. A interferência dos professores envolvidos sejam os regentes das turmas, sejam os especialistas do AEE ou ainda a aplicadora, gerou importantes discussões ao longo das atividades. Esses questionamentos tiveram dois principais objetivos: auxiliar em dúvidas de interpretação e permitir que os alunos criticassem as próprias respostas. Este último permite maior aproximação dos alunos com o conceito de função. Assim, as intervenções realizadas complementavam os textos das atividades, levantando questionamentos e auxiliando-os na organização do conhecimento. Vale ressaltar o importante papel dos especialistas do AEE através das interações com os alunos e da percepção de dificuldades apresentadas pelos mesmos devidas as limitações da visão. Certos obstáculos, tal como a construção de tabelas na reglete, poderiam não ser observados por profissionais leigos no âmbito do ensino para pessoas com deficiência. A adaptação das atividades, desde a transcrição para o braile até a construção de materiais capazes de ilustrar representações pictóricas contidas nas atividades, permitiu o acesso desses alunos ao material selecionado para esta pesquisa.

O instrumento Multiplano, desenvolvido por Rubens Ferronato em 2000, ainda não é utilizado no munícipio de Santarém nas Salas de Recursos das escolas estaduais, no entanto, verificou-se que representa uma possibilidade a alunos com deficiência visual para amenizar suas dificuldades no que tange ao ensino da matemática, propiciando uma oportunidade concreta de visualização através do tato, fato de fundamental importância para as abstrações.

Considerações Finais

A preocupação com o ensino das pessoas com deficiência há muitos anos, é motivo de inquietação da sociedade em geral. No final da década de 80, surgiu o movimento de inclusão, tendo como base o princípio de igualdade de oportunidades nos sistemas sociais, incluindo a instituição escolar. O crescimento significativo do número de matrículas de alunos da Especial em escolas regulares, suscita ações mais comprometidas com este público, tanto ao que se refere aos sistemas de ensino quanto aos docentes. Há que se capacitar os professores, provê-los de suporte técnico, didático e pedagógico. As Universidades conjuntamente com as UREs devem promover cursos tanto de Formação Inicial como de Formação Continuada nessa modalidade.

Como profissional da Educação Especial, desde 1999, atualmente professora do AEE (Atendimento Educacional Especializado) com a função de identificar, elaborar e organizar recursos pedagógicos e de acessibilidade que eliminem as barreiras para a plena participação dos alunos, considerando as suas necessidades específicas. Além de AEE, a autora ministra Formação Continuada em Códigos Matemáticos em braille e Soroban. Essa vivência vem propiciando conhecer os entraves e as carências que limitam tanto o profissional docente quanto o discente. O desejo de auxiliar o docente para atender a demanda, especificamente, os alunos com deficiência visual, justifica a escolha pelo tema proposto.

Nas considerações finais de sua dissertação, Souza (2015) elucida na análise dos resultados das atividades nas duas escolas, a constatação que houve uma boa participação dos alunos, em todos os encontros realizados. Descreve que, desde o início o interesse em conhecer o material, deixou-os motivados e empolgados. Este fato foi comprovado pelos depoimentos: "é um material próprio para nós trabalharmos", "com ele posso localizar pontos", "foi construído pensando na nossa limitação", "não preciso esperar a construção de gráficos para a próxima aula" e outros. Fundamentada na experiência como educadora na Rede Estadual em Santarém, Souza (2015) afirma com conhecimento de causa, que os cálculos das operações fundamentais eram realizados mentalmente ou no soroban. Com o multiplano, reconhece que surge uma nova possibilidade, esses resultados são obtidos como se tivessem sendo registrados, usualmente, no caderno ou no quadro.

Segundo Ferronato, numa sala de aula, o professor pode trabalhar com auxílio do Multiplano utilizando os mesmos métodos e procedimentos normalmente usados somente por quem enxerga. Assim, as palavras do professor em paralelo com a visualização, mesmo que seja através do tato, faz com que as chances de emergir significado sejam muito maiores. Dentre as atividades da Sala de Recurso, tem-se o Enriquecimento Curricular, nele buscam-se evitar atitudes ao se resolver equações que levem a mecanização excessiva dos procedimentos, criando-se “regras” (algoritmos sem significado), que levam invariavelmente o aluno a não saber o que está realmente fazendo e que, certamente, não trazem significado a sua aprendizagem. E muito comum o aluno decorar regras do tipo “passa para lá com o sinal trocado” ou “passa para lá dividindo” e depois não sabe quando se aplica uma ou outra regra.

Esse tipo de dúvida é fruto de se tentar fixar o algoritmo de resolução em detrimento das ideias associadas aos procedimentos de resolução. O aluno cego, não visualiza tais regras, logo é melhor dizer, explicitamente, o que realmente está se fazendo em cada passagem, para que a aprendizagem ganhe significado para o aluno e evita que “decore” receitas de procedimentos que, muito provavelmente, cedo ou tarde, ele as esquecerá ou as confundirá.

Como as atividades da Sala de Recursos são complementares, as equações não são apresentadas prontas. A tradução de um contexto para a linguagem matemática é, em geral, a parte mais difícil do problema para o aluno, como vimos, na Atividade 7, ao solicitar uma expressão matemática que representasse a regra usada em cada tabela. Por isso deve ser enfatizada, instigando-o a fazer a modelagem do problema, é importante que ele saiba montar a equação. Em geral eles são capazes de resolver a equação, mas não conseguem produzi-la. Fato observado na análise dos resultados das atividades nas escolas, onde para a maioria dos alunos, com ou sem deficiência, responder uma questão, utilizando linguagem matemática, representa grandes dificuldades. Por este motivo, os que participaram da pesquisa, muitos deles optaram por responder com linguagem não matemática, visto que responder com expressões algébricas ou relações numéricas requerem clareza e rigor. Fato observável no item (f) da Atividade 2, no item (d) da Atividade 3, no item (c) da Atividade 4 e na pergunta final da Atividade 6.

As tabelas que apareceram nas Atividades 4, 7 e 11 não são capazes de descrever completamente a regularidade dos eventos em estudo, entretanto, elas fornecem uma primeira ideia da regularidade envolvida assim, deve-se buscar uma representação simbólica para os dois conjuntos de números, tornando-os manipuláveis. Os alunos com deficiência visual necessitam de materiais concretos para que suas abstrações sejam facilitadas, porque não podem enxergar com olhos, mas sim com as mãos.

Num olhar mais abrangente sobre os resultados encontrados, percebe-se que os objetivos propostos nas atividades trabalhadas foram atingidos, com vista a responder às perguntas norteadoras. Com base nos obstáculos encontrados para executar a Sequência Didática, nota-se que as dificuldades cognitivas apresentadas pelos alunos com deficiência visual são similares às expostas por estudantes sem essa limitação (fato constatado ao longo dos anos de assessoramento pedagógico nas salas de recursos). Dessa forma, mostra-se que um mesmo conjunto de exercícios pode ser usado com alunos com ou sem deficiência visual, mediante adaptações necessárias ao acesso dos mesmos, quando todas as atividades foram apresentadas no multiplano.

Asseguro que este trabalho me trouxe satisfação como educadora. Os estudos que foram desenvolvidos em todo o processo, as leituras realizadas não só me auxiliaram na escrita deste trabalho como me mostraram diversos enfoques, que até então desconhecia. Ressalto também a importância do trabalho colaborativo (parceria professor regente e AEE), pois muitos colegas não são receptivos e não veem o professor do AEE como apoio. Finalmente, o Multiplano como instrumento concreto, destinado a satisfazer as necessidades básicas de aprendizagem de matemática a alunos com deficiência visual, passará na minha prática a ser uma eficiente alternativa, pois é uma ferramenta eficaz a compreensão de muitos conceitos até então decorados e sem sentido, maximizando as oportunidades do cego que, entendendo o processo, pode transformar a compreensão em frutos sociais.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio a Gestão Educacional.

Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Educação Inclusiva / Ministério

da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio a Gestão Educacional.

Brasília: MEC, SEB, 2014. 96p.

CERQUEIRA, J.B. & FERREIRA, E.M.B. **Recursos Didáticos na Educação Especial**.

In: Revista IBC. Ed. 15. Abril de 2000. Disponível em: < http://www.ibc.gov.br/?itemid=102#more >. Acesso em 04 maio de 2014.

FERNANDES, C.T. ... [et al.]. **A Construção do Conceito de Número e o Pré-soroban**.

Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Especial, 2006.

FERRONATO, R. **A Construção de Instrumento de Inclusão no Ensino da Matemática**. 2002. 124f. Dissertação.

MALAGUTTI, P.L. **Atividades de Contagem a partir da Criptografia**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/Apostila10-Atividades de contagem.pdf>. Acesso em 04 de janeiro de 2013.

MOSQUERA, C.F.F. **Deficiência Visual na Escola Inclusiva**. 1. ed. Curitiba: IBPEX, 2010.

OLIVEIRA, H.B.L. **Introdução ao Conceito de Função para Deficientes Visuais com o Auxílio do Computador**. 2010. 109f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

ROMERO, R.A.S. & SOUZA, S.B. 2008**. Educação Inclusiva: alguns Marcos Históricos que Produziram a Educação Atual**. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2008/anais/pdf/447 – 408. p.f.>. Acesso em 06 de fevereiro de 2014.

SOUZA, M.A. **Introdução ao Estudo de Função para Alunos com Deficiência Visual com o Auxílio do Multiplano**. 2015. 114f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências da Educação. Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Oeste do Pará.

O lançamento de foguetes e o GeoGebra

Eliesio Alves da Silva[1]
Mario Tanaka Filho[2]

Introdução

Na última década, a revolução tecnológica se tornou mais evidente nas salas de aula, seja pela utilização de tecnologias midiáticas que em geral tem papel revolucionário na abordagem do professor durante as explanações de dado tópico, seja pelo aluno que por meio da utilização de smartphones pode pesquisar, comparar, verificar uma dada fonte ou até mesmo fazer uso de simulações para testar uma dada hipótese.

O desafio atual de ensinar requer do professor um aprimoramento do método e da busca, que desempenha um papel crucial no fazer pedagógico docente, por novas maneiras que transcendam a forma tradicional de ensinar um dado conteúdo. Assim, é de grande relevância o interesse do educador na busca de novas abordagens para o enriquecimento do processo de ensino-aprendizagem.

Este estudo é um resumo de parte da dissertação de mestrado de Silva (2015), intitulada "Desenvolvimento de Aplicações no GeoGebra Direcionadas ao Ensino da Geometria Espacial e Função Quadrática",

1 IFPA. E-mail: eliesio.silva@ifpa.edu.br
2 Ufopa. E-mail: tanakafi@gmail.com

do programa Profmat/Ufopa e teve como objetivo oferecer ferramentas de suporte pedagógico ao ensino de um componente curricular do Ensino Médio: A Função Quadrática, através do desenvolvimento de aplicações no GeoGebra (2014), tendo como plano de fundo a atividade experimental de lançamento de foguetes, cuja proposta era construir aplicações neste software livre que proporcionassem ao aluno um aprofundamento desse componente de forma dinâmica e interativa.

Referencial Teórico

Simular, construir modelos e experimentar são formas de aprimorar um método de ensino; contudo, a experimentação, a simulação e a construção de modelos precisam estar aliadas à teoria. Conforme cita GASPAR (2009), a atividade experimental tem vantagens sobre a teórica, mas apenas o experimento não é capaz de fazer o aluno encontrar o caminho. O autor enfatiza que é necessária a junção da teoria com a prática para a produção do conhecimento científico.

Um método que pode aumentar a eficiência do processo, é a utilização de softwares que viabilizem, principalmente ao aluno do ensino médio, na matemática, o entendimento de teoremas e definições, aproximando o objeto de estudo de seu cotidiano. Para MACHADO (1987), a dificuldade do ensino da matemática pode estar no fato de que a ciência é tida como o ambiente das abstrações que enfoca os aspectos formais e se divorcia da realidade. Os softwares de natureza matemática podem servir de base a uma proposta pedagógica vivenciada em sala de aula para motivação da aprendizagem, levando a ruptura da postura passiva do aluno, OLIVEIRA (2001).

A experimentação constitui-se nesse sentido uma abordagem diferenciada. Além de trazer muitos benefícios para a construção do conhecimento, as experimentações e simulações em ambientes virtuais por meio de softwares tornam o processo mais diversificado, como também mais interativo, no qual o educando é visto como agente do aprendizado.

Uma das barreiras encontradas pela maioria dos educadores diz respeito a materiais que atendam às necessidades de cada grupo, sejam pela dificuldade de compra dos mesmos ou mesmo pela completa ausência de recursos. FERREIRA (1982) propõe que o professor busque alternativas à ausência de laboratórios bem equipados através da utilização de material de baixo custo ou de custo algum. Para que um estudante compreenda um experimento, ele próprio deverá executá-lo, mas ele entenderá muito melhor se, além de realizar o experimento, ele construir os instrumentos para sua experimentação KAPTISA (1985).

A ideia de levar uma atividade experimental para o computador pode ser concebida por meio da utilização do GeoGebra (2014) que, sendo um software de geometria dinâmica, torna possível ver o que ocorre com o objeto de estudo à medida que o tempo passa, sendo ainda possível reverter, acelerar ou retardar o tempo da visualização, já que é possível fazer animações no mesmo.

Para Tavares e Santos (2014):

> As animações são um poderoso aliado na exposição de fenômenos que variam com o tempo. Por maior que seja a capacidade de explanação de determinado mestre, ele esbarrará sempre nas dificuldades de expor um fenômeno físico dinâmico, através de giz e quadro negro, representar a dinâmica de um evento em uma sequência de instantâneos como os desenhos de uma animação. Apenas um artista gráfico com grande habilidade conseguiria esta concatenação de desenhos, em tempo útil de uma aula normal.

Metodologia

Este Estudo se deu a partir da análise de três atividades relacionadas a uma aplicação da função quadrática: Atividade prática de lançamento de projéteis - foguetes de garrafa PET.

A primeira propõe a construção de um aplicativo no GeoGebra (2014), no qual os alunos devem relacionar algumas estruturas arquitetônicas à forma das parábolas, encaixando-as nas estruturas por meio da manipulação dos controles deslizantes do aplicativo. A segunda atividade, construção e lançamento de foguetes, refere-se principalmente a trajetória assumida pelos projéteis, que, estabelecidas algumas condições de contorno, tem forma parabólica, além da promoção das atividades em grupo. Por fim, a terceira atividade mostra a produção de outro aplicativo em GeoGebra, baseada nos dados coletados pelos grupos na segunda atividade, cuja intenção é a virtualização da atividade prática de lançamento de projéteis, podendo o aluno, através dos controles no aplicativo, repetir, parar, pausar e mudar as condições para a observação do fenômeno lançamento de foguetes.

ATIVIDADE 1: Estruturas parabólicas - conhecendo o software GeoGebra

Nessa atividade buscou-se relacionar o ensino da função quadrática por meio da utilização do software GeoGebra. O público alvo foi duas turmas de alunos da Rede de Ensino Privada. Alguns alunos já conheciam o software, mas não haviam desenvolvido atividades no mesmo. Assim, a atividade no primeiro contato com o software procurou mostrar algumas ferramentas do software que permitem a manipulação dos elementos de uma função.

Objetivos da atividade:

- Incentivar a participação/participação do aluno;
- Incentivar o uso de recursos tecnológicos para o desenvolvimento cognitivo do aluno;
- Proporcionar maior integração dos alunos;

Ao final da atividade o aluno deverá

- Perceber o formato das parábolas em algumas estruturas construídas pelo homem;
- Utilizar o GeoGebra na construção de gráficos de funções quadráticas tendo como plano de fundo fotografias de alguns monumentos do mundo;
- Relacionar o formato de estruturas com uma função quadrática;
- Fazer o ajuste dos coeficientes *a*, *b* e *c* da função quadrática $f(x) = a*x^2 + b*x + c$ para aproximar o formato do gráfico ao da estrutura escolhida;

Desenvolvimento

A atividade foi realizada em 3 etapas, utilizando-se uma carga horária de 4 aulas.

A etapa 1, considerada introdutória, tinha por objetivo revelar ao aluno o software GeoGebra, dado que a maioria dos alunos não conheciam este software e sua aplicabilidade. A etapa 2 visou o avanço de conhecimento do software, como a utilização de controles e inclusão de elementos gráficos. Na etapa 3, o aluno teve contato com a parte programável do software, determinando, por exemplo, quando elementos apareciam ou sumiam da tela.

Etapa 1: Escrevendo funções no GeoGebra

1. O professor apresenta o software GeoGebra e algumas ferramentas que serão utilizadas para realização desta etapa da atividade.
2. Os alunos são convidados a digitarem no campo de entrada do GeoGebra algumas funções parabólicas: $y = x^2$, $y = 8x^2$, $y = (-1/20)x^2$, $y = 2x^2 + 3x$, $y = -x^2 + 4x + 10$ e verificar o que ocorre com o gráfico das mesmas.
3. Para diferenciar uma função da outra pediu-se para modificar a cor e a espessura dos objetos;

Etapa 2: Adicionando controles

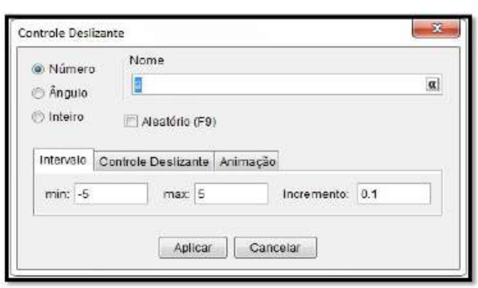
1. Cria-se uma nova janela;
2. Criam-se os controles deslizantes e ajustando os parâmetros;

Nota: Os controles deslizantes podem ser criados diretamente pela Barra de Ferramentas - Figura 1(a). Neste caso, escolhe-se o número, ajusta-se o intervalo e clica-se em aplicar - Figura 1(b).

Observação 1. *Caso o controle fosse criado via Campo de Entrada, dever-se-ia modificar as propriedades dos controles. Clicar-se-ia com o botão direito do mouse sobre o controle e escolher-se-ia propriedade. Na guia Controle Deslizante, modificar-se-ia o min: para -5, max: para 5 e Incremento: para 0.01.*

Figura 1 – detalhe sobre os controles deslizantes

(a)



(b)

3. Constrói-se a função;

Execução

Digitar, $\mathbf{y} = \mathbf{a} * \mathbf{x}^2 + \mathbf{b} * \mathbf{x} + \mathbf{c}$ e pressionar a tecla enter;

Nota: Inicialmente nada é observado, pois os valores dos controles são grandes, modificando-se os controles, o resultado é observado na tela.

Observação 2. É importante dá-se a liberdade para o aluno analisar o que acontece com à função quando os parâmetros são modificados.

4. Adiciona-se Figuras no GeoGebra;

Execução

A. Pesquisar no *Google* Imagens o tema monumentos parabólicos;
B. Selecionar algumas imagens (cada aluno escolhe uma imagem);
C. Salvar a imagem numa pasta específica;
D. Adicionar a imagem: na janela do GeoGebra clique em Editar → Inserir Imagem de → Arquivo.

5. Posicionando a imagem;
   Foi sugerido ao aluno que posicionasse a imagem a partir da origem, para então encaixar a parábola na mesma. Podendo ser feito de dois modos.

Modo 1. Clique sobre a imagem, mantendo o botão do mouse pressionado, arraste até que o ponto azul inferior esquerdo da imagem coincida com a origem dos eixos;

Modo 2. Clique e mantenha pressionado o botão do mouse no ponto inferior esquerdo da figura e arraste este até a origem dos eixos, faça o mesmo para o ponto à direita, posicionando-o sobre o eixo x.

6. Ajusta-se os controles deslizantes **a, b** e **c** de forma a encaixar o gráfico da função na figura inserida.

Observação 3. *Caso os controles não estejam visíveis na Janela de Visualização, clique em Exibir/Ocultar na Janela de Álgebra.*

Nota: O desafio desta etapa consiste em descobrir a função quadrática cujo gráfico melhor se encaixa à forma arquitetônica da figura.

Etapa 3: Apresentaçao/Utilização da Aplicação Final

A partir das imagens pesquisadas pelos alunos na etapa 2, foram escolhidas 4 imagens - Figura 2.

Utilizando ideia de encaixar o gráfico da função na forma arquitetônica a aplicação em GeoGebra foi desenvolvida visando do aluno, uma melhor compreensão entre o gráfico da função quadrática e os parâmetros *a*, *b* e *c* da função. A aplicação encontra-se disponível para utilização em < https://www.geogebra.org/m/gjg3qec5 >.

Figura 2: Arcos Parabólicos, *Google Imagens*.

A: Arco Parabólico da Dufferin Street West, Toronto - Canadá

B: Arcos Parabólicos sob o terraço da Casa Milà, Barcelona - Espanha

C: Altar Igreja de São Francisco de Assis, Belo Horizonte - Brasil

D: Salão Central do Palau Guell, Barcelona – Espanha

Apresentação da Aplicação Final

A aplicação conta com duas janelas de Visualização. A Janela de Visualização 2 exibe os controles da aplicação, a Janela de Visualização mostra a figura que, a partir da escolha na Janela à esquerda, serve de plano de fundo à atividade . - Figura 3(a) e 3(b).

Utilização

1. Na Janela de Visualização 2, o aluno escolhe uma figura para iniciar a atividade; Podendo clicar nos botões de navegação para ver outras figuras - Figura 3(a).
2. Uma vez selecionada a figura, o aluno deverá fazer o ajuste dos parâmetros a, b e c;
3. Após conseguir fazer com que o gráfico da função quadrática associada se encaixe na figura, o aluno deverá anotar o resultado da função no campo relativo à figura;
4. O aluno deverá repetir os procedimentos 1 a 3 para as outras Fotos, Figura 3(b);
5. O professor pede aos alunos comprovem os resultados, digitando-se cada um deles no Campo de Entrada para suas respectivas Fotos.
6. Ao final da atividade, através de um diálogo informal, o professor propõe aos alunos os seguintes questionamentos a respeito da atividade:

(a) O que Você percebeu ao fazer ajustes nos parâmetros a, b e c da função quadrática?

(b) A atividade melhorou sua percepção em relação a parte gráfica da função quadrática?

(c) O que chamou mais sua atenção em relação a utilização do GeoGebra combinando imagens e gráficos de funções?

Figura 3: (a) Detalhe da Janela de Visualização 2 com os controles (b) Parábola encaixada na forma.

(a) (b)

Dado o critério utilizado ao final da atividade, as respostas dos alunos traduziram o grau de aceitação da atividade. Sendo uma conversa informal, verificou-se que a maioria achou a atividade interessante, enriquecedora ou ainda que contribuiu para o aprendizado mais rápido do tópico. Quanto ao uso do GeoGebra a maioria achou a proposta interessante, pois ainda não tinham utilizado elementos externos fotos misturadas com equações, o que lhes dá uma nova perspectiva do uso da função quadrática.

Atualmente a atividade sofreu algumas modificações e foi aplicada em cursos técnicos e superior, os detalhes da atividade estão disponível em <https://www.geogebra.org/m/ cudsfba6>, na qual se posiciona a parábola junto a estrutura arquitetônica baseada nos parâmetros da abertura da parábola e posição do vértice com a função quadrática escrita na forma $y = a\left(x - x_V\right)^2 + y_V$.

ATIVIDADE 2 - Prática: Construção e Lançamento de Foguetes

A atividade procurou mostrar de forma prática um caso particular de aplicação da função quadrática.

Realizada em grupos, a construção de foguetes a partir de materiais reutilizáveis e posterior lançamento, segundo a reação química entre o bicarbonato de sódio $NaHCO_3$ e o ácido acético (vinagre) CH_3COOH, cujo produto gera dentre outros compostos CO_2 em grande quantidade (que têm o papel de propulsor dos protótipos construídos), busca através da experimentação, chamar a atenção do estudante para os mais variados fenômenos nos quais a matemática está relacionada.

Objetivos da Atividade

- Utilizar formas geométricas para construir protótipos de foguetes a partir de materiais reutilizáveis (garrafas pet);
- Aplicar conceitos físicos e químicos, relacionando-os com o conhecimento matemático;

- Analisar a trajetória e as possíveis causas das variações no movimento após cada lançamento;
- Relacionar o ângulo de lançamento e a velocidade com as quantidades de combustível utilizado;
- Determinar a função quadrática aproximada relacionada ao movimento do foguete;
- Desenvolver a colaboração e a participação dos alunos em cada etapa da atividade;

Desenvolvimento

A atividade foi realizada em três etapas e em duas escolas da rede particular de ensino de Santarém, neste estudo chamadas de Escola A e Escola B, cuja tabela1, indica o quantitativo de alunos participantes na atividade.

Tabela 1 – Quantitativo de alunos participantes da atividade

Ensino Médio – 3º Ano			
Escola	nº de turmas	Grupos/turma	total de alunos
Escola A	2	6	38
Escola B	4	16	96

Fonte: Autores

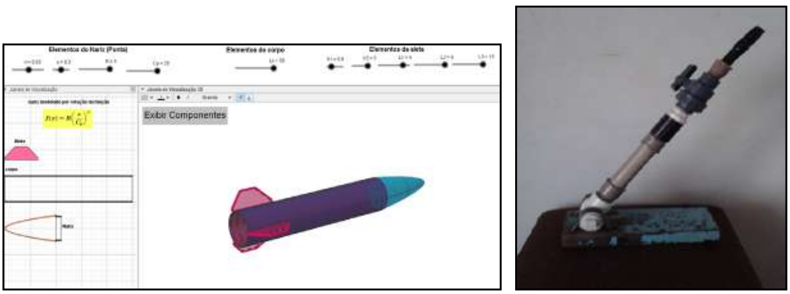
Etapa 1: Construção dos Protótipos

Na fase de construção dos protótipos levou-se em consideração o perfil do foguete que se desejava construir, a partir da atividade desencadeadora de perguntas pautada no vídeo de Brian Cox, disponível em < https://pt.wikipedia.org/wiki/Brian_Cox_(físico) >, que ilustra o movimento de corpos sujeitos a resistência do ar, foi apresentado a turma o *applet* da figura 4(a), disponível em < https://www.geogebra.org/m/gesjabbx >, que permite a modelagem do corpo do foguete e da ponta ao ajustar-se alguns parâmetros.

Para a realização da atividade de construção dos protótipos utilizou-se garrafas vazias de refrigerante de 600 ml (2 unidades para cada foguete construído), fita isolante e cem gramas de areia.

Na construção da base de lançamento de inclinação variável foram utilizados tubos e conexões de PVC, abraçadeiras e base de madeira para fixação e apoio do conjunto, figura 4(b).

Figura 4 – (a) simulador do corpo do foguete (b) Base de lançamento dos foguetes



(a) (b)

Observação 4. *Foi construída apenas uma base de lançamento devido aos custos do material empregado na mesma, os custos foram rateados entre todos os alunos, tornando o projeto prático e de baixo custo.*

Etapa 2: Lançamentos

Na fase de lançamento, os grupos com seus protótipos construídos realizaram seus lançamentos no campo de futebol das escolas. Após cada lançamento, media-se o alcance de cada foguete e anotava-se para uso futuro.

Na Escola B, a atividade culminou com a produção de vídeos, alguns deles publicados no youtube. Os vídeos publicados podem ser visualizados através dos links:

< http://youtu.be/eQTjoQRLaEE >, < http : //youtu.be/WDb-pOV 14R_g > e < http://you tu.be/hEJxf_802Go

Etapa 3: Experimento – Alguns Resultados

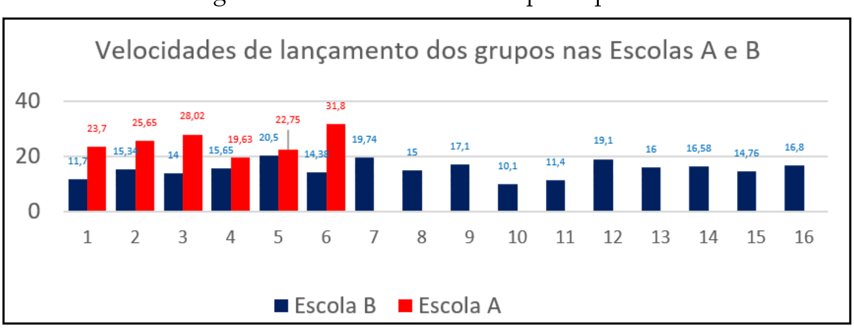
Munidos de bicarbonato e vinagre, os grupos lançaram os foguetes, e, com auxílio de uma trena, fizeram a medição do alcance dos foguetes, cujo valor foi a base para o cálculo dos demais dados.

Os dados calculados foram: Velocidade de Lançamento, Altura Máxima atingida e Tempo de Voo. As soluções das equações para o lançamento de projéteis, apesar de ter se levado em conta a influência do ar durante o movimento, foram desenvolvidas livres da resistência do ar, utilizando-se determinadas condições de contorno e que, na prática, não necessariamente podem ocorrer.

A partir das equações relacionadas ao movimento parabólico em condições ideais, determinou-se a velocidade de lançamento, a altura máxima atingida e o tempo de voo. Este último poderia ter sido calculado com aproximação, a partir do uso de um cronômetro e posterior comparação ao valor encontrado (não se pensou nesta situação durante o experimento). Já a altura máxima e a velocidade de lançamento seriam mais complexas de serem determinadas sem o uso de aparatos tecnológicos. Os valores das velocidades de lançamento por grupo e por escola são destacados no gráfico da figura 5.

A partir do alcance dos foguetes em voo balístico, sugeridos sem resistência do ar, os grupos calcularam os parâmetros *a* e *b*, correspondente da função quadrática associada ao movimento, na qual uma das raízes valia zero.

Figura 5 – Gráficos das escolas participantes



As funções quadráticas encontradas para os lançamentos, tinham para o parâmetro *a* valores próximos de zero, enquanto que o parâmetro *b*, pela escolha do ângulo de lançamento 45°, tem valor sempre igual a 1.

Ao todo foram realizados 22 lançamentos. Numa análise direta dos valores do gráfico da figura 6, percebeu-se que os lançamentos realizados na Escola A tiveram resultados de valores mais expressivos para a Velocidade de lançamento (fator importante a ser considerado na atividade de virtualização do lançamento de foguetes), possivelmente devido uma melhor aferição do ângulo de lançamento, pois sendo a base articulada, a não observância da inclinação no ato do lançamento interfere diretamente no resultado. Outro fator que pode ter contribuído foi a vedação e o ajuste no encaixe do foguete à base, considerando que os lançamentos da Escola A foram realizados primeiro e em menor quantidade e a base utilizada nas duas escolas foi a mesma.

A tabela 2, ilustra alguns comentários após atividade feitos pelos alunos nas escolas A e B. Na Escola A, a atividade teve caráter multidisciplinar em Física e Matemática, pois o professor das duas cadeiras era o mesmo.

Tabela 2 - Comentários de alunos sobre a atividade

Alunos	Escola A	Escola B
Aluno 1	Muito legal na questão criatividade e interação do grupo. Aprendemos a construir foguetes e relacionar a matemática a um fenômeno real.	A atividade foi muito dinâmica pois pudemos perceber os fenômenos na prática e dessa maneira se tornou interessante pois desperta curiosidade e vontade de fazer e entender.
Aluno 2	Extremamente proveitosa, tanto no aspecto lúdico, como no aprendizado, tendo em vista que aliou a prática aos conhecimentos da Matemática e da Física aumentando assim o aprendizado da turma.	A atividade foi extremamente importante e divertida, pois ofereceu a chance da turma de participar de um exercício prático fora da sala de aula, diminuindo o stress e aumentando o bem-estar e o conhecimento dos alunos.

Aluno 3	Sucesso! Esse tipo de atividade prática e ao ar livre é uma forma inovadora para fazer com que os alunos se interessem pela matéria e ponham em prática o que aprenderam na sala de aula, torna a matemática e a Física mais atraente para se aprender.	Foi muito divertido e interessante também, pois aprendemos mais sobre o assunto de forma prática, o que ainda não havia sido realizado com a nossa turma.

Fonte: Anotação da Folha de Avaliação da Atividade dos grupos

Na Escola B não foi possível reunir os professores das duas disciplinas, mas, ainda assim, o trabalho manteve as características de multidisciplinaridade. Contudo, para os alunos é visível a separação quando não há participação dos professores das disciplinas envolvidas. O destaque foi a possibilidade da realização de uma tarefa na qual se percebeu a aplicação direta de um dado conteúdo e a utilização do trabalho em grupo para a construção de algo com um objetivo definido.

ATIVIDADE 3: Lançamentos de Foguetes no Geogebra

Essa atividade consistia na virtualização do lançamento de foguetes a partir dos dados coletados na atividade prática (tal proposta foi realizada apenas na escola A).

Como ponto de partida, os alunos tiveram contato com outras duas aplicações em GeoGebra desenvolvidos pelo professor para dar uma ideia aos alunos do que poderia ser feito utilizando o software. As atividades podem ser visualizadas através dos links: **app1** < https://www.geogebra.org/m/PekVDDBM > e **app2** < https://www.geogebra.org/m/DUskDEp5 >

A aplicação foi desenvolvida com base na experimentação (Atividade 2) e destina-se a professores que desejam ilustrar suas aulas tanto de física quanto de matemática no estudo da função quadrática e/ou lançamento oblíquo e a alunos, para auxiliar na compreensão do estudo da função por meio desse exemplo prático no qual ele pode interagir e fazer inferências a respeito do fenômeno.

Participaram da elaboração e desenvolvimento desta atividade 2 turmas da Escola A. Após discussão nos grupos sobre a interface da aplicação, chegou-se ao consenso que esta deveria conter duas janelas (levou-se em consideração a interface sugerida no **app1**, uma para a representação do lançamento e outra para os controles, a fim de não os misturar ao gráfico da aplicação. Os controles deslizantes para os parâmetros ***V*** (velocidade de lançamento) e **θ** (ângulo de lançamento) deveriam ser livres e o usuário deveria controlar que parâmetros adicionais que desejaria exibir, além de outras informações como a função do movimento e os vetores.

No desenvolvimento da aplicação cuja interface é ilustrada na Figura 6, foram utilizadas como limite do parâmetro velocidade o valor 25 m/s (média dos valores da velocidade de lançamento) e o ângulo variando de 1º até 89º, para dar ao usuário a possibilidade de verificar o que ocorre com os outros resultados quando o ângulo é modificado. Esta interface conta com duas janelas de Visualização, sendo a 1ª para os controles e a 2ª para a observação do fenômeno.

Figura 6: Detalhe da aplicação lançamento de foguetes no GeoGebra.

O painel de controle do lançamento apresenta caixa de seleção exibir/ocultar objetos, cuja finalidade destina-se à trajetória, ao vetor velocidade e às suas componentes horizontal e vertical, além de um único botão para lançar o foguete. A caixa de texto escura informa ao usuário as condições iniciais e, ao término do lançamento, mostra a função quadrática obtida a partir das condições definidas, bem como a altura máxima que o projétil atingiu, o alcance e o tempo de voo do mesmo.

As condições de contorno para os lançamentos desprezam as forças de resistência e atribuem o valor do parâmetro **g** (aceleração da gravidade local) para $9{,}8 m/s^2$.

A janela de Visualização 1 mostra o foguete e a dinâmica do lançamento, sendo possível perceber nela que foram inseridos alguns elementos complementares, como a rotação do foguete durante o voo do mesmo sem levar em conta que a rotação geraria forças que interfeririam na forma da trajetória. Há ainda nesta janela, controle de zoom (+ e -) e de navegação, que poderiam ser acessados diretamente com as ferramentas que o GeoGebra disponibiliza.

Atualmente a aplicação passou por ajustes na interface e controles, como a inclusão de novos elementos gráficos, nos quais o utilizador pode modificar o parâmetro gravidade, simulando, assim, o movimento sem resistência do ar em diferentes ambientes. Disponível em < https://www.geogebra.org/m/cysmzg5m >.

Resultados e Discussões

A produção de um aplicativo mais elaborado no GeoGebra, produzido por alunos do ensino médio, é possível, principalmente, se o professor mostrar exemplos de aplicativos similares em termos de utilização, *layout* e conteúdo relacionado. A utilização dos materiais similares desenvolvidos apresentados pelo professor para uma análise das funções utilizadas no desenvolvimento dos mesmos, serviu de ponto de partida para o desenvolvimento do aplicativo proposto na atividade. A percepção que se buscou alcançar em relação aos alunos por meio dessa abordagem variou de uma turma para outra. Alunos que ao utilizar o computador haviam se deparado e "tentado entender" um código fonte, uma linguagem ou algoritmo, tiveram maior predisposição no entendimento dos comandos, funções e até mesmo a programação do GeoGebra.

O GeoGebra oferece a ferramenta protocolo de construção, muito útil para quem está começando. No entanto, quanto mais complexo é o aplicativo mais dificuldade se tem de analisá-lo. Assim, ficou a cargo do professor a correção dos *"bugs"* que o aplicativo apresentou e a programação que, mesmo no nível elementar, para muitos é vista como uma língua estrangeira de difícil aprendizagem. O que se percebeu nesta parte do trabalho é que um professor com poucos conhecimentos nesta área terá dificuldades de desenvolver aplicativos mais sofisticados no GeoGebra, mas poderá usar a maioria dos recursos que o software apresenta e, se tiver tempo, poderá garimpar aplicativos prontos no *GeoGebratube* - http://tube.geogebra.org/ .

A virtualização do lançamento de foguetes teve como plano de fundo o estudo da Função Quadrática, a partir do estudo de fenômenos de natureza física, para a construção e o entendimento a respeito das ferramentas disponibilizadas pelo software. As atividades com parábolas 1 e 2 combinaram a função quadrática com a arquitetura. A primeira, muito simples, visou apenas o recurso de construção de gráficos, já a segunda, mais sofisticada, procurou incrementar o uso do software pela inserção de controles, textos e imagens, instigando e tornando a participação do discente mais efetiva.

Considerações Finais

Ao expor a proposta do uso do GeoGebra buscando melhorar o ensino da função quadrática, alguns alunos não demonstraram convicção que, de fato, essa abordagem seria inovadora, pois alguns já conheciam e haviam utilizado o software antes e não se empolgaram com o mesmo. Foi um problema conseguir que tais alunos mantivessem o foco no software no momento da apresentação deste aos demais alunos da turma, dadas as opções que a internet disponibiliza quando um aluno está realizando uma atividade via computador.

No desenvolvimento do trabalho, a primeira parte teve como plano de fundo o estudo da Função Quadrática, a partir do estudo de fenômenos de natureza física, bem como a influência deste tipo de função na arquitetura. A participação discente foi mais efetiva, através de trabalhos em grupos cujo objetivo era integrar os alunos, socializar o conhecimento e construir protótipos a serem lançados.

A Atividade de construção e lançamento de foguetes, por sua vez, além da ludicidade, e da participação interativa foi considerada pelos alunos como integradora. Percebeu-se que, após a realização, os grupos estavam mais participativos, trocavam mais informações, demonstravam mais interesse pelos conteúdos que norteavam a atividade.

O resultado desta parte, cuja coleta de dados após a experiencia de lançamento dos foguetes não utilizou um rigor acadêmico, buscou-se apenas medir distância para cálculos dos resultados segundo equações pré-definidas. De fato, a ideia de desenvolvimento das aplicações no GeoGebra veio desta parte do trabalho.

A partir da atividade percebeu-se nos alunos um aumento de associatividade de conteúdos trabalhados às situações, fenômenos ou coisa do cotidiano. Como toda atividade que transpõe as paredes da sala de aula, essa atividade, para muitos, foi considerada inovadora, pois estavam finalizando o ciclo da educação básica e ainda não haviam aplicado conceitos da física e/ou matemática.

A possibilidade de aprender sequências simples como iniciar/parar uma animação, armazenar um valor, tornar um objeto visível/oculto ou escrever um texto dinâmico aumentou o apreço dos estudantes pelo GeoGebra. Para o professor é satisfatório perceber que, ao utilizar um novo método de ensino, o conteúdo é melhor compreendido pelo aluno e, mais empolgante ainda, é sentir o aumento de interesse por parte destes alunos em relação à ferramenta responsável pelo novo método.

Referências

FERREIRA, N. C. **Equipes de Laboratório e Trabalho em Grupo**. Tese de Doutorado em Didática das Ciências. Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1982.

GASPAR, ALBERTO. **Experiências de Ciências para o Ensino Fundamental**. São Paulo. Atica, 2009.

GEOGEBRA, Portal Geogebra, Disponível em <http://www.geogebra.org> Acesso em 01/10/2014

KAPTISA, P. **Experimento, Teoria e Prática**: artigos e conferências, Moscou, Ed. Mir, 1985.

MACHADO, N.J. **Matemática e Realidade**. São Paulo:Cortez, 1987.

OLIVEIRA, C.C; MENEZES, E.I; MOREIRA, M. **Ambientes informativos de aprendizagem: Produção e avaliação de software educativo**. Campinas: Editora Papirus, 2001.

SILVA, E. A. d. **Desenvolvimento de Aplicações no GeoGebra Direcionadas ao Ensino de Geometria Espacial e Função Quadrática**. 1-208 p. Dissertação de Mestrado em Matemática., 2015. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=452 >.

TAVARES, R e SANTOS, J. N.: **Animação interativa como organizador prévio, IV Encontro Internacional sobre aprendizagem significativa** - Maragogi, 2003, Disponível em < http://rived.mec.gov.br/artigos/2004-RevistaConceitos.pdf > Acesso em 10/09/2014.

Construindo HQ's com alunos do 2º ano do ensino médio

Márcio C. Bessa de Sousa[1]
Mario Tanaka Filho[2]

Introdução

O presente trabalho, baseado na dissertação de mestrado *Construção de Histórias em Quadrinhos para o Ensino da Matemática com alunos do 2º ano do Ensino Médio* do Profmat - UFOPA, traz uma discussão acerca do ensino da matemática e ao uso de Histórias em Quadrinhos – HQ's como um tipo de metodologia aliada no processo de ensino aprendizagem. O estudo tem como objetivo geral a elaboração de histórias em quadrinhos feita pelos estudantes, abordando conteúdos matemáticos previamente expostos como forma de revisar esses conteúdos e analisando os aspectos relativos a inserção dessa atividade nas aulas de matemática do segundo ano do ensino médio. A metodologia utilizada envolveu os professores de Artes, Língua Portuguesa e Matemática, que desenvolveram oficinas sobre quadrinhos, e a participação dos estudantes que foram os autores das HQ's durante a pesquisa. Apresentamos também a análise, de uma das seis histórias, que foram construídas, feita

[1] SEDUC-Pa. E-mail: marcinhobessa@yahoo.com.br
[2] Ufopa. E-mail: tanakafi@gmail.com

pelos três professores visando identificar os elementos que são utilizados na construção das HQ's e se o conteúdo de Matemática foi desenvolvido nas histórias de forma adequada.

Para Bordoni (2006) é importante também nesse processo de inovação das metodologias o uso da interdisciplinaridade, ou seja, explorar a matemática também em aulas de outras disciplinas. Lembrando que o uso das histórias em quadrinhos está atrelado aos PCN's, e o presente trabalho traz além disso, a construção de conceitos matemáticos em sua aplicabilidade, evidencia a metodologia, a descrição das atividades e finaliza com a análise e discussão dos resultados.

Para que as habilidades e competências dos alunos sejam desenvolvidas é necessário usar estratégias para atrair a atenção dos alunos, para tanto, o uso de histórias em quadrinhos - hq's tem sido visto como uma ferramenta promissora na garantia da aprendizagem dos conceitos matemáticos, visto que por meio das hq's é possível compreender de forma lúdica os conteúdos transmitidos.

Vergueiro (2008) fala da aceitação das hq's em sala de aula por parte dos alunos, visto que possui uma linguagem de fácil compreensão e estimula a imaginação das crianças e adolescentes. A utilização dos quadrinhos nas aulas de Matemática é uma das inovações que vem surgindo no ensino da matemática, visando a melhoria do ensino e um melhor aprendizado por parte dos alunos.

Recentemente os quadrinhos foram incluídos no Plano Nacional de Biblioteca Escolar (PNBE) sendo reconhecido pelo governo por sua importância no ambiente escolar, além de se encontrar também nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), como um tipo de gênero textual necessário à educação, e traz também as orientações para o seu uso em sala de aula.

A escolha desse tema de estudo partiu da possibilidade dos quadrinhos como um instrumento que favoreça o desenvolvimento de habilidades, estimulando a criatividade e despertando o interesse pela leitura e escrita, tão utilizadas nas diversas áreas do conhecimento, além promover a socialização em grupos, pois para a confecção das hq's, o trabalho em grupo é importante uma vez que propicia a interação entre os alunos e estimula a construção do conhecimento.

Referencial Teórico

Este capítulo apresenta o referencial teórico que deu suporte a esse trabalho iniciando com a origem das histórias em quadrinhos; o seu uso no contexto de sala de aula, atreladas aos parâmetros curriculares nacionais, ressaltando que a interdisciplinaridade é uma exigência, não somente no que tange às atividades escolares, mas também às práticas do dia a dia, com as quais, frequentemente as pessoas se deparam. Esta integração deve complementar as diversas disciplinas e a possibilidade de acesso a pesquisa, motivando o educando e o educador a buscarem novos conhecimentos sobre um determinado assunto, problema ou questão.

A Origem das Histórias em Quadrinhos

Quando se fala da origem das histórias em quadrinhos, percebe-se que há um consenso de que as histórias em quadrinhos (hq's) tenham surgido ainda na pré-história com as pinturas rupestres. Por ser, inicialmente, um produto de massa, as histórias em quadrinhos, ainda sofrem preconceito e censura, tanto no meio acadêmico como fora dele. A recente abertura acadêmica para as histórias em quadrinhos permitiu o contato com públicos e temas variados, desde o tradicional gênero de super-heróis a temas muito mais complexos como política, religião e filosofia.

Para Bakhtin (2005) atualmente, na chamada Era da Informação, devido ao alto valor empregado ao conhecimento, cria-se a necessidade de obter informações de forma rápida através de fontes confiáveis. Com a popularização da cultura, houve um aumento na busca por informações acerca dos mais variados costumes, contribuindo com os estudos sobre as manifestações de linguagem, bem como a disseminação de informações confiáveis e a contribuição na comunicação cultural.

Segundo Luyten (2011) desde os primórdios da civilização, a representação de cenas do cotidiano do homem primitivo através de desenhos já era utilizada. No antigo Egito, na China, nas tapeçarias medievais já era observado o uso da narrativa reduzida e da figuração destacada como forma de comunicação. As histórias em quadrinhos, como são conhecidas hoje com uma narrativa visual, em textos e legendas escritos em balões, que são algumas de suas características, surgiram primeiramente nas charges e cartuns.

Moya (1996) nos traz a afirmação de que o pioneiro das histórias em quadrinhos no Brasil foi Angelo Agostine, onde o mesmo foi introduzindo os quadrinhos nos jornais, principal meio de comunicação da época, hábito este que pendura até hoje. Seus quadrinhos eram basicamente as charges que conhecemos até hoje, trazendo críticas políticas. Na década de 40 começaram a surgir as primeiras revistas em quadrinhos nacional, e somente na década de 60 foi que surgiram as revistas com personagens de cultura brasileira.

A popularização das hq's ocorreu na década de 30, sendo considerada a "idade de ouro", aos poucos as histórias em quadrinhos foram conquistando os leitores dos jornais e as histórias tornavam-se mais atraentes ao público, colocando em pauta os suspenses policiais, ficção científica, faroeste, cavalaria, guerras e outros. Aparecem os cenários exóticos e bem acabados. O grande destaque dessa época é para o desenho em preto e branco. O suspense e a ação são os fatores do sucesso, surgem personagens como "Tarzan", de Harold Foster, "Flash Gordon", de Alex Raymond, entre outros.

Observamos atualmente as mudanças de posicionamento com relação aos quadrinhos, já que é possível ver a inserção desse gênero textual nos documentos que norteiam a educação, como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), no Programa Nacional Biblioteca na Escola (PNBE) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais

(PCN's). As histórias em quadrinhos estão inseridas nos documentos acima na forma de gêneros discursivos "adequados para o trabalho com a linguagem escrita" (2000, p. 128). Diante disso, é possível perceber a importância do uso dessa ferramenta de apoio ao ensino e que podem ser trabalhadas de forma interdisciplinar com a Matemática.

O uso das histórias em quadrinhos em sala de aula

Uma das problemáticas do ensino no Brasil é a falta de interesse dos estudantes pela prática da leitura, isso se torna muito mais grave quando se trata de um texto que explora conceitos científicos. No ensino de Matemática, pode-se perceber que a falta de uma boa leitura e interpretação, contribui para a não compreensão dos conceitos e definições que são abordados durante as aulas. Em contraposição a esta realidade, pode-se verificar o grande interesse que os alunos apresentam por uma história em quadrinho, pois este gênero textual traz consigo, além de uma linguagem de fácil entendimento, uma sequência de ilustrações que se torna extremante atrativo para eles.

Sabe-se que a experiência de o professor inserir em suas aulas a leitura de histórias em quadrinhos, pode fazer com que os alunos gostem de trabalhar com este tipo de atividade. Na tirinha abaixo (Figura 1), pode-se perceber sua potencialidade em explorar o conceito de número negativo com os alunos.

Figura 1: Uso de tirinhas no ensino do conceito de números inteiros.

Já Vergueiro (2008) afirma que há várias décadas, as histórias em quadrinhos fazem parte do cotidiano das crianças e jovens, sua leitura e muito popular entre eles. A inclusão das hq's na sala de aula não é objeto de qualquer tipo de rejeição por parte dos estudantes, que, em geral, as recebem de forma entusiasmada, sentindo-se, com sua utilização, propensos a uma participação mais ativa nas atividades em aula. As histórias em quadrinhos aumentam a motivação dos estudantes para o conteúdo das aulas, aguçando sua curiosidade e desafiando seu senso crítico.

Ainda segundo Vergueiro (2008), para a utilização de quadrinhos no ensino é muito importante que o professor tenha suficiente familiaridade com o meio, conhecendo os principais elementos da sua linguagem e os recursos que ela dispõe para representação do imaginário; domine razoavelmente o processo de evolução histórica dos quadrinhos, seus principais representantes e características, como meio de comunicação de massa; esteja a par das especificidades do processo de produção e distribuição de quadrinhos; e, enfim, conheça a os diversos produtos em que eles estão disponíveis.

Luyten (2011) afirma que as hq's utilizadas na escola trazem grandes benefícios, o emprego das imagens com textos articulados aos conteúdos estudados, permite tornar conteúdos complexos mais claros para os alunos. Assim, este tipo de recurso torna-se interessante para que o professor possa introduzir determinados conceitos matemáticos ou para reforçar outros que já foram vistos anteriormente.

A hq é formada por textos, personagens, imagens, enredo, entre outros, o que torna a história bem atrativa para o leitor, favorecendo assim a compreensão do gênero textual por parte dos alunos. Assim, nos remetendo ao ensino de Matemática, as histórias em quadrinhos possibilitam, segundo Carvalho, que os diversos conteúdos da Matemática podem ser explorados por meio dos quadrinhos e seu uso independe do nível do ensino.

Os parâmetros curriculares nacionais e as histórias em quadrinhos

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, os PCNs, foram criados no ano de 1997 pelo Governo Federal com o objetivo de padronizar o ensino em todo país, estabelecendo as bases fundamentais para guiar a educação formal, sendo obrigatória para a rede pública e opcional para instituições privadas. Os PCNs são divididos em disciplinas (Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História, Geografia, Arte e Educação Física) que vão desde o primeiro ano do Ensino Fundamental, até ao terceiro ano do Ensino Médio e auxiliam os professores quanto a abordagem dos conteúdos para os alunos. Dentre as competências e habilidades a serem desenvolvidas na disciplina de Matemática no Ensino Médio, existem três grandes metas a serem perseguidas nesta etapa, são elas: representação e comunicação, investigação e compreensão, contextualização das ciências no âmbito sociocultural.

Para o desenvolvimento destas competências e habilidades, é necessário que o ensino de Matemática seja feito de maneira contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos (PCN, 1997). Nessa perspectiva, D'Ambrosio (2001) destaca que: contextualizar a Matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? Ou a adoção da numeração indo-arábica na Europa como florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV? E não se pode entender Newton descontextualizado. (...) Alguns dirão que a contextualização não é importante, que o importante é reconhecer a Matemática como a manifestação mais nobre do pensamento e da inteligência humana... e assim justificam sua importância nos currículos.

A contextualização dos conteúdos confere um novo sentido ao aprendizado dos alunos, que a partir de situações-problema apresentadas em seu cotidiano, sentem-se desafiados e têm a oportunidade de desenvolver as habilidades de investigação e compreensão, na busca por soluções práticas com base nos conhecimentos matemáticos adquiridos em sala de aula. Entretanto, a contextualização das atividades não pode ser vista como o ponto central da prática docente, conforme destaca Vasconcelos:

> Embora seja uma importante prática, faz-se necessário considerar a possibilidade de construção de significados a partir de questões internas da própria Matemática, caso contrário, muitos conteúdos seriam descartados por não fazerem parte da realidade dos alunos.

A interdisciplinaridade e a contextualização dos conteúdos de Matemática devem fazer parte da realidade das salas de aula, sobretudo no Ensino Médio, etapa na qual os jovens estão preparando-se para exercer seu papel de cidadão e ingressar no mercado de trabalho. Com base na interdisciplinaridade, a Língua Portuguesa desempenha importante papel no ensino de Matemática, pois a interpretação dos enunciados depende de uma boa leitura. Com isso, pode-se fazer uso das ferramentas didáticas para o ensino de Língua Portuguesa em Matemática, como por exemplo, o uso das histórias em quadrinhos.

Segundo Hamze (2008), as histórias em quadrinhos possuem potencialidade pedagógica especial e podem dar suporte a novas modalidades educativas, podendo ser aproveitadas nas aulas de Língua Portuguesa, História, Geografia, Matemática, Ciências, Arte, de maneira interdisciplinar, fazendo com que o aprendizado se torne, ao mesmo tempo, mais reflexivo e prazeroso na realidade cotidiana das salas de aula. Pereira (2010) aponta seu uso como uma nova tendência no ensino de Matemática e destaca que, cada vez mais estão sendo utilizadas para contextualizar um determinado assunto, como se pode observar em provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) ou de vestibulares de várias universidades, em que são constantes as questões que envolvem tirinhas em quadrinhos para contextualizar um problema.

As referências quanto ao uso das histórias em quadrinhos na sala de aula são feitas no PCN de Língua Portuguesa e estão inseridas nos gêneros discursivos “adequados para o trabalho com a linguagem escrita” e conforme Tavares (2011) são vistas como fontes históricas e de/para pesquisas sociológicas, caracterizadas como dispositivos visuais gráficos que veiculam e discutem aspectos da realidade social, apresentando-a de forma crítica e com muito humor.

Metodologia e Descrição das Atividades

O objetivo da presente metodologia consiste na construção de histórias em quadrinhos que abordam o conteúdo de Matemática, que foi, previamente, selecionado pelo professor (pesquisador), com o intuito de reforçar esse conteúdo trabalhado em sala de aula. Para atingir o objetivo proposto, foi desenvolvido e aplicado um Projeto Interdisciplinar, envolvendo os professores de Língua Portuguesa, Artes e Matemática. Este projeto foi desenvolvido durante o segundo bimestre, nos meses de maio e junho de 2014, envolvendo uma turma do 2° Ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Plácido de Castro e os três professores acima citados, os quais realizaram oficinas de Língua Portuguesa e Artes. Durante as aulas de Matemática foi feita a produção das histórias em quadrinhos pelos estudantes, como se vê na descrição a seguir.

A escola e os sujeitos da pesquisa

Para a realização deste trabalho, foi escolhida uma turma de 30 estudantes do 2º Ano da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Plácido de Castro, localizada na Av. Sérgio Henn, S/N no bairro do Diamantino em Santarém, região Oeste do Estado do Pará, que atende as seguintes modalidades de ensino: Ensino Fundamental (5ª a` 8ª séries); Educação de Jovens e Adultos - EJA - (4ª etapa); Educação de Jovens e Adultos do Ensino Médio (1ª e 2ª etapas); Ensino Médio (1º ao 3º anos). Conta com um universo de aproximadamente 1500 estudantes, em sua maioria, oriundos do próprio bairro, abrangendo uma faixa etária de 09 a 50 anos de idade, distribuída nas diversas modalidades de ensino.

A escolha deste local de pesquisa deu-se pelo fato do autor do trabalho lecionar nesta escola e pela facilidade de contato com os professores de Língua Portuguesa e Artes, que fizeram parte do desenvolvimento do projeto. Toda a proposta de atividade que seria desenvolvida com a turma, foi apresentada ao setor técnico e a direção da escola, bem como aos professores que participariam do mesmo. Em conjunto, decidiu-se que, apesar dos estudantes já terem feito atividades referentes ao conteúdo de histórias em quadrinhos, seria necessária uma oficina para que esse conteúdo fosse relembrado. A partir disso, foi feito todo o planejamento destas oficinas, para que o conteúdo de Matemática, que seria abordado durante as produções das histórias em quadrinhos, juntamente com o conteúdo de Língua Portuguesa e Artes, fossem contemplados e trabalhados de forma conjunta. Depois do planejamento, seguiu-se o desenvolvimento das oficinas.

Foi apresentado, aos estudantes o Projeto, o qual seria desenvolvido, e explicado a eles que participariam de duas oficinas: uma com a professora de Língua Portuguesa e outra com o professor de Artes, a fim de relembrarem os elementos constituintes de uma história em quadrinho. Nas aulas de Matemática o professor faria uma revisão de alguns conteúdos da disciplina para os quais os estudantes iriam construir suas próprias histórias em quadrinhos, para apresentar, nelas o conteúdo de Matemática que foi revisado. Depois disso, a turma foi dividida em seis grupos com cinco estudantes em cada um deles, para que participassem da atividade e facilitasse a execução do trabalho a ser desenvolvido.

A Produção das Histórias em Quadrinhos para o Conteúdo de Matemática

Nas oficinas de Língua Portuguesa a professora apresentou, aos estudantes, o roteiro das atividades que seria trabalhado com eles, informando-lhes que o objetivo maior seria como trabalhar outras formas de produzir textos, envolvendo a narração e a dissertação, utilizando as histórias em quadrinhos como recurso didático.

Posteriormente a isso, a professora entregou para aos estudantes algumas revistas em quadrinhos, de autores conhecidos e a partir disso, a professora fez alguns questionamentos, como por exemplo: *"quem gostava de ler histórias em quadrinhos?", "Quem gostava de desenhar?", "Quais personagens e autores de hq's conheciam?"* .

Figura 2: Alunos participando de oficina de Língua Portuguesa

Fonte: Autores

Na segunda, terceira e quarta oficina, a professora trabalhou os tipos de linguagem que podem ser encontrados nas histórias em quadrinhos. Mostrou aos estudantes que um elemento muito presente e que dá vida as histórias em quadrinhos, são as onomatopeias, que são sons que procuram imitar os ruídos, dando-lhes também uma beleza visual, citando também exemplos. Comentou também os aspectos visuais, como os desenhos interagem com o texto e as diferentes inserções de texto nos quadrinhos: fala, pensamento e narração. Trabalhou os outros elementos que estruturam as histórias em quadrinhos como o argumento, que nada mais é do que a ideia da trama de forma resumida com início, meio e fim; o roteiro que deveria ser seguido, a sequência lógica e temporal que deveria ser adotada para que a história fizesse sentido ao leitor.

Na oficina de Artes ocorreu nas aulas de Matemática, sendo quatro, com 40 minutos cada. Inicialmente o professor apresentou aos estudantes os tipos de formatos que as histórias em quadrinhos podem ter, elementos como o número de páginas, a distribuição do espaço, o número de quadros por página, os espaços que são destinados para os diálogos, para os desenhos e legendas que podem ser feitas. Na segunda oficina, ele apresentou aos estudantes os principais tipos de balões muito utilizados nas histórias em quadrinhos: de pensamento, de sussurro, de grito, de choro ou lamento, de diálogo ou de fala.

Na terceira oficina, ele apresentou, aos estudantes, os estilos de desenhos que podem ser utilizados durante a produção das histórias em quadrinhos. Na quarta oficina, os estudantes foram incentivados a produzir algumas páginas de histórias em quadrinhos.

Após as oficinas de Língua Portuguesa e Artes, iniciou-se a parte do projeto relativa à Matemática, que seria a revisão de conteúdos selecionados pelo professor e que seriam abordados na construção das revistas em quadrinhos como objetivo fixar esses conteúdos. Para essa atividade, foram utilizadas 7 aulas de 40 minuto cada uma delas descritas a seguir.

Na primeira, segunda e terceira aulas foram apresentados a eles os conteúdos que haviam sido selecionados pelo professor: Análise Combinatória (arranjos simples e combinação), Função Afim, Conjuntos, Função quadrática e Porcentagem. Esses conteúdos foram escolhidos pelo fato de o professor perceber durante a realização de exercícios, nas atividades avaliativas durante o primeiro bimestre, que esses estudantes tinham certa dificuldade em resolver questões que envolviam tais temas. Logo em seguida, foi feita uma revisão de cada um dos assuntos que foram selecionados. Essa revisão foi necessária para que eles relembrassem os assuntos que já haviam sido estudados por eles, os assuntos foram trabalhados de uma forma breve, explorando os principais pontos de cada um. Para isso, foi feita a exposição dos conteúdos em slides, resumos impressos e aplicações desses assuntos em situações do cotidiano.

Na quarta e quintas aulas, que ocorreu na sala de vídeo, deu-se início a preparação dos grupos para a construção das histórias em quadrinhos. Na ocasião, eles foram lembrados que esta atividade tinha por objetivo a construção de histórias em quadrinhos que abordassem conteúdos de Matemática e que isto fosse trabalhado de forma clara, para que eles não fugissem ao tema, e que tudo isso fosse construído de uma forma descontraída, para que chamasse a atenção de quem as lessem. Assim, cada grupo construiria sua história em quadrinho de acordo com o conteúdo selecionado usando sua criatividade. Para isso, foram formados seis grupos com cinco estudantes em cada um deles e os assuntos divididos.

Uma das histórias em quadrinhos que foram produzidas

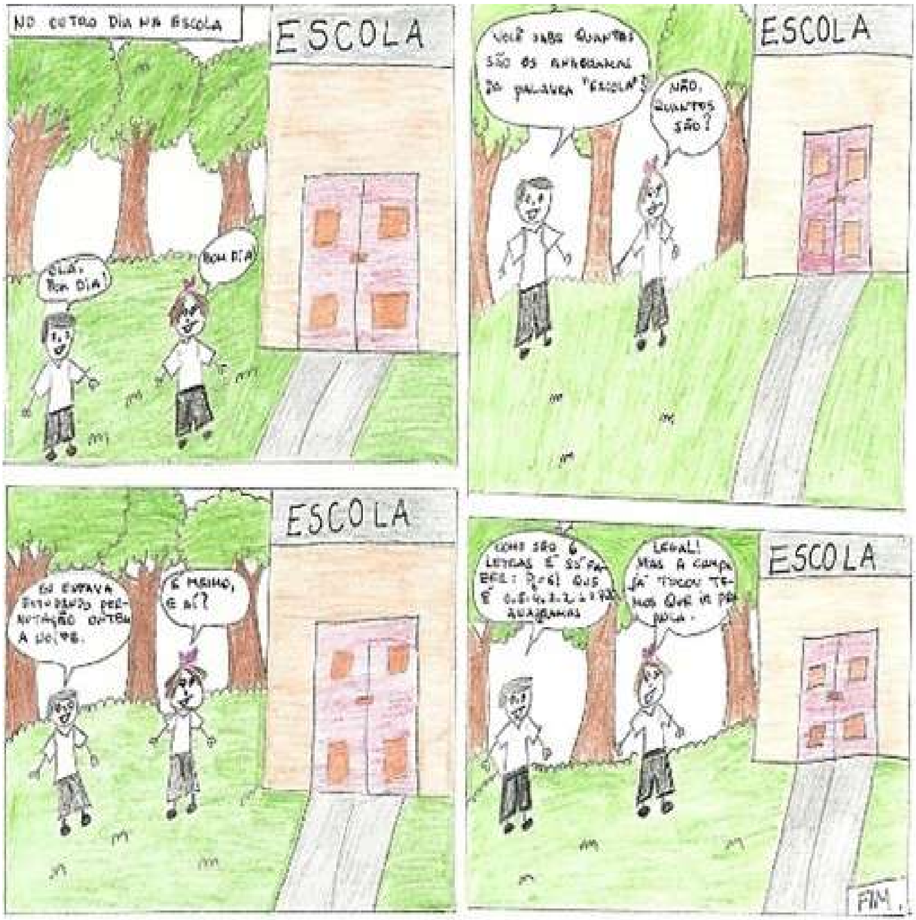
Nesta história em quadrinhos o grupo procurou explorar o Princípio Fundamental da Contagem, tomando como exemplo a escolha de lanches e o conceito de Permutação, através do exemplo dos anagramas. Essa história é contada durante a conversa entre dois amigos – João e Maria.

Na capa desta história em quadrinho, podemos perceber que o grupo tentou relacionar o título da história com conteúdo que seria abordado. Logo na primeira página, eles reproduzem uma situação que ocorre em uma lanchonete, onde os personagens conversam sobre a escolha de um lanche. Nesse momento, o grupo tenta apresentar o Princípio Fundamental da Contagem através da quantidade itens de cada opção (sucos e salgados) que tem para a sua escolha.

Capa e primeira página da história em quadrinhos do Grupo 01.

Na segunda página, em seu primeiro quadro, o grupo reproduz uma parte das possíveis escolhas de lanche que eles têm, mostrando, assim, uma parte da árvore de possibilidades que poderia ser construída, fazendo uso para isso de três balões que mostram o pensamento da personagem. Ainda nesta página, no último quadro, a personagem Maria faz menção a uma forma, ensinada pelo professor, de calcular essas possibilidades. Já na terceira página, a personagem Maria da continuidade a sua fala, apresentando o total de escolhas que tem para o lanche, aplicando, assim, o Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo.

Na quarta e quinta páginas, o grupo mostra uma conversa entre as personagens na entrada da escola. A personagem de João, conta a Maria que, na noite anterior, estava estudando sobre permutação e pergunta a ela a quantidade de anagramas que podem ser formados com a palavra "escola" e termina calculando essa quantidade. Neste quadro, pode-se perceber que o grupo procura fazer uso do conceito de permutação, apresentando a forma de calcular a quantidade de anagramas da palavra “escola” e fazendo uso também do conceito de fatorial para esse cálculo.



Quarta e quinta página da história em quadrinhos do Grupo 01

O grupo utiliza a linguagem verbal e não verbal para a construção da sua história, fazendo uso dos balões de forma correta para representar a fala das personagens, além de utilizar os recordatários que são os quadros usados para dar a noção de tempo que foram utilizados nas páginas 01 e 04, porém o grupo não faz uso das onomatopeias, um recurso que poderia enriquecer ainda mais o desenvolvimento da sua história em quadrinho.

Análise das Histórias em Quadrinhos

As histórias em quadrinhos, produzidas pelos estudantes, foram analisadas pelos três professores envolvidos no projeto. Essa análise foi feita após a entrega das mesmas e apresentada no momento de socialização em que os grupos puderam apresentar suas produções aos demais participantes do projeto.

De acordo com a professora de Língua de Portuguesa, todas as hq's utilizaram a linguagem verbal e não verbal em suas produções. Foi também observado o uso da linguagem formal nas hq's que retrataram a fala do professor com os alunos e informal, exemplificada pela conversa entre os colegas. Foram utilizados textos curtos e objetivos de modo que o tema fosse abordado de forma clara. Ainda segundo a professora, foram percebidos alguns desvios quanto à ortografia, pontuação e acentuação gráfica, porém nada que tornasse o texto incompreensível. Assim, os aspectos referentes à Língua Portuguesa foram apresentados de forma adequada.

Como destaca o professor de Artes, todas as histórias em quadrinhos analisadas fizeram uso dos balões para demonstrar a fala e o pensamento das personagens e cada um deles foi usado de forma correta. Apenas duas delas fizeram uso das onomatopeias, que foram as histórias em quadrinhos produzidas pelos grupos 04 e 06. Outro ponto a destacar foi a não utilização da palavra fim na história produzida pelo grupo 02, o que, de acordo com ele, comprometeu a finalização da história, dando um sentido de continuidade.

Os aspectos referentes aos conteúdos de Matemática, objetivo principal das atividades, passaram por um processo de análise feito por grupo, pois cada grupo trabalhou um tema diferente. Assim, tem-se a seguir a análise resumida de por grupo feita pelo professor, que aqui iremos mencionar somente três.

O **grupo 01 (arranjos simples)** - Nesta história em quadrinho o tema abordado foi trabalhado de forma contextualizada, explicando o

Princípio Fundamental da Contagem com uma situação do cotidiano. A árvore de possibilidades e o cálculo dos anagramas, também foram apresentados. Apesar de ser uma história curta, os alunos destacaram todos esses pontos de forma adequada, com coerência e originalidade.

O **Grupo 02 (Combinação)** - Nesta história em quadrinhos o conteúdo apresentado também levou em consideração uma situação vivenciada durante uma aula, partindo de um problema apresentado pela professora (personagem da história), porém este conteúdo referente à relação de combinação não foi abordado de forma clara.

O **Grupo 04 (Função Quadrática)** - Esse grupo tentou retratar uma situação de sala de aula, em que o professor (personagem da hq) expõe o conteúdo referente à função quadrática, apresentando os seguintes itens: discriminante, fórmula de Bhaskara, vértice da função e gráfico. Nesta história em quadrinhos os alunos procuraram explorar com mais clareza e detalhes o tema solicitado.

O que pôde-se observar é que a proposta de trabalho, de certa forma, foi aceita por parte dos estudantes, que participaram das oficinas realizadas pelos professores de Língua Portuguesa e Artes e da construção das histórias em quadrinhos nas aulas de Matemática. Os textos que foram desenvolvidos, nas histórias em quadrinhos, que os estudantes produziram, são simples e sintéticos, características fundamentais das mesmas. Isso pode ser um ponto que represente um desafio para o professor que deseja realizar uma atividade de reforço de conteúdo com a construção de quadrinhos, porque, essa síntese que deve empregada durante a produção das histórias muitas vezes não é suficiente para abordar tudo o que se deseja a cerca de um determinado tema, para que a compreensão dele pelos estudantes seja concretizada. Apesar disto, percebeu-se que, de certa forma, eles tentaram relacionar os temas selecionados com situações do seu cotidiano. A forma como eles contextualizaram os conteúdos é um dos aspectos mais positivos deste trabalho, pois mostrou que os estudantes conseguiram desenvolver os seus enredos em situações reais, na medida em que o conteúdo de Matemática foi sendo abordado.

A metodologia utilizada para o desenvolvimento do projeto permitiu a participação efetiva dos alunos com a proposta, pois durante toda a execução do projeto eles foram estimulados a criar e desenvolver as atividades de acordo com o que era proposto a eles. Isso também se refletiu na forma como eles mesmos se organizaram no grupo para que todo o trabalho fosse desenvolvido, pois eles interagiram entre si e criaram uma estratégia para que todos pudessem participar da melhor forma possível e assim concluíssem suas tarefas.

Quanto ao trabalho com os professores de forma conjunta, foi uma experiência que se mostrou viável, pois tudo foi planejado de forma conjunta e não de forma isolada, cada professor pode dar a sua contribuição para que o projeto fosse desenvolvido e para que os estudantes se envolvessem, pois do contrário nada do que foi exposto até aqui seria possível. Dessa forma, credita-se que o objetivo maior deste projeto que era fazer com que os alunos criassem suas histórias em quadrinhos e que nelas eles pudessem apresentar o que foi aprendido durante as aulas de Matemática foi alcançado de forma positiva.

Considerações Finais

O presente trabalho foi desenvolvido a partir da temática que envolveu a elaboração de histórias em quadrinhos produzidas pelos estudantes que abordam o conteúdo de Matemática previamente exposto e análise dos resultados obtidos a partir da inserção desta atividade nas aulas de Matemática em uma turma de segundo ano do Ensino Médio. Durante a realização deste trabalho foi possível identificar que a falta de algumas habilidades por parte dos alunos, como desenhar os Quadrinhos e criar diálogos, foram superadas com o trabalho em grupo, pois em cada grupo as tarefas foram divididas a partir das aptidões que cada estudante possuía. Além disso, percebeu-se que é possível trabalhar a Matemática desde a criação dos Quadrinhos até a criação da história, sem deixar de lado o ponto principal que é de auxiliar no aprendizado ou reforçar uma ideia que se pretende abordar.

O trabalho traz a perspectiva de que a atividade em grupo na sala de aula pode contribuir para que os alunos superem o individualismo e valorizem a interação e a troca, percebendo que esse tipo de relacionamento é necessário para a criação de ambiente saudável de aprendizado. Além disso, também vale ressaltar que os alunos realizaram a construção das histórias em quadrinhos sem interferência do professor, como forma de não influenciar o resultado final.

Como aprendizado ficou que as histórias em quadrinhos tratam sobre os mais diferentes temas, sendo de fácil utilização em diversas disciplinas. Cada história oferece uma série de informações possíveis de serem discutidas em sala de aula, dependendo apenas do interesse do professor e dos alunos. Elas podem ser usadas como reforço em pontos específicos, como para propiciar exemplos de aplicações dos conceitos teóricos desenvolvidos durante as aulas. Vale ressaltar que o importante é que essas informações sejam assimiladas na própria linguagem dos estudantes, muitas vezes dispensando a media /intervenção dos professores.

Convidamos o leitor a consultar o texto original (dissertação – ver Referências) para que possa observar outras hq's construídas pelos alunos e, especialmente, analisar a proposta pedagógica que foi aplicada.

As recomendações oriundas deste trabalho têm o propósito de contribuir para tornar as aulas de matemática e o ambiente de sala de aula mais saudável e prazeroso e, consequentemente, mais produtivo, sendo fundamental não incentivar práticas de pressão excessiva, fixar que as metas estabelecidas sejam desafiadoras, mas possíveis de serem realizadas.

Referências

BAKHTIN, M. Gênero textual: **histórias em quadrinhos.** São Paulo: Hucitec, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Lei n° 9.394/96, publicada no DOU de 23/12/1996, Seção I, p. 27839. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado, 1996.

Secretaria da Educação Básica – PCNs. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 1997,1999, 2000.

BORDONI, Thereza Cristina. **Uma Postura Interdisciplinar**. Disponível em:

<http://www.forumeducacao.hpg.ig.com.br/texto/texto/didat 7.htm>. Acesso em: 17 fevereiro 2015.

CARVALHO, DJ. **A Educação está no Gibi**. Campinas, SP: Papirus, 2006.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria `a prática.** 7. ed. Campinas: Papirus, 2001.

HAMZE, Darine. **Histórias em Quadrinhos**. São Paulo: Saraiva, 2008.

IEZZI, Gelson & MURAKAMI, Carlos. **Matemática: ciência e aplicação.** Vols. 1 e 2, 7.ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

JARCEM, René Gomes Rodrigues. **História das Histórias em Quadrinhos**. Ano 3, set 2007.

LUYTEN, Sônia M. Bibe. **Histórias em quadrinhos: leitura crítica.** São Paulo: Paulinas, 2011.

MOYA, Álvaro**. Shazan**. São Paulo: Perspectiva, 1996.

PALHARES, Pedro Manuel Baptista. **Etnomatemática: um novo olhar sobre a aprendizagem matemática.** São Paulo, 2008.

PEREIRA, Pierre. **Práticas Pedagógicas na Educação Matemática: epistemologias e competências.** Caxias do Sul, 2010.

RAMA, Ângela et al. **Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula.**4. ed. São Paulo: Contexto, 2010.

RAMA, A. e VERGUEIRO, W. (org.) **Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula.** São Paulo: Contexto, 2008.

TAVARES, Rosilene Horta. **O poder mágico de conhecer e aprender.** Brasília: LIBER, 2011.

SOUSA, M. C. B. **Construção de Histórias em Quadrinhos para o Ensino da Matemática com alunos do 2o ano do Ensino Médio**. 2015. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2015.

Oficina com freegeo nas aulas de matemática

Rosiany Marla Riker Maduro[1]
Hugo Alex Diniz[2]

Introdução

O presente trabalho traz como proposta de estudo a indagação a respeito do uso do celular em aulas de matemática para o ensino médio. Hoje há muitas controvérsias a respeito do uso do celular nas salas de aula, enquanto uns apoiam a decisão de proibir o uso dos mesmos outros tentam se adequar a essas tecnologias. O uso do celular como recurso pedagógico pode melhorar o ensino aprendizagem dessa disciplina, tornando as aulas mais atrativas e motivadoras. Isso significa adequar a escola ao uso dessas tecnologias e que o espaço sala de aula, a partir do uso do celular, que é uma cultura digital, se tornará um grande desafio para o aluno. Sob esse aspecto, Bento e Cavalcante (2013, p. 118) descrevem que,

> existem várias formas de se utilizar um celular em sala de aula, seja de um celular simples até mais moderno. Um celular simples, por exemplo, que tem como apli-

[1] SEDUC-PA. E-mail: *marlariker@yahoo.com.br*
[2] Ufopa. E-mail: hugo.diniz@ufopa.edu.br

> cações, a calculadora, o conversor de moeda, de comprimento, de peso, de volume, de área, e de temperatura, tem também a contagem regressiva e o cronômetro. E os mais modernos possuem, além disso tudo como aplicações, também o tradutor de línguas que bastante conhecido por ser utilizado no Google, mais que em alguns não têm necessidade da internet para o uso, o gravador de voz, a filmadora a câmera, e a internet.

Apesar dos grandes avanços tecnológicos dentro e fora da escola, ainda se tem na rede de ensino muito "professauros", professores que ainda não decidiram acompanhar o desenvolvimento tecnológico e acabam permanecendo em algumas mesmices.

Além de sair da rotina lápis e papel, entende-se que o uso do celular como uma ferramenta pedagógica, pode dinamizar as aulas e facilitar a assimilação das atividades elaboradas. Com o uso adequado dessa ferramenta amplia-se a visão dos educandos em relação à Matemática, mostrando que o sentido de número está além de simplesmente fazer contas, mas em construir uma rede de ideias, esquemas e operações conceituais, investigar propriedades, verificar possibilidades de manipulação, tomar decisões em contextos variados, desenvolver uma atitude de pesquisa e investigação nas aulas e nas atividades extraclasse.

Referencial Teórico

As novas tecnologias no contexto escolar

O grande número de itens tecnológicos disponíveis na sociedade é um dos responsáveis pela enorme quantidade de conhecimentos que é produzido diariamente. No entanto, isso nem sempre se verifica na hora de abordar esses conhecimentos na escola pública, quando o máximo que a maioria consegue fazer é se agarrar a alguns livros e tentar repassar o conteúdo utilizando quadro e pincel. Segundo Verhmuller e Silveira (2012), os aparatos tecnológicos fazem parte do dia a dia de nossos alunos, uma vez que em casa estão em contato com todos esses instrumentos indispensáveis aos afazeres diários. Como diz Moran (2007)

> As tecnologias são pontes que abrem a sala de aula para o mundo, que representam, mediam o nosso conhecimento do mundo. São diferentes formas de representação da realidade, de forma mais abstrata ou concreta, mais estática ou dinâmica, mais linear ou paralela, mas todas elas, combinadas, integradas, possibilitam uma melhor apreensão da realidade e o desenvolvimento de todas as potencialidades do educando, dos diferentes tipos de inteligência, habilidades e atitudes. (MORAN, 2007, p. 164)

A sociedade depende destes instrumentos para diversas atividades, e se acostumou a manuseá-los com muita familiaridade. É importante compreender que estes inventos melhoraram vários aspectos da nossa vida e hoje seria muito difícil abrir mão dos mesmos, uma vez que é a realidade dos jovens que já nasceram na era digital e nunca se deram conta de como era a vida antes desses equipamentos.

Toda essa gama de equipamentos faz parte do cotidiano dos alunos, incluindo o aparelho celular que desde cedo faz parte da sua vida. Tais aparelhos são como pequenos computadores que as crianças sabem muito bem como utilizá-los, seja para jogos, seja para redes sociais, para pesquisa, para mensagens de texto ou mesmo para conversas orais com os demais integrantes do seu grupo social. Os inventos tecnológicos estão presentes em todos os ambientes atuais, tornando o seu uso indispensável nos nossos dias.

As inovações e as possibilidades pedagógicas

As TICS (Tecnologias da Informação e Comunicação) têm causado uma verdadeira revolução na forma de conceber o mundo e, então, é de se pensar que se forem usadas como ferramentas educacionais, certamente produzirão resultados muito diferentes dos obtidos através dos modelos tradicionais de fazer a escola. Para DUTRA *et al.* (2014), o uso das ferramentas tecnológicas em ambientes escolares pode ser a peça necessária para o melhor aproveitamento por parte dos alunos, considerando que estas possibilitam a visualização de situações que não seriam possíveis sem tais recursos. A interação entre os alunos e as máquinas, torna o aprendizado mais divertido, mais fácil e significativo. Segundo Bento e Cavalcante (2013), o educador precisa ter consciência que a escolha de tecnologias educacionais estão vinculadas à concepção de conhecimento que concebe. No caso do celular, quanto mais sofisticado é o aparelho, maior é o número de aplicativos que ele trás, permitindo os mais diversos tipos de interação com seus usuários.

Para Vivian e Pauly (2012), o uso de tecnologias produz conhecimentos por meio do intercambio de experiências, de conhecimentos e do número de informações disponibilizadas. Isso dá ao docente a possibilidade de trabalhar com um acervo mais atualizado, melhorando significativamente a qualidade do aprendizado e abordando situações das quais o educando já pode ter alguma familiaridade.

Celular e suas Utilidades na Sala de Aula

A necessidade de comunicação é uma característica própria do ser humano, assim como a busca de alternativas que tornem mais fácil a realização desse processo. Nesse sentido, Verza (2008), afirma que pode-se pensar a introdução do aparelho celular no cotidiano das pessoas como um fenômeno social que instaurou uma nova tecnologia que renovou-se, a partir dos aplicativos, para dar conta da necessidade do homem de comunicar-se.

A escola atual tem a missão de educar alunos futuristas e alguma coisa tem que ser feita imediatamente para mudar a própria escola, uma vez que a mesma ainda se encontra na “pré-história”, ou seja, completamente fora da realidade vivenciada pelos jovens. De acordo com Souza

(2013) na era da cultura digital, a telefonia móvel apresenta uma enorme vantagem no campo do conhecimento no quesito estudo e aprendizagem, servindo para as mais diversas atividades, as quais se pode nomear:

- Usar aplicativos para armazenar os conteúdos trabalhados no celular;
- Registrar datas de testes e de outras atividades, seja de forma escrita ou em áudio;
- Reproduzir gravações de vídeos de atividades realizadas em sala ou de filmes com conteúdo didático;
- Responder às questões propostas utilizando mensagens de textos;
- Tirar fotografias de desenhos ou de atividades diversas executadas no espaço de estudo;
- Realizar pesquisas;
- Utilização de aplicativos para a resolução de cálculos diversos;

O celular é uma ferramenta que pode ser utilizada agregada a outros equipamentos, que podem reproduzir sons ou imagens, ou sons e imagens. Daí a facilidade do seu uso em ambientes propícios ao aprendizado.

O Uso do Celular nas Aulas de Matemática

Muitos são os motivos que levam as pessoas a adquirirem um aparelho celular, afirma Verza (2008). O celular com seus vários recursos é um instrumento facilitador de muitas atividades no cotidiano das pessoas e, portanto, pode ser explorado de diversas formas nas salas de aula, principalmente nas aulas de matemática, pois, mesmo que possua poucos aplicativos, é dotado de um aplicativo que simula uma calculadora, permitindo o seu uso com eficiência por parte dos alunos. Oferece também a vantagem de ser leve, pode ser levado no bolso e é o aparato tecnológico mais comum e mais presente no cotidiano (Dutra *et al.*, 2014).

O celular é um instrumento que não é usado apenas por pessoas adultas, e não tem apenas a função de telefone. Alguns aparelhos são como minicomputadores portáteis, que podem ser carregados para qualquer lugar. Por ser uma verdadeira central multimídia, a sua utilização pedagógica pode nos oferecer muitas vantagens no espaço do ensino de Matemática. Suas funções vão muito além de resolver cálculos, podendo também ser usado como câmera filmadora registrando momentos da aula que servirão para estudo posterior, além de compartilhar seus arquivos por meio dos seus muitos recursos de mídia entre os vários agentes da classe.

Metodologia

Não é novidade que em um mundo cada vez mais atraente fora da escola, é necessário utilizar diferentes recursos no trabalho escolar, que incentivem os estudantes a se apropriarem dos significados dos conceitos científicos e a buscarem estratégias para melhor trabalhar com os conhecimentos matemáticos adquiridos.

Neste trabalho, são descritos e apresentados os resultados obtidos por meio de uma oficina com o uso do aplicativo FreeGeo para o ensino da matemática. Constitui-se de uma atividade investigativa, composta por situações-problemas em que os alunos terão que mobilizar conhecimentos já adquiridos e estratégias para conjecturar conceitos envolvendo funções.

No desenvolvimento das atividades propostas utiliza-se o *software FreeGeo* para auxiliar a visualização do plano cartesiano e compreensão de conceitos geométricos. Além disso, deve-se dispor de um projetor multimídia conectado ao computador com as atividades do referido aplicativo.

A utilização de *softwares* de geometria dinâmica pode favorecer a verificação de hipóteses e conjecturas levantadas pelos alunos de maneira mais dinâmica, permitindo-lhes escolher seus próprios caminhos, interagir com outros espaços e seguir o seu próprio ritmo de aprendizagem, o que nem sempre é possibilitado na escola.

Sobre *softwares* de geometria dinâmica, estes possuem qualidades de visualização e de interatividade para explorar propriedades e podem ser utilizados para auxiliar a construção dos conhecimentos, assim como podem auxiliar na modelagem de problemas e nas simulações. Esses programas permitem manipulação fácil e especulação de conceitos pelo próprio aluno, o que aumenta seu prazer em interagir com a tecnologia para construir conhecimentos matemáticos.

Esta oficina propõe uma alternativa para o ensino e a aprendizagem de Funções para o ensino médio na disciplina de Matemática à luz do uso do ambiente de Geometria Dinâmica, mais especificamente o *software* FreeGeo.

De fato, em um mundo tecnológico, é válido ressaltar que existem projetos disponibilizados na escola incentivando o uso de novas tecnologias como recurso pedagógico de um modo geral que estimulam o uso destes recursos.

Almeja-se que professores e alunos da educação básica tenham subsídios para uma formação empreendedora e crítica, daí a necessidade de construímos a presente oficina. Sugere-se, ao final das atividades, uma proposta de roteiro para que os alunos respondam no decorrer da execução das atividades propostas.

Vale ressaltar que as atividades da oficina são apresentadas em três blocos, como descriminados nos quadros 1 e 2.

Quadro 1 - Organização das atividades em blocos

BLOCO 1	Consistirá numa atividade de familiarização com o *software* via introdução do conceito de função. Nesse o momento os participantes que nunca tiveram um contato com este ambiente de Geometria Dinâmica costumam apresentar algumas dificuldades básicas, por isso, o tempo previsto para esse momento é de três aulas de quarenta e cinco minutos cada.
BLOCO 2	Neste bloco o aluno terá uma atividade que aborde a noção intuitiva de FUNÇÃO. Como normalmente o participante já está familiarizado o tempo estimado é de três aulas de quarenta e cinco minutos cada.

BLOCO 3	O bloco traz uma sequência de atividades que envolvem funções com o seu conceito e gráfico. É um momento muito rico, porque o aluno muitas vezes não compreende bem esta relação. Costuma-se utilizar nesse momento da atividade três aulas de quarenta e cinco minutos cada.

Quadro - 2 Organização do experimento

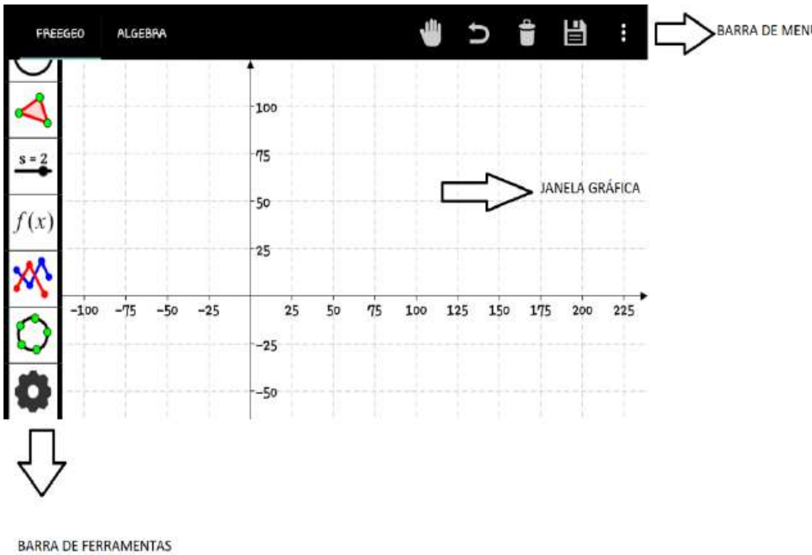
Sessões	Nome da atividade	Conteúdos
I	**Domínio e Imagem de uma Função utilizando o *software* FreeGeo.**	• Familiarização com o software; • Domínio e imagem de uma função.
II	**Noção intuitiva do conceito de função utilizando o *software* FreeGeo.**	• Conceito de função
III	**Construindo a ideia de função, a partir do gráfico, utilizando o *software* FreeGeo**	• Funções e seus gráficos

FreeGeo

É um software de fácil entendimento a partir de um menu e uma lista de botões que oferecem várias possibilidades de construções.

O software oferece a opção de inserir o plano cartesiano e a malha retangular na área de trabalho, o que ajuda a fazer a relação com os estudos feitos na sala de aula. Como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Interface gráfica inicial do FreeGeo



Fonte: prnt do software.

No bloco 2 foi trabalhado os conceitos matemáticos e no bloco 3 atividades desenvolvidas pelos alunos junto com a ficha de avaliação da oficina.

Resultados e Discussões

O Quadro 4 e a Figura 2 demonstram os resultados da oficina realizada na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Antônio Batista Belo de Carvalho com alunos do 2º ano do Ensino Médio turno vespertino, acerca de seus conhecimentos sobre conteúdos abordados nas aulas de Matemática e as relações que os mesmos fazem com o seu cotidiano e como o seu celular iria contribuir para as aulas de Matemática.

A oficina se deu em três blocos (três encontros), foram convidados os alunos do segundo ano que, apesar de ser uma escola localizada na periferia, doze alunos se candidataram a participar da oficina, pois os mesmos trariam os seus aparelhos celulares, sendo que aqueles mais simples não são compatíveis com software.

No primeiro encontro, a maioria já havia baixado o aplicativo freegeo no celular, para aqueles que ainda não tinham baixado, os próprios alunos passaram por bluetooth, já observando a facilidade deles com tal recurso tecnológico. Após todos estarem com o programa foi realizada uma pequena introdução mostrando a janela gráfica, alguns recursos da barra de ferramentas, barra de menu e mostrando que cada ícone dá acesso a uma nova janela com muitas funções. Quando eles viram o leque de informações se assustaram, pois muitos têm aversão à disciplina de Matemática. No entanto não desistiram da oficina, nessa primeira atividade proposta os alunos relembraram que o ponto é um par ordenado cujas coordenadas é um valor no eixo x e outro no y. Também ao renomear alguns lembraram que o ponto tem que ser com letra maiúscula. E aprenderam outras funções como movimentar o ponto, trocar a cor do ponto e deixar visível tanto o ponto quanto suas coordenadas.

Além disso, também ressaltou-se os conceitos de segmento, semirreta e reta. No item b eles construíram um segmento com os pontos que haviam criado no item a. Já no item c mostrou-se o que fora aprendido nos itens a e b. Como o aluno já está tão envolvido com essa tecnologia, com maior facilidade, conseguiu reconstruir o seguimento partindo de dois pontos quaisquer.

Na atividade 2, foi abordada a função afim, como são alunos do segundo ano, então já têm conceitos prévios de que gráfico iria formar, porém, o mais interessante é que os alunos não sabiam que o gráfico é infinito. Eles pensavam que o gráfico só possuíam aqueles pontos desenhados no quadro. Quando realizamos a atividade a, essa foi a reação de espanto por ver que com esse recurso o gráfico era infinito. Além de alguns conceitos que foram trabalhados tais como, que o gráfico da função afim é uma reta, que quando o coeficiente angular é positivo ela é crescente caso contrário decrescente, além do coeficiente angular também foi relembrado o coeficiente linear, que são os pontos conhecidos como o zero da função onde o gráfico corta no eixo x e y. Em relação ao programa, eles aprenderam a mudar a cor da reta, espessura, renomear e torná-la visível quando necessário.

E assim, foi encerrado o encontro utilizando o celular como ferramenta de aprendizagem no qual escolheu-se o *software* freegeo que é bem parecido com geogebra, um *software* matemático para computadores e tabletes mais ainda não é oferecido para celulares.

Já no segundo encontro foi revisado o que havia sido aprendido na aula anterior e, sem dificuldades, os alunos conseguiram refazer o que foi feito na aula anterior. Depois iniciou-se com a atividade 3, que trata do assunto função quadrática ou função do segundo grau. Nessas atividades, os alunos construíram o gráfico da função e observaram alguns conceitos tais como, zero da função quanto ao número de raízes. Também observaram o formato do gráfico que é uma parábola, sua concavidade quando é para cima o coeficiente a é maior que zero, caso contrário a concavidade é para baixo. No caso da concavidade para cima o vértice é um valor mínimo da função, e se a concavidade for voltada para baixo existe um valor máximo.

Nessa atividade foi relembrada todas as características e pontos importantes do gráfico dessa função. Esse programa possui uma dinâmica bem interativa, após desenhar o gráfico podemos localizar esse ponto e colocá-lo em movimento, assim ele passa por todo o gráfico e o aluno observa onde são os pontos de máximo e mínimo.

Na atividade 4 sobre função exponencial e função logarítmica, eles construíram uma função exponencial, uma função logarítmica, mudaram cor e estilo da linha do gráfico. Também localizaram alguns pontos e observaram que o formato do gráfico era uma curva e que as funções exponencial e logarítmica são inversas. Assim encerramos o nosso segundo encontro.

No nosso terceiro e último encontro sobre o freegeo nós trabalhamos uma questão contextualizada. Na atividade 5 tratou-se de dois planos de saúde para os alunos plotarem o gráfico e analisar qual plano é mais econômico. O interessante foi que eles conseguiram realizar tal atividade, pois observaram que o gráfico era de uma função do 1º grau ou função afim, que era uma reta e que se fosse para poucas consultas o plano B era melhor que o plano A. Se fosse para muitas consultas o ideal era o plano A.

Já na atividade 6 inserimos uma nova ferramenta o slider, que serve para trabalhar a função com os coeficientes variáveis num determinado intervalo previamente determinado. Nos primeiro 15 minutos, os alunos foram instruídos a fazer qualquer construção de sua preferência e, após esse tempo livre, solicitamos que criassem um slider com intervalo de sua preferência e depois digitasse a função $f(x)= ax+b$. Em seguida, deveria utilizar a ferramenta slider e manuseá-la, relatando o que estava acontecendo no gráfico. Quando o coeficiente *a* está variando o gráfico muda sua inclinação, pois o *a* é o coeficiente angular e o *b* que é o coeficiente linear o gráfico se desloca no eixo y, mas não muda a inclinação. Fazendo a mesma coisa para uma função $f(x)=ax-b,\ b > 0$, foi observado que o comportamento é o mesmo porém o coeficiente linear é negativo em relação a questão anterior. Depois eles realizaram a construção da reta a partir de dois pontos e movimentaram essa reta e observaram que os coeficientes variam de acordo com a movimentação. Em seguida, mudou-se para uma função do 2º grau e três slider, pois são três coeficientes e, para cada coeficiente, foi observado que quando *a* está variando a abertura da parábola varia e quando *a* é igual a zero o gráfico fica uma reta. E quando o coeficiente *b* está variando, o gráfico da função faz um movimento cuja trajetória é uma parábola. Quando alterou-se o coeficiente c a parábola se deslocou no eixo y.

E assim foi terminada a oficina deixando um tempo para eles criarem outras funções de sua preferência, enquanto era passada a ficha de avaliação da oficina.

Resultado da avaliação está no Quadro 3.

Quadro 3 – Resultado do questionário avaliativo

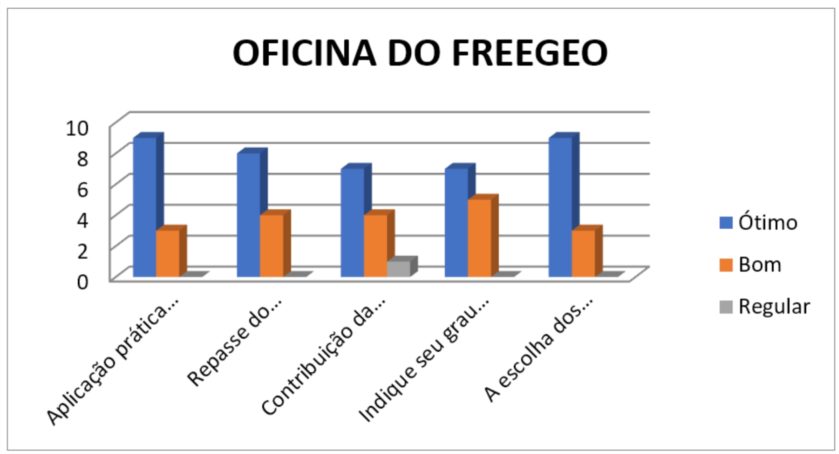
Perguntas	Ótimo	Bom	Regular
Aplicação prática do conteúdo, motivação	9	3	0
Repasse do conteúdo com clareza	8	4	0
Contribuição da oficina do Freegeo	7	4	1
Indique seu grau de aprendizagem com as oficinas	7	5	0
A escolha dos conteúdos foi adequada	9	3	0

Fonte: os autores.

Os alunos que participaram da oficina segundo o formulário avaliativo da oficina relataram que grandes maiorias se sentiram motivadas com a aplicação do conteúdo de forma diferenciada com o uso do recurso tecnológico. Em relação a forma que foi repassada os conteúdos também 8 alunos avaliaram como ótimo e 4 avaliaram bom. Quanto ao software, 7 marcaram ótimo, ou seja, 7 alunos acharam que softwares são um recurso que ajudará muito nos conteúdos de matemática, 5 marcaram bom e 1 regular. Quanto ao aprendizado deles 7 marcaram ótimo e 5 bom, isso mostra que o recurso contribuiu de alguma forma. Já em relação ao conteúdo 9 alunos consideraram ótimo e 3 alunos consideraram Bom.

Bom, lembrando que essa turma tinha uma aversão à disciplina Matemática e, nos surpreendeu após a realização da oficina, passando a ser mais participativa nos estudos de uma disciplina que antes não queriam nem ouvir falar. Os resultados de sua melhora quanto ao estudo da Matemática por meio da realização da oficina estão mostrados no quadro a seguir:

Figura 2– Resultado do questionário avaliativo



Fonte: Questionário aplicado para alunos do 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Antônio Batista Belo de Carvalho.

Considerações Finais

A oficina realizada alcançou seus objetivos, que era a elaboração de um cenário a respeito do uso do celular na sala de aula e do aprendizado dos alunos em relação à disciplina Matemática, na qual investigamos algumas dificuldades do alunado frente à aprendizagem da disciplina matemática.

No entanto, outro fator que pode estar relacionado ao fato de grande parte dos alunos não conseguirem relacionar conteúdos de matemática com o cotidiano é a falta de recursos utilizados nas aulas de matemáticas devido a diversos fatores, entre eles está à falta de uma boa estrutura nas escolas públicas estaduais visando à contextualização dos temas com o cotidiano do aluno. A escola não tem acompanhado os avanços tecnológicos e assim se torna menos interessante para o aluno. Até mesmo na visualização de gráficos no quadro, não tem como mostrar o comportamento do gráfico em um intervalo grande, já com o software, têm-se outra visão.

Apesar de ser uma escola pública, grande maioria dos alunos possuem celular dos mais modernos, então eles acompanham a tecnologia e precisam de uma orientação para mostrá-los que esses recursos podem ajudá-los nas aulas de matemática. Além de tornar as aulas mais interessantes e diversificadas.

Foi observado na oficina, o interesse dos alunos para descobrir como explorar o celular nas aulas de matemática. Constatamos que a escola precisa se adequar para a realidade do aluno, o professor precisa inovar para atrair atenção do educando, com objetivo de combater o baixo índice de interesse pela disciplina de Matemática. Na maioria das vezes essa falta de interesse se dá por que o aluno não entende o assunto, não vê aplicação do conteúdo no seu cotidiano.

Cabe a nos professores licenciados em Matemática buscar recursos para ministrar a disciplina, priorizando a utilização de recursos tais como o celular como uma ferramenta pedagógica, relacionando os conteúdos que estão sendo trabalhados em sala de aula, além daquele velho livro didático que muitas das vezes é o único recurso que o professor utiliza.

Assim faz-se necessária a utilização de metodologias diferenciadas, independente de espaço físico que a escola disponibiliza. Lembrar que é fundamental para aprendizagem o elo entre a teoria e a prática, considerando a interação com a prática.

Referências

BENTO, Maria C.; CAVALCANTE, Rafaela S. Tecnologias móveis em educação: o uso do celular na sala de aula. **Revista ECCOM**, v. 4, n. 7, jan./jun. 2013 p. 113/120.

ALMEIDA, P. N. **Educação lúdica: Técnicas e jogos pedagógicos.** 11. Ed. São Paulo: Loyola, 2003

MORAN, José Manuel. **Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas**. In: Moran, J.M., Masetto M. T., Behrens, M.A. Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica. Campinas, SP: Papirus, 2000.

MORAN, José Manuel. **Desafios na Comunicação Pessoal**. 3 Ed. São Paulo: Paulinas, 2007.

PEREIRA. S.; PEREIRA. L,;PINTO. M**: Internet e redes sociais: tudo o que vem à rede é peixe?** 1 Ed. Porto. Edumedia, 2011

SANTOS, S. C. **A Produção Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem:** o caso da geometria euclidiana espacial. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer**. São Paulo: Ática, 1990.

ANTUNES, Celso. **Professores e professauros: reflexões sobre a aula e práticas pedagógicas diversas.** 4ª ed. Vozes. Petrópolis. 2010.

FreeGeo Sistema de geometria dinâmica para Geometria, Álgebra, Estatística e Análise (v 1.8.2) <http:www.freegeo.de/>.

<https://www.google.com.br/?gws_
rd=cr&ei=pqOKVpTwOYOpwgTuZTgAw#q=google+play+download>

Criptografia: Uma Engenharia didática para o Ensino Médio

Eliseu da Rocha Marinho Filho[1]
Hugo Alex Carneiro Diniz[2]

Introdução

Segundo os Parâmetros Currículares Nacionais (PCN's) Brasil (2000) e a Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional (LDB) Brasil (2015), o ensino/aprendizado de Matemática deve ter como principal objetivo a formação social do aluno. Esta formação está associada a inserção deste no mercado de trabalho, na cultura e nas interações sociais. O mercado de trabalho de hoje exige cada vez mais profissionais que saibam exercer papéis de liderança, de trabalho em grupo, de criatividade, para resolver os mais diferentes problemas. Nesse contexto, a Matemática tem importante papel ao promover uma educação que proporcione ao aluno o contato com desafios que possam desenvolver essas qualidades.

A palavra *Criptografia*, em sua etimologia, é a junção de duas palavras gregas, *kryptós* que significa oculto, secreto, escondido e *gráphein* que significa escrita. De acordo com Olgin, Groenwald e Franke (2011), Criptografia é o estudo dos princípios e técnicas pelas quais uma infor-

1 IFPA. E-mail: eliseu.marinho@ifpa.edu.br
2 Ufopa. E-mail: halexdiniz@gmail.com

mação pode ser transformada (codificada) da sua forma original (plaintext) ou texto claro (cleartext) para outra ilegível, chamada texto cifrado (ciphertext), texto código (codetext) ou simplesmente cifra (cipher), que usualmente tem a aparência de um texto randômico (aleatório) ilegível, de forma que possa ser conhecida apenas por seu destinatário, que é o detentor de uma "chave" capaz de decodificar a informação, possibilitando a sua leitura. Segundo Coutinho (2009), embora algumas pessoas ainda associem mensagens codificadas à agentes secretos, há mais de uma década que esta não é a aplicação mais importante da Criptografia. Hoje em dia, operações de serviços disponíveis na internet, movimentações bancárias, transações em terminais eletrônicos, ou seja, todas as transações que envolvem dinheiro e que são feitas por meios eletrônicos, necessitam da criptografia para uma comunicação de forma confidencial. Ainda segundo Coutinho (2009), os processos pelos quais informações são codificadas dependem, de maneira geral, do uso da Matemática. Sobre o crescimento da Criptografia, Zatti e Beltrame (2006) dizem que, atualmente, a Criptografia, dado o grau de sofisticação e embasamento teórico que envolve o seu estudo, é considerada uma ciência, no campo das Ciências Exatas.

Além da Criptografia, segundo Olgin, Groenwald e Franke (2011), temos a *Criptoanálise* (kriptós = escondido, oculto; análysis = decomposição) que é a arte ou ciência de determinar a chave cifradora ou decifrar mensagens sem conhecer a chave, uma tentativa de Criptoanálise é chamada ataque. *Criptologia* (kriptós = escondido, oculto; logo = estudo, ciência) é a ciência que reúne a Criptografia e a Criptoanálise. Ainda para Olgin, Groenwald e Franke (2011), *cifrar* é o ato de transformar dados em alguma forma ilegível. Seu propósito é o de garantir a privacidade, mantendo a informação escondida de qualquer pessoa não autorizada, mesmo que esta consiga visualizar os dados criptografados. *Decifrar* é o processo inverso, ou seja, transformar os dados criptografados na sua forma original, inteligível. De acordo com Stein (2011, apud RIBEIRO, LOURENÇANO e COSTA, 2013) de maneira geral, há um emissor que tenta enviar uma mensagem para um receptor, existe também um adversário que deseja interceptar essa mensagem. Além disso, para Olgin, Groenwald e Franke (2011), para cifrarmos ou decifrarmos uma mensagem, necessitamos de informações confidenciais geralmente denominadas chaves ou senhas. Dependendo do método de criptografia empregado, a mesma chave pode ser utilizada tanto para criptografar como para decriptografar (decodificar, desincriptar, ler) mensagens, enquanto outros mecanismos utilizam senhas diferentes.

As transações comerciais modernas e a comunicação entre pessoas necessitam de sigilo, em virtude disto, faz-se necessário um estudo das várias formas de se criptografar uma mensagem ou uma informação que se deseja enviar, a fim de que esta não seja lida pela "pessoa errada". Durante o Ensino Médio não são abordados, de forma eficiente, temas que têm grande relevância para o cotidiano dos alunos, levando-os a concluir que a matemática é desconexa de sua vida, algo enfadonho que só é estudado por obrigação.

O estudo da Criptografia é importante em várias formas de transações e comunicações entre pessoas, mesmo assim não é trabalhado com alunos do Ensino Médio.

As principais hipóteses levantadas neste trabalho foram as seguintes: existe uma relação entre o tema Criptografia e a Matemática do Ensino Médio; a abordagem de conteúdos matemáticos do Ensino Médio, especialmente Funções e Matrizes, associados à Criptografia e sua história pode trazer uma maior assimilação desses conteúdos.

A principal problemática pesquisada foi como desenvolver uma sequência didática, para ser aplicada no segundo ano do Ensino Médio, que apresentasse a Matemática como uma ferramenta que pudesse ser amplamente aplicada à codificação das transações e comunicações humanas, ou seja, à Criptografia.

Segundo Tamarozzi (2001, apud GROENWALD e FRANKE, 2008) o tema Criptografia possibilita o desenvolvimento de atividades didáticas envolvendo o conteúdo de funções e matrizes que se constituem em material útil para exercícios, atividades e jogos de codificação, podendo o professor utilizá-los para fixação de conteúdos. Aliado a isso, de acordo com Groenwald e Olgin (2010) trabalhar com atividades metodológicas utilizando códigos e senhas oportuniza aos alunos reforçar os conteúdos matemáticos já estudados, utilizar a calculadora como um recurso facilitador para cálculos longos, e ainda favorece o trabalho em grupo.

O objetivo geral desta pesquisa foi a implementação de uma Engenharia Didática, para o tratamento do tema Criptografia, associado aos conteúdos de Matemática trabalhados no Ensino Médio. A Engenharia Didática (como veremos melhor no capítulo 4), vista como metodologia de pesquisa, é um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de uma sequência de ensino.

Os objetivos específicos, para atingir o objetivo geral, foram: revisão teórica sobre a história da Criptografia; mostrar como a Criptografia se relaciona com o nosso cotidiano; estabelecer as principais formas de se criptografar uma mensagem, dando enfoque às que usam conteúdos do Ensino Médio; criar uma sequência didática que pudesse ser aplicada ao 2º ano do Ensino Médio, usando Funções, Matrizes e Aritmética Modular; fazer com que a Criptografia seja conhecida por professores e alunos do Ensino Médio e, que os professores possam trabalhar, posteriormente, esse tema com seus alunos, de forma motivadora com exemplos do dia a dia das transações e comunicações entre pessoas, de tal maneira que se possa instigar o aluno a pesquisar mais sobre o assunto e conteúdos matemáticos associados; estimular o uso da calculadora como instrumento facilitador para cálculos longos; melhorar a absorção dos conteúdos Funções e Matrizes com a utilização do tema Criptografia.

Apresenta-se neste trabalho a Criptografia como um instrumento facilitador da construção de conceitos matemáticos e como um catalisador do interesse do estudante acerca de conteúdos de Matemática Básica trabalhados no Ensino Médio. Entretanto, o tópico Criptografia é muito vasto e, consequentemente, correr-se-ia o risco de se tornar superficial demais ao tentar abordar o conteúdo todo. Para especificar um pouco mais o campo de estudo, encontra-se neste trabalho, um tratamento das formas mais importantes de se criptografar uma mensagem, focando as formas mais básicas que usam ferramentas matemáticas elementares, que podem ser trabalhadas em sala de aula com alunos do segundo ano do Ensino Médio, como Divisões Euclidianas, Potências, Funções Afins, Funções Quadráticas, Funções Exponenciais, Funções Logarítmicas e Matrizes.

Ao longo deste trabalho buscamos sempre trazer a Criptografia e a Matemática para a vida dos alunos e professores de forma clara e objetiva, para que possa se tornar de fácil compreensão, objetivando transformar este trabalho em mais um instrumento que possa ser utilizado por professores e alunos no processo de ensino/aprendizagem.

Metodologia da Investigação

Precisávamos de escolher uma metodologia didática que pudesse conciliar, ao mesmo tempo, uma boa ferramenta para avaliar procedimentos didáticos mais próximos do cotidiano de sala de aula e, que não avaliasse o desempenho particular do aluno e sim o processo como um todo. A solução foi encontrada quando conhecemos a Engenharia Didática.

A Engenharia Didática que, de acordo com as ideias de Oliveira (2013) e Carneiro (2005), é uma metodologia de pesquisa e teoria educacional que surgiu na França no início dos anos 80 no campo específico da Didática da Matemática. O termo Engenharia Didática também pode ser usado para designar a aplicação planejada de uma sequência didática (termo usado para definir um procedimento encadeado de passos, uma espécie de roteiro, ou etapas ligadas ente si para tornar mais eficiente o processo de aprendizagem) com um grupo de alunos.

Segundo Artigue (1988, apud ALMOULOUD e SILVA, 2012) e Carneiro (2005), o termo "Engenharia Didática" foi concebido para o trabalho didático semelhante ao realizado por um engenheiro que, para realizar um projeto, se baseia nos conhecimentos científicos de sua área, submete-se ao controle de tipo científico, mas, também, necessita de trabalhar objetos menos precisos que os científicos, problemas práticos para os quais não existe teoria prévia, nesses momentos, faz-se necessária a construção de soluções.

Almouloud e Silva (2012) e Brum (2013) relatam que a Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula. Nesse contexto, Almouloud e Coutinho (2008) afirmam que a Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, primeiramente, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de uma sequência de ensino. Também se caracteriza como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre *análise a priori* e *análise a posteriori*. Esse tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

No entendimento de Berenguer (2010), a Engenharia Didática pode ser tanto uma metodologia de pesquisa quanto uma sequência de aula(s) concebida(s), elaborada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor/engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. Douady (1993, apud BERENGUER, 2010) completa que, no transcorrer das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor. Para Pommer (2013) e Brum (2013), a Engenharia Didática se enquadra melhor como pesquisa qualitativa, que inicialmente, buscou estudar problemas relacionados à aprendizagem de conceitos específicos da Matemática: diagnóstico de concepções, dificuldades e obstáculos, compreender os níveis de desenvolvimento das estratégias dos alunos, a aprendizagem, introdução e construção de conhecimentos específicos, a formação de professores, explicitar a relação entre temas da Matemática e outras áreas de conhecimento, dentre outras.

Segundo vários autores, dentre eles Almouloud e Coutinho (2008), Almouloud e Silva (2012), Brum (2013), Gomez (2008), Pivatto e Schuhmacher (2013), Souza (2013) e Souza e Cordeiro (2005), Carneiro (2005), Berenguer (2010), Oliveira (2013) e Pommer (2013), pode-se dividir a Engenharia Didática em quatro fases metodológicas: a das *análises preliminares*, a da *concepção e análise a priori das situações didáticas*, a da *experimentação* e a da *análise a posteriori e validação*.

Figura 4: Etapas da Engenharia Didática

Fonte: (BRUM, 2013)

Para Artigue (1988, apud SOUZA, 2013) cada uma dessas fases é retomada e aprofundada ao longo do trabalho de pesquisa, em função das necessidades emergentes.

De acordo com Artigue (1988, apud SOUZA e CORDEIRO 2005), a primeira fase, a fase das *análises preliminares*, está apoiada em um referencial teórico já obtido e analisa como se encaminha determinado conhecimento no estudante, como se dá o ensino atual em relação àquele conhecimento, as concepções dos alunos, as dificuldades e obstáculos que marcam a evolução do conteúdo a ser estudado. Já para Pivatto e Schuhmacher (2013) nessa fase é realizada a análise do objeto em estudo, ou seja, é feito um referencial teórico que irá fundamentar o projeto. O educador deve levar em consideração as contribuições empíricas, concepções do aprendiz e compreender as condições nas quais será exposta a experiência. Também deve ser realizada uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino. Oliveira (2013) cita os passos que esta fase deve compreender, a saber: análise epistemológica dos conteúdos de ensino; análise do ensino usual e os seus efeitos; análise das concepções dos estudantes, dificuldades e obstáculos que caracterizam o desenvolvimento delas; análise do campo de limites no qual a produção didática efetivamente ocorrerá; levar em conta os objetivos específicos da pesquisa.

Segundo Artigue (1988, apud SOUZA e CORDEIRO, 2005), a segunda fase, a fase da *concepção e análise a priori* das situações didáticas, é aquela na qual o pesquisador definirá as variáveis que estarão sob controle. "Comporta uma parte descritiva e outra preditiva", onde o comportamento esperado do aluno é o foco principal da análise. De acordo com Artigue (1988, apud ALMOULOUD e COUTINHO, 2008) essas variáveis podem ser *macro-didáticas* ou *globais*, as quais se referem à organização geral da engenharia, ou *micro-diáticas* ou *locais*, que se referem à organização de uma fase da engenharia. Por outro lado Machado (2002, apud BRUM, 2013) comenta que a pesquisa delimita as variáveis de comando, que são as variáveis locais ou globais pertinentes ao sistema didático (professor/aluno/saber) que podem ser consideradas pelo professor/pesquisador para que sejam abordadas as várias sessões ou fases de uma Engenharia Didática. Ainda na fase de análise a priori, Berenguer (2010) relata que o pesquisador deve se preocupar em descrever as características da situação didática, verificar as possibilidades de ação dos alunos e analisar qual seria o comportamento do aluno diante da situação aplicada.

A terceira fase, fase da *experimentação*, de acordo com Artigue (1988, apud SOUZA e CORDEIRO 2005), é a ida a campo para a aplicação da sequência didática com uma certa população de alunos e os registros de observações realizadas durante a mesma. Almouloud e Silva (2012) completam que, nesta fase, deve-se ter como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa e estabelecer o contrato didático. É neste momento que ocorre a aplicação da sequência didática formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem (PAIS, 2002 apud BERENGUER, 2010, p. 14).

Para Almouloud e Silva (2012), a quarta fase, a fase de *análise a posteriori e validação* consiste em uma análise de um conjunto de dados coletados no decurso da experimentação, como por exemplo, produção dos alunos, registro de observadores e registro em vídeo. Nessa fase, faz-se necessário sua confrontação com a análise a priori para que seja feita a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação. Além disso, para Artigue (1988, apud SOUZA e CORDEIRO 2005), esses dados são geralmente completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou a partir dele. Pivatto e Schuhmacher (2013) afirmam que, dessa forma, é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização que permitirá a validação interna do objetivo de pesquisa.

Após o encerramento dessas quatro fases, faz-se necessária a elaboração de um relatório final dos resultados obtidos na Engenharia Didática vivenciada em um determinado contexto escolar. Sobre esse relatório, Oliveira (2013), nos diz que:

"[...] é necessário fazer um confronto entre as expectativas iniciais, a análise a priori, a experimentação e a análise da construção didática. E, assim procedendo, é feita a validação ou não da hipótese inicial, quanto ao planejamento das diferentes sessões de uma Engenharia Didática para desenvolver um determinado conteúdo no contexto de uma sala de aula" (OLIVEIRA, 2013, p. 117).

Atividades

As atividades foram realizadas em grupos de 4 ou 5 alunos, para que houvesse divisão de tarefas e participação de todos. Deixamos que a montagem dos grupos, bem como a divisão de tarefas e o papel de cada membro fossem decididos pelos próprios alunos. Preconizamos dessa forma as interações e tomada de decisão em grupo, que são essenciais para o desenvolvimento social do aluno. O professor, aplicador das atividades, observou as estratégias utilizadas por cada grupo para a resolução das atividades, assim como as dificuldades apresentadas por eles, fazendo intervenções, sempre que julgou necessário, sem, no entanto, dar as respostas prontas.

O uso da calculadora foi implementado com o objetivo de facilitar a resolução de cálculos longos, maximizando o tempo dedicado a elaboração e discussão de estratégias de resoluções, entre os alunos de cada grupo. Evitando, dessa forma, que as resoluções das atividades se tornassem demoradas e cansativas. Na mesma linha de raciocínio, Olgin (2011) afirma que as calculadoras possibilitam que o estudante dedique maior concentração às estratégias para a resolução de problemas, não desperdiçando tempo com cálculos longos e repetitivos, pois esse não é o objetivo das atividades propostas pelo professor.

Para realização das tarefas, fez-se necessário que se desse tempo suficiente para os grupos. O tempo estimado por nós, a princípio, foi de cerca de 45 minutos para realização de cada atividade, sendo aceitas variações desse tempo dependendo do grau de dificuldade de cada atividade, o que foi observado e relatado pelo professor/aplicador.

O professor/aplicador poderia realizar perguntas pertinentes à resolução ou ao conteúdo relacionado, sempre que achasse que elas ajudariam na compreensão dos conteúdos matemáticos ou do algoritmo de resolução de cada item.

Após a resolução de cada atividade, os alunos poderiam ser convidados a expor sua resolução e discuti-las com seus colegas e com o professor/aplicador. Esse momento de interação foi importante para estimular uma maior participação dos alunos, embora a mediação do aplicador se fizesse necessária. Nesse momento os alunos tiveram a oportunidade de ter contato com as estratégias de resolução dos outros colegas, o que poderia contribuir com um aumento do leque de resoluções de cada aluno.

O professor/aplicador deveria considerar todas as soluções construídas pelos alunos, mesmo aquelas que contivessem erros ou inconsistências.

Foram propostas 5 atividades: *Atividade 1: Criptografando com Função Afim* (objetivo: ensinar conceitos básicos de função afim, através da criptografia de mensagens curtas e de forma simples); *Atividade 2: Criptografando com Funções Quadráticas* (objetivo: ensinar conceitos básicos de função quadrática, com domínio restrito, através da criptografia); *Atividade 3: Criptografando com Função Exponencial e Logarítmica* (objetivo: ensinar conceitos básicos de função exponencial e logarítmica, através da criptografia de mensagens curtas); *Atividade 4: Criptografando com Matrizes* (objetivo: ensinar multiplicação de matrizes e obtenção da inversa de uma, através da criptografia de mensagens curtas); *Atividade 5: Criptografando Pelas Cifras de Hill* (objetivo: Ensinar conceitos básicos de aritmética modular, juntamente com matrizes, através da criptografia de mensagens curtas). Estas atividades foram criadas por nós, baseando-se em atividades semelhantes desenvolvidas por outros autores e pela experiência de sala de aula.

A Engenharia Didática e o Nosso Trabalho

Este capítulo é destinado a explicar como a Engenharia Didática foi aplicada em nosso trabalho, onde cada fase da Engenharia Didática foi trabalhada, ajudando em uma melhor compreensão de sua estrutura.

Fase das Análises Preliminares

Dentro do contexto (macroengenharia e microengenharia) apresentamos o tema Criptografia como motivador, objetivando desencadear situações-problema para uma melhor compreensão dos conteúdos de funções e matrizes, estudados no Ensino Médio; além de introduzir conhecimentos novos, como os conceitos de Aritmética Modular e inversa de funções quadráticas. Assim, a Engenharia Didática relaciona os conceitos matemáticos e as situações didáticas propostas pelo educador.

Na fase das análises preliminares, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, com o objetivo de investigar o tema Criptografia, sua história e aplicações. Foi realizado também um estudo exploratório do tema, buscando aliá-lo aos conteúdos matemáticos trabalhados no Ensino Médio, desenvolvendo atividades didáticas, buscando reforçar esses conteúdos por parte dos alunos, além de um conhecimento maior sobre o tema. Foi nesta fase, também, que ocorreu o primeiro contato com o campo de pesquisa e a população escolhida.

Novamente fazendo um paralelo com a nossa pesquisa, as variáveis macro-didáticas foram o tema Criptografia e os conteúdos do Ensino Médio, em especial, funções e matrizes, e novos conteúdos (Aritmética Modular e inversa de função quadrática), pois possibilitam o desenvolvimento de atividades didáticas que poderiam levar os alunos a reforçarem esses conteúdos. As variáveis micro-didáticas são os conteúdos de matemática específicos envolvidos na resolução de cada uma das atividades. Buscou-se uma relação do conteúdo de matemática do Ensino Médio com as atividades propostas que levassem o aluno a adquirir conceitos significativos sobre o tema. Dentro do contexto da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos, tentou-se delimitar e compreender as variáveis didáticas, as quais foram analisadas no decorrer do desenvolvimento das atividades didáticas.

Fase das Análises a Priori

No nosso trabalho, na fase das análises a priori, buscou-se prever as possíveis ações e comportamentos dos estudantes durante a resolução da atividade proposta, indicando de que forma as atividades propostas proporcionariam a aprendizagem desejada. Foi nesta fase que desenvolvemos toda a sequência didática aplicada na fase de experimentação, com base na fase de análises preliminares e no referencial teórico.

Fase da Experimentação

Durante a fase de Experimentação foi aplicada a sequência didática programada durante as fases anteriores. A sequência didática foi realizada em parceria com a Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Antônio Batista Belo de Carvalho. A pesquisa foi desenvolvida na turma do 2º ano do turno vespertino, com apoio total da professora de Matemática titular da turma. Antes do início da aplicação da sequência didática houve uma reunião com a professora, na qual foram determinadas as quantidades de encontros e de aulas necessárias para desenvolvimento das atividades. Também foram feitas as previsões de recursos/materiais que seriam utilizados.

As atividades foram desenvolvidas ao longo de seis encontros, contando com duas aulas de 45 minutos cada encontro, distribuídos ao longo de duas semanas, durante os dias 24, 25, 26 de novembro e 01, 02 e 03 de dezembro de 2015. Em cada encontro foram realizadas tarefas distintas e imprescindíveis à realização de nossa atividade.

Os relatórios dos encontros foram feitos nos respectivos dias desses encontros, imediatamente após as aulas, quando ainda não se havia realizado a análise das soluções.

Fase da Análise a Posteriori e Validação

Os dados para realização da Análise a Posteriori e Validação foram coletados durante a fase de Experimentação, através de observações feitas pelo professor/pesquisador, pela professora/parceira e pelo professor/orientador, além de informações fornecidas pelos próprios alunos no transcorrer das atividades.

No transcorrer da apresentação do seminário sobre Criptografia, notou-se por parte dos alunos um nível de atenção e um "feedback" muito bom, o que nos deixou profundamente satisfeitos. Os alunos foram participativos e responderam a todas as perguntas feitas durante a apresentação, mesmo que nem todas as respostas tenham sido coerentes.

Durante o 2º encontro iniciaram-se as aulas de revisão, nas quais foram abordados os temas mencionados na fase de Experimentação (Conjuntos Numéricos, Relações, Pares Ordenados, Função Sobrejetora, Injetora, Bijetora, Função Inversa e Função Afim). No decorrer da apresentação desses tópicos foram feitas perguntas aos alunos com o intuito de deteminar as carências, bem como os conhecimentos já trazidos por eles. Nesse momento, detectou-se uma grande carência de conceitos matemáticos básicos e fundamentais, o que tentamos imediatamente corrigir, mas devido ao pequeno tempo disponível esperamos tê-las sanado ao menos parcialmente. Já eram esperadas tais carências, no entanto, o que surpreendeu foi a profundidade delas. Contudo, como a atenção e a resposta (feedback) obtidos durante a aula foram muito boas, isso nos deixou esperançosos de que uma grande parte do que foi explicado tenha sido compreendido.

No 3º encontro com a continuidade das aulas de revisão, foram abordados temas como formas de se reconhecer uma função e também reconhecer injetividade, sobrejetividade e bijetividade graficamente, Funções Quadrática, Exponencial e Logarítmica. No transcorrer da apresentação de cada função, foram feitas perguntas para verificar a compreensão do conteúdo pelos alunos. Novamente tivemos uma resposta satisfatória, no geral. Verificou-se, outra vez, uma deficiência em conhecimentos básicos de matemática, buscamos sanar essas carências, sempre usando uma linguagem simples, trabalhando exemplos claros e com ênfase em reforços e repetição.

Em todas as atividades foi estimulado o uso da calculadora como elemento facilitador, de diferentes formas, segundo a necessidade de cada item. Eles ficaram livres para que usassem a calculadora da forma que achassem mais conveniente. Logicamente, foram ensinadas as funções básicas que seriam úteis para a resoluções das atividades.

Para uma melhor compreensão do desempenho dos grupos na resolução das atividades, desenvolvemos a Tabela 2: Desempenho dos Grupos em Cada Item das Atividades, que resume como foi o desempenho de cada grupo na resolução de cada item, em cada uma das atividades. Nela estão atribuídos conceitos às resoluções apresentadas, para cada item, por cada grupo: resolução total; resolução parcial; não realizado; resolução incompreensível.

Tabela 2: Desempenho dos Grupos em Cada Item das Atividades

Atividade	GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3	GRUPO 4	GRUPO 5	GRUPO 6
1a	Resolução Total	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Resolução total	Resolução total	Não Realizado*
1b	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total	Resolução total	Resolução total	Não Realizado*
1c	Resolução Total	Resolução Incompreensível	Resolução Parcial	Resolução Incompreensível	Resolução total	Não Realizado*
1d	Resolução Total	Resolução Incompreensível	Resolução Total	Resolução total	Resolução total	Não Realizado*
1e	Resolução Total	Resolução Parcial	Não Realizado	Resolução parcial	Resolução total	Não Realizado*
1f	Resolução Total	Não Realizado	Não Realizado	Não Realizado	Resolução total	Não Realizado*

2a	Resolução Total	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Parcial
2b	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Resolução Total	Resolução Parcial
2c	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Resolução Total	Resolução Parcial
2d	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Parcial	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total
2e	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Resolução Total	Resolução Parcial
2f	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Não Realizado	Resolução Total	Não Realizado
2g	Resolução Total	Não Realizado	Resolução Parcial	Não Realizado	Resolução Total	Não Realizado
3a	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Parcial	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Parcial
3b	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Parcial

3c	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Parcial	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Parcial
3d	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Não Realizado
3e	Não Realizado	Não Realizado	Resolução Parcial	Resolução Total	Resolução Parcial	Não Realizado
4a	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total
4b	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Parcial	Resolução Parcial	Resolução Total	Resolução Parcial
4c	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total	Não Realizado	Resolução Total	Resolução Total
4d	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total	Não Realizado
4e	Resolução Total	Não Realizado	Não Realizado	Não Realizado	Resolução Total	Não Realizado
4f	Resolução Total	Não Realizado	Não Realizado	Não Realizado	Resolução Total	Resolução Parcial

5a	Não Realizado	Resolução Total	Resolução Parcial	Resolução Total	Resolução Total	Resolução Total
5b	Não Realizado	Resolução Parcial	Não Realizado	Não Realizado	Resolução Total	Resolução Total
5c	Não Realizado	Não Realizado	Resolução Parcial	Não Realizado	Resolução Total	Não Realizado
5d	Não Realizado	Resolução Total	Não Realizado	Não Realizado	Resolução Total	Não Realizado
5e	Não Realizado	Resolução Parcial	Não Realizado	Não Realizado	Resolução Parcial	Não Realizado

(*): Não realizado por motivo de ausência
Fonte: Do Autor

Deve-se salientar que durante a aplicação da sequência didática os alunos estiveram mais concentrados nas atividades (pelo menos na maior parte do tempo), diminuindo a ansiedade e as conversas paralelas. Observou-se uma boa discussão em grupo de assuntos relevantes sobre as atividades propostas. Também se observou uma divisão de tarefas dentro dos grupos para otimizar a resolução das tarefas, promovendo, dessa forma, uma boa relação interpessoal dentro dos grupos e entre estes.

Outro fator importante para se citar é que se constatou, através da análise dos dados coletados, que os alunos compreenderam o que se propunha em cada uma das atividades e lograram êxito em suas resoluções (ao menos na grande maioria), mantiveram-se concentrados e demonstraram interesse durante o processo. Vale salientar que os alunos citaram cansaço ao final da sequência didática, este fato se refletiu na resolução da última atividade que foi a que apresentou menor número de soluções bem sucedidas.

Importante relatar aqui que os alunos foram orientados pelo professor/aplicador a, sempre que surgissem dúvidas, primeiramente, discuti-las em grupo, em seguida, caso não conseguissem solucioná-la dentro do grupo, levar a dúvida ao professor/aplicador para uma discussão mais ampla.

De acordo com a revisão histórica e as atividades desenvolvidas, criou-se uma sequência didática que possibilitou aos alunos conhecer o tema Criptografia através de atividades didáticas envolvendo alguns dos principais conteúdos matemáticos do ensino médio (funções e matrizes), além da introdução de conteúdos ainda desconhecidos pelos alunos (tópicos de Aritmética Modular).

Conclusão

Observou-se, neste trabalho, que uma sequência didática com o tema Criptografia possibilitou aos alunos associar os conteúdos matemáticos trabalhados, às vezes de forma enfadonha, no ensino médio (funções e matrizes) a um tema atual e de relevância para o cotidiano deles (a codificação e decodificação de mensagens secretas). Possibilitou ainda revisar conteúdos que já haviam sido esquecidos, além de obter o conhecimento de conteúdos novos como tópicos de Aritmética Modular, a obtenção da inversa de uma Função Quadrática e cálculo da inversa módulo 26 de uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem 2.

A aplicação da sequência didática permitiu ainda uma maior interação entre os alunos, além de promover o trabalho em grupo e a divisão de tarefas para a realização de um objetivo. Também possibilitou desenvolver as capacidades de concentração nas atividades e desenvolvimento de estratégias para resolução de problemas.

Devemos salientar que atividades envolvendo o tema Criptografia abrem caminho para a introdução, em sala de aula, de tecnologias da informação e comunicação. No nosso caso utilizamos a calculadora, mas este tema abre um grande leque de possibilidades para a utilização de softwares e outras tecnologias. A aplicação da sequência didática permitiu aos alunos explorar vários recursos da calculadora científica, facilitando cálculos longos e, em consequência, reduzindo o tempo de resolução das atividades.

A utilização da Engenharia Didática, como metodologia da pesquisa, possibilitou que a análise dos dados fosse feita internamente, validando as atividades desenvolvidas. Nesse contexto, a Engenharia Didática, consolida-se como um importante instrumento para o aperfeiçoamento do professor em sala de aula, ao permitir uma profunda análise do cotidiano da sala de aula.

Vale ressaltar que as hipóteses levantadas neste trabalho foram validadas através da sequência didática proposta para o segundo ano do Ensino Médio e, também, através das análises feitas na fase de análise a posteriori e validação. Durante a análise a posteriori e validação, verificou-se que os objetivos traçados nas fases anteriores foram alcançados, em sua maioria, pois os alunos conseguiram realizar as correlações entre os conteúdos do ensino médio e o tema abordado e conseguiram resolver problemas que necessitavam de conhecimentos específicos de conteúdos de matemática do Ensino Médio. Além disso, ao analisarmos os questionários pré e pós atividades, verificamos que, antes da experiência, apenas um aluno sabia o que era Criptografia e, após, todos souberam responder o que é Criptografia.

A sequência didática desenvolvida e aplicada neste trabalho pode ser entendida como um exemplo de material didático, que pode ser utilizado por professores em sala de aula, para fixar e revisar conteúdos matemáticos do ensino médio. Além de ser um bom motivador para despertar a curiosidade nos alunos e aumentar a afinidade dos alunos com a Matemática.

Acreditamos que temas como este, que permitem o desenvolvimento de atividades didáticas em sala de aula, devem ser abordados com maior frequência pelos professores, pois o currículo de matemática do Ensino Médio precisa ser estimulante, inovador e motivador para o aluno. Sabemos, no entanto, que alguns conteúdos de matemática do Ensino Médio têm uma maior dificuldade de serem aplicados ao cotidiano dos alunos. Isto posto, deve-se trabalhar, na medida do possível, os conteúdos que permitem aplicações, de forma didática e instigante. Vale citar que na análise dos questionários aplicados aos alunos, apenas um aluno destacou a Matemática como sua disciplina favorita. Deve-se buscar reverter esta situação de preterimento da Matemática, tornando-a o mais atrativa possível.

Referências

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. D. Q. E. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. periodicos.ufsc.br, 2008. Disponível em: < https://cutt.ly/HvtRwg9 >. Acesso em: 04 setembro 2015.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia Didática: Evolução e Diversidade. periodicos.ufsc.br, 2012. Disponível em: <https://cutt.ly/BvtE3zP>. Acesso em: 12 Setembro 2015.

ANTON, H.; RORRES, C. Álgebra Linear com Aplicações. 8ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. 466-473 p.

BERENGUER, M. I. S. A Aplicação da Engenharia Didática no Ensino das Ciências Exatas. avm.edu.br, 2010. Disponível em: <http://www.avm.edu.br/docpdf/monografias_publicadas/t205982.pdf>. Acesso em: 16 Setembro 2015.

BRASIL. Parâmetros Currículares Nacionais: Ensino Médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e Técnologias. portal mec, 2000. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 14 Agosto 2015.

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 9394 de 20 de Dezembro de 1996. Câmara dos Deputados, 2015. Disponível em: < https://cutt.ly/LvtEK3m >. Acesso em: 14 Agosto 2015.

BRUM, W. P. Contribuições da Engenharia Didática no Ensino de Matemática: Análise e Reflexão de uma Experiência Didática para o Estudo de geometria Esférica. sinect.com.br, 2013. Disponível em: < https://cutt.ly/3vtEBEl >. Acesso em: 17 Setembro 2015.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia Didática: Um Referencial Para Ação Investigativa e Para a Formação de Professores de Matemática. www.ufrgs.br, 2005. Disponível em: <www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II_2014/modulo_III/ENGENHARIA_ZETEIKE2005.pdf>. Acesso em: 12 Julho 2015.

COUTINHO, S. C. Apostila 7: Criptografia. Obmep - PIC, 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila7.pdf>. Acesso em: 13 Junho 2015.

GOMEZ, H. C. M. Reflexões Sobre uma Prática de Ensino: Uma Engenharia Didática. mat.ufrgs.br, 2008. Disponível em: <https://cutt.ly/5vtRoYZ>. Acesso em: 18 Setembro 2015.

GROENWALD, C. L. O.; FRANKE, R. F. Currículo de Matemática e o Tema Criptografia no Ensino Médio. Educção Matemática em Revista, Porto Alegre - RS, 2008. 51-57.

GROENWALD, C. L. O.; OLGIN, C. A. Currículo de Matemática no Ensino Médio: Atividades Didáticas com o tema Criptografia. www.gente.eti.br, 2011. Disponível em: <www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/691.pdf+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>. Acesso em: 14 julho 2015.

OLGIN, C. D. A. Currículo no Ensino Médio: Uma Experiência com o Tema Criptografia. www.ppgecim.ulbra.br, 2011. Disponível em: < https://cutt.ly/cvtRd53>. Acesso em: 21 junho 2015.

OLGIN, C. D. A.; GROENWALD, C. L. O.; FRANKE, R. F. Criptografia no Ensino Médio. Sbembrasil, 2011. Disponível em: <www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO88388417053T.doc+&cd=5&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>. Acesso em: 11 Junho 2015.

OLIVEIRA, M. M. D. Sequência Didática Interativa no Processo de Formação de Professores. www.pasem.org, 2013. Disponível em: <http://www.pasem.org/gestion/archivos/experiencias/25/SDI-Texto%20Completo%20do%20Livro.pdf>. Acesso em: 21 Julho 2015.

PIVATTO, W.; SCHUHMACHER, E. As Contribuições da Engenharia Didática Enquanto Campo Metodológico Para o Ensino de Geometria Esférica. publicacoes.unigranrio.edu.br, 2013. Disponível em: <publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/2071/1107+&cd=9&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>. Acesso em: 17 Setembro 2015.

POMMER, W. M. A Engenharia Didática em Sala de Aula: Elementos Básicos e Uma Ilustração Envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. stoa.usp.br, 2013. Disponível em: <http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro%2BEng%25C2%25AA%2BDid%25C3%25A1tica%2B2013.pdf>. Acesso em: 23 Julho 2015.

RIBEIRO, D. F.; LOURENÇANO, P. G. P.; COSTA, A. D. D. Criptografia: Uma Aplicação da Matemática Discreta Através da Implementação da Cifra de César em VISUALOG. fatectq, 2013. Disponível em: <http://www.fatectq.edu.br/interfacetecnologica/arquivos/volume10/artigo02.pdf>. Acesso em: 04 julho 2015.

SOUZA, C. A. D. Influências da Engenharia Didática Francesa na Educação Matemática no Brasil: a circulação e a apropriação de ideias. cibem7.semur.edu, 2013. Disponível em: <www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/346.pdf+&cd=2&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>. Acesso em: 05 Setembro 2014.

SOUZA, R. N. S. D.; CORDEIRO, M. H. A Contribuição da Engenharia Didática para a Prática Docente de Matemática na Educação Básica. pucpr.br, 2005. Disponível em: < https://cutt.ly/EvtEIuC >. Acesso em: 06 setembro 2015.

ZATTI, S. B.; BELTRAME, A. M. A Presença da Álgebra Linear e Teoria dos Números na Criptografia. unifra - jornal da educção, 2006. Disponível em: <https://cutt.ly/vvtEmeU >. Acesso em: 02 julho 20

Analisando erros no aprendizado de geometria com questões da Obmep

José Marcos Nunes do Amarante[1]
Mario Tanaka Filho[2]
Miguel Ângelo Moraes de Sousa[3]

Introdução

Os resultados das provas do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), tem mostrado que a maioria dos estudantes brasileiros estão abaixo do nível básico de conhecimento em matemática. Apesar de ter ocorrido grandes avanços na educação básica, segundo a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), o fato é que precisasse buscar alternativas que possam contribuir na mudança e melhoria do ensino da Matemática na educação básica.

Na intenção de contribuir para uma melhora na qualidade do ensino e aprendizagem em Geometria nas escolas públicas Estaduais de Ensino Médio no município de Óbidos-PÁ, foi desenvolvido o presente trabalho, a partir dos estudos referentes a Análise de Erros. Considerada uma tendência na área da Educação Matemática, a análise de Erros vem crescendo bastante no Brasil, graças aos estudos

1 SEDUC-Pa. E-mail: profmatamarante@hotmail.com
2 Ufopa. E-mail: tanakafi@gmail.com
3 Ufopa. E-mail: migmatico@hotmail.com

de diversos pesquisadores como por exemplo, Helena Noronha Cury, referência nesse campo de estudo.

A pesquisa teve como objetivo geral analisar e classificar os erros cometidos pelos alunos em questões de Geometria apresentados na 2ª fase da 13ª edição da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, à luz da perspectiva teórica da Análise de Erros com base em autores como Radatz (1979). Com esse intuito, teve-se como objetivos específicos identificar as habilidades e competências apresentadas nas questões segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's); analisar as respostas produzidas pelos estudantes; identificar os erros cometidos pelos alunos e classificá-los segundo as classes de Radatz (1979); entender a respeito das avaliações e de que forma são usadas nas políticas públicas.

Referencial Teórico

O professor como mediador no processo da aprendizagem em sala de aula deve analisar com atenção os erros cometidos pelos seus alunos nas resoluções dos mais diversos problemas matemáticos, isso talvez o ajude a perceber de forma mais clara as dificuldades apresentadas, na compreensão e interpretação do assunto, pelos educandos. Esses erros, ao serem analisados de forma criteriosa e sistemática, podem servir como "ferramentas para aprendizagem" (CURY, 2017). Essa análise poderá ser feita no Ensino da Geometria com o intuito de ajudar os alunos nesse campo da matemática.

Mas qual o verdadeiro sentido do erro no ato de aprender? Talvez ainda não se tenha conseguido chegar a um consenso por parte das diversas correntes pedagógicas. Alguns especialistas não veem no erro uma forma correta de buscar a aprendizagem, já outros acreditam que o erro é fundamental para o processo de ensino-aprendizagem, fazendo parte da aprendizagem sistemática. Segundo Freire (1985), ainda se cultua nas escolas o que ele chama de "pedagogia da resposta", ou seja, o professor ainda está muito ligado ao contexto do certo ou errado. Para opor-se a isso, Freire acredita em um ensino voltado a uma "educação libertadora", que busque a curiosidade do aprender. Com isso, Freire propõe que o professor mude sua atitude frente ao erro e passe a considerá-lo uma "forma provisória de saber" (1995, p. 71).

> Essa mudança de atitude pressupõe encarar o erro como objeto de discussão e compreensão dos saberes que o educando traz consigo para as situações formais de aprendizagem. Tal postura implica, obrigatoriamente, o rompimento com relações fundadas numa educação bancária na qual o acerto está ligado à exata correspondência da resposta prevista pelo educador. "Esse processo de reprodução de respostas fabrica a "burocratização da mente", obstaculiza a reflexão e a capacidade criadora" (FREIRE, 1985, P. 53).

Os primeiros trabalhos sobre análise de erros no campo da matemática se deram por volta do final do século XIX e início do século XX, em diversas partes do mundo. Os psicólogos educacionais da época, interessados em entender como se dava o processo de aprendizagem, acreditavam que para estudá-los era preciso fazer experiências com os animais. Da Rocha Falcão (2003, apud CURY, 2017, p. 22) considera que as experiências com animais, feitas por Thorndike deram início à perspectiva comportamentalista da aprendizagem. Segundo Berliner (1993, apud CURY, 2017, p.22), Thorndike através de sua "fé" na Psicologia Experimental juntamente com suas experiências em animais, diminuiu o campo da Psicologia Educacional ao afastar a Psicologia da prática escolar. A partir desse período inúmeros trabalhos desenvolveram-se na perspectiva do erro.

Nos Estados Unidos, Smith (1940) desenvolveu um trabalho, no qual o mesmo fez apenas uma contagem de erros em exercícios de Geometria, desde construções, até demonstrações. Os resultados desse trabalho, que foram aplicados com alunos do 10º ano de escolaridade (o que equivale ao início do ensino médio no Brasil), tiveram como principal resultado extensas tabelas com porcentagem de erros de cada tipo detectado. Um erro detectado por Smith é o que consiste em assumir a congruência de ângulos em um triângulo apenas pela aparência da figura. Tal problema é um dos mais comuns e também aparece mais tarde, nos trabalhos de Movshovitz – Hadar, Cury (2017).

Segundo Pinto (1998), na extinta União Soviética, com o desenvolvimento do campo de investigação em matemática nos anos 60, sobre operações fundamentais, Kuzmitskaya realizou um estudo em que localizou quatro causas de erros: Insuficiência de memória em curto prazo; compreensão insuficiente das condições do problema; ausência de regras verbais para realização de cálculos e uso incorreto das quatro operações. Talvez não seja de se estranhar pelos professores atuais, que essas causas detectadas se apresentam ainda de maneira corriqueira nas escolas.

Já Hutcherson (1975), em sua tese de doutorado reaplicou testes que haviam sido empregados em 1927 em uma pesquisa de mestrado, na qual, foi feita uma análise psicológica da resolução de problemas em Aritmética. Hutcherson incorporou a solicitação do "pensar em voz alta", procedimento que é empregado, até hoje, em muitas investigações sobre erros.

Fiorentini (1994), ao realizar uma pesquisa sobre os tipos de trabalhos em análise de erros no Brasil, constatou que só partir de 1990, foi que se consolidou uma comunidade cientifica de pesquisadores em áreas que se preocupavam com o erro no ensino-aprendizagem de matemática.

Cury (2007) ao fazer um levantamento sobre trabalhos de autores brasileiros sobre a Análise de Erros no Brasil verificou que não há registros de pesquisas antes da década de 1980. Pode ser que existam, porém podem ter sido publicadas em outras áreas ou com pouca divulgação. Os primeiros trabalhos encontrados tiveram como objetivo analisar questões de provas ou testes, com tabelas de porcentagem de acertos, erros e questões em branco, como até hoje se podem encontrar estudos nesse formato. Temos como exemplo o artigo de Crepaldi e Wodewotzki (1988), no qual as autoras usam uma amostra de cerca de 2300 provas de alunos de Ensino Médio, com conteúdo variado, tendo sido detectados erros em operações com frações, conceito de porcentagem e fatoração.

Pacheco e Medeiros (2009) comentam que é comum no ensino da matemática interpretar o erro como um fracasso que pode ser revertido a partir da mera correção que geralmente consiste em apontar o erro e indicar o que deve ser feito. De fato, a ação pedagógica mais utilizada é a substituição de um procedimento considerado inadequado, por outro considerado apropriado. Mas de que forma o aluno errou? Por que ele errou? O que expressa este tipo de erro? Que orientação dar ao aluno sobre este tipo de erro? Essas são questões que não são respondidas quando se adota a perspectiva de que o erro deve ser corrigido.

Segundo Borasi (1996), a Análise de Erros se torna uma ferramenta para a aprendizagem de matemática. Partindo do princípio que todos no campo da educação matemática estão sujeitos a erros, sendo assim os alunos não são diferentes e por esse motivo deve-se dar importância significativa a esses erros por eles cometidos, erros que podem ajudar os professores a fazerem um diagnóstico mais preciso, a respeito da deficiência que seus alunos possam apresentar, tanto na construção de conceitos matemáticos, como na resolução de determinadas questões a eles apresentadas. Cury (1994) diz que o erro não é somente efeito da ignorância, da incerteza e do acaso, os erros são esperados e ajudam a detectar maneiras de como o aluno pensa.

Radatz (1979) é um dos grandes colaboradores para o desenvolvimento da Análise de Erros. Um dos artigos mais clássicos da análise de erros é o intitulado: *Error Analysis in Mathematics Education*, que faz um levantamento de classificação sobre erros. Seu trabalho foi complementado no artigo de 1980, em que sintetiza os trabalhos existentes, sendo essas duas publicações referenciadas pela maior parte dos pesquisadores que desenvolveram a análises de erros. Radatz (1979, 1980) fez um apanhado geral dos estudos sobre erros realizados na Europa e Estados Unidos desde o início do século XX.

Segundo Radatz (1980), os erros dos estudantes no ensino de matemática não são simplesmente um resultado de ignorância e acidentes situacionais. A maioria destes erros não é devido à incerteza, à desatenção, ou unicamente às situações condicionais como foram assumidos no início da teoria Educacional do Behaviorismo, ou melhor, os erros dos discentes podem ser resultados ou produtos da experiência prévia na aula de Matemática. De acordo com ele, a natureza e causas subjacentes a erros cometidos em conteúdos matemáticos podem ser analisadas em termos de mecanismos individuais de processamento da informação. Radatz enumera os seguintes mecanismos de processamento que podem originar erros na realização de uma atividade matemática: 1) obtenção da informação; 2) processamento da informação; 3) retenção da informação; e 4) reprodução da informação. Seguindo esses mecanismos de informação, Radatz, criou uma classificação de erros, sendo essa classificação dividida em cinco classes de erros*:* erros devido a dificuldades de linguagem; erros devido a dificuldades em obter informação visual ou espacial; erros devido a um domínio deficiente de pré-requisitos básicos; erros devido a associações incorretas ou inflexibilidade de raciocínio e erros devido à aplicação de regras ou estratégias desnecessárias.

Segundo Luckesi (2011), "o ato de avaliar a aprendizagem na escola é um meio de tornar os atos de ensinar e aprender produtivos e satisfatórios". Assim, não podemos desvincular a avaliação do aluno do processo de ensino do professor. Isso não quer dizer que se o aluno não aprendeu, o professor não ensinou adequadamente. O processo de ensino/aprendizagem é muito mais complexo que isso. A avaliação como instrumento a serviço da aprendizagem do aluno deve contribuir para a análise e para a decisão de quais iniciativas pedagógicas deverão ser tomadas durante o processo de ensino. Na visão de Luckesi, o resultado das avaliações por si só não resolve em nada, ele apenas diz se o produto dessa atividade alcançou ou não o resultado esperado. Na verdade, o que realmente resolve é a gestão escolar, pois com o resultado da avaliação em mãos, podem-se elaborar estratégias no sentido de buscar alcançar o objetivo esperado no aprendizado dos alunos.

No sentido de melhorar a qualidade da educação básica brasileira, diversas políticas públicas educacionais surgiram. Baseando-se na parte da competição e em práticas já existentes, foi criado no campo da matemática a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas Públicas), visando estimular o estudo da matemática e despertar nos alunos uma busca por novos conhecimentos.

Desse modo, a relevância da análise de erros, como metodologia de ensino na melhoria da aprendizagem matemática dos alunos se faz essencial na prática docente. Fazer uma análise das avaliações aplicadas em sala de aula corrobora para mostrar que os erros dos alunos, podem servir como ferramentas pedagógicas na compreensão do saber e nas estratégias avaliativas.

Metodologia

Essa pesquisa foi desenvolvida por meio da abordagem quantitativa (significa traduzir em números e estatística, opiniões e informações para serem analisadas) e qualitativa (considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números). Do ponto de vista dos procedimentos técnicos (Gil, 1991), trata-se de uma pesquisa bibliográfica (quando elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de livros, artigos de periódicos e atualmente com material disponibilizado na Internet).

Para Gil (1999, p.42), a pesquisa tem um caráter pragmático, é um "processo formal e sistemático de desenvolvimento do método científico. O objetivo fundamental da pesquisa é descobrir respostas para problemas mediante o emprego de procedimentos científicos".

O trabalho foi organizado a partir das técnicas da Análise de Conteúdo propostas por Bardin (2016), desde o momento quando se pensou na pesquisa e a forma como seria feito, como por exemplo, na escolha dos materiais que seriam analisados e de que forma seriam selecionados e arrumados para se ter uma melhor compreensão a respeito do estudo, e também a forma de se apresentar os resultados através de dados estatísticos, depois de uma longa análise dos materiais. Certamente a base teórica que a análise de conteúdo deu para a construção e desenvolvimento da pesquisa foi fundamental para sua consolidação.

Tendo como objeto de estudo a Análise de Erros em Geometria, essa pesquisa busca através dos seus resultados auxiliar as práticas docentes dos professores do município de Óbidos. Para isso buscou-se empregar a classificação de erros criada por Radatz para considerar as respostas dos alunos. A análise dessas respostas buscou como referência as habilidades e competências propostas pelos PCNs. Seguindo esses conceitos de classificação, essa pesquisa cientifica tem como objeto de estudo a Análise de Erros, sendo a Geometria o campo de análise e investigação. Visando utilizar uma metodologia de pesquisa sobre os erros, adotou-se para isso a classificação de erros, criada por Radatz (1979). Essa classificação desenvolvida por Hendrik Radatz foi dividida em cinco classes de erros. Optou-se para uma melhor compreensão e clareza da pesquisa, identificar as classes da seguinte maneira: C1, C2, C3, C4 e C5.

A pesquisa foi desenvolvida na cidade de Óbidos, localizada no oeste do Estado do Pará, situada à margem esquerda do rio amazonas no ponto considerado mais estreito e mais profundo, chamado de "garganta do rio amazonas". O município de Óbidos conta com uma população de 50.596 habitantes, segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2016). Os *lócus* para a produção dos dados foi realizada em duas escolas públicas da rede estadual de ensino, sendo: Escola Estadual de Ensino Médio São José (SJ) e Escola Estadual de Ensino Médio Mauricio Hamoy (MH).

Os sujeitos escolhidos para fazerem parte da pesquisa, foram alunos de duas turmas do 3° ano do Ensino Médio, sendo uma turma da manhã da Escola São José e outra turma também da manhã da Escola Mauricio Hamoy. A opção pelas duas escolas deu-se pela disposição e apoio ao projeto, por parte das direções escolares dos dois educandários.

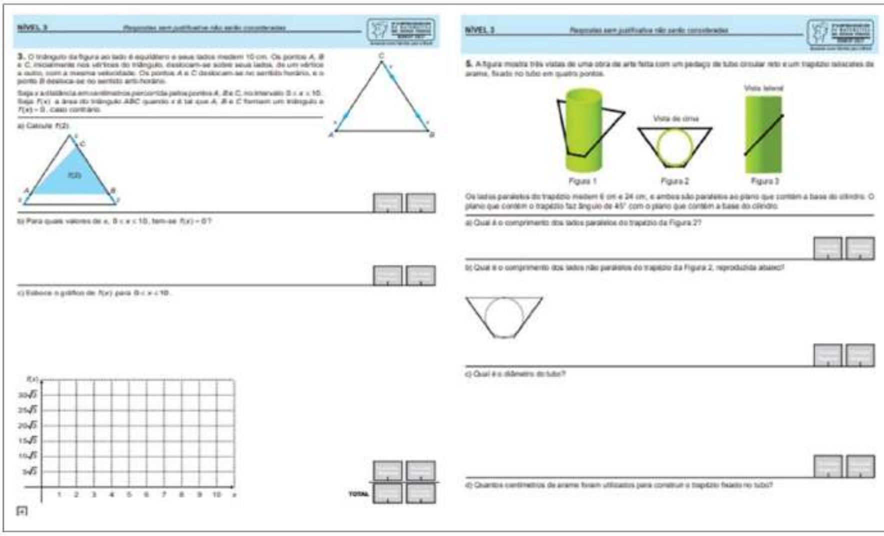
Da escola São José participaram de 31 alunos (12 homens e 19 mulheres) correspondente a 59,62%. Já da escola Mauricío Hamoy participaram 21 alunos (11 homens e 10 mulheres), correspondente a 40,38%, totalizando 52 alunos que colaboraram com o estudo.

A pesquisa de campo foi realizada através de 4 encontros em cada turma. Nos três primeiros foram ministrados conteúdos referentes ao assunto de geometria plana e espacial, com o objetivo de revisar conceitos e fórmulas referentes aos assuntos propostos nas questões 3 e 5 da 2ª fase da OBMEP 2017. As aulas foram realizadas de forma expositiva, utilizando como recursos didáticos: quadro branco, pincéis, computador, data show e materiais impressos. O último encontro ocorreu a aplicação das duas questões escolhidas, para obtenção de material para análise dos erros dos alunos. Foi observado durante as aulas um certo desinteresse por parte de alguns alunos em aprender os conteúdos ministrados. Também se observou a falta de domínio dos conteúdos pela maioria dos alunos.

Resultados e Discussões

O material usado para a coleta dos dados da pesquisa, foi composto de questões de Geometria de uma prova da OBMEP, sendo essa avaliação correspondente à segunda fase (Nível 3), da 13ª edição, que ocorreu no dia 16 de setembro de 2017. As questões selecionadas foram as que correspondem à área de estudo da Geometria, sendo especificamente a 3ª e a 5ª questão apresentadas abaixo.

Figura 1: Questões da Prova da OBMEP selecionadas para pesquisa.



Fonte: OBMEP (2017)

Para a produção dos dados dessa pesquisa foram analisadas quantitativamente 52 provas, 104 questões distribuidas em 3ª e 5ª e 364 itens. Abaixo na tabela é apresentada a quantidade de respostas em branco, corretas e erradas que foram verificadas em cada iten e constituiram o corpus desse trabalho.

Tabela 2 – Dados quantitativos da pesquisa

	Questão 3	Questão 5	Total	Total (%)
Itens em Branco	74	75	149	40,93
Itens Corretos	2	32	34	9,34
Itens Errados	80	101	181	49,73
Total	156	208	364	100

Fonte : Autores

É importante considerar que só os itens que apresentaram erros foram analisados a fim de obter resultados para esse estudo. Então, apenas 181 itens fizeram parte da investigação para a classificação e categorização dos erros. Para ser feita a análise qualitativa e quantitativa dos erros teve-se como referencial e orientação a resolução apresentada pela banca de correção da OBMEP (http://www.obmep.org.br/provas.htm) e as habilidades e competências sugeridas pelos PCNs do ensino médio.

A seguir será apresentada uma análise quantitativa dos dados referente à 3ª questão[4], como a quantidade de itens em branco, itens corretos, itens errados e a frequência que eles aparecem nos dados. Essa análise contribuiu para a compreensão dos resultados e para dar base as discussões sobre o trabalho.

Tabela 3 - Análise quantitativa da Questão 3.

	Item a)	Item b)	Item c)	Total	Total (%)
Itens em Branco	14	30	30	74	47,44
Itens Corretos	0	2	0	2	1,28
Itens Errados	38	20	22	80	51,28
Total	52	52	52	156	100

Fonte: Autores

Ao se analisar o resultado da tabela notou-se que o único item que apresentou um percentual de acerto foi o item **B,** com 1,28% em relação ao total de itens, já em relação aos 52 itens **B** analisados, essa porcentagem foi de 3,85%. Para as duas análises foi um percentual muito baixo para as habilidades exigidas, que dentre elas estavam: ter noção de colinearidade entre pontos colineares e área. Quanto aos outros dois itens que exigiam mais habilidades dos alunos, ninguém conseguiu resolver, resultando em um percentual de 0% de acerto. Entre os itens errados, destacam-se o item

A com maior número de erros, sendo que em relação a todos os itens o mesmo ficou com um percentual de erro de 24,36% e só em relação aos itens **A** esse percentual de erro foi de 73,08%.

Um fato que chamou bastante atenção nessa análise foi um grande número de itens sem nenhuma produção escrita (respostas em branco), correspondendo a 47,44% do total das respostas. A partir de uma análise mais detalhada percebesse que os itens B e C foram os itens, nos quais, os alunos menos se interessaram em tentar resolver. Ao analisar o gabarito desses itens, percebesse que a resolução consistia em o aluno ter domínio de conteúdos matemáticos e também certo grau de experiência com problemas do tipo, pois para se chegar à resposta do item era necessário percorrer várias etapas.

A respeito dos itens em branco, reflete-se sobre os fatores que levaram o aluno a estudar determinado conteúdo, pois quando submetido a um processo avaliativo (interno ou externo), o mesmo opta em deixar em branco a resposta. Entende-se que primeiramente, é preciso que o aluno tenha conhecimento mínimo do assunto ao qual será questionado. Tendo garantida essa etapa, devem-se investigar outros fatores como, por exemplo, a questão comportamental, psicológica, socioeconômica, como está sendo repassado esse conhecimento, entre outros. Desta maneira, questiona-se: o que poderá estar causando esse desinteresse em tentar alcançar os resultados?

Buscando analisar e classificar os erros encontrados na 3ª questão, o autor, a partir da análise nas respostas dos alunos, identificou as seguintes categorias de erro:

Tabela 4 - Categorias de Erros da Questão 3

Código de Erros	Descrição dos tipos de erros encontrados nas respostas dos alunos
E1	Aplicação de valores incorretos na fórmula
E2	Compreensão incorreta da questão
E3	Falta de domínio do conteúdo matemático envolvido
E4	Resolução de um item colocado em outro
E5	Raciocínio lógico deficiente
E6	Não domina as operações básicas
E7	Chegou ao resultado esperado usando dados e equações sem sentido
E8	Resoluções fora do contexto
E9	Resoluções Incompletas
E10	Criação de fórmulas inexistentes
E11	O aluno confunde gráfico com coordenadas cartesianas
E12	Deficiência na parte algébrica
E13	O aluno tem dificuldade em fazer uma leitura espacial
E14	Não conseguiu perceber as relações entre os itens da questão
E15	Confusão com informações excessiva
E16	Uso de conteúdos que não fazem parte da Resolução

Fonte: Autores

Após uma análise detalhada nos itens que apresentaram algum tipo de erro, e de acordo com o entendimento do autor, observou-se a presença de 16 categorias de erros nas respostas dos alunos na 3ª questão. Na tabela 5, seguinte é feita uma subclassificação, ou seja, os tipos de erros estabelecidos na tabela acima, serão classificados de acordo com suas características, nas cinco classes de erros produzidas por Radatz (1979).

Tabela 5 – Classificação dos erros

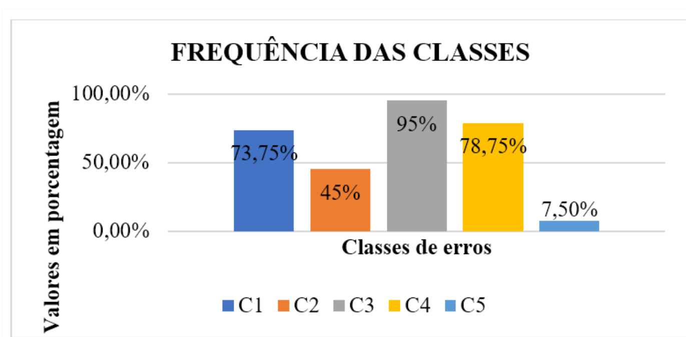
Código da Classe	**Descrição das Classes de Radatz (1979)**	Código de Erros
C1	Erros devido a dificuldades de linguagem (DL):	E2 e E8
C2	Erros devido a dificuldades em obter informação visual ou espacial (DIE):	E13
C3	Erros devido a um domínio deficiente de pré-requisitos básicos (DD):	E3, E6, E9, E11 e E12
C4	Erros devido a associações incorretas ou inflexibilidade de raciocínio (AII):	E1, E4, E5, E10 e E14
C5	Erros devido à aplicação de regras ou estratégias desnecessárias (AED):	E7, E15 e E16

Fonte: Autores

A partir dessa subclassificação foi estabelecido um processo de contagem para determinar a frequência com que as classes de erros apareceriam. Esse processo de contagem se deu da seguinte maneira: em cada um dos 80 itens que apresentaram produções incorretas, foram identificados os tipos de erros que estavam presentes (é importante deixar claro que em alguns itens foram identificados mais de um tipo de erro). Após o levantamento dos erros e tendo como base a tabela 5, estabeleceram-se as classes de erros presentes em cada item. Após isso, foi feita uma contagem numérica para saber a quantidade de cada classe presente na questão 03. O resultado dessa contagem resultou nos seguintes números: a Classe 1 apareceu 59 vezes, a classe 2 apareceu 36 vezes, a classe 3 apareceu 76 vezes, a classe 4 apareceu 63 vezes e a classe 5 apareceu 6 vezes. É fundamental esclarecer que uma determinada classe poderia aparecer em mais de um item.

Considera-se que essa parte da pesquisa é muito dinâmica, ou seja, os tipos de erros encontrados e o modo que esses erros são classificados nas respectivas classes dependem muito do professor e da sua experiência no processo educacional, pois um tipo de erro pode ser classificado e entendido de várias formas. Dessa forma, esse trabalho pode vir a ser uma referência para outros trabalhos que por ventura venham a ser elaborados. A seguir, encontra-se o gráfico 1 que resultou nesse modo de contagem.

Gráfico 1 – Frequência das classes na questão 03



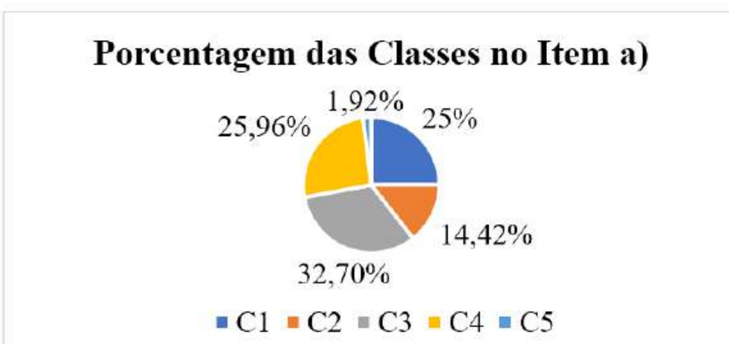
Fonte: Autores

Percebe-se, a partir da análise gráfica acima, que a classe C3 (erros devido a um domínio deficiente de pré-requisitos básicos) foi a classe de erros que mais ocorreu na 3ª questão. Isso, de certa forma, pode levantar a dúvida de como estão sendo preparados em termos de conhecimento os alunos, não só no Ensino Médio, mas também no Ensino Fundamental. Por que esses alunos não conseguem dominar os procedimentos e conteúdos considerados básicos para a aprendizagem?

O que pode estar ocorrendo no sistema educacional obidense? Qual a responsabilidade dos professores para esse resultado? Qual o papel da gestão escolar para tentar mudar esse quadro? Já a classe C4 (erros devido a associações incorretas ou inflexibilidade de raciocínio) aparece como a segunda classificação mais frequente nesse estudo e a classe C5 (erros devidos à aplicação de regras ou estratégias desnecessárias) é a com menor incidência.

O autor também procurou fazer uma análise individual em cada item das questões, a fim de verificar a frequência das classes de erros. Diferente do estudo estatístico feito para a questão 03, neste momento, buscou-se fazer uma análise estatística, tendo como base as 104 vezes que os tipos de erros apareceram nos 38 itens analisados. A partir daí foi feito um levantamento da quantidade de vezes que os erros apareciam. No final classificou-se esses erros em suas respectivas classes (C1, C2, C3, C4 e C5) *já estabelecidas. O resultado dessa classificação está* no gráfico 2 abaixo.

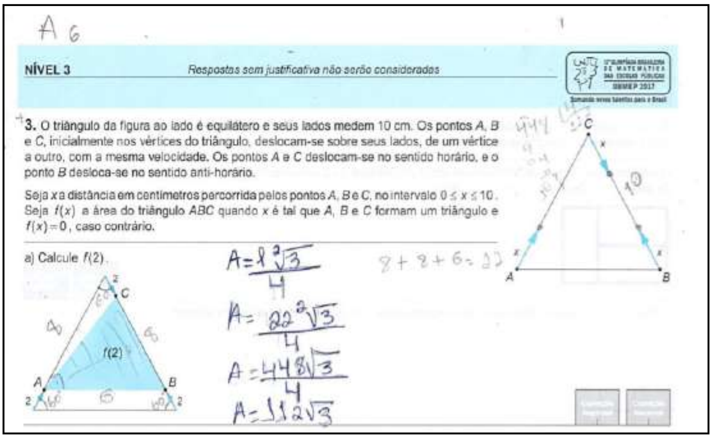
Gráfico 2 – Quantidade de Classes no Item a)



Fonte: Autores

Em relação ao gráfico acima, observa-se que os erros que mais ocorreram no item **a** foram os do tipo E3 e E6, pertinentes à classe C3, em que se pode destacar a falta de domínio do conteúdo matemático envolvido e uma certa deficiência com as operações básicas. Em relação à classe C1 destaca-se o erro E2, compreensão incorreta da questão. A seguir, apresenta-se um exemplo de como o autor buscou fazer a análise dos erros encontrados nas respostas dos alunos e classificá-los de acordo com as classes propostas por Radatz (1979).

Figura 2 – Erros apresentados pelo aluno 6



Fonte: Material da pesquisa

Nessa resolução, se observa que o aluno não conseguiu calcular corretamente a potência ou se confundiu na colocação dos números, sendo que o correto seria $22^2 = 484$, ademais o valor 22 não condiz com a lógica do problema. Esse erro é do tipo E3, o qual está relacionado à classe C3. Outro erro que fica claro é que o aluno não conseguiu perceber que o tamanho da base do triângulo não era 6 cm e sim 8 cm. Nota-se com isso, a falta de domínio dos conceitos sobre triângulos isósceles e equilátero, pois se ele tivesse segurança dessas conceituações talvez não tivesse cometido esse erro. Também se percebe que o aluno não tinha a noção de como calcular a área do triângulo ABC (azul), ou seja, não sabia que para isso era preciso fazer a diferença entre as duas áreas. Outras classes de erros que se apresentaram nessa resolução foram as classes C1, com os erros do tipo E2 (compreensão incorreta da questão) e C4 observado a partir do erro E1 (aplicação de valores incorretos na fórmula).

Considerações Finais

A presente pesquisa objetivou contribuir com o desenvolvimento e melhoria do ensino da matemática nas escolas estaduais de Ensino Médio do Município de Óbidos – Pará e na disseminação dos conhecimentos científicos acerca da temática de estudo sobre a Análise de Erros. Tendo como ponto de partida a vivência na docência nas instituições pesquisadas como professor de matemática o estudo possibilitou refletir e desconstruir certas práticas na avaliação dos erros dos alunos, e ser ferramenta de aprimoramento as práticas docentes em vista a transformação do ensino e da aprendizagem da matemática. Na certeza em acreditar que a educação pode mudar a realidade das pessoas, espero que esse trabalho ajude nessa transformação.

O campo de ensino e pesquisa sobre a Análise de Erros é considerado ainda novo para a comunidade escolar. Desenvolver um estudo onde o foco é o erro, passou a ser um grande desafio, visto que nessa perspectiva o erro dos alunos não pode ser descartado, pelo contrário, servem, como instrumento de análise como processo pedagógico importante. Isso requer o conhecimento sobre o assunto, pois ainda há nos meios educacionais a visão pessimista e excludente sobre os erros dos alunos.

A partir das análises feitas para a obtenção dos resultados, foi perceptível o quanto os erros dos alunos podem transmitir informações acerca do nível de aprendizagem que estes apresentam. Desse modo, o professor percebendo com antecedência os erros cometidos pelos alunos, usando da metodologia defendida nesta pesquisa, poderá tentar corrigir essa falha de aprendizado.

A metodologia apresentada nessa pesquisa, foi desenvolvida, a partir de longas análises e estudos pelo autor, visando passar ao leitor um entendimento claro sobre o processo desenvolvido. A proposta do trabalho foi mostrar que é possível através dos erros cometidos pelos alunos, entender melhor suas necessidades de aprendizado e como elas podem ser trabalhadas e corrigidas a partir dos resultados obtidos.

Referências

AMARANTE, Jose Marcos Nunes do. **Análise de Erros: Reflexões sobre o Ensino de Geometria no Município de Óbidos-Pá a partir de questões da OBMEP**. (Dissertação). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ. SANTARÉM 2019. Disponível em: https://cutt.ly/vkEURUC.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo.** São Paulo: Edições 70, 2016.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 126p.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 2.ed.; 2ª reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

FREITAS, Adelaide. FIGUEIREDO, Teresa Simões. **Desenvolvimento Curricular e Didática.** Indagatio Didactica. vol. 10 (2), julho de 2018.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5ª. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem escolar**: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez,2011.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem**: componente do ato pedagógico. 1ª. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

HOFFMANN, Jussara. **Avaliação, mito e desafio: uma perspectiva construtivista**. 44ª edição. Editora mediação. Porto Alegre. 2014.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar.** Tese de Doutorado. Faculdade da Educação da Universidade de São Paulo. 1998.

PCNEM. Coordenação da elaboração Eny Marisa Maia. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).** Parte I - Bases Legais. Parte II - Linguagens, Códigos e suas Tecnologias. Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Parte IV - Ciências Humanas e suas Tecnologias.

RADATZ, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education. 10(2), 163-172.

Analisando erros na disciplina de cálculo com alunos da Ufopa

Jones Paulino de Souza[1]
Mario Tanaka Filho[2]

Introdução

A análise das respostas dos alunos, ao estudar os erros, procurando entender melhor sua causa, pode auxiliar os alunos em suas dificuldades, e os professores e o sistema de ensino na compreensão e diminuição das repetências e evasões escolares. Isso é o possibilita o uso da metodologia de "Análise de Erros" disposto no livro da Prof. Dr. Helena Cury, "*Análise de Erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos*". Este trabalho descreve a investigação dos erros cometidos por acadêmicos do curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, de Licenciatura Integrada em Biologia e Química, e de professores em formação continuada do Profmat da UFOPA, na cidade de Santarém, durante o segundo semestre letivo de 2018, na solução de um teste de Cálculo Diferencial e Integral, uma das disciplinas tradicionais em cursos de ciências exatas e que tem preservado sua estrutura original. Contudo, os dados de não-aprovação da mesma, acima dos 50% em faculdades como a Politécnica da USP (Universidade de São Paulo), o IME (Instituto

[1] SEDUC-Pa. E-mail: jones.paulino2@gmail.com
[2] Ufopa. E-mail: tanakafi@gmail.com

de Matemática e Estatística) e a UFF (Universidade Federal Fluminense) no início dos anos 90, mostram a dimensão exata da gravidade do problema do ensino de Cálculo (REZENDE, 2003), o que colabora para que certos erros continuem freqüentes entre os alunos quando da solução de derivadas e integrais (MARIANI, 2005).

Situação parecida foi detectada no levantamento dos índices de desempenho dos alunos da UFOPA no período de 2014 a 2017, nas turmas de Licenciatura em Matemática e Física e de Licenciatura em Biologia e Química na disciplina Cálculo. As turmas de Licenciatura em Matemática e Física apresentaram um índice de reprovação e de abandono na disciplina acima dos 75%, em média. Em 2017, o índice de abandono ultrapassou os 50%, enquanto que nos anos anteriores, 52% dos alunos das turmas reprovaram na disciplina, em média. Os dados das turmas de Licenciatura em Biologia e Química mostraram que, com exceção do ano de 2015 (que atingiu 52%), a média de aprovação do período ficou em torno de 30,5%. O ano de 2017 apresentou o pior índice dos quatro anos, apenas 12% dos alunos foram aprovados, fazendo com que o índice de reprovação dessas turmas subisse 120,5% no mesmo período (Souza, 2019).

Diante desses dados e do estudo sobre análise de erros, levantou-se a problemática: "Que contribuição a análise dos erros, cometidos por alunos de cursos superiores, em questões de Cálculo pode trazer para o processo de ensino dessa disciplina?" Ou seja, discutir sobre as possibilidades de uso da análise de erros no ensino de Cálculo de modo a contribuir com a aprendizagem dessa disciplina de forma a averiguar os tipos de erros cometidos por acadêmicos da UFOPA na solução de itens de Cálculo, categorizá-los, classificá-los para, em seguida, apresentá-los de forma adequada e fazendo uma análise dos resultados obtidos.

Referencial Teórico

Estudar os erros e entender suas causas em detalhes pode auxiliar os alunos em suas dificuldades, os professores e o sistema de ensino, na compreensão e diminuição das repetências e evasões escolares. A técnica utilizada para o estudo dos erros, aqui apresentados, tem como base a Análise de Conteúdo, que consiste em ler e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos (BARDIN, 2002). Ela trata os dados brutos que chegam provenientes das mais diversas fontes para facilitar o trabalho de compreensão, interpretação e inferência; ajuda a reinterpretar as mensagens para atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além de uma leitura comum. Nela o analista infere (deduz de maneira lógica) conhecimentos sobre o emissor da mensagem ou sobre o seu meio.

Nesse processo de análise faz-se a descrição (a enumeração), depois a inferência (na qual se procura responder: quais as causas? E quais os efeitos possíveis?) de modo explícito e controlado e, em seguida, se faz a interpretação (a significação). Assim, a mensagem é tratada em diferentes fases, que são: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

Já a Análise de Erros (CURY, 2007) é uma abordagem de pesquisa e é também uma metodologia de ensino, empregada quando se detecta dificuldades na aprendizagem dos alunos e se quer explorá-las em sala de aula. Ela possibilita observar como estão as habilidades do aluno em resolver problemas e os principais erros cometidos por alunos em questões matemáticas. Conforme a corrente de pesquisa (a de ensino, a de aprendizagem e a de atividade), "os erros podem vistos de maneira unicamente negativa, como defeitos do processo educativo que deveriam ser eliminados através de estratégias de ensino mais eficientes." (1ª corrente: ensino); compreender o pensamento matemático do aluno e a maneira como ele aprende (2ª corrente: aprendizagem); levar os alunos a tirar proveito de seus erros e, a partir deles, questionar e construir seu conhecimento matemático (3ª corrente: atividade). (BARICHELLO, 2008)

Os erros (dados para a pesquisa) forem detectados (obtidos) na proposição de solução de itens pelos alunos relacionados à disciplina. Os itens propostos, conforme (GUIA-INEP, 2010), deviam estimular o interesse e o bom desempenho de quem os responde, pois a forma com que se elabora a prova pode ser um fator determinante de fracasso ou de sucesso do aluno (Cury apud (MARIANI, 2005). Para isso, estudou-se o (GUIA-INEP, 2010) sobre a Elaboração de itens. De acordo com esse guia, a elaboração de um bom item (objetivo de múltipla escolha, neste caso), deve seguir as diretrizes que contemplam as habilidades da Matriz de Referência elaborada pelo Ministério da Educação. Essa Matriz é um conjunto de descritores construído por uma comissão de especialistas designada pelo INEP para subsidiar a elaboração da prova (mas não elabora a prova). Ela apresenta, com clareza, as habilidades acadêmicas, as competências profissionais, os conteúdos mais relevantes que possam evidenciar as habilidades e competências possíveis de serem avaliadas através de provas educacionais, facilidade e complexidade das questões, dentre outras.

Procedimentos Metodológicos

A pesquisa tem um caráter quantitativo-qualitativo e foi realizada segundo a metodologia de análise de conteúdo, obedecendo a três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Tem um caráter quantitativo, pois, segundo (GERHARDT e SILVEIRA, 2009), focaliza uma quantidade pequena de conceitos; inicia com idéias preconcebidas do modo pelo qual os conceitos estão relacionados; utiliza procedimentos estruturados e instrumentos formais para coleta de dados; coleta os dados mediante condições de controle; enfatiza a objetividade, na coleta e análise dos dados; e analisa os dados numéricos através de procedimentos estatísticos. Tem um caráter qualitativo devido o seu desenvolvimento ser imprevisível, o conhecimento do pesquisador, parcial e limitado, e o objetivo da amostra ser de produzir informações aprofundadas e ilustrativas.

É uma pesquisa aplicada quanto à natureza, pois objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos. Quanto aos objetivos, é uma pesquisa exploratória que, segundo Gil apud (GERHARDT e SILVEIRA, 2009), pretende proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. E quanto aos procedimentos, é uma pesquisa ex-post-facto, pois "tem por objetivo investigar possíveis relações de causa e efeito entre um determinado fato identificado pelo pesquisador e um fenômeno que ocorre posteriormente.

O local de aplicação da pesquisa ocorreu no Campus Rondon da UFOPA, na cidade de Santarém durante o segundo semestre letivo de 2018, com estudantes do cursos de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, de Licenciatura Integrada em Biologia e Química, e do Profmat 2018, com professores em formação continuada.

O processo de constituição do corpus, respostas nas quais se debruçaria a análise, obedeceu à seguinte sequência: organizaram-se as respostas por turma e por curso; separaram-se os itens de cada teste em três blocos conforme sua ordem no teste: Q1, Q2 e Q3; destacaram-se os itens em: 'respondidos corretamente', 'respondidos incorretamente' e 'em branco', quantificando-os conforme essa classificação; tomaram-se os itens com distratores marcados, com algo escrito no rascunho que justificassem a marcação da alternativa escolhida como resposta, quantificando-as. As respostas incorretas com algo escrito no rascunho formaram o corpus da pesquisa. Elas foram identificadas e analisadas. Nove respostas, três de cada item, foram fotocopiadas e colocadas no trabalho para ilustrar a análise das respostas sobre o raciocínio de cada aluno.

O teste, com três itens de múltipla escolha, foi aplicado a 64 alunos, totalizando 192 respostas, veja o quadro 2 a seguir. Do total de alunos, 32 eram das turmas de Matemática e Física (anos 2014, 2015 e 2016), 24 eram das turmas de Biologia e Química (anos 2014 e 2015) e 08 eram da turma Profmat 2018.

Quadro 2 – Processo de constituição do Corpus da pesquisa

Fonte: (SOUZA, 2019)

Tratamento e Análise dos dados

No processo de tratamento dos dados foram feitas a pré-análise, a exploração do material e a criação de categorias de respostas com erros: sete para o item 01, seis para o item 02 e quatro para o item 03. Essas categorias foram agrupadas em 03 classes de erros, conforme o quadro 3:

Quadro 1 – Classificação de erros utilizada

Classificação de erros relacionados ao conteúdo de Cálculo no teste proposto		
Erros cometidos por falta de conhecimentos específicos de Cálculo (Classe A)	Erros cometidos por falta de conhecimentos matemáticos básicos (Classe B)	Erros cometidos por distração (Classe C)

Fonte: (CARVALHO, 2016)

Estabelecido essas categorias e classificações, passou-se a analisar as respostas dispostas no corpus.

Análise do item 01

O item 01 (figura 4) representa um item objetivo com duas afirmativas. A afirmativa I estabelece uma igualdade entre uma fração algébrica com um binômio, e a de número II, estabelece uma igualdade entre o limite de uma fração algébrica quando a variável tende ao valor numérico dois e o limite de um binômio quando a variável tende ao mesmo valor numérico.

Figura 4 – Item 01 do teste avaliativo de Cálculo

Questão 01 ---

Um dos problemas detectados nas investigações sobre erros dos alunos em Cálculo Diferencial e Integral foi o não reconhecimento de padrões em uma expressão algébrica, de forma que fosse possível fatorá-la. ... Linchevski e Livneh (1999) consideram ser necessário que os alunos desenvolvam uma percepção da estrutura, que lhes permitam ser capazes de manipular tais expressões com flexibilidade. Hoch e Dreyfus (2004) consideram que "percepção da estrutura" pode ser descrita como: [...] uma coleção de habilidades. Essas habilidades incluem ver uma expressão ou sentença algébrica como uma entidade, reconhecer uma expressão ou sentença algébrica como uma estrutura previamente encontrada, dividir uma entidade em sub-estruturas, reconhecer conexões mútuas entre estruturas, reconhecer qual manipulação é possível e [...] qual é útil para realizar. (p. 51)

Texto do artigo de Helena N. Cury e Beatriz Konzen, Classificação e análise de erros em Álgebra, p. 02.(com adaptações).

Pelo que foi exposto e do conhecimento algébrico adquirido, analise as igualdades I e II a seguir:

I. $\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=x+3$ II. $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+x-6}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}(x+3)$

Pela análise feita, pode-se afirmar que:

(A) Apenas a igualdade I está correta (B) Apenas a igualdade II está correta

(C) Ambas as igualdades estão corretas (D) Ambas as igualdades estão incorretas

Fonte: (Stewart, 2001)

Nota: O *enunciado do item foi adaptado para um item objetivo de múltipla escolha.*

Este item exige que o aluno saiba a definição de limites, bem como a condição de simplificação de fatores do numerador pelo binômio do denominador da fração algébrica dada. E que o aluno saiba fatorar a expressão algébrica do numerador de modo a permitir a simplificação da fração pela divisão dos fatores semelhantes. Considera-se, portanto, que as habilidades/competências necessárias para resolução desse item são: saber fatorar expressões algébricas, saber simplificar frações algébricas, saber estabelecer a condição de existência de uma fração algébrica e utilizar a definição de limites.

A análise dos rascunhos das respostas possibilitou a identificação das categorias de erro, chegando-se ao quadro 4 com essas categorias de respostas, identificadas por códigos e suas freqüências:

Quadro 4 – Categoria de respostas do item 01

Código	Categoria de respostas	FA	FR
Q1.1	Não soube calcular o limite da expressão dada.	14	25%
Q1.2	Não observou a condição para dividir o numerador pelo denominador da fração algébrica.	26	46%
Q1.3	Realizou procedimentos algébricos inadequados para simplificar a fração algébrica.	5	9%
Q1.4	Não simplificou a fração algébrica.	2	4%
Q1.5	Fez procedimento de resolução de uma equação em vez de simplificar a fração algébrica.	4	7%
Q1.6	Não considerou a divisão 0/0 como uma indeterminação.	2	4%
Q1.7	Lapso, distração ou esquecimento.	4	7%

Fonte: (SOUZA, 2019)

O quadro 5 apresenta a frequência das classes de erros na resolução do item 01:

Quadro 5 – Classes de erros do item 01

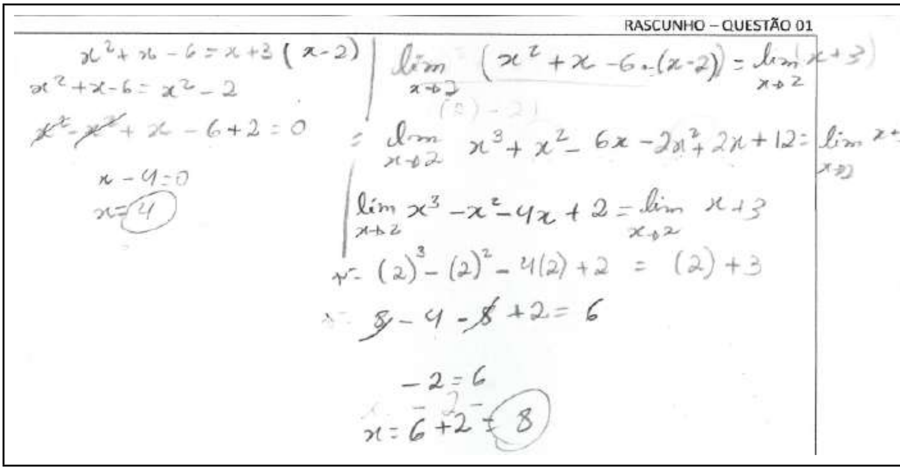
Classe	Código da Categoria de Resposta	FA	FR
A	Q1.1	14	25%
B	Q1.2, Q1.3, Q1.4, Q1.5	37	65%
C	Q1.6, Q1.7	6	11%

Fonte: (SOUZA, 2019)

Nesse quadro nota-se que os erros classe B foram os que mais ocorreram. Como o item requeria conhecimentos de matemática básica, como fatorar uma expressão algébrica, simplificar uma fração algébrica e lembrar a condição para tal simplificação, os alunos que não os expressaram adequadamente, cometeram esse tipo de erro.

Os erros de classe C apareceram em menor proporção e compreendem problemas relacionados à distração no momento de resolver a questão. Veja a resposta do aluno B509 na Figura 5, como exemplo:

Figura 5 – Resposta apresentada para o item 01 pelo estudante B509

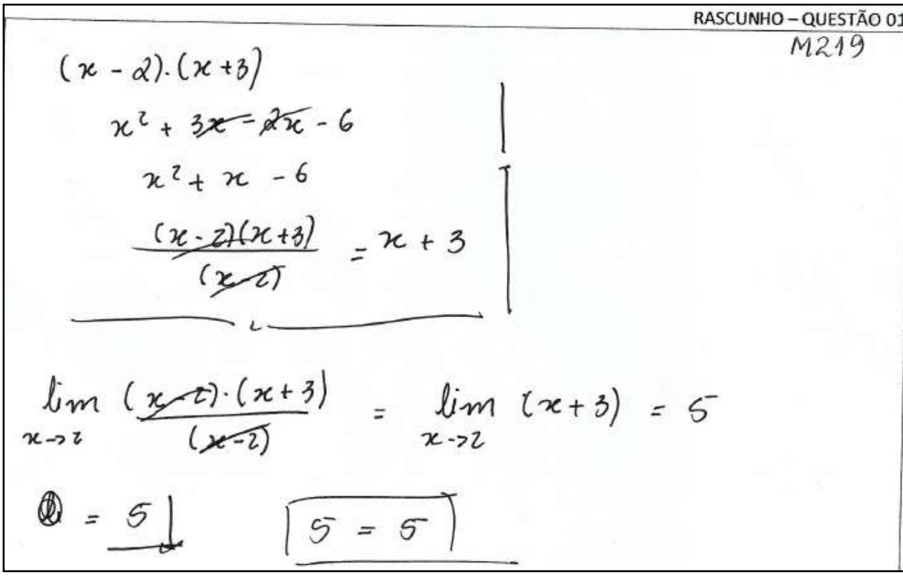


Fonte: (SOUZA, 2019)

Este aluno realizou procedimentos algébricos incorretos, tanto na primeira quanto na segunda igualdade. Tomando a 1ª igualdade, efetuou erradamente o produto entre os dois binômios, além de considerar em seguida a situação como a resolução de uma equação. Um equívoco. Na 2ª igualdade, por distração, realizou um produto, em vez de uma divisão entre os termos da fração algébrica dada. No terceiro passo, escreveu 2 em vez de 12, outro erro por distração. E, no quinto passo, escreveu como resultado de $8-4-8+2,6$, que ele escreveu como resultado também de $(2)+3$, mais um equívoco.

Um erro matemático que mais apareceu nesse item foi o de fazer os procedimentos algébricos corretamente na simplificação dos termos da fração algébrica, mas não colocar a condição que a valida, $x \neq 2$. Veja o que escreveu o aluno M219 (Figura 6) em seu rascunho e que o levou a concluir que as duas igualdades são verdadeiras:

Figura 1 – Resposta apresentada para o item 01 pelo estudante M219


RASCUNHO – QUESTÃO 01

M219

$(x-2)\cdot(x+3)$

$x^2+\cancel{3x}-\cancel{2x}-6$

x^2+x-6

$\frac{(\cancel{x-2})(x+3)}{(\cancel{x-2})}=x+3$

$\lim_{x\to 2}\frac{(\cancel{x-2})\cdot(x+3)}{(\cancel{x-2})} = \lim_{x\to 2}(x+3) = 5$

$a = 5$ $\boxed{5 = 5}$

Fonte: (SOUZA, 2019)

Análise do item 02

O item 02 (Figura 7) apresenta uma situação-problema envolvendo um loteamento retangular, sendo que o mesmo é ilustrado por duas figuras retangulares concêntricas com a demarcação na parte superior do retângulo maior de que suas dimensões horizontais foram prolongadas 3m à esquerda e 3m à direita em relação às dimensões de mesma direção do retângulo menor. Do mesmo modo é apresentada a demarcação no lado esquerdo do retângulo maior, cujas dimensões verticais superam as dimensões de mesma direção do retângulo menor, 2m acima e 2m abaixo. Mostra uma superfície rachurada entre as dimensões dos dois retângulos. O item pede que o aluno encontre a área mínima de todo este terreno, dados a diferença entre as dimensões dos dois retângulos e área disponível para construção (retângulo menor) que é de 600m^2.

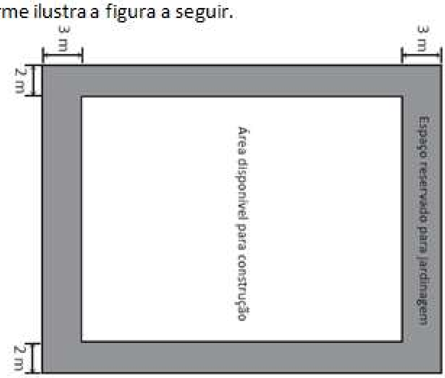
Figura 2 – Item 02 do teste avaliativo de Cálculo

Questão 02 --

Relaciona-se crescimento e decrescimento do gráfico de função com o sinal da derivada. Os máximos e mínimos locais acontecem exatamente quando há mudança de sinal de f′(x). Mais precisamente, temos o chamado Teste da derivada primeira. Outro instrumento para determinar se o ponto crítico x=c é máximo local ou mínimo local é a derivada segunda de f, se f é diferenciável em um intervalo aberto I, e c∈I é tal que f′(c) = 0 e f″(c) existe.

Texto de um livro de Fundamentos de Cálculo (ProfMat MA22, 2012, Unid 14 p. 8,10)

Uma construtora, com o objetivo de valorizar as áreas verdes, apresentou um projeto de loteamento, com terrenos retangulares, onde cada residência construída terá um jardim ao seu redor. Em cada terreno deverão ser reservados 3 metros na frente, 3 metros no fundo de 2 metros em cada lateral para jardinagem, conforme ilustra a figura a seguir.



Considerando-se que área disponível para construção será de 600m², a área mínima do terreno que atende às especificações exigidas pela construtora será de

(A) 606 m² (B) 610 m² (C) 726 m² (D) 864 m² (E) 924 m²

Fonte: Prova do ENADE 2017 Matemática Licenciatura
Nota: Questão 13, p 17

Esse item exige do estudante as seguintes habilidades/competências necessárias para resolução do mesmo: saber resolver problemas, saber operar com expressões algébricas, saber calcular o valor numérico de uma expressão algébrica, saber resolver equação quadrática, saber as regras de derivação e saber aplicar o significado da derivada primeira de uma função na situação dada. Além disso, que o aluno saiba que igualando a derivada primeira à zero, estará se encontrando os pontos críticos da função, ou seja, o ponto de máximo ou mínimo local conforme o domínio.

Na análise das respostas contidas nos rascunhos, foi possível identificar as seguintes categorias de respostas contidas no quadro 6 com as suas respectivas freqüências absoluta e relativa:

Quadro 6 – Categoria de respostas do item 02

Código	Categoria de respostas	FA	FR
Q2.1	Não soube aplicar o principio da derivada 1ª.	1	6%
Q2.2	Não soube equacionar o problema.	5	31%
Q2.3	Não soube estabelecer uma relação de dependência entre as dimensões do terreno.	2	13%
Q2.4	Considerou a área para jardinagem como produto ou somas das dimensões 2m e 3m.	4	25%
Q2.5	Utilizou dimensões não dadas para solucionar o problema.	3	19%
Q2.6	Distração e substituição inadequadas de variáveis.	1	6%

Fonte: (SOUZA, 2019)

O quadro 7 apresenta a frequência das classes de erros na resolução do item 02:

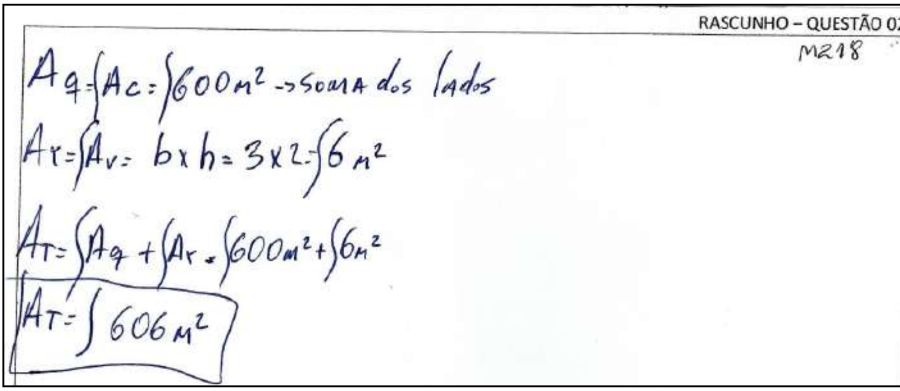
Quadro 7 – Classes de erros do item 02

Classe	Código da Categoria de Resposta	FA	FR
A	Q2.1	1	6%
B	Q2.2, Q2.3	7	44%
C	Q2.4, Q2.5, Q2.6	8	50%

Fonte: (SOUZA, 2019)

Pelo que se observa no quadro 7, apenas um aluno apresentou em sua resposta erro de classe A, mas isso ocorreu porque ele não soube aplicar as regras de derivação e nem o princípio da derivada primeira no problema e o fato de que os demais não conseguiram nem montar a equação que representasse o problema. Assim os erros de classe C foram os que mais apareceram e compreendem a momentos de desatenção diante das informações dadas no item. Parece que alguns alunos não se aperceberam do que seria a área reservada ao jardim, não atentaram para o tamanho da superfície, suas dimensões. Tal fato é mostrado na Figura 8 que mostra a resposta do aluno M218:

Figura 3 – Resposta apresentada para o item 02 pelo estudante M218

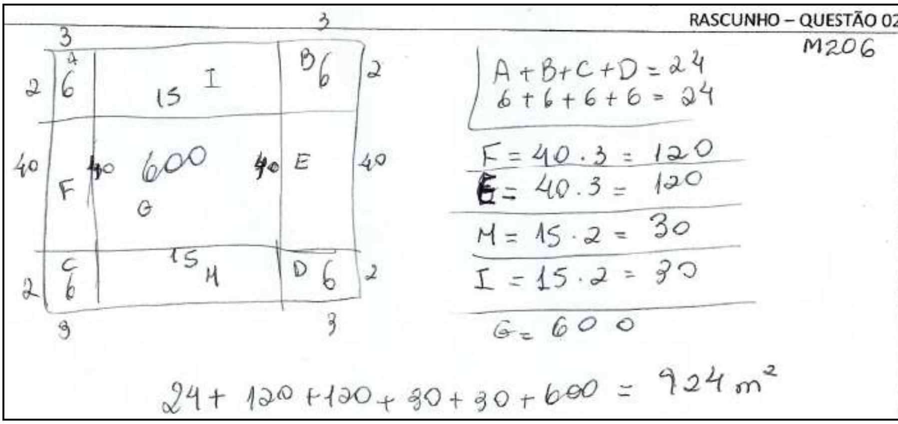


Fonte: (SOUZA, 2019)

Em sua resposta, o aluno considerou que a área mínima (A_T) é equivalente a soma das áreas das seguintes superfícies: superfície reservada para construção (A_q) e da superfície reservada para jardinagem (A_v). No entanto, ele colocou a área reservada para o jardim como equivalente ao produto das dimensões $3m$ e $2m$ dadas na figura. Um equívoco, uma falta de percepção por parte do aluno das dimensões do jardim. Um erro classe C, pois não atentou a este fato e, também erro de classe B, pois se trata da falta de habilidade na resolução de problemas, no caso sobre áreas.

Os erros de classe B que ocorreram foram devido aos alunos não saberem escrever algebricamente a situação problema enunciada e equacionar o problema para que, em seguida, se aplicasse as regras de derivação e o princípio da derivada primeira que soluciona, de modo mais simples, a questão. Foi o que escreveu o aluno M305 como justificativa para a sua resposta (Figura 9).

Figura 9 – Resposta apresentada para o item 02 pelo estudante M206



Fonte: (SOUZA, 2019)

Ele dividiu a figura do terreno em nove superfícies: quatro com dimensões $2x3$, duas com dimensões $2x15$, duas com dimensões $40x3$ e uma com dimensões $40x15$. Obteve, portanto, quatro áreas de $6m^2$, duas de $30m^2$, duas de $120m^2$ e uma de $600m^2$. Nota-se que ele considerou que a superfície reservada para construção, de área $600m^2$, teria as dimensões $40m e 15m$, um equívoco, pois essas medidas não foram dadas no problema e, por fim, o aluno somou as áreas obtidas. Neste caso, o aluno cometeu erro de classe C, pois não atentou que no problema não fora dado nenhuma dimensão da superfície reservada à construção e que o que se pedia era a área mínima.

Análise do item 03

O item de número 03 (Figura 10) é um item objetivo com três afirmativas. No seu enunciado é dado o gráfico de uma função $f(x)dx$ definida no intervalo $[a,c]$, onde as abscissas 0 e b pertencem a este intervalo, e com $b > 0$. Neste gráfico são apresentadas três curvas: a primeira situada acima do eixo x, representando a área A, com concavidade voltada para baixo, delimitada por $y = 0$ e a função $(x, f(x))$ para $a < x < 0$;

a segunda, situada abaixo do eixo x, representando a área B, e delimitada por $y = 0$ e a função $(x, f(x))$ para $0 < x < b$, com concavidade voltada para cima; e a terceira, delimitada por $y = 0$ e a função $(x, f(x))$ para $b < x < c$, com concavidade voltada para baixo e representando a área C. A instrução diz que as áreas A, B e C valem, respectivamente, 5, 3 e 2. E pede para que se avaliem as afirmativas I, II e III.

Figura 10 – Item 03 do teste avaliativo de Cálculo

Questão 03 --

Os fatos que relacionam a integral definida e áreas de regiões têm como um dos pontos o seguinte: Se $f:[a,b] \to R$ é uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ então o limite $\int_a^b f(x)dx$ é a área da região determinada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$.

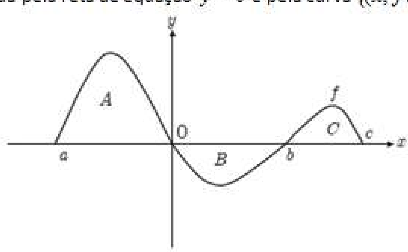
Texto encontrado em um livro de Fundamentos de Cálculo (ProfMat MA22, 2012, Unid 17 p.18)

Considere $f:[a,c] \to R$ uma função contínua e $b \in (a,c)$, conforme ilustra o gráfico abaixo. Represente por:

A a área da região limitada pela reta de equação $y = 0$ e pela curva $\{(x, f(x)); x \in [a,0]\}$;

B a área da região limitada pela reta de equação $y = 0$ e pela curva $\{(x, f(x)); x \in [0,b]\}$;

C a área da região limitada pela reta de equação $y = 0$ e pela curva $\{(x, f(x)); x \in [b,c]\}$;



Sabendo-se que $A = 5$, $B = 3$ e $C = 2$, avalie as afirmações a seguir.

I. $\int_a^0 f(x)dx = 5$

II. $\int_0^b f(x)dx = 3$

III. $\int_a^c f(x)dx = 4$

É correto o que se afirma em

(A) I, apenas. (B) II, apenas. (C) I e III, apenas. (D) II e III, apenas. (E) I, II e III.

Fonte: Prova do ENADE 2017 Matemática Licenciatura
Nota: Questão 09, p. 16

A afirmativa I diz que $\int_a^0 f(x)dx = 5$, a de número II que $\int_0^b f(x)dx = 3$ e a afirmativa III, que $\int_b^c f(x)dx = 4$. Para responder este item, é exigido que o estudante saiba a definição de integral de Riemann associando-a ao valor da área da curva $f(x)dx$ delimitada pela reta $y = 0$ e x pertencente ao intervalo dado. E mais ainda, que a integral da curva abaixo do eixo x é negativa e que a integral de uma função $f(x)dx$ em um intervalo que contem outros intervalos menores é igual à soma das integrais em cada um desses intervalos dessa função.

As habilidades/competências necessárias para a solução desse item são: usar a definição de integral de Riemann, saber que a integral de uma curva abaixo do eixo x é negativa, e saber que a integral do intervalo $[a,c]$ é igual a soma das integrais dos intervalos $[a,0],[0,b]e[b,c]$. Neste item esperava-se que o respondente reconhecesse que apenas a afirmativa I e III são verdadeiras, ou seja, que a alternativa correta é a letra C. A análise das respostas contidas nos rascunhos identificou as seguintes categorias de respostas contidas no quadro 8 com as suas respectivas freqüências:

Quadro 8 – Categoria de respostas do item 03

Código	Categoria de respostas	FA	FR
Q3.1	Não soube estabelecer a relação integral e área de regiões delimitadas por uma função.	4	17%
Q3.2	Não considerou que a integral do gráfico localizada abaixo do eixo x é negativa.	12	50%
Q3.3	Considerou a medida da área como extremidade dos intervalos reais.	1	4%
Q3.4	Desatenção.	7	29%

Fonte: (SOUZA, 2019)

O quadro 9 apresenta a frequência das classes de erros na resolução do item 03:

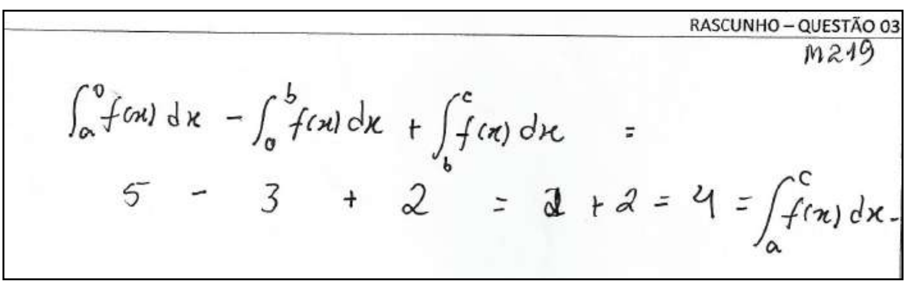
Quadro 9 – Classes de erros do item 03

Classe	Código da Categoria de Resposta	FA	FR
A	Q3.1, Q3.2	16	67%
B	Q3.3	1	4%
C	Q3.4	7	29%

Fonte: (SOUZA, 2019)

Observa-se que houve apenas um erro de classe B, isso pode ser justificado devido o item não envolver procedimentos de matemática básica, mas conhecimento de Cálculo Integral, a relação entre integral definida e a área de uma região no plano cartesiano delimitada por função em dado intervalo. Assim, as classes de erros mais comuns foram as de classe A. Como exemplo tem-se a resposta do aluno M219:

Figura 11 – Resposta apresentada para o item 03 pelo estudante M219


RASCUNHO – QUESTÃO 03

M219

$$\int_a^0 f(x)\,dx - \int_0^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx =$$

$$5 - 3 + 2 = 2 + 2 = 4 = \int_a^c f(x)\,dx$$

Fonte: (SOUZA, 2019)

A resposta do aluno M219 mostra que a integral da função no intervalo $[a,c]$ é igual a soma da integral de f em $[a,0]$ com a integral de f em $[b,c]$, menos a integral de f em $[0,b]$. Equivalendo dizer que: $5-3+2=2+2=4$. Entretanto, não lembrou o fato de que a integral no intervalo $[0,b]$ deveria ser negativa. Erro de classe A pelo desconhecimento ou por não lembrar que a integral de uma função nesse intervalo dado no gráfico é negativa.

Discussão dos Resultados

As turmas que mais erraram foram os de Licenciatura Integrada em Matemática e Física e os que mais deixaram os itens em branco foram os de Licenciatura Integrada em Biologia e Química e os que mais acertaram foram os do Profmat. E o levantamento na correção dos itens, levou a construção da seguinte tabela de frequência (Tabela 3):

Tabela 1 – Freqüência de itens corretos, incorretos e em branco no teste de Cálculo

Item	Corretos		Incorretos		Em branco	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
01	12	19%	46	72%	6	9%
02	21	33%	29	45%	14	22%
03	19	30%	34	53%	11	17%

Fonte: (SOUZA, 2019)

Os dados da Tabela 3 mostram que o índice de respostas incorretas ou deixadas em branco é muito maior que o percentual de acertos. Para o item 01: 81% de incorretos ou em branco contra 19% de corretos; para o item 02: 67% contra 33%; e para o item 03: 70% contra 30%. Nota-se também que os itens 02 e 03 tiveram índices parecidos de acertos, 33% e 30% respectivamente. E o item 01 foi o que apresentou o menor índice de respostas em branco, mas o maior número de respostas incorretas.

A análise centrada nas respostas incorretas de cada item do teste possibilitou a classificação dos erros cometidos, que foram totalizados e dispostos na tabela 4.

Tabela 2 – Número de erros de cada tipo por item ocorrido na solução do teste de Cálculo

Classe de Erro	Item			Total
	01	02	03	
A	14	01	16	31
B	37	07	01	45
C	06	08	07	21

Fonte: (SOUZA, 2019)

Por essa tabela é possível notar que os erros do tipo B relacionado a conhecimentos de matemática básica foram os que mais ocorreram, sendo que, em sua maioria, no item 01 e praticamente não detectado na solução do item 03. Os erros do tipo A foram os que ficaram em segundo lugar de ocorrência, com apenas um caso ocorrido na solução do item 02 e com maior ocorrência na solução do item 03. A pouca ocorrência dos erros tipo A na solução do item 02 é explicado pelo fato de os alunos não saberem equacionar o problema para então aplicar conhecimentos de Cálculo. Já os erros do tipo C tiveram frequência pouco relevante, mas de ocorrência presente nas respostas de todos os itens, sejam aqueles que envolveram procedimentos algébricos, ou nos que envolveram a passagem da linguagem natural para a matemática e ou nos equívocos das marcações das respostas do item 03.

Considerações Finais

A pesquisa permitiu utilizar a análise de erros como metodologia de investigação, possibilitando perceber em que tópico da matemática o aluno apresenta dificuldades; possibilitou averiguar a importância do Cálculo tanto para o desenvolvimento das ciências naturais quanto da própria Matemática que, no entanto, contrasta com o fracasso do seu ensino nas universidades, conforme os números apresentados nessa como em outras pesquisas. As respostas apresentadas nos testes mostraram que as dificuldades de assimilação dos temas da disciplina Cálculo permanecem, e estão relacionados principalmente a conhecimentos de matemática básica. Em relação ao uso da metodologia da Análise de Erros, o trabalho mais temeroso foi o de classificar os erros contidos nas respostas dos alunos de modo adequado a categoria pré-estabelecida, pois, ao se classificar um erro em certa categoria de respostas poderia se deixar de observar algum aspecto relacionado à outra categoria. Assim, enquadrar uma resposta errada em uma determinada categoria específica, poderia se confundir sua classificação com outra e de se observar determinadas situações que não se enquadrassem perfeitamente nas classificações descritas.

O estudo e a aplicação da Análise de Erros como investigação trouxe a prática docente deste pesquisador um olhar mais cuidadoso com a produção escrita dos seus alunos objetivando verificar em que temas o aluno apresenta dificuldades ou não-conhecimento.

Referências

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70 Ltda, 2002. 229 p.

BARICHELLO, L. **Análise de Resoluções de Problemas de Cálculo Diferencial em um Ambiente de Interação Escrita**, Rio Claro, p. 127 pág, 2008. Dissertação de Mestrado.

CAED. **Guia de Elaboração de Itens**. Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, p. 120. 2008.

CARVALHO, H. D. A. **A Análise dos Erros dos Alunos em Cálculo como Estratégia de Ensino**. Pontifícia Universidade Católica. Rio de Janeiro, p. 75. 2016. (CDD:510).

CURY, H. N. **Análise de Erros: O Que Podemos Aprender com As Respostas dos Alunos.** 1ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 116 p p.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, v. 2, 2009.

GUIA-INEP. **Guia de Elaboração e Revisão de Itens**. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Brasília, p. 20. 2010.

MARIANI, V. C. **Análise de Erros em Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos de Engenharia**. XXXIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, Campina Grande, 12 a 15 Setembro 2005. 10.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**, São Paulo, v. 1, p. 1-468, Maio 2003. Tese de Doutorado.

SOUZA, J. P. **Análise de erro em Cálculo: Metodologia de Investigação aplicada com alunos da UFOPA**, Santarém, v. 1, p. 1-87, Abril 2019. Dissertação de Mestrado.

Sala de aula invertida: Um experimento no ensino de Matemática

Neylane Lobato dos Santos[1]
Rodrigo Medeiros dos Santos[2]

Introdução

A sociedade vive hoje um período marcado pelos avanços tecnológicos, os quais têm se tornado cada vez mais acessíveis aos estudantes, que têm apresentado hábitos diferentes na sala de aula. Valente (2018) diz que isso deve-se, em parte, a utilização das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC[3]), pois a nova geração convive com as tecnologias naturalmente.

Com a chegada das tecnologias móveis à sala de aula, e que são cada vez mais fáceis de usar, novas possibilidades de aprendizagem surgiram, pois é possível, e também conveniente, utilizar aplicativos, plataformas gratuitas, colaborativas, on-line e sociais (MORAN, 2018). São inúmeros os caminhos. No entanto, a direção que este trabalho seguirá é o da Sala de Aula Invertida[4] (SAI) com o apoio das TDIC.

[1] SEDUC. E-mail: neylane.santos@escola.seduc.pa.gov.br
[2] Ufopa. E-mail: rodrigomedeiros182@hotmail.com
[4] O conceito de *Flipped Classroom* foi apresentado por Baker na 1*1th International*

A SAI é uma abordagem pedagógica das metodologias ativas, que é um conjunto de práticas pedagógicas alternativas ao ensino tradicional[5], nas quais o aluno passa de agente passivo para membro atuante no processo ensino aprendizagem. É uma proposta que surge em um momento oportuno no meio educacional, sobretudo com o fato das TDIC (mídias acopladas à internet) estarem cada dia mais presentes na sala de aula. Neste modelo, o conteúdo é estudado pelo aluno antes dele frequentar a aula, com apoio das TDIC, e na sala de aula realizam-se atividades para trabalhar o conteúdo estudado (VALENTE, 2018). As TDIC contribuíram para o desenvolvimento de novas abordagens pedagógicas, criaram novas possibilidades de expressão e comunicação como a criação de ambientes educacionais que vão além das paredes da sala de aula.

Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo investigar a utilização da abordagem pedagógica SAI no ensino de Matemática, com apoio de tecnologia, em uma escola estadual da rede pública, com alunos do 2º ano do Ensino Médio. Buscamos iniciar as atividades com motivações em forma de videoaula, que produzam conhecimentos prévios para o aluno desenvolver atividades no momento presencial e *on-line*, utilizando o aplicativo *Google Classroom*[6] neste último momento, como uma ferramenta auxiliar para potencializar o processo ensino aprendizagem de Matemática. E assim, levar o aluno a superar suas dificuldades

---

Confere on College Teaching and Learning, em 2000. Neste mesmo ano, Lage, Platt e Treglia publicaram um artigo apresentando resultados positivos sobre a utilização do método, que chamaram de *"Inverted Classroom"* (SCHMITZ, 2016). A partir de 2010, impulsionado por publicações internacionais, o termo "Flipped Classroom" passou a ser um chavão (VALENTE, 2014). Esse termo será aprofundado mais na frente.

[5] Tomamos por ensino tradicional a perspectiva de ensino que se dá por meio da transmissão de conhecimentos, geralmente pelo método expositivo presencial, na qual o professor é o centralizador do processo enquanto que o aluno é passivo e receptivo. Os conteúdos são cumulativos e enciclopédicos, geralmente separados da realidade dos alunos e tratados de forma desvinculada das demais disciplinas. Os materiais mais utilizados são caderno e livro e a avaliação é seletiva, servindo de parâmetro julgador para a progressão de séries. Cada série guarda uniformidade de currículo e faixa etária.

[6] É um serviço gratuito de gerenciamento de conteúdo voltado para escolas que procuram simplificar a criação de turmas, a distribuição e a avaliação de tarefas. Este aplicativo economiza tempo e papel, além de facilitar a comunicação e organização.

com os conteúdos, transformando-o em um pesquisador e agente ativo na construção do seu próprio conhecimento.

O trabalho foi organizado da seguinte forma: referencial teórico, metodologia, apresentação e análise dos resultados, por último as considerações finais.

Referencial Teórico

Nesta seção, faremos a exposição do referencial teórico adotado para esta pesquisa, buscando situar o leitor quanto à temas como: TDIC, Metodologias ativas e SAI.

Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação

Vive-se um momento na história da humanidade em que o advento de novas tecnologias e a disseminação da internet trouxeram uma nova dinâmica para a sociedade, impactando não somente a maneira como se acessa informação, mas também a forma de interação uns com os outros, como se produz conhecimento, como se aprende. De modo geral, as TDIC têm causado grande impacto na vida das pessoas e em praticamente todos os setores da sociedade (VALENTE, 2018).

Valente (2018) afirma que as tecnologias digitais estão mudando os processos de ensino e aprendizagem. O aluno de hoje prefere ler em uma tela, se tiver que fazer pesquisa, ele não procura uma biblioteca, e sim o Google[7]. Para entender as coisas ele procura vídeos e tutoriais no YouTube[8]. Sua atenção está no que é do seu interesse. O autor ainda ressalta:

> Assim, em plena era digital, a questão que se coloca é: o que as instituições de ensino estão proporcionando aos

[7] *Google* é uma mídia social que agrega vários serviços (www.google.com.br).

[8] É um site de compartilhamento de vídeos enviados pelos usuários através da internet, um repositório de vídeos, que estão disponíveis para qualquer pessoa que queira assistir e comentar.

> seus estudantes? Nada muito diferente ou inovador. Pelo contrário, ainda oferecem uma educação tradicional, baseada na informação que o professor transmite e em um currículo que foi desenvolvido para a era do lápis e papel. (VALENTE, 2018, p. 18).

As tecnologias digitais móveis desafiam a escola a sair do ensino tradicional e provocam mudanças profundas na Educação, a chegada delas na sala de aula provoca tensão, traz novas possibilidades além de grandes desafios, destaca Moran (2018).

Tecnologias digitais no ensino de Matemática

De acordo com Borba et al. (2015, p. 11), "as dimensões da inovação tecnológica permitem a exploração e o surgimento de cenários alternativos para a educação e, em especial para o ensino e aprendizagem de Matemática", onde uma variedade de programas educacionais têm contribuído significativamente na construção do conhecimento.

D'Ambrósio afirma que não há dúvida sobre a importância do professor no processo ensino aprendizagem, e ressalta ainda que, utilizar tecnologias na Educação não objetiva substituir o professor, tendo em vista que "todos esses meios serão auxiliares para o professor, mas este, incapaz de utilizar desses meios, não terá espaço na educação" (D'AMBRÓSIO, 2011, p. 73).

Metodologias Ativas na Educação

Diante de diversas transformações na sociedade, é necessário que a Educação se reinvente, acompanhe essas mudanças para não ficar para trás. Segundo Moran (2017, p.12), "não precisamos romper com tudo, mas implementar mudanças e supervisioná-las com equilíbrio e maturidade". A escola é um lugar importante, e tem de buscar soluções adequadas para atrair os alunos de hoje. Na visão de Moran (2015), as metodologias ativas constituem pontos de partida para reelaboração de novas práticas. De acordo com o autor:

> Metodologias ativas são estratégias de ensino centradas na participação efetiva dos estudantes na construção do processo de aprendizagem, de forma flexível, interligada, híbrida. As metodologias ativas num mundo conectado e digital se expressam através de modelos de ensino híbridos, com muitas possíveis combinações. A junção de metodologias ativas com modelos flexíveis, híbridos traz contribuições importantes para o desenho de soluções atuais para os aprendizes de hoje. (MORAN, 2017, p. 23).

Mudanças na Educação são necessárias, afirma Moran (2015), mas elas não dependem apenas de currículos mais flexíveis, de metodologias ativas ou tecnologias híbridas, pois assim seria mais fácil realizá-las. Além disso, o autor afirma que existe uma pressão para mudar, sem ter muito tempo para testar. E ressalta a importância de cada escola definir estratégias para essas mudanças.

Sala de Aula Invertida

Conhecida internacionalmente como Flipped Classroom, a SAI é um dos modelos de ensino aprendizagem que tem se destacado no cenário atual de ensino, e tem como característica principal a mudança no local de aprendizado. Nesta proposta, o aluno tem acesso ao conteúdo antes da aula presencial, por meio de materiais que o professor disponibiliza, onde ele deve ser incentivado a anotar pontos importantes sobre o conteúdo, é onde ocorre uma inversão das aulas consideradas tradicionais, deixando o tempo na sala de aula livre para que ele participe de atividades (SAMS; BERGMANN, 2017).

Para que a proposta tenha êxito, é necessário que o aluno se organize e cumpra três fases: antes da aula, durante a aula e depois da aula. Cada fase é importante e tem sua parcela de contribuição. Moran (2018, p. 8) destaca que "sozinhos, podemos aprender a avançar bastante; compartilhando, podemos conseguir chegar mais longe e, se contamos com a tutoria de pessoas mais experientes, podemos alcançar horizontes inimagináveis".

Valente diz que:

> A sala de aula presencial assume um papel importante nessa abordagem pedagógica pelo fato de o professor estar participando das atividades que contribuem para o processo de significação das informações que os estudantes adquiriram estudando *on-line*. Nesse sentido, o *feedback* é fundamental para corrigir concepções equivocadas ou ainda mal elaboradas. (VALENTE, 2018, p. 32).

Assim, a sala de aula presencial torna-se um espaço de prática e aprendizagem significativa[9], onde o aluno participa de debates e de atividades nos quais são retomados os conteúdos estudados por ele previamente.

De acordo com Sams e Bergmann (2017), o professor que pretende utilizar essa abordagem, pode iniciar com o básico sobre a inversão da sala de aula. A ideia é criar mais estratégias centradas nos alunos, substituindo as aulas expositivas que estão acostumados a ministrar, se reinventar, promovendo uma aprendizagem ativa e significativa.

Limites e possibilidades da Sala de Aula Invertida

A Sala de Aula Invertida é uma metodologia ativa que promove um novo significado ao papel do professor, da aprendizagem e do aluno. Nela, o professor é uma das inúmeras fontes de conhecimento dos alunos, o aluno é o centro do processo de conhecimento, que promove o desenvolvimento de um aprendizado colaborativo, ativo e investigativo. Sams e Bergmann (2017) elencam alguns motivos para o uso da SAI:

[9] O conceito de aprendizagem significativa foi proposto pelo pesquisador norte-americano David Paul Ausubel (1918-2008). Pensada para o contexto escolar, sua teoria ressalta o papel do professor em apresentar situações que promovam o aprendizado do aluno, considerando o que ele já sabe e levando em conta o contexto onde se encontra. Ele dizia que: "o fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra isto e ensine-o de acordo" (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980, p. 137).

> A inversão fala a linguagem dos estudantes de hoje; a inversão ajuda os estudantes ocupados (ou que faltam às aulas); a inversão cria condições para que os alunos pausem e rebobinem o professor; a inversão intensifica a interação aluno-professor; a inversão aumenta a interação aluno-aluno; a inversão muda o gerenciamento da sala de aula (SAMS; BERGMANN, 2017, p. 42-64).

Alguns críticos têm discutido pontos negativos dessa metodologia, sendo um deles a dependência da internet, já que sem acesso a ela os alunos ficam impossibilitados de fazer as atividades on-line. Outro aspecto destacado, considerado negativo, trata-se da possibilidade de não dedicação do aluno em fazer sua "tarefa de casa", ou seja, não estudar o conteúdo antes da aula, fazendo com que ele "fique perdido" durante a aula presencial (VALENTE, 2014).

Metodologia

No que se refere aos objetivos e aos procedimentos técnicos utilizados, a presente investigação é caracterizada como pesquisa participante de cunho qualitativo. Esse tipo de abordagem "engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências [...]" (BICUDO, 2012, p. 116).

Delineamento da pesquisa

Lócus e sujeitos da pesquisa

Para desenvolver o trabalho optamos por uma escola da rede pública de ensino no Oeste do Estado do Pará, no município de Santarém. Ela está localizada em um bairro periférico do município, e também atende alunos de outros bairros.

A implementação das atividades ocorreu em uma turma do 2° ano do Ensino Médio, composta por 30 alunos, que têm idades entre 17 e 22 anos. Há na turma um aluno PcD[10], cuja deficiência é déficit cognitivo e tem acompanhamento de um professor da educação especial na própria escola.

Google Classroom (Google sala de aula)

É uma plataforma digital na qual o professor cria turmas, compartilha textos, vídeos e outros tipos de materiais com os alunos, insere atividades, pode acompanhar o desenvolvimento de cada aluno. Qualquer pessoa com uma conta do *Gmail*[11] tem acesso a esse recurso, e pode ser utilizado no computador, ou no celular através do aplicativo que pode ser baixado pelo *Play Store*[12]. A Figura 1 apresenta um esquema das etapas que compõem o experimento.

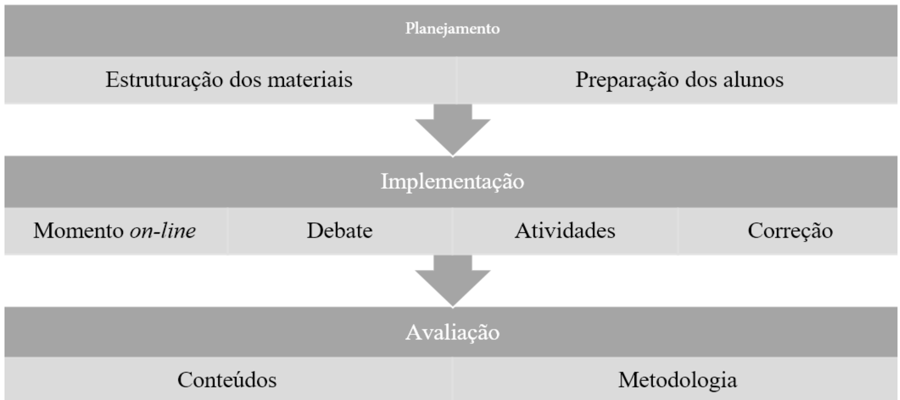
---

[10] PcD é uma sigla que significa pessoa com deficiência, e é a nomenclatura atual que foi adotada a partir da Convenção sobre os Direitos da Pessoa com Deficiência das Nações Unidas, em 2006, para se referir às pessoas que possuem limitações permanentes (pessoas com deficiência visual, auditiva, física ou intelectual).

[11] *Gmail* é um serviço gratuito de webmail criado pela *Google* em 2004.

[12] *Play Store* é a loja oficial de *apps* para *smartphones* e *tablets* com sistema operacional Android. Análogo à *Play Store* temos a *Microsoft Store* para os smartphones do sistema *Windows* e a *Apple Store* para os sistemas IOS da *Apple*.

Figura 1: Etapas do experimento.



Fonte: Elaborado pelos autores

Considerando que haviam duas aulas seguidas, e que na escola cada uma tem duração de 40 minutos, o tempo presencial foi dividido conforme descrito no Quadro 1.

Quadro 1: Divisão do tempo na sala de aula

Atividades	**Tempo**
Debate	15’
Atividade	50’
Correção	15’

Resultados e Discussões

Os encontros para o desenvolvimento deste trabalho com a turma foram entre 13 de março e 7 de maio de 2019.

Etapa de Planejamento

Seleção dos materiais com conteúdos

Sams e Bergmann (2017) afirmam que a SAI não implica na substituição do professor por vídeos, e que apesar deles usarem o vídeo, ela pode ser implementada sem a utilização dos mesmos. Ainda de acordo com os autores, é possível usar vídeos produzidos por terceiros, que foi a opção dos pesquisadores.

Para selecionar materiais sobre o conteúdo que pudessem satisfazer a proposta, foi realizada uma pesquisa na internet, especificamente no *YouTube*. Com a busca na plataforma, foram selecionadas 13 videoaulas para serem disponibilizadas durante o bimestre escolar, de acordo com os tópicos a serem estudados. Os conteúdos que foram trabalhados são os seguintes:

Trigonometria: Revisão sobre resolução de triângulos

- Teorema de Pitágoras
- Razões trigonométricas
- Lei dos cossenos

Conceitos trigonométricos básicos

- Arcos e ângulos
- Unidades para medir ângulos e arcos
- Circunferência orientada e circunferência trigonométrica
- Arcos côngruos

Funções trigonométricas

- Valores notáveis do seno e do cosseno
- Redução ao 1º quadrante
- Estudo da função seno
- Estudo da função cosseno
- Senoides

Nesta etapa também foi definido como os alunos seriam avaliados, haja vista que o trabalho ocorreu durante o 1º bimestre, então toda a nota deste esteve voltada para o experimento com a SAI. O Quadro 2 apresenta a delimitação das atividades e a distribuição de pontos por atividade durante o bimestre.

Atividades previstas	Pontuação
Atividades em grupo	4,0 pontos
Participação	2,0 pontos
Teste *on-line* individual	2,0 pontos
Projeto	2,0 pontos
Total (Nota Bimestral)	10,0 pontos

Planejamento para os alunos assistirem as videoaulas

Alguns alunos da turma não possuíam ou não levavam celular para a escola, ou não tinham acesso à internet para assistir aos vídeos e/ou material didático disponibilizado. Assim, as opções foram as seguintes:

1) As videoaulas, além de serem disponibilizadas na sala de aula virtual SAI_2°ANO, foram compartilhadas via cabo *USB*[13] ou pen drive.

2) Foi solicitado aos alunos que compartilhassem entre si os arquivos através, por exemplo, de *bluetooth*[14] ou via *SHAREit*[15].

3) Colocamo-nos à disposição para ir ao laboratório de informática no contraturno, caso algum aluno quisesse utilizar o espaço da escola.

4) Em último caso, o aluno que não tivesse acesso a nenhum dos meios acima, poderia ir à casa de um colega próximo para assistir às videoaulas.

Planejamento das atividades presenciais

Este momento foi fundamental para desenhar o roteiro de atividades a ser utilizado pelos alunos, de modo que cada atividade fosse capaz de recuperar os conteúdos apresentados na videoaula, bem como verificar o conhecimento dos alunos em relação ao conteúdo. As Atividades 1, 2 e 3 foram planejadas em conjunto com atividades complementares, para introduzirem ou aprofundarem os conteúdos.

Com a Atividade 1 pretendemos verificar o grau de familiaridade dos alunos com os assuntos dados, além de possibilitar aos alunos aplicar e fixar seus conhecimentos acerca do Teorema de Pitágoras, das razões trigonométricas no triângulo retângulo e lei dos cossenos, desde a escolha até a resolução de problemas contextualizados.

---

13 É uma sigla em inglês de *Universal Serial Bus* ("Porta Universal", em português). É um tipo de tecnologia que permite a conexão de periféricos sem a necessidade de desligar o computador, além de transmitir e armazenar dados.

14 *Bluetooth* é um dispositivo que funciona sem a necessidade de internet e nem de cabeamento. É um tipo de tecnologia que transfere dados digitais de um dispositivo para outro.

15 É um aplicativo gratuito voltado para transferir qualquer tipo arquivos (fotos, vídeos, músicas, contatos, aplicativos, *GIFs*) entre dispositivos que suportam o protocolo *Wi-Fi*.

Fazendo a transição do triângulo para o ciclo trigonométrico, foi elaborada a Atividade 2, com o objetivo de fixar o conceito de ciclo trigonométrico e arco orientado, o que são os quadrantes do ciclo trigonométrico e quais seus intervalos de existência. Explorar noções de arcos côngruos, o conceito de comprimento de arcos e as unidades para medir.

Na Atividade 3 esperamos que o aluno reconheça o que é uma função periódica, associando-a a aplicações de outras áreas de conhecimento. Além de avaliar se as funções trigonométricas citadas são ou não periódicas, podendo identificar tal período, e utilizar seno e cosseno de arcos notáveis para resolver expressões que necessitem desses valores.

Como forma de integrar a aprendizagem dos dois ambientes utilizados, virtual e presencial, o projeto, com base no trabalho de Silva e Frota (2011), foi desenhado para acontecer em grupos maiores, com seis alunos, de acordo com o descrito a seguir:

- Elaborar questões a partir de situações práticas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo.

i) Razão trigonométrica utilizada
ii) Resolução

- Enxergando e modelando a trigonometria das construções da cidade.

i) Selecionar construções que achem interessantes na cidade e delas extrair a trigonometria presente.

- Trigonometria sem fronteiras

i) Construir um teodolito caseiro e utilizá-lo para medir a altura de um prédio
ii) Fazer um vídeo

- Senoides e fenômenos periódicos

i) Pesquisar fenômenos periódicos e caracterizá-los

Preparação dos alunos

A SAI é um modelo de ensino que exige mudanças na dinâmica da sala, na prática do professor e principalmente na postura do aluno. Por ser algo novo para muitos, foi necessário preparar os atores principais do processo, os alunos. Para isso, dois dias foram reservados e desenvolvidos da seguinte forma:

1º dia: Apresentação da metodologia sala de aula invertida

- Data: 13/ 03/ 2019

2º dia: Apresentação do ambiente virtual *Google Classroom*

- Data: 19/ 03/ 2019

Esta preparação aconteceu durante as aulas de Matemática. Para apresentar a SAI aos alunos, alguns vídeos foram selecionados no *YouTube*. São eles:

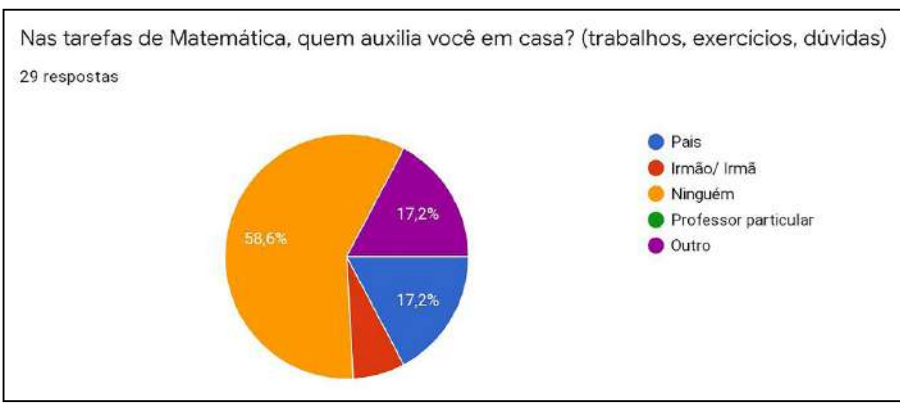
1. Sala de aula invertida;
2. Sala de Aula Invertida, produzido na disciplina de Metodologias Ativas da PUC-PR.

Após assistirem o primeiro vídeo, uma aluna (aluna A) comentou ter visto recentemente uma reportagem no jornal sobre o assunto. A mesma comentou achar interessante e disse ainda: "que bom que a senhora vai fazer esse trabalho com a gente, porque minha mãe vai começar um tratamento de saúde e vou ter que faltar na escola, aí com esse modelo vou ficar sempre atualizada com os conteúdos".

Levando em conta o fato do aluno não estar familiarizado com o modelo, e tentando evitar que este chegue a sala de aula sem ter estudado o conteúdo, um dos possíveis problemas apontados por Valente (2014), foi então apresentado um modelo de relatório para os alunos, o qual deveriam fazer quando assistissem às videoaulas.

No dia 19 de março, a aula esteve voltada para a apresentação do ambiente virtual *Google Classroom*. Por conta dos alunos sem celular, esse momento aconteceu no laboratório de informática. Foi criada a turma virtual SAI_2ºANO, gerando um código, o qual foi utilizado pelos alunos para participarem da turma virtual. Após a inserção dos alunos, apresentamos ferramentas do aplicativo, e postamos no mural da turma um Questionário Inicial. Foram coletadas informações que versam sobre o grau de dificuldade em aprender Matemática, o nível de concentração nas aulas de Matemática, a frequência de estudo na disciplina, o auxílio que eles têm em casa nas tarefas e o uso de videoaulas.

A pesquisa destacou que somente 20,7% (6) dos alunos da turma não têm dificuldade em aprender Matemática, e menos da metade da turma, 41,4% (12), sempre presta atenção nas aulas de Matemática. Além disso, 75,9% (22) dos alunos não estudam a disciplina com frequência. E no momento de realizar as tarefas de Matemática em casa, 58,6% (17) dos alunos que responderam ao questionário, como podemos observar na Figura 2, não possuem auxílio de ninguém, o que acaba de certa forma frustrando eles, fazendo que desistam de completar a tarefa.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Dentre os 29 alunos que responderam ao questionário, 58,6% (17) já utilizavam o recurso de vídeo aulas no ensino de Matemática. No entanto, 51,7% (15) assistem somente quando têm dificuldades.

Etapa de implementação

Esta etapa aconteceu em ciclos, com início no momento *on-line*, reservado aos estudos prévios dos conteúdos por parte dos alunos, e fechando com as correções na sala presencial. Foram desenvolvidos três ciclos da SAI, sendo que o primeiro teve início em 20 de março de 2019, dia de disponibilização das primeiras videoaulas.

No dia 26 de março, tivemos o primeiro encontro presencial de implementação. Os primeiros 15 minutos foram utilizados para um debate, com questionamentos sobre as videoaulas, se todos tinham assistido, se fizeram o relatório, se compreenderam o conteúdo. Alguns alunos manifestavam suas dificuldades através do relatório.

Em seguida, a turma foi dividida em seis grupos com quatro alunos cada, para resolver a Atividade 1. Este momento foi bem produtivo, observamos que cada grupo traçou uma estratégia para resolver as questões. Uma das vantagens notadas de aprender em grupo foi o compartilhamento. Os alunos desenvolveram as atividades, aprendendo a dialogar e dividir tarefas. Além disso, aprenderam a ouvir e se posicionar.

Comunicamos que quem tivesse com seu celular poderia assistir novamente às videoaulas. Quatro grupos discutiam e interagiam entre si, bem mais que os outros. Quando havia impasse quanto à resolução, éramos consultados para ver quem tinha razão. No mais, observamos que os alunos se desenvolveram com relativa autonomia. Desse modo, pudemos dar maior atenção aos alunos dos outros dois grupos, que estavam com mais dificuldades.

Para fechar o ciclo, após todos os grupos entregarem as atividades, nos minutos finais foram feitas as correções das mesmas em conjunto com a turma. Nesse momento, direcionamos perguntas como: "Quais questões acharam mais fáceis?", "Em quais tiveram mais dificuldades?". Com o tempo disponível, fizemos correções das questões, de modo que uma dupla de cada grupo ficou responsável por responder uma questão no quadro, com auxílio da professora, se necessário.

Durante a correção, foi possível notar que alguns alunos apresentavam dúvidas em relação às razões trigonométricas. Selecionamos algumas questões do livro didático deles, para que todos tentassem resolver em casa, como forma de estender o aprendizado. Ressaltamos que, ao surgirem dificuldades, elas poderiam ser compartilhadas na turma virtual.

Em 27 de março, teve início o segundo ciclo da SAI, com transição do triângulo para o ciclo trigonométrico. As videoaulas foram disponibilizadas na turma virtual. Além disso, indicamos aos alunos páginas do livro didático com o mesmo conteúdo, para auxiliá-los no estudo.

O momento presencial do segundo ciclo foi realizado em duas partes, sendo a primeira em 2 de abril, quando passamos aos alunos uma atividade preparatória, a ser realizada em pares para trabalhar conceitos do ciclo trigonométrico. Para resolver esta atividade, permitimos que eles utilizassem todos os recursos disponíveis, como livro, videoaula e a aula no *Geogebra*[16].

Nos minutos finais da aula, fizemos a correção junto com a turma, para tirar as dúvidas que ficaram. Alguns alunos tinham boa noção dos conceitos, outros não, afinal, nem todos aprendem no mesmo ritmo.

No dia seguinte, 3 de abril, foi realizada a segunda parte do momento presencial para realização da Atividade 2. Procedemos da mesma maneira nos minutos iniciais, revisamos o ciclo trigonométrico e apresentamos exemplos. Em seguida, entregamos a eles a atividade para responderem. Pudemos notar que trabalhar questões com o ciclo trigonométrico medido em radianos era um problema para a maioria deles, era algo que eles achavam bem abstrato.

O dia 9 de abril, foi utilizado para realizar uma atividade complementar usando o livro didático.

No dia 10 de abril, foram apresentadas as funções trigonométricas, com auxílio do *GeoGebra*. Nesse dia, teve início ainda o terceiro ciclo da SAI, com disponibilização das videoaulas no mural da turma virtual.

[16] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/s2tqv3dG

Em 16 de abril, tivemos o encontro presencial do terceiro ciclo da SAI, iniciando com o debate sobre o conteúdo visto previamente. Foi apresentado um exemplo contextualizado, cuja resolução foi discutida conjuntamente na turma. Após finalizarmos a discussão do exemplo, a Atividade 3 foi entregue para ser resolvida em grupo. No mesmo dia, disponibilizamos a primeira parte do teste *on-line*. Já a segunda parte foi postada em 1 de maio. Algumas questões foram de nossa autoria e outras adaptadas de livros didáticos.

Para finalizar as atividades desenvolvidas pelos alunos, no dia 7 de maio de 2019, a turma apresentou um projeto envolvendo os conteúdos de Trigonometria estudado por eles durante o bimestre.

Para concluir o experimento, foi aplicado um Questionário Final avaliativo *on-line*, postado no mural da turma virtual, com questões sobre a preparação e dedicação por parte dos alunos, a metodologia, o uso de videoaulas, entre outros.

Avaliação

A etapa final trata da avaliação do experimento, que foi feita a partir de observação das atividades desenvolvidas na sala de aula, por análise dos resultados de dois testes *on-line* e um questionário aplicado aos alunos no ambiente virtual.

Um ponto importante a ser destacado é a maneira como o conteúdo foi apresentado, através de videoaulas. Este foi um aspecto positivo mencionado pelos alunos no questionário. Ao utilizar videoaulas, o professor passa a falar a língua dos alunos e se aproxima do universo deles, pois o vídeo é uma ferramenta com a qual eles gostam de passar tempo, ponto notado por Sams e Bergmann (2017). A videoaula facilitou a aprendizagem, como podemos notar na resposta individual a seguir.

A1: "Bem interessante, na verdade ajuda o aluno a aprender bem melhor pelo fato de poder repetir os vídeos".

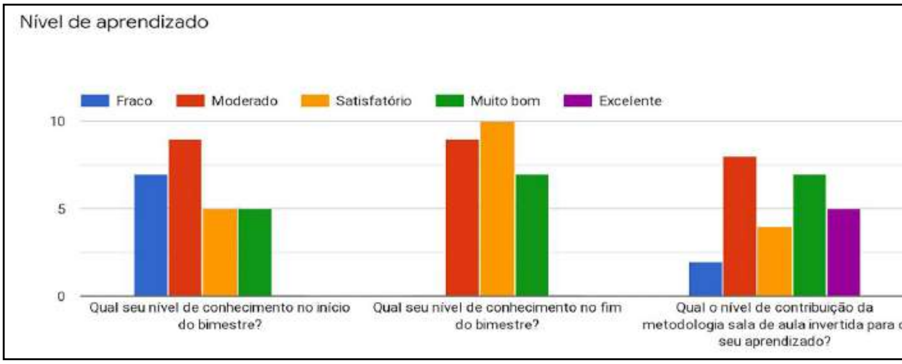
Ao serem indagados sobre o modelo da SAI, os alunos, em sua maioria, se mostraram receptivos ao desafio da proposta, por permitir aproveitar melhor o tempo, além de modificar o ambiente presencial. Nos momentos presenciais em sala de aula foram realizadas atividades em grupo, nas quais os alunos puderam retomar conteúdos, desenvolver um trabalho cooperativo, além de proporcionar uma aprendizagem com maior qualidade, com troca de informações.

Na realização das atividades, pudemos observar que houve uma redução dos casos em que os alunos precisavam nos chamar para auxiliá-los nas questões, prevalecendo, na sala de aula, a cooperação e a colaboração frequente. Com isso, as atividades em grupo foram essenciais para o aprendizado, pois motivaram os alunos a aprender ativamente, a tomar iniciativas e interagir.

Durante a resolução das atividades, foi raro ver um aluno isolado, sem participar das discussões, ou seja, foi promovida a interação aluno-aluno, pregada por Sams e Bergmann (2017). Outra relação valorizada com a proposta foi a interação aluno-professor, também apontada por Sams e Bergmann (2017) como um dos benefícios da SAI, que é um componente essencial do processo de ensino e aprendizagem, no qual professores e alunos, como parceiros, buscam produzir o conhecimento.

Quanto ao projeto desenvolvido para fechar a abordagem do conteúdo, os alunos apresentaram desempenho abaixo do esperado. Porém, entendemos que como o tempo de acompanhamento previsto em sala de aula não ocorreu, isso acabou influenciando no desenvolvimento e resultado final do trabalho.

Ao final do experimento, os dados coletados destacaram que 17 alunos, entre os 26 que opinaram (65,4%), se sentiram satisfeitos com o conhecimento adquirido, e 16 deles (61,5%) apontaram que a metodologia contribuiu para um bom resultado.



Fonte: Elaborado pelos autores

Nem todos os alunos atingiram a média mínima de nota da escola, mas a quantidade de notas abaixo da média mínima foi bem reduzida.

Inverter o procedimento na estrutura educacional proporcionou aos alunos um aumento na participação em sala de aula, pois houve uma maior flexibilidade de tempo para eles, além de reduzir o desencanto com a Matemática e estimular uma atitude ativa.

Considerações finais

Com a Sala de Aula Invertida e a utilização das TDIC, os alunos, em sua maioria, mostraram interesse pelas aulas de Matemática, refletindo no desempenho apresentado por eles, com resultados positivos para aqueles que se dedicaram. Os alunos se sentiram motivados em aprender com o uso de tecnologias digitais. A atenção, o interesse e a aprendizagem aumentaram, ao passo que os problemas de indisciplina e comportamento diminuíram.

Um aspecto relevante da SAI é em relação à exposição de conteúdos pelo professor, que é menos frequente. Há uma atualização do papel dele na sala de aula, onde sua função é de orientar o aluno em suas escolhas. Com o uso das TDIC, o conhecimento foi, em grande medida, construído pelos alunos nas pesquisas e interações aluno-aluno e aluno-professor, sendo que nosso trabalho foi de escolher os conteúdos, onde eles seriam disponibilizados, quando os alunos teriam acesso, e elaborar as atividades. Isso mostra que o papel do professor continua sendo essencial no processo de ensino e aprendizagem.

A utilização do *Google Classroom* criou possibilidades de encontros presenciais e virtuais entre alunos e professor, rompendo as barreiras da sala de aula. Fizemos uso do *Google Classroom*, mas se o professor não tiver prática com este recurso, é possível utilizar as redes sociais, como *WhatsApp* ou ainda o *Facebook,* para disponibilizar o conteúdo aos alunos.

Desenvolver a SAI trabalhando conteúdos relevantes para os alunos através de videoaula visando uma aprendizagem significativa trouxe muitos benefícios. Por ela ser uma mídia que traz um auxílio audiovisual, atrativo, que o material escrito não tem, foi mais fácil apresentar os conteúdos de Trigonometria.

Sendo assim, utilizar a SAI como proposta para o ensino de Matemática no Ensino Básico, apresentou-se como uma boa alternativa educacional, levando-nos a refletir sobre nossas práticas pedagógicas, inspirando-nos a sair da mesmice, e repensar como alcançar uma quantidade maior de alunos para a aprendizagem.

Referências

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. Rio de Janeiro: Intermericana, 1980.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Quantitativa segundo a abordagem fenomenológica.** In: ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. (orgs.). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. 4ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

D'AMBRÓSIO, U. **Ensino de Matemática:** da teoria à prática. 22ª. ed. Campinas, SP: Papirus, 2011.

MORAN, J. **Educação Híbrida:** Um conceito-chave para a educação hoje. In: Ensino Híbrido: personalização e tecnologia da educação. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

MORAN, J. **Novas Tecnologias Digitais**: Reflexões sobre mediação, aprendizagem e desenvolvimento. Curitiba: CRV, 2017.

MORAN, J. **Metodologias Ativas para uma Educação Inovadora**: uma abordagem teórica-prática. 1. ed. Porto Alegre: Penso, 2018.

PISKE, Savannah. Sala de aula invertida. 2016. Vídeo 1 (2m59s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=EXRtQ7DoD0Y&t=65s. Acesso em 30/ 01/2019.

TCHMOLA, Murilo. Sala de Aula Invertida. 2016. Vídeo 2 (2m33s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=mpPAjsVMJuE. Acesso em 30/ 01/2019.

SAMS, J.; BERGMANN, A. **Sala de Aula Invertida:** uma metodologia ativa de aprendizagem. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

SCHMITZ, E. X. D. S. **Sala de Aula Invertida:** uma abordagem para combinar metodologias ativas e engajar alunos no processo de ensino-aprendizagem, 2016. Disponivel em: https://ntetube.nte.ufsm.br/v/1469799357 . Acesso em: 6 dezembro 2018.

SILVA, M. F. D.; FROTA, M. C. R**. Uma sequência didática para introdução da trigonometria no ensino médio.** Belo Horizonte, 2011. 85. Acesso em: janeiro 2019.

VALENTE, J. A. A Comunicação e a Educação baseada no uso das das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação. **Revista UNIFESO**, v. 1, p. 141-166, 2014.

VALENTE, J. A. **A sala de aula invertida e a possibilidade de ensino personalizado**. In: Metodologias Ativas para uma educação inovadora. Porto Alegre: Penso, 2018.

VALENTE, J. A. **Inovação nos processos de ensino e de aprendizagem: o papel das tecnologias digitais.** In: Tecnologia e Educação: passado, presente e o que está por vir. Campinas: NIED/UNICAMP, 2018. Disponivel em: https://www.nied.unicamp.br/biblioteca/livros/.

Atividades de construções geométricas com origami

Wilnaianny Lidel Pedroso Cavalcante[1]
Lenilson Moreira Araújo[2]

Introdução

As propostas de atividades desta pesquisa surgiram como uma tentativa de produzir um material que pudesse abordar conteúdos de geometria de uma forma prática e divertida, servindo de apoio para reforçar e aplicar conteúdos geométricos na Educação Básica. Assim, o objetivo desta pesquisa foi propor atividades para o ensino de matemática, mais precisamente para o ensino de geometria, através de construções geométricas com origami.

A preferência por abordar conteúdos de geometria nas propostas de atividades sugeridas é justificada devido à influência positiva que o estudo dessa parte da matemática tem na forma como lidamos com problemas. "A geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento" (BRASIL, 2018, p. 271). Quanto ao uso do origami, como instrumento de construção geométrica nas atividades, é devido ele ser uma ferramenta interessante e lúdica, que envolve muitos conteúdos matemáticos, com destaque nos geométricos.

[1] Egressa Profmat. E-mail: lidelcavalcante@gmail.com
[2] Ufopa. E-mail: lenilson.moreira1@gmail.com

Neste estudo foi utilizada uma pesquisa do tipo bibliográfica, a qual permitiu produzir um conjunto de quatro atividades, das quais apenas duas serão apresentadas neste artigo. Essas atividades, baseadas em construções geométricas com origami, apresentam-se como alternativas relevantes para a prática docente, uma vez que elas fazem uso da manipulação de papel, o qual é muito acessível devido ao seu baixíssimo custo. Vale enfatizar ainda que há a possibilidade de obter o material de construção, um quadrado ou um retângulo, através de uma folha de papel reciclado.

Aprendendo Um Pouco Sobre a Arte e Geometria Do Origami

A etimologia da palavra origami é japonesa e significa dobrar papel (ori) dobrar + (kami) papel. Segundo Ueno (2003), antes da criação dessa palavra, em 1880, o origami era conhecido como *origata*, que significa forma dobrada. Segundo a mesma autora, em outras línguas, podemos encontrar ainda outros nomes referentes ao origami, tais como: dobradura, na língua portuguesa; *papiroflexia*, em castelhano; *paperfolding*, em inglês; *faltenpapier*, em alemão; e *pliage*, em francês.

A prática do origami é um modo de interpretar as formas e objetos que encontramos a nossa volta, reproduzindo - os através de dobras realizadas no papel. Essa atividade manual permite exercitar a motricidade, trabalha a noção espacial, desenvolve capacidade de criar e estimula o raciocínio. Além desses benefícios que podem ser obtidos pela manipulação do papel, outros relacionados às atividades de terapia e de relaxamento são observados com o uso do origami (KANEGAE, 2019).

Na construção de origami, os objetos costumam ser moldados na forma mais tradicional, que é através de uma folha com forma quadrada, sem fazer cortes ou colagens. Para obter as dobras que permitem dar forma ao objeto final, busca-se sempre encontrar os pontos de referência da construção, que podem estar no interior do quadrado ou nas bordas da folha. Durante esse processo, pontos antigos de referência dão origem a novos pontos de referência, permitindo assim a construção das dobras necessárias, as quais são obtidas com precisão por meio do alinhamento de uma combinação de características do papel, tais como: pontos, bordas, linhas de vinco ou interseções destes (LANG, 2015)

Na geometria do origami, podemos definir pontos pela interseção de duas linhas. As linhas são definidas pela borda do quadrado ou por um vinco construído no papel. O vinco ou marca no papel é resultado do ato de dobrar a folha e achatar. A combinação de pontos e linhas está em todos os passos de dobragem do origami. Claro, que alguns modelos mais complexos apresentam mais passos de construção do que outros mais simples, mas todos fazem uso de pelo menos alguma das operações básicas nos métodos de suas dobragens, por exemplo: fazer uma dobra que coloca um ponto sobre outro ponto. As operações básicas da geometria do origami definem todas as dobras que podem ser construídas através do alinhamento de pontos e linhas retas.

A preocupação em enumerar as possíveis construções de combinação de dobras e o interesse no estudo dos tipos de distâncias possíveis de construir através de diferentes combinações de pontos e linhas foram observados a partir da década de 1970. O grande destaque desse estudo foi o matemático e artista japonês-italiano Humiaki Huzita, ao descrever seis operações básicas, para definir uma única dobra, que ficaram conhecidas como axiomas de Huzita. Nessas seis operações cada dobra resulta do alinhamento de uma combinação de linhas e pontos dados (LANG, 2015).

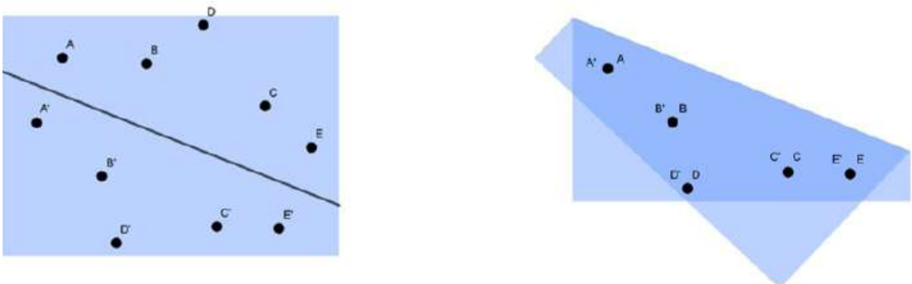
Um sétimo axioma foi acrescentado por Koshiro Hatori em 2002. Este axioma apresenta uma única dobra que não é descrita pelos axiomas de Huzita, mas que pode ser obtida, também, através da combinação de dobras dos axiomas 2 e 4 de Huzita. A inclusão dele no conjunto dos seis axiomas é justificada por não ser necessário utilizar nenhum outro axioma de Huzita para definir a dobra do seu enunciado. Os sete axiomas ficaram conhecidos como axiomas de Huzita Hatori ou Huzita Justin, já que, segundo Lang (2015), esse conjunto de axiomas teria aparecido num artigo de Jacques Justin, publicado em 1989. Nesse artigo, foram enumeradas 7 combinações possíveis de alinhamentos, seis dessas combinações apresentaram as mesmas dobras encontradas por Huzita e a sétima foi a que Hatori também encontrou.

Por um tempo, não se sabia se haveria a possibilidade de acrescentar outro axioma à lista e essa incerteza a deixou duvidosa. A completude da lista dos sete axiomas foi provada, em 2003, pelo físico americano Robert J. Lang, tal demonstração e o conjunto dos sete axiomas podem ser encontrados em *Origami and geometric constructions* [3]. A seguir apresentamos os enunciados dos sete axiomas da geometria do origami. Os seis primeiros axiomas são os axiomas de Huzita e o sétimo axioma é o proposto por Hatori.

1) Dados dois pontos P_1 e P_2 podemos fazer uma dobra que passa por esses pontos.
2) Dado dois pontos P_1 e P_2 podemos fazer uma dobra que coloca P_1 sobre P_2.
3) Dados duas linhas de dobra l_1 e l_2 podemos obter a dobra que põe l_1 sobre l_2.
4) Dados um ponto P e uma linha l, podemos fazer uma dobra que passa por P e que é perpendicular a l.
5) Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma linha l_1 podemos encontrar uma linha que coloca P_1 sobre e que passa através do ponto P_2.
6) Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas linhas l_1 e l_2 podemos encontrar uma única linha que coloca P_1 sobre l_1 e P_2 sobre l_2
7) Dados um ponto P_1 e duas linhas l_1 e l_2 podemos fazer uma dobra, perpendicular a , que coloca P_1 sobre l_1.

Nestes axiomas, ao fazermos incidir uma combinação de pontos e retas numa folha de papel, estamos realizando o movimento de reflexão. Segundo Carneiro e Spira (2015, p.16): “Seja r uma reta. Chama-se uma reflexão com respeito à reta r a transformação do plano que leva um ponto $\boldsymbol{P}$ ao ponto $\boldsymbol{Q}$, simétrico de $\boldsymbol{P}$ em relação à reta, isto é, tal que a distância de $\boldsymbol{P}$ à reta r é igual à distância de $\boldsymbol{Q}$ a r”.

Figura 1–Pares de pontos simétricos em relação à r e sobrepostos com a dobra



Fonte: Autora (2020)

Veja que as imagens refletidas de pontos distintos acima da reta são únicas e também distintas em relação à reta r, na qual pode ser feito um vinco que faz coincidir os pontos que se correspondem por reflexão através de r. Podemos concluir que os pares de pontos sobrepostos na dobragem de papel são imagem um do outro em relação à linha de dobra, que atua como eixo de simetria, e todos os pontos pertencentes a ela são levados sobre si mesmos, ou seja, são imagens de si mesmos.

No primeiro axioma, dados dois pontos distintos P_1 e P_2, podemos encontrar uma linha de dobra passando por eles. Essa linha obtida faz os pontos pertencentes a ela refletirem sobre si mesmos. Veja que podemos associar o axioma 1 do origami ao postulado da geometria euclidiana que diz que por dois pontos distintos passa uma única reta, dessa forma, apenas uma dobra passando por dois pontos pode ser construída, fazendo os pontos incidirem sobre si mesmos.

No axioma 2, dados dois pontos P_1 e P_2 podemos fazer uma dobra que coloca P_1 sobre P_2. Note que a dobra que coloca sobre P_2 coincide com o eixo de reflexão, que faz corresponder P_1 ao ponto P_2, sendo P_2 o simétrico de P_1 em relação à dobra. Conforme Wagner (2007, p. 73): “Dado uma reta r, dizemos que o ponto A’ é simétrico do ponto A em relação à r quando r é mediatriz de $A'A$." Dessa forma, construir a dobra do axioma 2 é o mesmo que construir a mediatriz do segmento P_1P_2. Ainda segundo Wagner (2007), a mediatriz de um segmento é a reta que intersecta perpendicularmente o segmento no ponto médio do mesmo.

No axioma 3, dados duas linhas de dobra l_1 e l_2 podemos obter a dobra que põe l_1 sobre l_2. As linhas podem ser: paralelas, quando as retas não possuem nenhum ponto em comum, ou concorrentes, quando as retas possuem apenas um ponto em comum. No primeiro caso, a dobra obtida é paralela às linhas l_1 e l_2, distando dessas linhas a metade da distância entre elas. Já no segundo caso, a interseção das linhas concorrentes determinam dois pares de semirretas opostas e dois pares de ângulos opostos pelo vértice. A dobra que faz coincidir duas semirretas não opostas bissecta o ângulo formado por elas, de modo que construir tal dobra é equivalente a encontrar à bissetriz do ângulo: "uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes" (DULCE; POMPEO, 1993, p.25).

No axioma 4, dados um ponto *P* e uma linha l, podemos fazer uma única dobra, por *P*, que seja perpendicular a l. Note que a dobra procurada é equivalente à reta que concorre perpendicularmente com a linha l e que passa por um ponto *P*, o qual pode estar fora de l ou sobre l. Em ambos os casos, a dobra obtida passa pelo ponto *P* e faz os pontos Q e Q' da linha l ficarem sobrepostos e a dobra, como já foi observada, que leva o ponto Q sobre Q', atua como mediatriz de um segmento QQ' contido em l. Portanto, ao construir por um ponto P uma dobra que faz l incidir sobre si mesma, obtém-se a dobra que passa por um ponto P e que é perpendicular a l.

No axioma 5, note que, se existir alguma dobra que coloca P_1 sobre l_1 e que passa ao mesmo tempo através de P_2, então podemos dizer que o ponto P_1', simétrico de P_1 refletido pela dobra, coincide com a interseção da circunferência de centro P_2 e raio P_1P_2 com a linha l_1.

Assim, definir esta dobra na folha de papel é o mesmo que construir a mediatriz de um segmento com extremidades sobre uma circunferência, sendo que uma dessas extremidades é ponto de interseção da circunferência com uma reta. Neste axioma, as possibilidades de dobras obtidas podem ser: nenhuma dobra, uma única dobra ou exatamente duas dobras. Tais possibilidades resultam, respectivamente, dos casos em que a circunferência é externa à reta, tangente à reta e secante à reta.

No axioma 6, a dobra que leva , com um único movimento, P_1 sobre $P_1' \in l_1$ e P_2 sobre $P_2' \in l_2$ é a mediatriz simultânea dos segmentos P_1P_1' e P_2P_2'. Tal dobra é equivalente a tangente às parábolas de foco P_1 e diretriz l_1 e de foco P_2 e diretriz l_2. Essa dobra permite resolver problemas de equações cúbicas, que não podem ser resolvidos apenas por régua e compasso, como os problemas apresentados na seção 4 deste artigo.

Segundo Monteiro (2008) a geometria do origami permite ainda a resolução de equações de grau superior a três, através da combinação de dobragens simultâneas incluindo o sétimo axioma de Hatori, sendo que este não pode resolver equações do primeiro, segundo e terceiro grau, que podem ser solucionados pelos axiomas de Huzita.

Origami e Alguns Teoremas

Teorema de Pitágoras

O objetivo da construção que será realizada a seguir é apresentar por origami a explicação clássica do teorema de Pitágoras. Essa é a justificativa mais simples e imediata desse teorema, que pode ser ainda mais interessante para abordar, pois, para ser verificada por construção no papel, basta fazer dobradura, sem necessidade de cortar ou fazer colagens.

Descrição dos passos:

a) Primeiramente, tomamos uma folha de papel quadrada e denotamos seus vértices por A, B, C e D;

b) Marcamos sobre o lado AD um ponto E, tais que $\overline{AE} = a$ e $\overline{ED} = b$ e, em seguida, pelo axioma 3 do origami, colocamos o segmento AD sobre o segmento AB, obtendo um vinco passando por A e C, o qual é diagonal do quadrado;

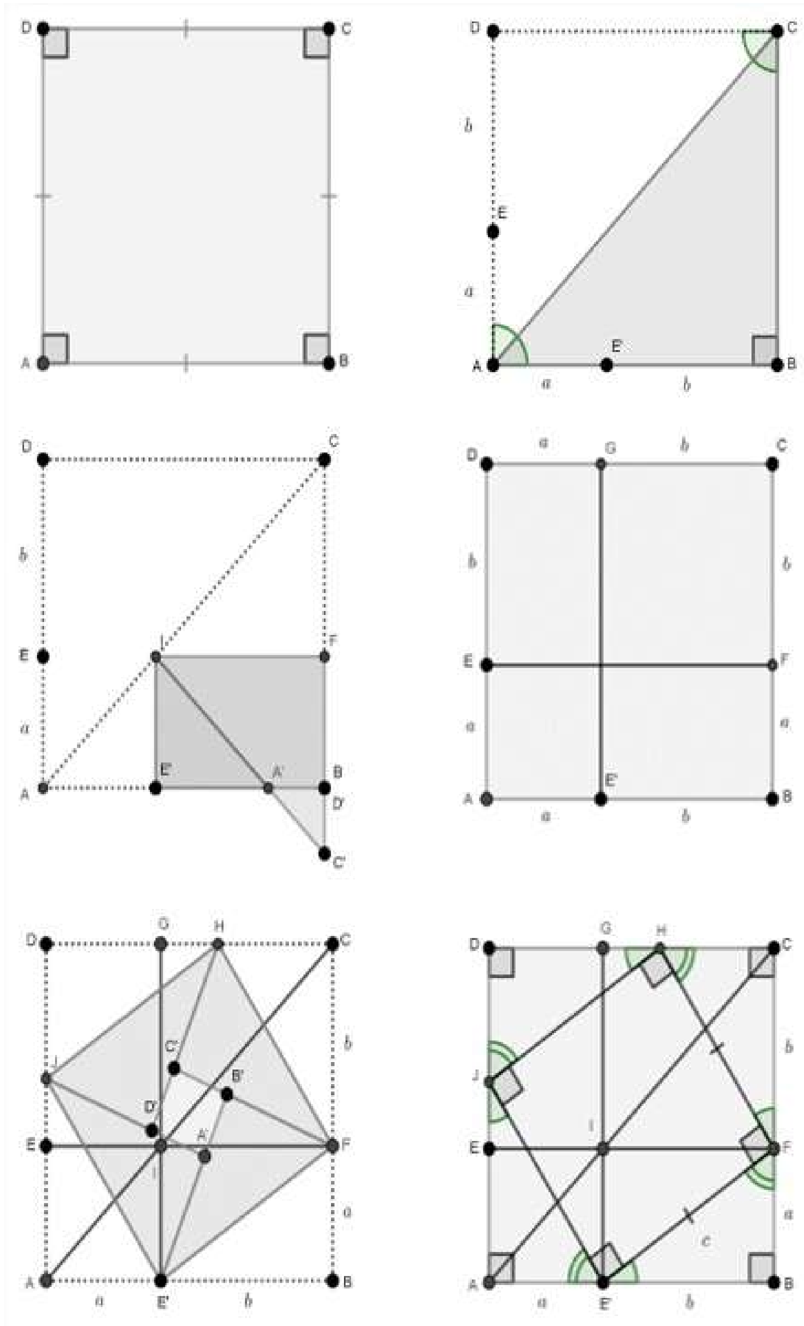
c) Mantendo a folha dobrada pelo vinco AC, utilizamos o axioma 4 para construir, por E, que está agora sobre o seu simétrico $E’$ò AB, uma reta perpendicular ao lado AB, determinando um ponto I na diagonal do quadrado. Com a folha ainda dobrada construímos, por I, a perpendicular ao lado BC;

d) Devemos agora desdobrar a folha para obter dois quadrados de áreas a^2 e b^2 e dois retângulos de área $a.b$;

e) Agora, o canto inferior B da folha precisa ser levado sobre seu simétrico $B’$, que é a imagem de B refletida pelo vinco $E’F$. Em seguida, utilizando o axioma 3, devemos bissectar o ângulo $\angle B'FC$ ao colocar $\overrightarrow{FC}$ sobre $\overrightarrow{FB’}$, obtendo um vinco FH. Com C sobre o seu simétrico $C’$, refletido pelo vinco FH, precisamos bissectar o ângulo $\angle DHC'$ e obtermos um vinco JH. Para finalizar o passo 5, colocamos D sobre seu simétrico $D’$ pelo vinco JH e em seguida levamos $\overrightarrow{JA}$ sobre $\overrightarrow{JD'}$, construindo um vinco $JE’$. Por esses passos, temos a construção de um quadrado de lado c inscrito no quadrado de lado $a+b$.

f) Ao desdobrar a folha, temos que verificar no passo anterior se o quadrilátero inscrito no quadrado $ABCD$, de fato, representa um quadrado de lado c. Devemos verificar ainda se o somatório das áreas dos triângulos retângulos obtidos nos cantos da folha corresponde à soma das áreas dos retângulos de áreas $a.b$ e concluir que, em um triângulo retângulo de hipotenusa $\boldsymbol{c}$ e de catetos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$**,** conforme podemos visualizar na figura abaixo.

Figura 2 - Verificação clássica do Teorema de Pitágoras



Fonte: Autora (2020)

Do passo 5, temos que o ângulo raso $B\hat{F}C$ é igual a soma dos ângulos $B\hat{F}B'$ e $B'\hat{F}C$. Como cada ângulo foi bissectado, respectivamente, pelas dobras $E'F$ e FH, então $B\hat{F}C = 2 \times B\hat{F}E' + 2 \times C\hat{F}H$. Daí segue que $B\hat{F}E' + C\hat{F}H = 90°$ e, consequentemente, temos que $E'\hat{F}H = 90°$. Analogamente, podemos verificar que os ângulos $F\hat{H}J$, $H\hat{J}E'$ e $J\widehat{E'}F$ correspondem também a 90°. Agora, precisamos verificar se os lados do quadrilátero têm a mesma medida.

Notemos no triângulo retângulo $\Delta E'BF$ que os ângulos $B\widehat{E'}F$ e $B\hat{F}E'$ são complementares e, como os ângulos $B\hat{F}E'$ e $C\hat{F}H$ também têm essa propriedade, segue que $B\hat{E}'F \equiv C\hat{F}H$. De modo que os triângulos retângulos, $\Delta E'BF$ e ΔFCH, têm em comum outro ângulo com mesma medida: o ângulo $B\hat{E}'F = C\hat{F}H$. Podemos verificar ainda nesses triângulos que $B\hat{E}'F = C\hat{F}H$, $\overline{E'B} = \overline{FC}$ e $E'\hat{B}F = F\hat{C}H$; logo, são congruentes pelo caso ângulo, lado, ângulo (ALA). Dessa congruência segue que $\overline{E'F} = \overline{FH} = c$, o que garante que os outros lados do quadrilátero medem também c, já que os lados opostos do quadrilátero $E'FHJ$ são paralelos. Da congruência dos ângulos internos e dos lados do quadrilátero $E'FHJ$, temos que ele é um quadrado de lado c.

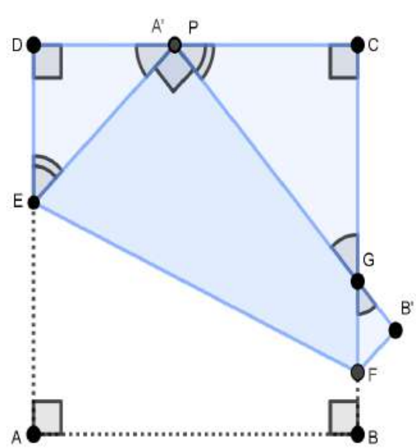
Para chegarmos à demonstração clássica do Teorema de Pitágoras, precisamos verificar se os triângulos retângulos nos vértices do quadrado $ABCD$ são congruentes. Já, verificamos que $B\hat{E}'F \equiv C\hat{F}H$, pois tais ângulos são complementos de $B\hat{F}E'$. Utilizando o mesmo caminho que verificou a congruência desses ângulos, podemos concluir que $C\hat{F}H \equiv J\hat{H}D$ e que $J\hat{H}D \equiv E'\hat{J}A$. Isto mostra que os ângulos $B\hat{E}'F$, $C\hat{F}H$, $J\hat{H}D$ e $E'\hat{J}A$ têm a mesma medida. Como cada triângulo retângulo obtido nos cantos da folha possuem hipotenusa c, ângulo adjacente igual à medida do ângulo $B\hat{E}'F$ e ângulo oposto ao lado c de medida 90º, temos que esses triângulos são congruentes pelo caso lado, ângulo, ângulo oposto ao lado (LAA_0) e, portanto, ambos com área $\frac{\boldsymbol{b.a}}{2}$.

Pela demonstração clássica do Teorema de Pitágoras, podemos verificar geometricamente, conforme a representação do sexto passo da figura 2, que um quadrado de área $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$ menos quatro vezes $\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{2}$, corresponde a um quadrado de área $\boldsymbol{c}^2$**.** De outra forma, podemos subtrair desse mesmo quadrado dois retângulos com mesma área $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ e obtermos dois quadrados de áreas $\boldsymbol{a}^2$ e $\boldsymbol{b}^2$. Logo, a área do quadrado de lado $\boldsymbol{c}$ é igual à soma das áreas dos quadrados de lados $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, isto é, $\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$, sendo $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, respectivamente, a hipotenusa e os catetos de triângulo retângulo. Tal demonstração justifica o teorema de Pitágoras, o qual diz que em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma do quadrado dos seus catetos.

Teorema de Haga

Dado um papel quadrado de vértices A, B, C e D. Seja P um ponto sobre o lado DC da folha. Uma dobra EF, com E sobre AD e F sobre BC, que coloca o canto A sobre P determina três triângulos semelhantes ΔEDP, ΔGCP e $\Delta FB'G$. Tal enunciado é conhecido como teorema de Haga e pode ser visualizado conforme a representação abaixo:

Figura 3- Teorema de Haga



Fonte: Autora (2020)

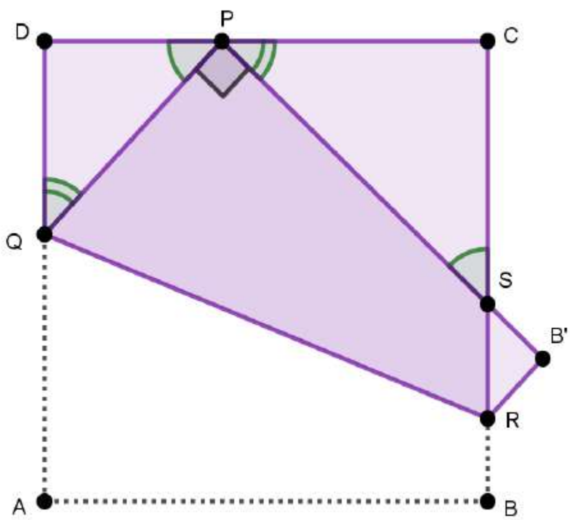
Podemos verificar a semelhança desses triângulos pelo caso ângulo, ângulo (AA). Notemos, primeiramente, que ambos os triângulos ΔEDP, ΔGCP e $\Delta FB'G$ possuem ângulo reto e que, do ângulo reto $E\hat{P}G$, temos $D\hat{P}E \equiv P\hat{G}C$, pois tais ângulos são complementos de $G\hat{P}C$. Podemos verificar ainda a congruência do ângulo $P\hat{G}C$ com o ângulo $F\hat{G}B'$, por serem ângulos opostos pelo vértice G. Como os triângulos ΔEDP, ΔGCP e $\Delta FB'G$ são retângulos e $D\hat{P}E = P\hat{G}C = F\hat{G}B'$, então são semelhantes pelo caso (AA).

Tal teorema é muito útil nas dobraduras, pois da semelhança dos triângulos construídos podemos fracionar os lados do quadrado em $2k$, $2k+1$ ou ainda em 2^k partes congruentes, sendo k um inteiro maior ou igual a 1. Saber como construir essas divisões pode ser de grande ajuda em diagramas de origami, nos quais precisamos, às vezes, dividir primeiro o papel em um determinado número de retângulos congruentes.

Construção de $\frac{1}{\boldsymbol{n}}$ a partir do lado do quadrado utilizando o Teorema de Haga

Dados $n,i \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $1 \leq i < n$, vamos verificar em um quadrado $ABCD$ de lado l uma fórmula geral que nos dá a medida do segmento CS tomando um ponto $P \in DC$ tal que $\overline{DP} = \frac{il}{n}$. Utilizaremos para isso a representação a seguir:

Figura 4 - Triângulos semelhantes



Fonte: Autora (2020)

Pelo teorema de Haga, temos que os triângulos retângulos ΔQDP e ΔPCS são semelhantes. Daí decorre que

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{CS}} \tag{3.1}$$

Temos $\overline{DP} = \frac{il}{n}$, de modo que $\overline{PC} = l - \frac{il}{n} = \frac{(n-i)l}{n}$ e $\overline{DQ}$ segue do teorema de Pitágoras aplicado no triângulo ΔQDP, isto é, $\overline{PQ}^2 = \overline{DQ}^2 + \overline{DP}^2$. Como $\overline{PQ} = l - \overline{DQ}$, então

$$\left(l - \overline{DQ}\right)^2 = \overline{DQ}^2 + \overline{DP}^2 \tag{3.2}$$

$$\Leftrightarrow l^2 - 2.l.\overline{DQ} + \overline{DQ}^2 = \overline{DQ}^2 + \frac{i^2 l^2}{n^2} \tag{3.3}$$

$$\Leftrightarrow 2l\overline{DQ} = l^2 - \frac{i^2 l^2}{n^2} \tag{3.4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DQ} = \frac{n^2 l^2 - i^2 l^2}{2ln^2} \tag{3.5}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DQ} = \frac{l^2\left(n^2 - i^2\right)}{2ln^2} = \frac{l\left(n^2 - i^2\right)}{2n^2} \tag{3.6}$$

Substituindo as medidas na proporção (3.1), temos

$$\frac{\frac{l\left(n^2 - i^2\right)}{2n^2}}{\frac{(n-i)l}{n}} = \frac{\frac{il}{n}}{\overline{CS}} \tag{3.7}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CS} = \frac{il^2(n-i)}{n^2} \cdot \frac{2n^2}{l\left(n^2 - i^2\right)} \tag{3.8}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CS} = \frac{2il(n-i)}{(n-i)(n+i)} = \frac{2il}{n+i} \tag{3.9}$$

Supondo que $i = 1$, temos que:

$$\overline{CS} = \frac{2l}{n+1} \tag{3.10}$$

De modo que da bissecção do segmento CS, temos um segmento de medida igual a $\frac{l}{n+1}$. Podemos concluir desse resultado que tomando $\frac{1}{n}$ de um lado do quadrado podemos obter $\frac{1}{n+1}$ do lado adjacente.

Origami e Problemas de Construções Geométricas

Trissecção do ângulo

Para a trissecção do ângulo por dobradura, serão dados abaixo os passos da trissecção de um ângulo agudo como exemplo. Tal construção, conforme dizem Cavacami e Furuya (2009) é creditada a Hisashi Abe. Compreendendo a estratégia da construção apresentada e fazendo algumas modificações, fica fácil obter a trissecção do ângulo reto, assim como a trissecção de um ângulo obtuso. Na trissecção do ângulo obtuso, recomenda-se bissectar o ângulo e fazer, em seguida, a trissecção dos ângulos determinados pela bissecção do ângulo inicial, de acordo com o modelo da trissecção do ângulo agudo. Note que, assim, ficam construídos seis ângulos congruentes e a porção que representa 2/6 do ângulo obtuso é equivalente a 1/3 da trissecção desse ângulo.

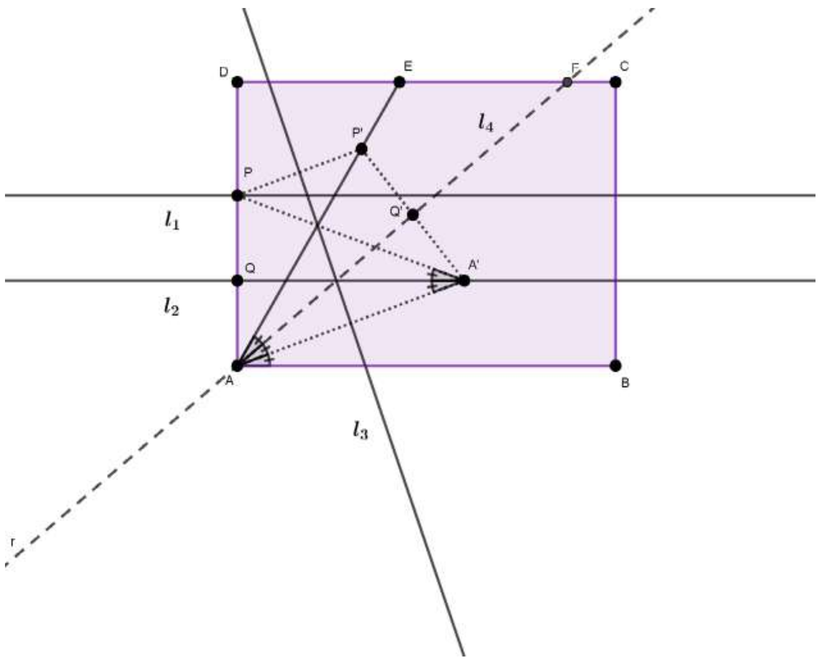
Descrição dos passos da trissecção de um ângulo agudo:

a) Primeiramente, pegue uma folha de papel no formato de um quadrilátero retangular ou faça a construção dessa figura, denotando em seguida os seus vértices por A, B, C e D;
b) Construa um vinco, no interior do ângulo reto $\angle BAD$, partindo de A e obtenha, assim, um ângulo agudo $\angle BAE$, com $E \in CD$;
c) Por um ponto $P \in AD$, construa uma linha l_1 paralela à $\overleftrightarrow{AB}$. Em seguida, obtenha l_2, outra reta paralela à $\overleftrightarrow{AB}$, mas equidistando de l_1 e $\overleftrightarrow{AB}$;
d) Faça uma dobradura levando ao mesmo tempo P sobre $P' \in AE$ e A sobre $A' \in l_2$, obtendo um vinco l_3, dobragem possível pelo axioma 6 de Huzita;
e) Mantendo a folha dobrada por l_3, com P sobre AE e A sobre l_2, construa um vinco ao levar P sobre A;
f) Coloque a folha na sua forma inicial, construa o vinco AA' e prolongue o vinco construído no passo anterior. O vinco prolongado

passa por A e determina com o lado AB da folha, um ângulo que corresponde a 2/3 do ângulo agudo $\angle BAE$.

Observação: No passo três, faça a construção das linhas pedidas de modo que a construção final possa ficar dentro do espaço da folha. Dessa forma, fica mais fácil visualizar e entender a construção.

Figura 5 – Trissecção do ângulo agudo por origami



Fonte: Autora (2020)

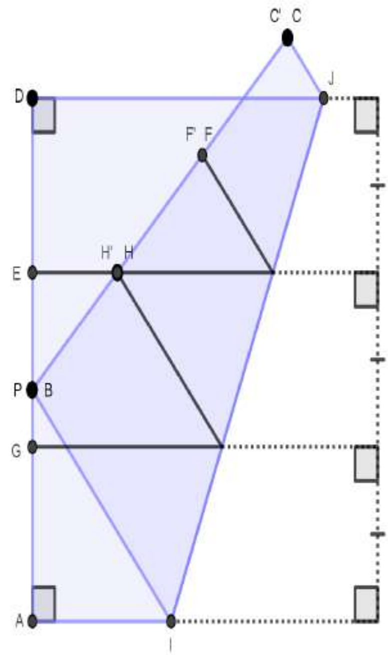
Justificativa da construção:

Como A' pertence à reta l_2, que é mediatriz do segmento PA, temos então pelo caso lado, ângulo, lado (LAL), que $\Delta PQA' \equiv \Delta AQA'$ e, consequentemente, $\angle PA'Q = \angle QA'A$ e $\overline{PA'} = \overline{AA'}$. Daí, podemos concluir que $\Delta PA'A$ é isósceles e que l_2 além de ser mediatriz do segmento AP é ao mesmo tempo bissetriz do ângulo $\angle PA'A$, o qual é igual a $2.B\hat{A}A'$, pois, de l_2, reta paralela à $\overleftrightarrow{AB}$, temos ainda que os ângulos alternos internos, $\angle BAA'$ e $\angle QA'A$, determinados por uma reta que passa por A e A', são congruentes. Agora, de l_3, temos tanto por construção quanto por reflexão, que $\overline{PA} = \overline{P'A'}$ e que PP' é paralela à AA', uma vez que o eixo de simetria l_3 é a perpendicular bissectora dos segmentos PP' e AA'; logo, o quadrilátero $AA'P'P$ é um trapézio isósceles, no qual pode ser verificado que $\angle PAA'$ é igual a $\angle P'A'A$. Novamente, pelo caso (LAL) de congruência de triângulos, $\Delta PA'A \equiv \Delta P'AA'$, já que $\overline{PA} = \overline{P'A'}$, $\angle PAA' = \angle P'A'A$ e o segmento AA' é lado comum. De $\Delta PA'A \equiv \Delta P'AA'$, temos que $\Delta P'AA'$ também é isósceles e que $\angle P'AA' = \angle PA'A = 2.BAA'$. Daí, no triângulo isósceles $\Delta P'AA'$, o vinco l_4, mediatriz relativa à base $P'A'$, passa por A e bissecta o ângulo $2.BAA'$. Dessa forma, obtemos a trissecção do ângulo e, de fato, $\angle BAQ' = \frac{2}{3}\angle BAE.$

Duplicação do cubo

No problema da duplicação do cubo de lado l, precisamos construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro de l^3. Daí a aresta procurada precisa ter medida igual a $l\sqrt[3]{2}$. A solução desse problema por origami, a qual será apresentada nesta subseção, é consequência da construção proposta por Peter Messer. Na construção de Messer, o quadrado $ABCD$ deve ser primeiramente dobrado em três retângulos congruentes e, em seguida, usando o axioma 6 do origami, deve ser dobrado de acordo com a representação da figura 6. Assim, ficam determinados, por um ponto P sobre o lado AD, dois segmentos AP e PD tal que a razão $\frac{\overline{PD}}{\overline{AP}} = \sqrt[3]{2}$.

Figura 6 – Divisão do lado AD do quadrado ABCD na razão $\boldsymbol{\overline{PD}} / \boldsymbol{\overline{AP}} = \sqrt[3]{2}$, com $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{AD}$.



Fonte: Autora (2020)

Justificativa da construção:

Na construção acima, temos que o ângulo $\angle H'PI$ é reto, já que é o ângulo refletido de $\angle ABC = 90°$ pela dobra IJ, daí da soma $\angle EPH'$ + $\angle H'PI$ + $\angle API$ = 180º, podemos concluir que $\angle EPH'$ + $\angle API = 90°$, mostrando que os ângulos $\angle EPH'$ e $\angle API$ são complementares. Do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é imediato percebermos que os ângulos, $\angle API$ e $\angle AIP$, são também complementares, isto é, que $\angle API + \angle AIP = 90°$. Daí segue que $\angle EPH' = \angle AIP$. O que mostra a semelhança dos triângulos retângulos $\Delta PEH'$ e ΔPAI, pelo caso (A, A). Logo, vale a proporção a seguir:

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{PH'}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{PI}} \tag{4.1}$$

Precisamos desenvolver essa proporção, mas primeiramente devemos expressar as medidas $\overline{PE}$, $\overline{PH'}$, $\overline{AI}$ e $\overline{PI}$ em função das medidas $\overline{AP}$ e $\overline{PD}$, as quais serão denotadas como $\overline{AP} = p$ e $\overline{PD} = q$, respectivamente.

Notemos que $\overline{PE} = \overline{PD} - \frac{\left(\overline{PD} + \overline{AP}\right)}{3}$ e que $\overline{PH'} = \frac{\overline{AP} + \overline{PD}}{3}$, logo:

$$\overline{PE} = q - \frac{(q+p)}{3} = \frac{2q-p}{3} \tag{4.2}$$

e

$$\overline{PH'} = \frac{\overline{AP} + \overline{PD}}{3} = \frac{p+q}{3} \tag{4.3}$$

Podemos verificar também que $\overline{PI} = \overline{AP} + \overline{PD} - \overline{AI}$. Pondo agora $\overline{AI} = r$ e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ΔPAI, temos que:

$$\overline{PI}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AI}^2 \tag{4.4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{(AP + PD - AI)}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AI}^2 \tag{4.5}$$

$$\Leftrightarrow (p+q-r)^2 = p^2 + r^2 \tag{4.6}$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 2pq + q^2 - 2(p+q)r + r^2 = p^2 + r^2 \tag{4.7}$$

$$\Leftrightarrow 2pq + q^2 - 2(p+q)r = 0 \tag{4.8}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AI} = r = \frac{q^2 + 2pq}{2(p+q)} \tag{4.9}$$

Daí, substituindo r na equação $\overline{PI} = p + q - r$, segue

$$\overline{PI} = p + q - \frac{q^2 + 2pq}{2(p+q)} = \frac{q^2 + 2pq + 2p^2}{2(p+q)} \tag{4.10}$$

Substituindo as medidas na proporção $\frac{\overline{PE}}{\overline{PH'}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{PI}}$, decorre que:

$$\frac{\frac{2.q - p}{3}}{\frac{p+q}{3}} = \frac{\frac{q^2 + 2pq}{2(p+q)}}{\frac{q^2 + 2pq + 2p^2}{2(p+q)}} \tag{4.11}$$

$$\frac{2q - p}{p+q} = \frac{q^2 + 2pq}{q^2 + 2pq + 2p^2} \tag{4.12}$$

$$2q^3 + 4pq^2 + 4p^2q - pq^2 - 2p^2q - 2p^3 = pq^2 + 2p^2q + q^3 + 2pq^2 \tag{4.13}$$

$$2q^3 + 3pq^2 + 2p^2q - 2p^3 = q^3 + 3pq^2 + 2p^2q \tag{4.14}$$

$$q^3 = 2p^3 \tag{4.15}$$

$$q = p\sqrt[3]{2} \tag{4.16}$$

De fato,

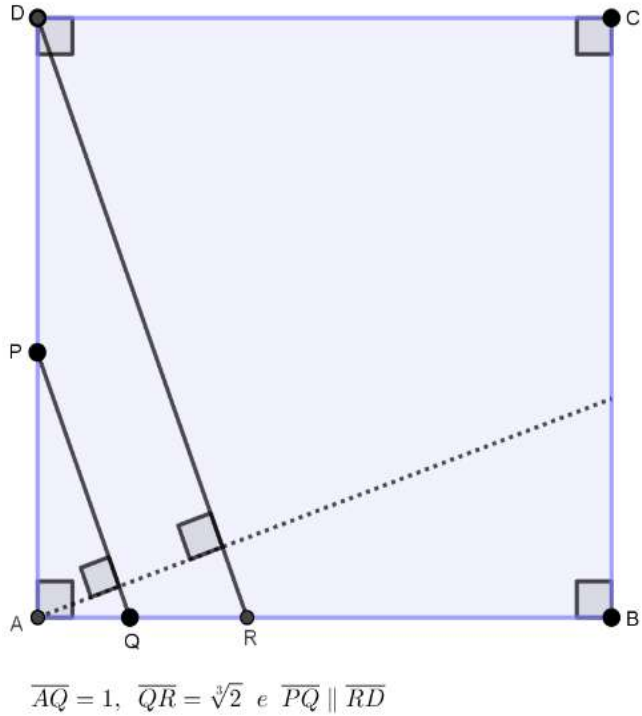
$$\frac{\overline{PD}}{\overline{AP}} = \frac{p\sqrt[3]{2}}{p} = \sqrt[3]{2} \tag{4.17}$$

Na figura 6, note que, se quiséssemos duplicar um cubo de aresta igual a $\overline{AP}$, o problema então estaria resolvido, já que $\overline{PD} = \overline{AP} \times \sqrt[3]{2}$. Agora, para que os segmentos obtidos na construção resolvessem, por exemplo, a duplicação de um cubo de aresta igual a 1, o quadrado dobrado na construção deveria coincidir com um quadrado de lado $1+\sqrt[3]{2}$, sendo que a $\sqrt[3]{2}$ é o número que deve ser construído por origami para resolver a duplicação de um cubo de lado 1. Mas com as medidas $\overline{AP}$ e $\overline{PD} = \overline{AP} \times \sqrt[3]{2}$ encontradas na construção proposta por Peter Messer, podemos obter um segmento medindo $1+\sqrt[3]{2}$ e, consequentemente, o segmento de medida igual a $\sqrt[3]{2}$.

Após encontrar as medidas dos segmentos AP e PD, de acordo com esquema da figura 6, podemos construir um segmento cuja medida é igual a $\sqrt[3]{2}$ utilizando a proporção $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QR}}$, na qual AQ é um segmento unitário e $\overline{QR}$ é chamada de quarta proporcional das medidas $\overline{AP}$, $\overline{PD}$ e $\overline{AQ}$, seguindo essa ordem.

Para fazer a construção do segmento $\boldsymbol{QR}$, tal que $\overline{\boldsymbol{QR}} = \sqrt[3]{2}$, basta seguir estes passos: em um quadrado **ABCD** de lado maior que $1+\sqrt[3]{2}$, no qual foram determinados sobre o lado AD, pela construção proposta por Peter Messer, dois segmentos $\overline{\boldsymbol{AP}}$ e $\overline{\boldsymbol{PD}}$**,** tal que $\overline{\boldsymbol{PD}} = \overline{\boldsymbol{AP}} \times \sqrt[3]{2}$, marque agora um ponto $\boldsymbol{Q}$ sobre o lado $\boldsymbol{AB}$ desse quadrado, tal que $\overline{\boldsymbol{AQ}} = 1$. Em seguida, construa o segmento $\boldsymbol{PQ}$ e, por último, construa por $\boldsymbol{D}$ uma dobra paralela ao segmento $\boldsymbol{PQ}$, a qual intersecta $\boldsymbol{AB}$ no ponto $\boldsymbol{R}$.

Figura 7 - A quarta proporcional das medidas $\overline{\boldsymbol{AP}}$, $\overline{\boldsymbol{PD}} = \overline{\boldsymbol{AP}} \times \sqrt[3]{2}$ e $\overline{\boldsymbol{AQ}} = 1$



Fonte: Autora (2020)

Aplicando o teorema de Tales nos triângulos, temos que:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QR}} \tag{4.18}$$

Daí,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AP} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\overline{QR}} \Rightarrow \overline{QR} = \sqrt[3]{2} \tag{4.19}$$

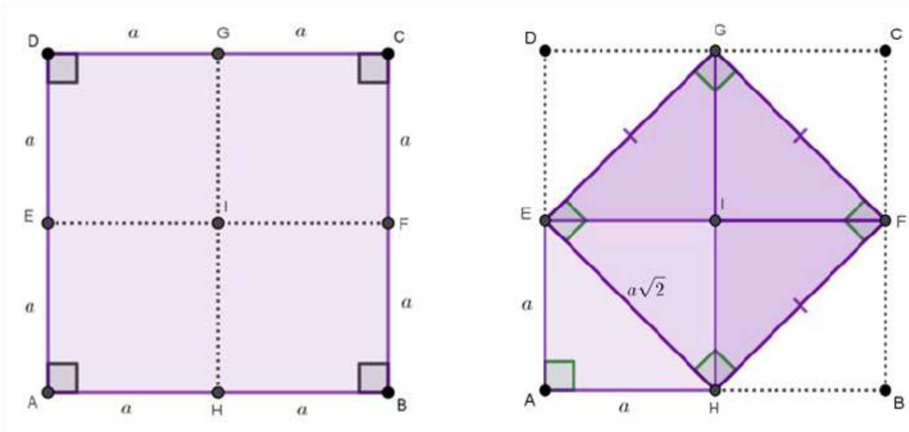
Propostas de Atividades para Trabalhar Geometria com Origami em Sala de Aula

Com base na fundamentação teórica e na problemática desenvolvida nas seções anteriores, nesta seção vamos propor duas atividades que podem ser trabalhadas no 9º ano do Ensino Fundamental. O total de atividades desenvolvida por essa pesquisa encontra-se em (CAVALCANTE, 2020), onde também se encontra uma sugestão do tempo a ser atribuído a cada uma das etapas das atividades.

Duplicação de um quadrado de lado dado

a) Dado um quadrado de lado $2\boldsymbol{a}$**,** tal que $\boldsymbol{a}$ representa a medida de outro quadrado, denote seus vértices por A, B, C e D.
b) Faça uma dobra no quadrado levando A sobre D e B sobre C, encontrando um ponto E sobre AD e F sobre BC. Em seguida, leve ao mesmo tempo os vértices A e D sobre os vértices B e C, respectivamente, obtendo um ponto G sobre DC e H sobre AB.
c) Construa os vincos EH, HF, FG e EG ao levar os vértices do quadrado até I, ponto de interseção das dobras obtidas no passo anterior.
d) Agora desdobre apenas um desses vincos.

Figura 8- Duplicação de um quadrado de lado a



Fonte: Autora (2020)

e) Das dobras construídas no passo 2 da construção, quais figuras geométricas foram obtidas?
f) Dos vincos construídos pelo passo 3, verifique qual polígono encontra-se inscrito no quadrado de lado $2a$. Para isto, encontre as medida dos ângulos internos do polígono e a medidas dos seus lados.
g) Verifique se o polígono $EHFG$ compreende alguma quantidade inteira de vezes a área do quadrado $AEIH$.
h) Encontre as medidas dos lados do polígono $EHFG$.

Construção de um segmento cuja medida é a raiz quadrada da medida de um segmento dado

a) Construa na folha de papel um sistema de eixos ortogonais, para isso construa uma dobra representando o eixo x e, em seguida, faça um vinco perpendicular a x, esse segundo vinco obtido será a representação do eixo y. Denote a interseção do eixo x com o eixo y por O , representando a origem do sistema.

b) Sejam OU um segmento unitário dado e AO um segmento de medida a. De modo que medida do segmento OU está associada ao ponto $U=(1,0)$ e a medida do segmento AO está associada ao ponto $A=(a,0)$. Localize tais pontos no eixo x.

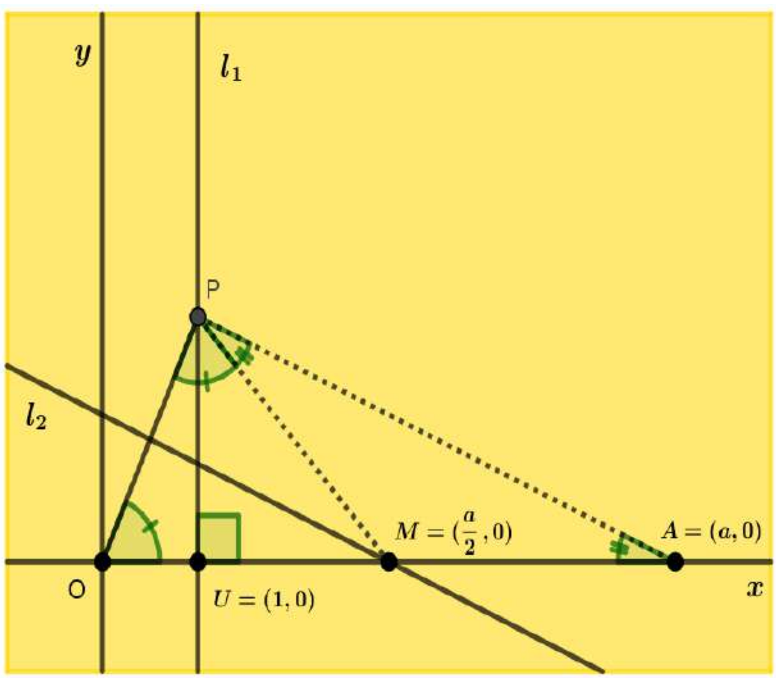
c) Construa agora o ponto médio M do segmento AO. Quais coordenadas representam esse ponto?

d) Agora, utilize o axioma 4 para construir, por U, a perpendicular l_1 ao eixo x.

e) Utilize agora a dobra que passa por um ponto e que reflete outro ponto sobre uma reta, ou seja, aplique o axioma 5 do origami para por O sobre o seu simétrico pertencente a linha l_1 ao fazer uma dobra passando por M e colocando O sobre l_1.

f) Construa os vincos OP e PA.

Figura 9 - Construção de um segmento cuja medida é raiz quadrada da medida de um segmento dado.



Fonte: Autora (2020)

g) Os segmentos OM , PM e MA são congruentes? Se sim, diga por quê.
h) Quais são as medidas dos segmentos OM , PM e MA?
i) Prove que $O\hat{P}A = 90°$.
j) Encontre e aplique a relação métrica do triângulo retângulo que permite encontrar a medida de OP .
k) Diga qual foi o objetivo da construção proposta por origami.

Considerações Finais

Tendo em vista que o origami e seu conjunto de axiomas envolvem muitos conceitos e propriedades geométricas, pelos quais foi possível produzir um texto de dissertação em diálogo com a geometria e a geometria do origami, considero relevante e viável o uso dessas atividades manuais como metodologia de ensino de geometria na educação básica. Como sugestão de trabalhos futuros, proponho uma investigação do uso do origami como recurso pedagógico na prática de ensino de geometria por meio das atividades aqui apresentadas.

Referências Bibliográficas

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. [S.l.] 2018

CARNEIRO, Mário Jorge Dias; SPIRA, Michel. **Oficina de Dobraduras**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Disponível em: http://www.obmep.org.br/docs/apostila9.pdf. Acesso em: 10 setembro, 2019.

CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito**. Explorando Geometria com Origami** (2009). Disponível em: http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf. Acesso em: 10 setembro, 2019.

CAVALCANTE, W. L. P. **Propostas de atividades para o ensino de geometria baseadas em construções geométricas com origami**. 2020. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Pós Graduação Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém. 2020.

DULCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar – volume 9:** Geometria plana. 7ed. São Paulo: Atual, 1993.

KANEGAE, Mari. **Origami**. Atelier Kami Arte. São Paulo, (2019). Disponível em: http://www.kamiarte.com.br/. Acesso em: 10 de setembro de 2019

LANG, Robert. J. ***Origami and geometric constructions***. (2015). Disponível em: https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf. Acesso em: 10 de setembro de 2019.

MONTEIRO, L. C. N. **Origami**: História de uma Geometria Axiomática. 2008. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Matemática para o Ensino, Faculdade de Ciência, Departamento de Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa. 2008. Disponível em: https://cutt.ly/3kA3USn. Acesso em: 21 setembro, 2019.

UENO, Thaís Regina. Do origami tradicional ao origami arquitetônico: uma trajetória histórica e técnica do artesanato oriental em papel e suas aplicações no design contemporâneo. 2003. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Desenho Industrial, Faculdade de Arquitetura, Artes e Comunicação, Universidade Estadual Paulista, Bauru. 2003. Disponível em: https://cutt.ly/BkA307b. Acesso em: 07 maio, 2020.

Reflexos das ações Pedagógicas com o SAEB em uma escola de Santarém-PA

Carlos Cesar maia Feitosa[1]
Claudir Oliveira[2]

Introdução

As avaliações em larga escala são realidades presente nas escolas brasileiras há 30 anos, e através destas, juntamente com outros indicadores, cada escola recebe um índice que indica seu desenvolvimento, mostrando assim se os trabalhos estão alcançando ou não os efeitos desejados. Os resultados destas avaliações são disponibilizados para que escolas do país possam utilizar como a finalidade de adotar estratégias que visam melhorar seus desempenhos.

Há uma busca pela qualidade do ensino, de forma geral, tanto por escolas, municípios, estados e também na esfera federal. Mas, como saber se houve ou não melhoras na qualidade do ensino? Como é possível mensurar de forma confiável a qualidade da educação que está sendo praticada? Como criar, a partir daí mecanismos que sirvam de referência e parâmetros para a melhoria do nosso sistema educacional? Para isso o

1 SEDUC-Pa. Email: carloscesar.ctae@escola.seduc.pa.gov.br
2 Ufopa. Email: claudir.oliveira@ufopa.edu.br

Brasil criou o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que fornece tais elementos que são confiáveis e comparáveis para um bom diagnóstico da aprendizagem dos alunos. Conforme é mencionado na Cartilha do SAEB:

> O Saeb é realizado pelo Inep desde 1990 e tem como objetivo avaliar a qualidade, a equidade e a eficiência da educação básica brasileira. Além disso, gera dados e indicadores que subsidiam a elaboração e o monitoramento das políticas educacionais do País. Os resultados também são usados para calcular o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), que considera o desempenho dos alunos no Saeb e os dados de fluxo escolar do Censo Escolar, fornecendo indícios sobre a qualidade do ensino ofertado. (BRASIL, 2019)

As avaliações em larga escala trazem, asssim, respostas e meios para que as instituições de ensino possam corrigir seus procedimentos e fornecer uma educação que atenda às necessidades dos alunos e da sociedade.

Níveis de avaliação

Hoje, no Brasil, a avaliação da educação não se restringe a sala de aula e dependendo de sua abrangência, seus fins e dos responsáveis por sua formulação e aplicação, percebe-se três níveis bem distintos de avaliação que visam à melhoria da educação. No quadro 1 são apresentadas as principais características de cada um desses níveis de avaliação, confome pode ser verificado em APRENDA (2019).

Quadro 2 - Diferenças entre os nníveis de avaliação.

Nível de avaliação	Objetivo da avaliação	Onde é realizada	Responsável por realizar	Observações
Avaliação da aprendizagem	Acompanhamento do processo de ensino e aprendizagem	Na sala de aula	Professor	Pode ser formal ou informal.
Avaliação institucional	Está ligada aos objetivos pedagógicos da escola, ou seja, ao seu PPP;	Escola	Comunidade escolar	Pode ser externa, realizada por um perito ou interna realizada pela comunidade escolar;
Avaliação em larga escala	Desenvolvimento de políticas públicas e melhoria do ensino ofertado;	Rede de ensino	Poder público	São exemplos o ENEM, ANA, SAEB, ENCCEJA, entre outros;

Fonte: Adaptado de APRENDA (2019).

Como a avaliação é um ato contínuo, que se desenvolve em diferentes momentos durante o processo de ensino e aprendizagem, de acordo com o objetivo que se espera com a aplicação desta, distingui-se três funções relacionadas a avaliação: avaliação diagnóstica, avaliação formativa e avaliação somativa. Para o desenvolvimento deste trabalho adotou-se a avaliação diagnóstica.

Estes resultados apresentados neste trabalho correspondem a um apanhado da dissertação de mestrado desenvolvida por Feitosa (2020), o qual faz uma análise sobre as ações adotadas na escola Estadual Frei Othmar, como estratégia de obter melhorias no aprendizado dos alunos e verificar os reflexos no SAEB. Os resultados apontados neste trabalho referem-se ao uso de avaliações diagnósticas internas (simulados) e práticas pedagógicas da escola. Almeja-se com isso, enfatizar à comunidade escolar que os resultados destas avaliações podem ser utilizados como ferramentas de trabalho e, além disso, contribuem para superar deficiências de aprendizagem do conhecimento em todos os níveis de ensino. Com a análise dos resultados da escola, considerando a avaliação externa a que vem sendo submetida e analisando por meio de série histórica, verificam-se indícios de resultados positivos decorrentes das ações realizadas.

Materiais e Métodos

Para a realização do trabalho adotou-se um estudo de caso, pois segundo Aragão e Neta (2017, p. 35), este "permite mediante caso isolado ou de pequenos grupos, entender determinados fatos. Partindo do princípio de que qualquer caso que se estude em profundidade pode ser considerado representativo de muitos outros ou até de todos os casos semelhantes". Assim, foi realizada uma pesquisa descritiva e também quantitativa , pois como afirma Zanella (2013, p. 34), estes tipos de pesquisa "procura conhecer a realidade estudada, suas características e seus problemas" e "se caracteriza pelo emprego de instrumentos estatísticos, tanto na coleta como no tratamento dos dados, e que tem como finalidade medir relações entre as variáveis". Porém, no decorrer da coleta de dados e observação do ambiente pesquisado, percebeu-se que a escola em questão, trabalha muito a questão social de seus alunos, i. e., a qualidade nas relações sociais, o valorizar a pessoa, e não apenas os resultados obtidos.

Através das avaliações diagnósticas próprias, buscou-se preparar os alunos para realizarem o SAEB, uma vez que essa metodologia mostrou ter produzido efeitos positivos na escola. Ressalta-se que apesar do foco ser a ação do professor em sala de aula através da preparação dos alunos e aplicação de simulados como estratégia, há um conjunto de outras ações realizados pela escola e pela Unidade Regional de Ensino

(5ª URE) para melhorar a qualidade da educação como um todo, tendo reflexo também nos resultados do SAEB. Para este trabalho deteve-se apenas a descrever as ações em duas turmas do 9º ano na disciplina de Matemática. O trabalho com os alunos ocorreu, portanto, por meio de aplica**ções** de simulados como reforço na aprendizagem, para a prova do SAEB. Para coletar os resultados obtidos com a aplicação desta metodologia, destacam-se três etapas necessárias.

A primeira etapa consistiu em fazer uma caracterização e análise da escola como um todo e das suas condições físicas e administrativas no sentindo de verificar o que tem sido feito para melhorar as condições da escola e assim ter um ambiente apropriado para o ensino, e ainda, dos resultados da escola em edições passadas desta avaliação, para se ter uma noção de como a instituição está e termos condições de avaliar se houve avanços. Na segunda etapa foi feita a aplicação dos simulados para os alunos, destacando o que acontece em sala de aula como preparação para os mesmos e sua correção com os alunos. Já na terceira etapa foram analisados os resultados obtidos com a aplicação dos simulados, o que é feito com os resultados obtidos pelos alunos nesse simulado e confrontados os resultados do simulado com os resultados do SAEB e IDEB. Assim verifica-se como a metodologia apontou os efeitos esperados.

São estabelecidas, ainda, algumas práticas que visam a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, como o Conselho de Classe de forma bimestral (onde esse conselho reúne, ao final de cada bimestre, todos os professores para verificar como cada aluno está e o que pode ser feito para superar possíveis problemas), orientações sobre a humanização das relações pessoais dentro da escola, ação rápida para resolver qualquer problema de indisciplina, ações motivadoras para os funcionários como comemoração de aniversários, de dias especiais referente às profissões presentes na escola e confraternização anual para gerar compromisso e ainda mais união na equipe

Matriz de Referência

Para elaboração dos simulados foram utilizadas as matrizes do SAEB de acordo a etapa de estudo deste trabalho (9º ano) e estas são construídas com base nas habilidades que os alunos devem demonstrar que dominam e foram organizadas em quatro temas do conhecimento da matemática, que são: espaço e forma, grandezas e medidas, números e operações/álgebra e funções e tratamento da informação. Cada um desses temas é constituído por uma série de Descritores que indicam as habilidades que o aluno deve dominar para ter um bom resultado nesta prova. Estes descritores são listados em Feitosa (2020).

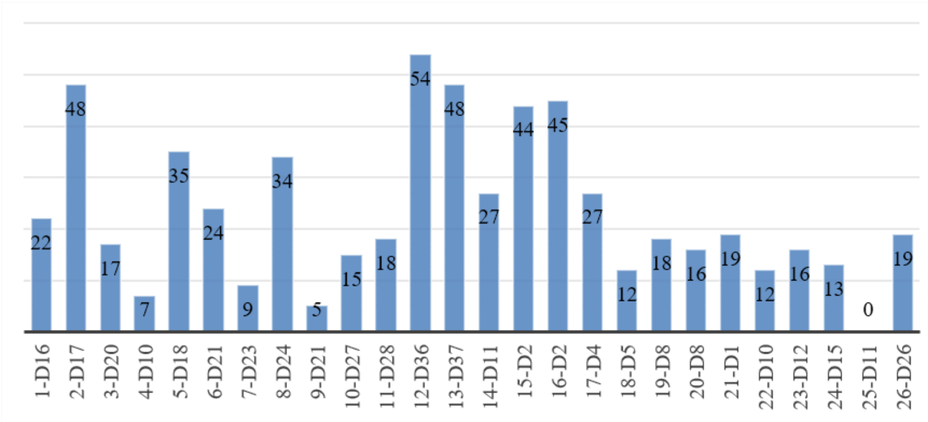
Resultados

Aplicação das ações

Foram aplicadas duas avaliações diagnósticas constituídas pela própria escola. As questões destes simulados de revisão para o SAEB foram retiradas de sites como o do próprio INEP (BRASIL, 2011b) e provas fornecidas pela SEDUC. Foi aplicada ainda, uma terceira avaliação diagnóstica enviada pela SEDUC.

Após a aplicação dos simulados da escola e devidas correções, realizou-se a análise dos resultados. No gráfico da Figura 1, tem-se o demonstrativo de acerto dos alunos por questões e Descritores (identificados como Dxx) no primeiro simulado. Do total do público alvo (70 alunos do 9º ano) apenas 62 alunos compareceram, correspondendo a 88,5%. Para efeito de compreensão do gráfico, nesta primeira aplicação anulou-se a questão 25 e na segunda as questões 9 e 17, devido a erros de digitação.

Figura 1 - Quantidade de acertos por Descritores correspondente ao primeiro simulado.

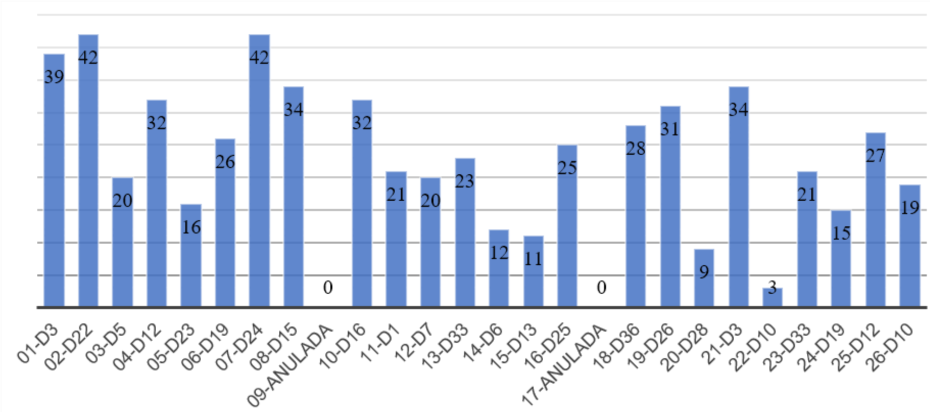


Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Conforme se observa no gráfico da Figura 1, os alunos obtiveram mais êxito de acertos na questão 12 (com 54 acertos), correspondente ao descritor 36, que se refere a resolver problemas envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos. Este descritor está contido no tema "Tratamento da Informação". Por outro lado os alunos tiveram dificuldades na questão 9, que aborda o descritor 21 – Reconhecer as diferentes representações de um número raciona, relacionado ao Tema III - Números e Operações/Álgebra e Funções.

No segundo simulado, Figura 2, os alunos obtiveram mais acertos nas questões 2 e 7, correspondente aos descritores D22 e D24, respectivamente, e pertencente ao Tema III – Números e Operações/Álgebra e Funções. O descritor D22 refere-se a Identificar fração como representação de um número racional e descritor D24 consiste em reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal identificando a existência de "ordens" como décimos, centésimos e milésimos, confome se verifica em Feitosa (2020) e Brasil (2020) .

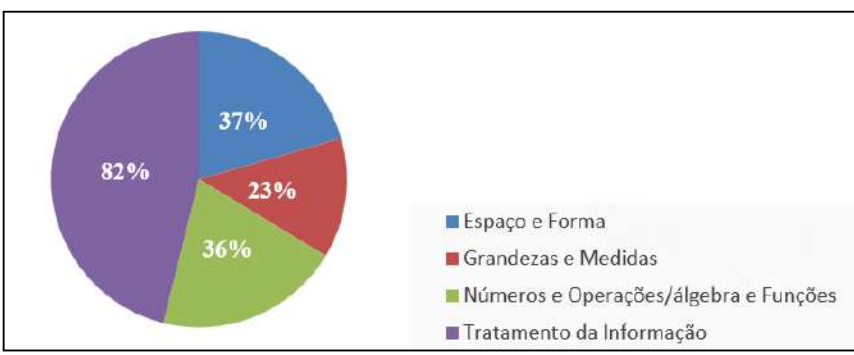
Figura 2 - Quantidade de Acertos correspondente ao segundo simulado.



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Após a aplicação e correção de cada simulado, seguindo a metodologia proposta, faz-se a análise dos erros e acertos dos alunos para que se possa fazer os ajustes necessários para a revisão dos conteúdos que o aluno apresentou dificuldade. Para isso tem-se o gráfico da Figura 3, que mostra onde os alunos tiveram maior acerto e onde estão precisando de mais atenção.

Figura 3 - Percentagem de acertos dos alunos por tema no Simulado 1.



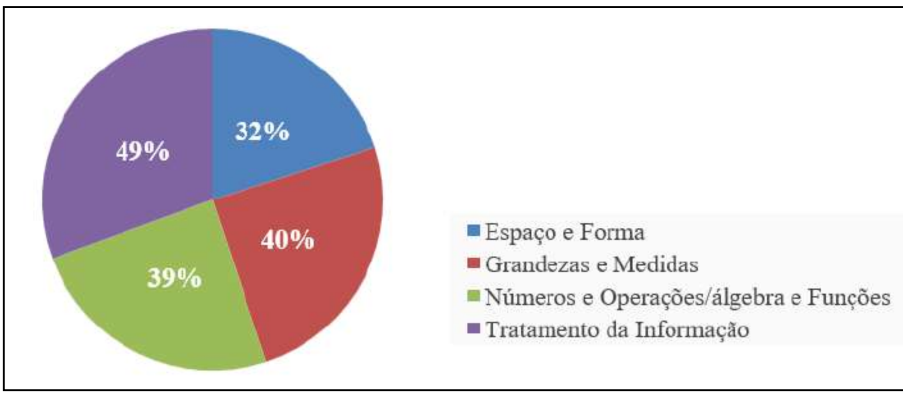
Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Ao analisar o gráfico, percebe-se que os alunos obtiveram mais erros nos Temas I (Espaço e Forma), II (Grandezas e Medidas) e ao

Tema III (Números e Operações/Álgebra e Funções). O trabalho em sala de aula consistiu, posteriormente, em corrigir essas distoções com os alunos, focando nesses temas para que se possa tirar as dúvidas e superar as dificuldades encontradas e reforçar ainda os conteúdos em que apresentaram resultados, de certa forma, aceitáveis.

Já no segundo simulado aplicado, no gráfico na Figura 4, percebe-se que a distribuição dos acertos por temas ficou bem mais homogênea, onde o percentual de acerto dos alunos ficou bem mais distribuído entre os 4 temas de estudos. E ainda, houve melhora nos temas que foram reforçados. O que dá indícios positivos sobre a metodologia adotada.

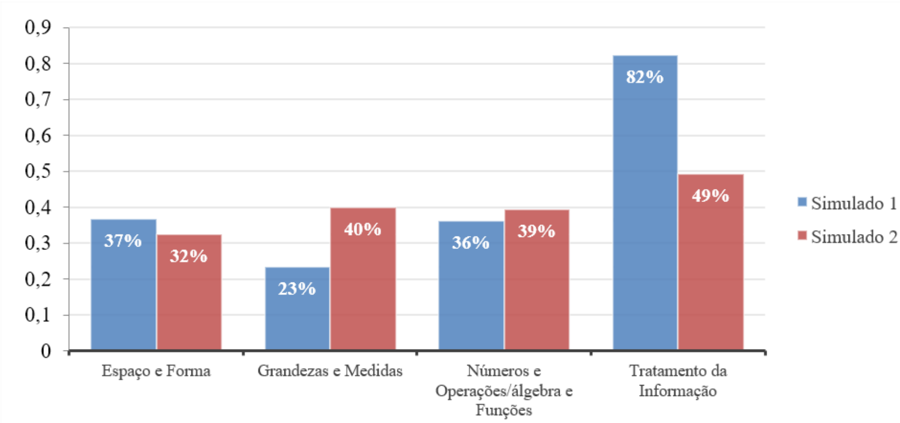
Figura 4 - Percentagem de acertos dos alunos por tema no Simulado 2.



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

O gráfico da Figura 5 mostra sugeri fazer uma reflexão durante a revisão dos conteúdos, pois como o foco do trabalho foi sobre o conteúdo que os alunos tiveram mais dificuldades no primeiro simulado, que foram os Temas II e III. Observa-se que os alunos obtiveram melhoras nos temas II e III em que os professores fizeram uma revisão. Já naqueles que não foram tão enfatizados (Temas I e IV), uma vez que os alunos já tinham apresentado um aprendizado de certa forma satisfatório, acabaram tendo um desempenho um pouco mais baixo.

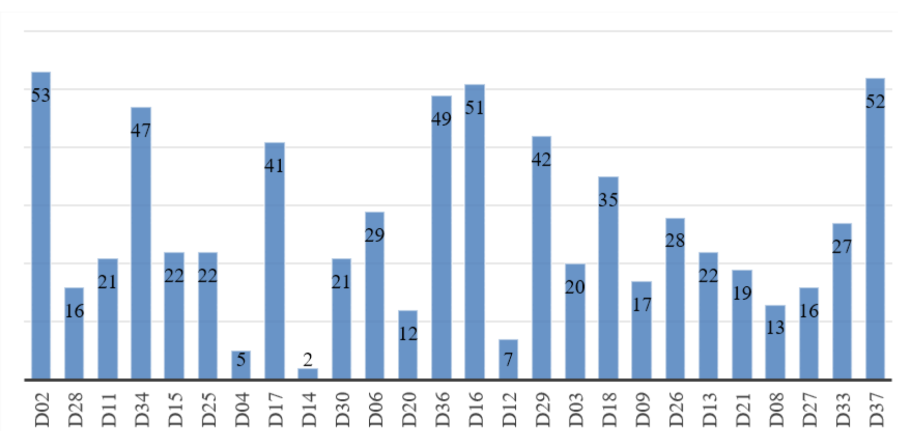
Figura 5 - Comparação entre os resultados obtidos no primeiro e segundo simulados.



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

O terceiro simulado consistiu em uma avaliação diagnóstica feita pela SEDUC. Esta avaliação não fazia parte do projeto inicial, mas serviu para avaliar o trabalho realizado de uma forma independente, uma vez que o mesmo foi preparado por pessoas de fora da escola. E como pode-se observar no gráfico da Figura 6, os alunos tiveram um resultado bem semelhante, se comparado com o resultado do simulado da escola.

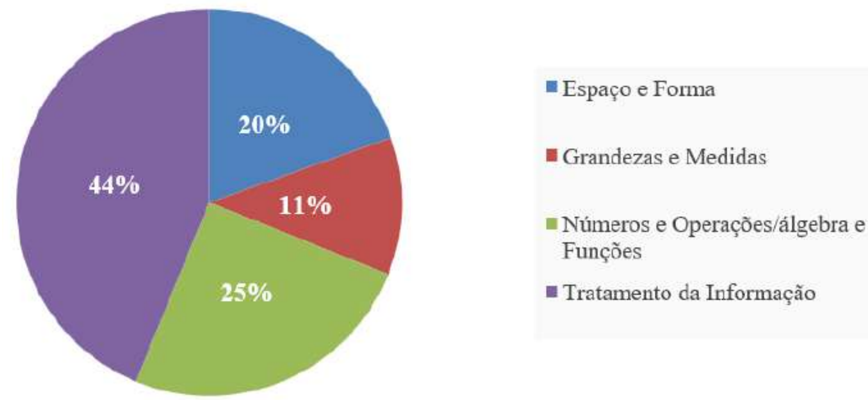
Figura 6 - Total de acerto dos alunos por descritores no Simulado 3.



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Os percentuais de acerto, conforme se verifica no gráfico da Figura 7 também ficaram de certa forma semelhantes em quantidade de alunos que acertaram, principalmente com o resultado do primeiro simulado.

Figura 7 - Percentagem de acertos dos alunos por tema no Simulado 3.



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Análise dos resultados da escola em edições do SAEB

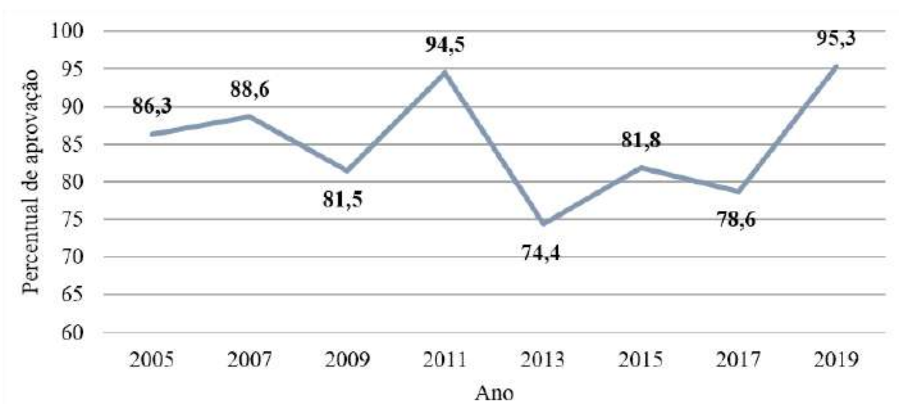
Para que se possa analisar os efeitos da metodologia utilizada é necessário analisar os resultados de alguns indicadores da escola nos anos anteriores, para assim ter um panorama de como a mesma estava se saindo, e dessa forma ter condições de avaliar se houve avanços. Sendo que para o presente estudo, foram utilizados os resultados destes indicadores nos anos em que houve a aplicação do SAEB no período de 2005 a 2019. No gráfico da Figura 8, pode-se observar a taxa de aprovação nesse período.

Todas essas ações, juntas com um cuidado especial com a infraestrutura da escola, visam gerar um ambiente salutar e propício ao aprendizado. O gráfico da Figura 8 representa a taxa de aprovação nos últimos anos, com o resultado desse indicador para o ano de 2019, e como pode-se perceber, nesta última edição, houve um aumento significativo na taxa de aprovação, o que nos dá indícios de que a ação da direção da escola, professores e da URE tem dado resultados e a escola conseguiu a maior taxa de aprovação entre todas as registradas nessa série histórica em estudo.

Após a aplicação da metodologia proposta, com o aprendizado sobre o SAEB e sua dinâmica, e a análise dos resultados do mesmo referente à escola e às ações desenvolvidas para melhorar seus índices, serão apresentados os novos resultados, considerando os dados fornecidos pelo INEP acerca da edição 2019.

Inicialmente, tem-se novamente as informações da taxa de aprovação da escola, que como é possível ver no gráfico da Figura a seguir, teve um aumento de aproximadamente 20% em relação a edição anterior.

Figura 8 - Taxa de aprovação geral da Escola Frei Othmar no período de 2005 a 2019.

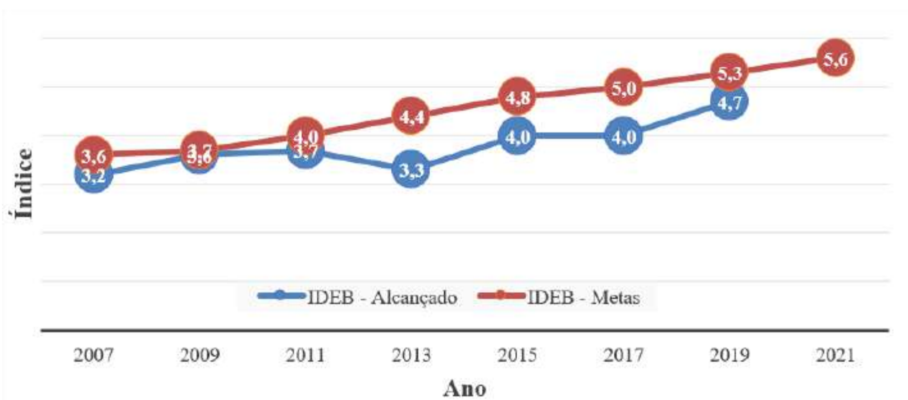


Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Com relação a aprovação, verifica-se neste gráfico que a escola iniciou com um índice de 86,3% em 2005 e baixou esse índice fechando a série em estudo com 78,6% em 2017. Nesse período, em apenas dois momentos essa taxa superou a de 2005, que foi em 2007 com 88,6% e em 2011 com 94,5% que foi a maior registrada em toda a série em questão. Vale aqui ressaltar que a média nacional de aprovação registrada em 2017, segundo a Fundação Lemann e Meritt (2020), para as séries finais do ensino fundamental foi de 87% ficando assim a escola, abaixo deste percentual. No entanto, todo o trabalho realizado pela gestão visa melhorar esses índices.

No gráfico da Figura 9, tem-se uma comparação entre os resultados do IDEB alcançados pela escola nesse período e as metas estabelecidas. O IDEB apresentou aumento significativo, como pode ser observado no gráfico da Figura 9. A escola estava a duas edições com o mesmo índice de 4,0 e após as ações desenvolvidas na escola, saltou-se para 4,7 que é o maior índice registrado desde 2005. Com esse aumento expressivo nesta edição do SAEB, nesta edição foi onde o índice da escola mais se aproximou da meta em relação às últimas 4 edições dessa avaliação, conforme se verifica no gráfico da Figura 9. Nesse ponto cabe uma discussão sobre a meta, pois por mais que esta não tenha sido alcançada, não significa que a escola está mal, pois a mesma está crescendo.

Figura 9 - IDEB alcançado e metas da Escola Frei Othmar.



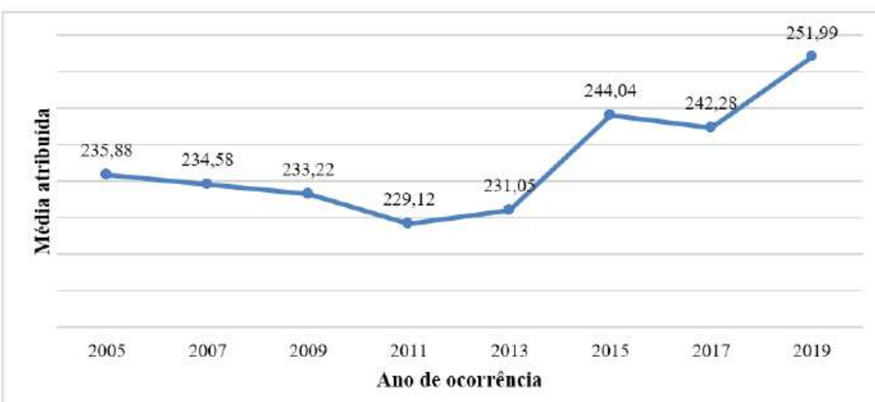
Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Nesse índice, houve um aumento no decorrer do período em estudo, uma vez que a escola iniciou com o índice de 3,6 em 2005 e encerrou a série histórica com 4,0 em 2017, apesar de não ter atingido a meta para este ano que era 5,0. Observa-se ainda que nas duas últimas edições, que foram a de 2015 e 2017, esse índice se manteve constante em

4,0. Nesse ano de 2017, onde ocorreu a última edição, a média nacional para o IDEB do nono ano das escolas estaduais foi de 4,5 segundo o Portal do IDEB do Governo Federal. Percebe-se ainda que nas últimas três edições, o ano em que a escola se aproximou mais da meta destinada a ela foi em 2015, onde atingiu 4,0 e sua meta era 4,8 faltando assim 0,8 ponto para se igualar a meta proposta.

Com relação a proficiência, como se verifica no gráfico da Figura 10, também houve aumento na média da escola, indo de 242,28 em 2017, para 251,99 em 2019. Este resultado fez a escola saltar na Escala de Proficiência do Nível 2, onde o desempenho precisou ser maior ou igual a 225, para o Nível 3, em que o desempenho deve ser maior ou igual a 250 e menor que 275. Sendo que essa foi a maior nota registrada nesta série. Isso mostrou que as ações são positivas e que o aprendizado dos alunos refletem na melhora dos resultados nas notas do SAEB e nos índices educacionais.

Figura 10 - Notas de matemática no
SAEB 2019 – 9º ano da Escola Frei Othmar.



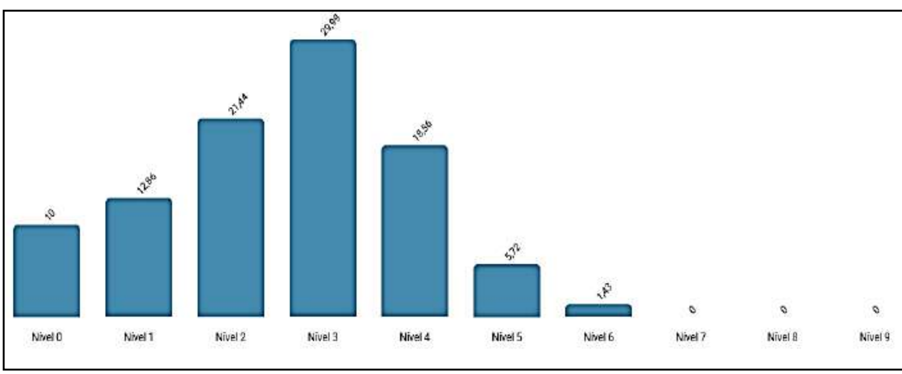
Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Ao observar este gráfico, percebe-se que a Escola Frei Othmar teve um longo período de queda nas notas de matemática referente ao SAEB. Esse período vai de 2005 até 2011, ou seja, quatro edições consecutivas desta avaliação em que o ensino de matemática estava com rendimento baixo. Seguida de duas edições, as de 2013 e 2015, onde houve avanço na qualidade do ensino uma vez que houve progresso neste indicador. Porém, em 2017 novamente houve uma baixa nessa nota, caindo de 244,04 em 2015 para 242,28 em 2017.

Escala de proficiência

Essa escala é importante pois é através dela que o professor saberá como está a qualidade do ensino na escola. Nela cada nível corresponde as habilidades que os alunos dominam. Estes níveis estão detalhados no trabalho de Feitosa (2020). Na figura 11 estão representadas as notas em matemática do 9º ano da Escola Frei Othmar referente ao ano de 2019. Nela verifica-se os percentuais que a escola atingiu em cada nível. Com isso o professor pode identificar onde os alunos encontraram maior dificuldade e por meio desses dados é possível, então, buscar meios para superá-los.

Figura 11 - Resultado do 9º ano em matemática do ano de 2019 da Escola Frei Othmar em percentual.



Fonte: BRASIL/INEP (2020).

Esses níveis são cumulativos, ou seja, a maioria dos alunos estão no nível 3, isso significa que estes já devem ter domínio satisfatório das habilidades referentes aos níveis anteriores ao nível 3.

Discussão

Como pode-se observar nos gráficos, a Escola Estadual Frei Othmar teve um aumento significativo em todos os seus índices educacionais estudados. Isso indicou que as ações realizadas na escola, pelos professores e direção e equipe da Unidade Regional de Ensino (SEDUC), se apresentaram promissoras. Isso nos mostrou ainda que pequenas ações como estas podem trazer grandes resultados. Claro que, para se consolidar esses resultados e para que se possa mensurar até que ponto essas ações são eficazes e até mesmo quais delas mais contribuíram com esses resultados, necessitaria de mais tempo e mais estudos, porém, já se pode afirmar que tais propostas resultaram em melhoria na qualidade do ensino da escola. Ressalta-se que este estudo se debruçou apenas nos aspectos de ações tomadas pela escola (Direção e professores) e não se deteve em uma análise mais profunda no que diz respeito ao estudo das questões que foram aplicadas nos simulados aos alunos, utilizando a TRI, por exemplo.

Considerações Finais

Ao fazer as análises dos resultados nas avaliações externas a que os alunos foram submetidos, percebeu-se que os índices educacionais da escola tiveram aumento significativo. Isso mostrou resultads promissores em relação ao aprendizado dos alunos, indicando que as ações realizadas pela escola foram acertivas. Devido a limitações para se fazer uma análise mais aprofundada sobre as estratégias utilizadas, não se pode definir até que ponto cada uma delas contribuiu mais ou menos com os resultados encontrados. No entanto, ficou visível que as mesmas surtiram os efeitos desejados. Com relação aos simulados, as avaliações aplicadas foram diferentes e isso dificulta um pouco a análise, uma vez que as mesmas não utilizaram os requisitos da TRI, o que daria resultados mais precisos, porém, exigiria um trabalho estatístico mais complexo, o que dificultaria sua aplicação. No entanto, são necessárias outras pesquisas para discutir e comparar os resultados apresentados nesse trabalho e ainda, um tempo maior de observação para perceber se esses resultados vão se manter.

Apesar das limitações, o presente trabalho teve a possibilidade de contribuir com o aprendizado dos alunos através do uso dos indicadores e das devolutivas fornecidas pelo MEC/INEP. Apesar dos resultados se mostrarem promissores, faz-se necessário um período maior de tempo com estas ações e as participações em outras edições destas avaliações federais para que se consolide esses resultados. Fica, ainda, o desafio de implementar essas avaliações diagnósticas desde as séries anteriores, de maneira a acompanhar os alunos em seu desenvolvimento, e assim, gerar resultados que possibilitem um acompanhamento mais adequado dos alunos, e, com o tempo, até mesmo gerar um histórico dos mesmos no decorrer dos anos.

No entanto, ao finalizar esse trabalho, percebeu-se que, apesar das devolutivas estarem à disposição de todos, estas ainda não são exploradas como deveriam e no cotidiano escolar. Nesses 25 anos de profissão, percebeu-se que estas são utilizadas por algumas escolas e professores, e quando se usa, é apenas como índice de comparação ou mesmo como parâmetro para saber se a escola atingiu ou não a meta do IDEB projetada para a mesma. No entanto, há a possibilidade de desenvolver várias ações educativas a partir dos resultados contidos nas mesmas, e assim, melhorar o processo de aprendizagem dos alunos na escola.

Referências

APRENDA quais são os níveis da Avaliação. William Dornela e Carlinhos Costa, 2019. Vídeo (13 min.). Publicado pelo canal: Os pedagógicos. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=T6B09CcgvZA. Acesso em: 25 de junho de 2020.

ARAGÃO, José Wellington Marinho de; NETA, Maria Adelina Hayne Mendes. **Metodologia Científica**. (e-Book). Especialização em produção de mídias para educação online. Faculdade de Educação. Universidade Federal da Bahia. Salvador, 2017. Disponível em: https://cutt.ly/KkDY3FV. Acessado em 05 de janeiro de 2020.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Matrizes de Referência de Matemática e suas Tecnologias. DF, 2011a. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/matriz-de-referencia>. Acesso em janeito de 2021.

_______, MEC. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira (INEP). Simulado Prova Brasil 8ª série/9º ano, DF: INEP, 2011b. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/prova-brasil/simulado-prova-brasil-2011>. Acesso em: 10 de novembro de 2020.

_______,MEC. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Cartilha do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), 2019. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb. Acesso em 25 de março de 2020.

_______,MEC. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira (INEP). Boletim: resultado final externo, DF: INEP, 2020. Disponível em: https://cutt.ly/zkDUSHg. Acesso em: 12 de novembro de 2020

FEITOSA, C. C. M. **Uma análise das ações realizadas na escola Frei Othmar em Santarém-P**á e os reflexos dos resultados do aprendizado no **SAEB, nas turmas de 9º ano.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém PA. 2020.

Fundação Lemann e Meritt (2012): portal QEdu.org.br. Acesso em: 14 de novembro de 2020.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem: componente do ato pedagógico**. 1ª edição, São Paulo – SP: Editora Cortez, 2011.

ZANELLA, Liane Carly Hermes. Metodologia de pesquisa. Universidade Federal de Santa Catarina. 2. ed. reimp. – Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração/UFSC, 2013. Disponível em: https://cutt.ly/wkDIiLK. Acesso em: 05 de janeiro de 2020.

A Geometria como uma proposta disciplinar para o Ensino de Matemática

Hijaoekes Silva Souza[1]
José Antônio Oliveira Aquino[2]

Introdução

A aprendizagem de Matemática, dentre as disciplinas da Educação Básica, é a que está mais ligada, e mais dependente da formação escolar. A Matemática já estava presente na formação escolar dos gregos do século VI a. C., em uma forma muito próxima da apresentada nas escolas atuais. Ao longo do tempo conteúdos, metodologias, tecnologias e um maior rigor foram sendo incorporados ao conhecimento matemático desenvolvidos na escola, visando melhor compreensão desses conhecimentos por parte dos alunos, entretanto na idade média, de V a XV d. C., a Matemática já era tratada como conhecimento mais elevado, e de não aprendizagem por todos. É importante ter em mente que para a escola grega antiga, somente Geometria e Aritmética eram conhecimentos puramente matemáticos. Tal pensamento foi ampliado na Europa Medieval com a introdução da Álgebra. Para a escola brasileira atual, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (APCN) de

[1] Semed-Itb. E-mail: hijaoekes@hotmail.com
[2] Ufopa. E-mail: jose.aquino@ufopa.edu.br

Matemática, a seleção dos conteúdos matemáticos para o Ensino Fundamental deve contemplar (BRASIL, 1997, p. 38):

> Há um razoável consenso no sentido de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria).
> [...]
> Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão "tratar" as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando idéias relativas à probabilidade e à combinatória.

No PCN/1997, no Capítulo de Caracterização da Área de Matemática, é feita uma breve análise das reformas e do perfil do ensino de Matemática, na época, destacando o Movimento da Matemática Moderna (MMM), de âmbito global, que propôs reformulações no ensino de Matemática, a partir dos anos 1950, e fortemente no Brasil nas décadas de 60 e 70. A reforma tinha como um dos objetivos diminuir os problemas de retenção e reprovação em Matemática, em especial na Educação Básica. As propostas implementadas tinham problemas a longo prazo, e não conseguiram resultados significados quanto a reprovação em Matemática (BRASIL, 1997, p. 20, grifo noso):

> Ao aproximar a Matemática escolar da Matemática pura, centrando o ensino nas estruturas e fazendo uso de uma linguagem unificadora, a reforma deixou de considerar um ponto básico que viria se tornar seu maior problema: o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das séries inici-

> ais do ensino fundamental.
> O ensino passou a ter preocupações excessivas com abstrações internas à própria Matemática, mais voltadas à teoria do que à prática. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, foi introduzida com tal ênfase que a aprendizagem de símbolos e de uma terminologia interminável comprometia o ensino do cálculo, da geometria e das medidas.
> No Brasil, a Matemática Moderna foi veiculada principalmente pelos livros didáticos e teve grande influência. O movimento Matemática Moderna teve seu refluxo a partir da constatação da inadequação de alguns de seus princípios e das distorções ocorridas na sua implantação.

Nessa reforma do ensino da Matemática, o ensino de Álgebra passou a ser enfatizado em detrimento ao ensino de Geometria, que se distanciou da prática, ficando no campo da abstração. Além disso, Geometria, Álgebra e Aritmética perdem o status de disciplinas (componentes curriculares), e passam a ser conteúdo da disciplina Matemática. No bojo dessas reformas a LDB 5692/71 retirou a disciplina Desenho Geométrico do cronograma obrigatório do currículo, o ensino das construções geométricas no ensino fundamental passou a ter pouco uso. O Desenho Geométrico passou a ser matéria optativa, motivo pelo qual muitas escolas deixaram de optar por esta importante disciplina. O ensino da Geometria plana passou a ser proposto a partir da exploração de conceitos, propriedades, postulados e teoremas, tendo uma abordagem que pouco explorava a construção do desenho a partir de suas propriedades com uso da régua e do compasso.

Para Pavanello (1993) ensino da Geometria foi graduamento retirado do currículo das escolas, causando muitos problemas, ou pela minimização ou ausência da aprendizagem dos conteúdos geométrico, transformando-se é um problema global, resultado da ausência do tema nos programas escolares.

Apesar de que nos anos 80 os professores de Matemática norte-americanos chamassem a atenção aos problemas da Reforma da Matemática Moderna, somente em 1995 um consenso mundial foi estabelecido, lançando os fundamentos para uma nova reforma no ensino de Matemática. Contudo o ensino de Matemática, no Brasil, ainda concentra resquícios da Reforma da Matemática.

Tais problemas foram logo evidencializados por pesquisas, pelos baixos índices nas avaliações externas, pelo aumento das reprovações e abandono, e baixo rendimento escolar, causados por um excesso de algebrismo e abstração, em detrimento das aplicações práticas e do que se observa no cotidiano contribuindo para o distanciamento dos discente em relação a Matemática, e consequentemente levando a um aumento dos índices de reprovação (BRASIL., 1997, p. 21, grifo nosso):

> Resultados obtidos nos testes de rendimento em Matemática, aplicados em 1993 pelo Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica (SAEB), indicavam que, na primeira série do ensino fundamental, 67,7% dos alunos acertavam pelo menos metade dos testes. Esse índice caía para 17,9% na terceira série, tornava a cair para 3,1%, na quinta série, e subia para 5,9% na sétima série.
> Em 1995, numa avaliação que abrangeu alunos de quartas e oitavas séries do primeiro grau, os percentuais de acerto por série/grau e por processo cognitivo em Matemática evidenciaram, além de um baixo desempenho global, que as maiores dificuldades são encontradas em questões relacionadas à aplicação de conceitos e à resolução de problemas.
> Além dos índices que indicam o baixo desempenho dos alunos na área de Matemática em 22 testes de rendimento, também são muitas as evidências que mostram que ela funciona como filtro para selecionar alunos que concluem, ou não, o ensino fundamental. <u>Freqüentemente, a Matemática tem sido apontada como disciplina que contribui significativamente para elevação das taxas de retenção</u>.

Dentro deste contexto, este trabalho apresenta, de acordo com a normas estabelecidas pelo Guia de Apresentação de Publicações 2019 da Ufopa (UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ, 2019), um Estudo de Campo a partir de um projeto piloto, estabelecido na Escola de Educação Básica Centro Educacional Anchieta, localizada no município de Itaituba, estado do Pará. Tal projeto piloto, iniciado em 2014, foi proposto pelo autor deste trabalho, tendo como base das hipóteses e propostas apresentadas, os PCN da Matemática. O objetivo principal do projeto piloto é o de propor um caminho para melhorar os índices educacionais do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, no Ensino fundamental do 6º ao 9º ano da escola, a partir da reestruturação desse processo, tornando disciplinas, e não mais apenas conteúdos, a Geometria, a Aritmética e Álgebra, com foco multidisciplinar, ou seja, as três disciplinas sempre se correlacionando, num contexto onde a prática é acentuada.

> É consensual a idéia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática (BRASIL, 1998, p. 42).

A Pesquisa de Campo foi utilizada para se verificar o embasamento teórico da proposta e aferir os resultados obtidos, tomando os índices do Ideb e Enem como mecanismos de avaliação, uma vez que esses instrumentos já possuem todo um aparato teórico/científico na sua determinação. Além disso, esses índices possuem relevância nacional e internacional, garantindo uma maior assertiva em relação aos resultados. A relevância desta pesquisa está diretamente ligada a importância do sucesso no ensino e aprendizagem da Geometria, como uma das áreas do conhecimento Matemático, fortemente presente no nosso cotidiano, e portando em várias outras áreas do conhecimento, como a Física, a

Geografia e as Engenharias. E não somente isto, uma vez que o sucesso no processo de ensino e aprendizagem de um componente curricular educacional não consiste somente das avaliações do conhecimento, mas também se relaciona à diminuição da evasão e retenção escolar, que como mencionado anteriormente a Matemática é tida como forte contribuinte das taxas de retenção escolar.

Este trabalho, para uma sequência que propicie uma melhor compreensão da pesquisa, está estruturado da seguinte forma: no próximo capítulo, O ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA EM UM CONTEXTO HISTÓRICO, ATUAL E DE IMPORTÂNCIA, que trata: de uma breve relato histórico da Geometria e seu Ensino; da importância da Geometria no desenvolvimento intelectual da criança, e nas formações humanas, dentro de uma abordagem interdisciplinar da Geometria; da importância da generalização do conhecimento matemático a partir do concreto para uma significação da abstração; da incorporação de novas tecnologias no ensino e aprendizagem da Geometria.

Os Objetivos da Pesquisa

O objetivo geral deste trabalho é o de propor, elaborar, aplicar e avaliar uma metodologia de ensino para o ensino da Matemática do 6ª ao 9º ano do ensino fundamental e do 1º ao 3º ano do ensino médio, na escola de educação básica Centro Educacional Anchieta, onde a Geometria, a Aritmética e a Álgebra são abordadas como componentes curriculares, para uma Educação Matemática compatível com os anseios sociais da atualidade.

Objetivo específico

Efetivar o ensino da Matemática do 6ª ao 9º ano do ensino fundamental e do 1º ao 3º ano do ensino médio, no Centro Educacional

Anchieta, que torne a Geometria, a Aritmética e Álgebra os componentes curriculares a serem estudados, estruturado a partir de um projeto piloto de metodologia de ensino;

Elaborar metodologia de ensino para o componente curricular Geometria, de modo a atender o que preconiza o PNE, os PCN e a BNCC, além de envidar mecanismo que propicie uma Educação Matemática mais próximo da realidade do discente, do simples ao complexo, do concreto ao abstrato, e a partir de um contexto interdisciplinar;

Avaliar o projeto proposto a luz da avaliação do Enem e dos índices do Ideb da escola Centro Educacional Anchieta;

Melhorar a eficácia do fluxo escolar, reduzindo o desinteresse pela Matemática, a reprovação e retenção;

Buscar melhorar os índices em avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), como o Enem e o Ideb, tendo como referência a média regional desses índices.

O Período e a Delimitação

O projeto de pesquisa iniciou em fevereiro de 2014, com a implantação do projeto piloto em todas as turmas, do 6º ao 9º ano do ensino fundamental e do 1º ao 3º ano do ensino médio, dos turnos matutino e vespertino da escola Centro Educacional Anchieta; que passaram a ter o ensino da Matemática a partir dos componentes curriculares Geometria, Aritmética e Álgebra. O projeto piloto tem como marco final dezembro de 2021, pois neste período as turmas do 6º Ano, de 2014, completarão o 3º ano do ensino médio, sendo essas turmas as primeiras a completarem toda a formação, do 6º Ano do Ensino Fundamental ao 3º Ano do Ensino Médio, em conformidade com a metodologia de ensino da Matemática proposta no projeto piloto, veja Tabela 5.

Tabela 5 – Cronograma de Submissão das Turmas ao Exame do Enem

Turmas de 2014	Período das turmas no projeto piloto e Ano de submissão a avaliação do Enem						
	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
3º AEM	P, Exame						
2º AEM	P	P, Exame					
1º AEM	P	P	P, Exame				
9º AEF	P	P	P	P, Exame			
8º AEF	P	P	P	P	P, Exame		
7º AEF	P	P	P	P	P	P, Exame	
6º AEF	P	P	P	P	P	P	P, Exame

Fonte: O autor.
Nota: AEM – Ano do Ensino Médio; AEF – Ano do Ensino Fundamental.
Exame – Turma realizou o exame do Enem.
P – Turma participou do projeto piloto

De acordo com o cronograma do projeto piloto as turmas que realizaram o exame do Enem em 2019, foram as turmas que em 2014 cursavam o 7º Ano do Ensino Médio, ou seja, essa turma quando cursaram o 6º. Ano, o fizeram ainda dentro da metodologia de ensino tradicional, em que a Geometria, a Aritmética e a Álgebra são disciplinas do componente curricular Matemática. Dessa forma, a presente dissertação não apresentará resultados das avaliações do Enem em que as turmas do 3º Ano do Ensino Médio tenham obtido formação completamente dentro do Projeto Piloto, mas é relevante ressaltar que os resultados na avaliação do Enem 2019 foram obtidos por turmas cuja formação esteve com cerca de 85,7%, de seu tempo de formação, dentro do projeto piloto, propiciando uma boa perspectiva para a análise das avaliações. Destaca-se também que a Pandemia do Covid-19 deverá impactar nos resultados dos exames do Enem 2020, principalmente pelo grande número de aulas remotas.

O Problema e a Metodologia

Este trabalho apresenta, como ponto central, uma análise sobre a proposta de metodologia para o ensino e aprendizagem da Matemática na escola Centro Educacional Anchieta, que visa melhorar a avaliação dos discentes no Enem, e o Ideb da escola, a partir do enfrentamento de algumas dificuldades, que historicamente se fazem presente na Educação Matemática do ensino fundamental e médio, conforme (BRASIL, 1997), (FONSECA, LOPES, *et al.*, 2007), (PAVANELLO, 1993), a seção primaria **1 INTRODUÇÃO** (p. 2 – 5), a seção secundária **2.1** Breve Relato Histórico sobre a Geometria e seu ensino (p. 7), a seção terciaria *2.1.1* O ensino de Geometria em Países da Europa e Brasil a partir da Idade Média. (p. 11 – 20) neste trabalho as problemáticas podem ser vistas com os seguintes tópicos:

I. Notas baixas nas provas de avaliação no Saeb.
II. Dificuldades na aprendizagem matemática, tendo como referencias nas provas de avaliação do Saeb.
III. Metodologias de ensino pouco voltadas para o ensino da geometria, sem complementação teórica da grade curricular no ensino da matemática, capaz de estimular o ensino aprendizagem dos discentes.

Para isto o projeto de pesquisa foi estruturado em três partes principais:

I. Propor, elaborar e aplicar um projeto piloto para as turmas, do 6º ao 9º ano do ensino fundamental e do 1º ao 3º ano do ensino médio, dos turnos matutino e vespertino da escola Centro Educacional Anchieta para estabelecer uma metodologia de ensino da Matemática, tendo a Geometria, Aritmética e Álgebra como componente curricular.
II. Instituir o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) como parâmetro para o estabelecimento de conteúdo, formulações de problemas e restruturação da metodologia de ensino da Matemática aplicada às turmas da escola Centro Educacional Anchieta, e o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) como parâmetro da qualidade da infraestrutura do Centro Educacional Anchieta e restruturação da metodologia de ensino da Matemática em relação a retenção e reprovação.

III. Realizar um diagnóstico quanto a opinião e o posicionamento dos professores de Matemática, da rede da educação básica em Itaituba, acerca da possibilidade de implantar, como metodologia de ensino da Matemática, a Geometria, a Álgebra e a Aritmética como componente curricular.

Considerando os itens acima, o problema em estudo pode ser formulado como: "A metodologia de ensino da Matemática, para os discentes do 6º ao 9º ano do ensino fundmental e do 1º ao 3º ano do ensino médio da escola Centro Educacional Anchieta, tendo a Geometria, Aritmética e Álgebra como componente curricular, melhora os índices de avaliação no Enem, e consequentemente o Ideb da escola?".

Vale ressaltar que o estabelecimento da Geometria, Álgebra e Aritmética como componentes curriculares da Educação (item I.), não é algo novo nos sistemas educacionais. Mesmo no Brasil até bem pouco tempo, assim como em outras, utilizavam essa metodologia de ensino da Matemática.

> Na reforma Francisco Campos destaca a proposta, por Euclides Roxo, da **unificação dos campos matemáticos Álgebra, Geometria e Aritmética em uma única disciplina, a Matemática**, com o objetivo de uma abordagem articulada das mesmas, considerando que até então cada uma delas era estudada como disciplina independente.
> Posteriormente, de acordo com a autora, Euclides Roxo defendeu a ideia de que o ensino da geometria dedutiva deveria ser antecedido de uma abordagem prática da mesma destacando, ainda, que a concepção de currículo foi ampliada para além de uma listagem de conteúdos, o que incluía uma discussão sobre orientações didáticas. Porém pondera que os avanços e inovações ocorridos com a reforma de 1931 não se mantiveram na reforma de Gustavo Capanema, em 1942, e considera que as decisões curriculares, no Brasil, foram

> “historicamente marcadas por procedimentos bastante questionáveis, influenciados por questões políticas ou influências de poder de alguns grupos ou mesmo de pessoas (PIRES, 2008, 15 apud HECK e KAIBER, 2020, p. 2, grifo do autor).

Esta pesquisa, segundo a sua natureza é do tipo aplicada, uma vez que o objetivo deste trabalho é produzir conhecimento de aplicação prática em uma situação específica, neste caso melhorar a avaliação de discentes no Enem da Matemática. Quanto ao objetivo é exploratória e descritiva, em relação a 3ª parte da pesquisa (item III.), pois busca levantar conhecimento, estando esta pesquisa em fase preliminar, de apropriação das várias variáveis presente no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, e descritiva (item III.), pois segundo Gil (2010, p. 42) “as pesquisas descritivas têm como objetivo a descrição das características de determinada população ou fenômeno”. Podem ser elaboradas também com a finalidade de identificar possíveis relações entre variáveis. De acordo com esta exposição a pesquisa descritiva deriva de analisar os perfis dos entrevistados, distinguindo como um todo, conhecendo suas opiniões e interpretando os dados da análise.

Em relação a abordagem, trata-se de uma pesquisa quali-quantitativa, pois parte da análise das avaliações, indicadores e resposta aos questionários, no caso do Item III, levam posteriormente, a uma análise mais subjetiva, para maior entendimento do fenômeno estudado, através de gráficos e depois analisados e interpretados os números traduzindo-os em informações, que podem implicar em alterações, ou adaptações à metodologia do ensino, por exemplo.

Inicialmente, para a fundamentação teórica deste trabalho, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, ou seja, um estudo através do conhecimento contido em obras: livros, artigos, relatórios, sites e demais trabalhos científicos sobre assuntos de uma área do saber, subsidiando o autor de estudos e informações. Ou seja, utiliza-se de dados, ou de material teórico já trabalhados por outros pesquisadores, devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos (CERVO, BERVIAN e DA SILVA, 2007) e (GIL, 2010).

Caracterização do Projeto Piloto Aplicado na Escola Centro Educacional Anchieta (em relação a geometria)

A importância da Geometria no ensino fundamental, como componente curricular (disciplina), sempre esteve presente nas políticas públicas até a década de 1930, quando a disciplina de Desenho Geométrico fez parte do currículo escolar de 1931 a 1970. A implantação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional em 1961 tornou a disciplina de Desenho Geométrico não obrigatória na Educação Básica, assinalando, fortemente, o crescimento da Álgebra no ensino da Matemática que construiu vários problemas

O projeto piloto Tornando a Geometria, a Aritmética e a Álgebra componentes curriculares do ensino fundamental e médio tem como características: Tornar a Geometria, a Álgebra e a Aritmética componentes curriculares, ou seja, esses conhecimentos passam a ser, na concepção do ensino tradicional, deixam de ser conteúdo da Matemática, e passam a ser disciplinas com carga horária, com conteúdo e proposta programática. Isso possibilita o enfrentamento de alguns problemas persistentes na Educação Matemática, uma vez que: a Geometria deixa de ser "abandonada"; oportuniza maior maturidade do discente em relação aos conteúdos da Geometria, pois os conteúdos são tratados ao longo de um tempo maior; oportuniza maior tempo para trabalho extraclasse, visto que o tempo de relacionamento discente professor é maior, possibilitando as construções geométricas; propicia ao docente maior facilidade de generalizar, percorrendo do concreto ao abstrato.

Resultados

Neste capítulo são apresentados e analisados os resultados em relação ao projeto piloto com os índices do Ideb da escola Centro Educacional Anchieta, e as médias das notas dos discentes nas avaliações do Enem no período de 2014 a 2019.

Antes de apresentar e analisar os resultados obtidos neste trabalho, é importante trazer uma pequena discussão sobre o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) do Brasil. Tal discussão é fundamental para a compreensão do que é avaliado, como é avaliado, qual o significado da avaliação, ou seja, a concepção da avaliação e dos índices utilizados.

Indicadores da Educação Brasileira

Neste trabalho a principal referência são os PCN da Matemática. É interessante notar que a palavra "parâmetro" é fortemente ligada a Matemática, e relacionadas a variáveis e constantes. Assim, a ideia central contidas nos PCN é a de estabelecer um padrão nacional, para o ensino e aprendizagem, nesse caso da Matemática, a partir de características comuns presente no sistema educacional.

A avaliação, por ser uma etapa de todo planejamento, é discutida em várias partes da Matemática:

> O papel do professor e de intermediar os conteúdos necessários ao conhecimento geométrico pelos alunos, no entanto, o professor para cumprir sua meta de ensino, pode adequar o livro didático com a realidade dos discentes auxiliando os alunos no processo de aprendizagem, dinamizando de forma interdisciplinar, sempre visando o melhor aproveitamento dos conteúdos Geométricos abordados em sala de aula (SOUZA, 2020, p.72).

Os PCN estabelecem que o professor, como o agente que planeja o processo educacional, tem forte relação com os mecanismos de avaliação, influenciando e sendo influenciado pela avaliação.

> Numa reflexão sobre o ensino da Matemática é de fundamental importância ao professor:
> [...]
> • ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções (BRASIL, 1997, p. 29).

A partir desta reflexão foi feita a escolha do Saeb, e em especial o Idep e o Enem, como processo de avaliação do projeto piloto considerado os seguintes aspectos:

- A avaliação é independente dos professores, do projeto piloto, e da escola;
- A avaliação é planejada com base nos PCN, e mais recentemente, também, na BNCC;
- A avaliação do Enem adota a metodologia da Teoria da Resposta ao Item (TRI)[3];
- A avaliação é de âmbito nacional, permitindo a análise comparativa com outras escolas, com as medias local, regional e nacional;
- A avaliação é contextualizada com perfil interdisciplinar;
- A avaliação do Enem, por dar acesso ao ensino superior, é muito relevante para os discentes;
- A avaliação propiciar o estudo de séries de dados.

Resultados no Enem de Matemática e suas Tecnologias

Novamente é aconselhável, para uma melhor compreensão dos resultados, abordados nesta seção terciária, a leitura prévia da seção secundária, pois é relevante compreender duas situações: a turma que cursava o 3º ano do ensino médio em 2014, foi a primeira turma da

[3] Ramo da Teoria da Medida com ênfase no estudo de questionários e listas de itens, que permite identificar se a resposta vem do conhecimento, ou simples acaso.

Escola de Educação Básica Centro Educacional Anchieta a realizar o exame do Enem, dentro do projeto piloto; a primeira turma a cumprir todos os períodos letivos dentro do projeto piloto, será a turma que cursava o 6º ano do ensino fundamental em 2014. Assim, a partir dessa turma todas as demais concluirão o ensino médio dentro do projeto piloto. De acordo com a Tabela 5 a turma do 6º ano, em 2014, realizaria o Enem em 2020, entre os meses de outubro e dezembro com previsão da divulgação dos resultados em fevereiro de 2021, por esta razão a turma que cursava o 7º ano do ensino médio, em 2014, e que concluiu o 3º ano do ensino médio em 2019 é a principal turma em estudo, pois essa turma cumpriu 6 (seis), de 7 (sete), períodos na metodologia do projeto piloto. Lembrando que o 6º ano dessa turma foi realizado da forma tradicional. As médias das notas no Enem, aqui apresentadas são relativas as notas médias no Enem de Matemáticas e suas Tecnologias, abreviado como Enem MT.

A Tabela 6 a seguir, apresenta as notas médias de duas escolas privadas, uma escola federal, uma escola estadual e da EEBCEA, obtidas no Enem MT no período de 2014 a 2019. Essas notas médias estão entre as maiores médias obtidas por escolas de cada uma das redes de ensino do Pará. Essas escolas tiveram como critério de escolha terem as maiores notas médias estadual, nos anos de 2014 e 2015, em suas respectivas redes. As escolas escolhidas em relação a esse critério foram: Centro de Estudos John Knox (CEJK), Sistema de Ensino Equipe (SEE), Esc. de Ens. Infantil, Fundamental e Médio Tenente Rêgo Barros (EEIFMRB) e Escola Técnica Estadual Magalhães Barata (ETEMB). Foram escolhidas duas escolas privadas CEJKA e SEE, pois essas escolas atingiram as notas médias máximas estadual nos anos 2014 e 2015, respectivamente.

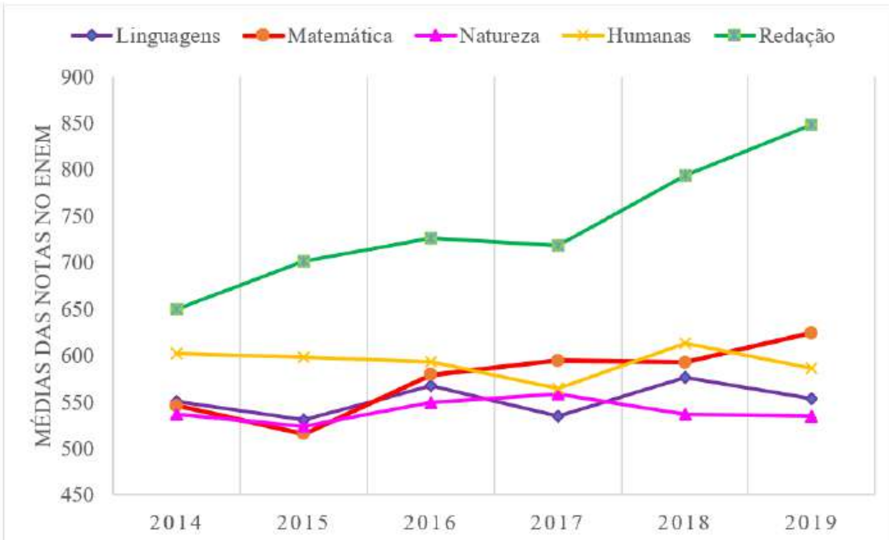
Tabela 6 - Comparação entre as Notas médias no Enem MT da EEBCEA e as Maiores Notas Médias no Enem MT Obtidas por Escolas das Redes de Ensino, no Período de 2014 a 2019

Escola	Rede	Munic.	2014	2015	2016	2017	2018	2019
CEJK	P	Belém	634,65	627,96	662,5	670,01	685	726,21
SEE	P	Belém	620,88	663,96	585,1	687,2	664,9	666,72
EEIFMTRB (1)	F	Belém	624,74	617,12	628,1	657,8	660,1	672,81
ETEMB	E	Belém	522,6	489,4	446,3	460,9	502,0	513,55
EEBCEA (2)	P	Itaituba	546,08	515,53	579,03	594,63	592,56	624,37
Diferença % entre (2) e (1)		14,40%	19,71%	8,47%	10,62%	11,40%	7,76%	14,40%

Fonte: Inep/Enem (2020) Microdados – Pesquisado pelo autor.

No Gráfico 3 são mostradas as notas médias da EEBCEA no Enem, nas 5 (cinco) áreas avaliadas no exame: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (Linguagens); Matemática e suas Tecnologias (Matemática) em vermelho; Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Natureza), Ciências Humanas e suas Tecnologias (Humanas) e Redação. O período das notas médias vai de 2014 a 2019. Na avaliação do Enem a redação tem um peso maior, pois a partir da redação se avalia a capacidade de comunicação, interpretação, conhecimento de gramatical verbal e geral. Portanto a redação tem um peso maior na média geral da escola.

Gráfico 3 - Notas médias no Enem da EEBCEA nas Cinco Áreas de Avaliadas pelo Enem, Realizadas no Período de 2014 a 2019.



Fonte: Inep/Enem (2020) Microdados – Pesquisado pelo autor.

O Gráfico 3 apresenta as informações mais relevantes para a EEBCEA, uma vez que a série de dados fornecem parâmetros importantes para o planejamento pedagógico da escola. Os dados coletados mostram que, em relação a avaliação do Enem, a escola tem trabalho com sucesso a Redação (curva verde), e que a aplicação do projeto piloto, levou a Matemática e suas Tecnologias (curva vermelha) a contribuir de forma mais efetiva com a média geral da EEBCEA no Enem. Inicialmente, em 2014, as notas médias no Enem MT foram inferiores às notas médias no Enem de Humanas, Linguagens e Redação. Em 2015 as notas médias no Enem MT foram inferiores a dos demais exames, entretanto após esse período as nota médias no Enem MT passaram a ter comportamento crescente, com uma pequena inflexão em 2018, mas voltando a crescer em 2019 mantendo-se inferior apenas a nota média da Redação. O gráfico indica que a escola deve realizar investimento pedagógico em relação as áreas de Humanas, Linguagens e em especial a área das Naturezas.

A apresentação do gráfico acima ressalta a importância de as escolas terem acesso aos microdados do Inep para realizarem avaliações mais profundas, no intuito de estabelecerem projetos pedagógicos para a melhoria dos indicadores e da educação, baseados em informações. Infelizmente as dificuldades em se obter informações mais detalhadas, dos microdados, levam a inutilidade dessas informações que já foram levantadas e disponibilizadas.

Considerações Finais

A Geometria como proposta disciplinar pode ser uma solução para aumentar os níveis de desempenho dos alunos do ensino fundamental, haja vista, sua abordagem Matemática dispor de um grande número de preposições que usadas separadamente, podendo ser um fator relevante na complementação de suma importância no ensino da disciplina de Matemática.

Podemos observar neste trabalho que a geometria a partir do movimento da matemática moderna, desestimulou o ensino da geometria, com mudanças significativas na grade curricular de matemática.

Segundo Pavanello (1993), a Geometria tem sofrido com essas mudanças ocorridas com o MMM e sendo em grande parte trabalhada nos anos finais de cada turma. A Geometria tem um poder de fazer com que os alunos possam compreender e enxergar o espaço em que vivem, sendo um pilar fundamental na construção do desenvolvimento cognitivo e do raciocínio lógico.

O ensino-aprendizagem da Geometria pode desenvolver as habilidades e competências na compreensão do espaço e as diversas situações do cotidiano em que o individua estão inseridas, desde que ações voltadas para uma melhor atenção a este campo sejam elaboradas e executadas com o objetivo de integrar a geometria aos diversos aspectos interdisciplinares do ramo da matemática e suas tecnologias.

O professor para cumprir sua meta de ensino, pode adequar o livro didático com a realidade dos discentes auxiliando os alunos no processo de aprendizagem, dinamizando de forma interdisciplinar, sempre visando o melhor aproveitamento dos conteúdos Geométricos abordados em sala de aula. Em seu Planejamento de ensino deverá observar a contextual idade e a interdisciplinaridade dos temas propostos para o uso da Geometria no cotidiano de cada um, podendo assim, usar as novas tecnologias como ferramenta de ensino aprendizagem e suas infinitas possibilidades de aplicação.

No anseio de um material didático e um plano de ensino baseado na BNCC, capaz de se introduzir gradativamente e de forma contextualizada e interdisciplinar os conteúdos geométricos é que se faz necessário um acervo de livros específicos de geometria voltados para o ensino fundamental, solidificando a base geométrica do discente e desenvolvendo toda a Matemática com uma visão contextualizada da realidade ao qual está inserido que o levará a evolução de seus conhecimentos nesta importante disciplina para a sociedade.

Referências

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 1ª a 4ª Série. In: Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Fundamental (SEF), Brasília, DF, 1997. Disponivel em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 06 set. 2019.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 5ª a 8ª Série. In: Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Fundamental (SEF), Brasília, DF, 1998. Disponivel em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 06 set. 2019.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A.; DA SILVA, R. Metodologia Científica. 6ª. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

SOUZA, H. A Geometria como uma proposta disciplinar para o ensino Fundamental: um estudo de campo na escola Centro Educacional Anchieta no município de Itaituba. Santarém dissertação PROFMAT, 2020.

EVES, H. Geometria: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Tradução de Higino H Domingues. São Paulo, Atual, 1997: Atual Editora, 1997.

HISTÓRIA da Geometria. In: Wikipédia, a Enciclopédia Livre, Florida, 2019. Disponivel em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Hist%C3%B3ria_da_geometria&oldid=59013302>. Acesso em: 14 set. 2019.

MATEMÁTICA DA GRÉCIA ANTIGA. in: Wikipédia, a Enciclopédia Livre, Wikimedia Foundation, Florida, 2020. Disponivel em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Matem%C3%A1tica_da_Gr%C3%A9cia_Antiga&oldid=58626331>. Acesso em: 4 fev. 2020.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. Revista Zetetiké, Campinas, v. 1, n. 1ª, p. 7-17, 1993.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ. Guia para a elaboração e apresentação da produção acadêmica da Ufopa. 2ª. ed. Santarém: Organizadores: Creuza Andréa Trindade dos Santos; Mayco Ferreira Chaves, 2019. ISBN 978-85-65791-39-7. Disponivel em: <http://ufopa.edu.br/sibi/servicos-e-produtos/guia-de-normalizacao/>.

GIL, A. C. Como Elaborar Projetos de Pesquisa. 5ª. ed. São Paulo: Ed. Atlas S.A., 2010.

Análise de erros em questões de Proporcionalidade

Raul Francisco da Silva Nascimento[1]
Mario Tanaka Filho[2]

Introdução

Este trabalho foi escrito tendo por base a dissertação de mestrado de Silva (2017), que foi uma análise sistemática dos erros cometidos pelos alunos do 3º Ano do Ensino Médio de duas escolas do município de Santarém-Pa, com questões envolvendo o conteúdo de Proporcionalidade.

Como o conceito de Proporcionalidade está relacionado a diversas áreas do conhecimento como a Biologia, a Física, a Química e até na própria Matemática, alguns autores, como Silva (2008), defendem que o mesmo deveria ser trabalhado com os alunos durante toda a extensão do Ensino Fundamental e Médio. Porém, pela proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) trabalha-se Proporcionalidade no 3º ciclo (7º Ano) num prazo de um a dois meses. "Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento: Do raciocínio que envolva a proporcionalidade" (BRASIL, 1998, p. 65), eis aí a problemática da pesquisa que se revelou em questionamentos do tipo: Como trabalhar tantos tópicos matemáticos em tão pouco

[1] Egresso Profmat. E-mail: profraulsilva@bol.com.br
[2] Ufopa. E-mail: tanakafi@gmail.com

tempo? Qual metodologia de ensino mais eficaz a ser aplicada? Como abordar Proporcionalidade: por proporção ou por função?

De fato, a situação descrita despertou a inquietude da busca por soluções e de alternativas que melhorem os resultados do processo de ensino. Daí o trabalho em realizar uma análise dos erros cometidos pelos alunos nas resoluções de Proporcionalidade, com o intuito de criar o maior acervo possível de informações para serem usadas na elaboração de ações didáticas futuras focadas na melhoria da aprendizagem. Os erros não foram tomados simplesmente como deméritos ou punições, pelo contrário, foram bem quistos e de forma coerente analisados, refletidos, discutidos e catalogados tornando-os indicativos auxiliadores para o ensino. O estudo foi exploratório questionador, centrado na Análise de Erros de Cury (2007) e na Análise de Conteúdos de acordo com Bardin (2016). Para uma melhor visão sobre os itens utilizamos os aspectos da Engenharia de Construção de Itens, pois o conhecimento sobre os distratores e da estrutura de um item de múltipla escolha nos deu uma possibilidade incrível para melhor tratar os erros e com isso contribuir para a consolidação de nossa abordagem, onde o erro é tratado como informação importante para a elaboração de intervenções e ações didáticas que podem contribuir para um aprendizado de forma realmente significativa.

Neste capítulo, a ideia é apresentar de forma resumida um pouco das propostas e discussões que foram trabalhadas no trabalho de conclusão de curso de Silva (2017).

Referencial Teórico

Nesta seção vamos abordar os tópicos que serviram de arcabouço teórico para o desenvolvimento do trabalho.

1. Educação matemática

Os PCN enfatizam a resolução de problemas propondo-a como alicerce do processo ensino-aprendizagem, pois é justamente quando os conhecimentos adquiridos ganham sentido e funcionalidade. Corroborando com as ideias de Fiorentini e Lorenzato (2012), D'Ambrosio (2011) Polya (2006), cabe ao professor salvaguardar o objetivo maior do ensino que é a aprendizagem, averiguando com regularidade se suas propostas pedagógicas estão favorecendo o desenvolvimento do aluno. Eis aí a diferença citada por Fiorentini e Lorenzato (2012) entre o *matemático* e o *educador matemático*. Para o autor enquanto os *matemáticos* se ocupam na produção de novos saberes e utensílios matemáticos que proporcionem a construção pura e aplicada, através de meios "hipotético-dedutivos", os *educadores matemáticos* focam seus trabalhos com o uso de técnicas interpretativas e analíticas das ciências sociais e humanas, objetivando o progresso de conhecimentos e a formação crítica e humana do aluno. "Em resumo, podemos dizer que a matemática e a educação matemática possuem objetos distintos de estudo, cada qual com sua problemática específica, tendo suas próprias questões investigativas"

2. Avaliação escolar

O processo avaliativo implica num juízo do indivíduo, envolvendo conceitos específicos como: doutrina, princípios e valores. Segundo D'Ambrosio (2011) os modelos de como as avaliações estão sendo conduzidas, usando somente exames e testes, não respondem a questões pertinentes a atual situação do sistema escolar. Para o autor a avaliação de qualquer aprendizagem é intrínseca ao seu processo, "Não aprendeu a comer, sente fome". Avaliar passa a ser mais que medir, torna-se um processo amplo que busca, de fato, evidências da aprendizagem do aluno. De acordo com os PCN é essencial que a Matemática cumpra seu papel, de maneira equiparada e inerente, na construção das habilidades intelectuais dos alunos. A proposta dos PCN é que o processo de ensino e aprendizagem gere nos alunos as seguintes competências e habilidades divididas em duas vertentes:

- Representação e comunicação: (Desenvolvimento da capacidade de comunicação)

a) ler e interpretar textos; b) entender e usar tabelas, gráficos, expressões...; c) expressar-se de forma escrita e oral usando vocabulários corretos; d) redigir textos coerentes; e) detectar as variáveis nas situações problemas; f) usar o conhecimento geométrico na compreensão da realidade.

- Investigação e compreensão: (Desenvolvimento do raciocínio com capacidade de discutir processos naturais e tecnológicos)

a) elaborar e compreender situações reais; b) operar instrumentos de medição e de cálculo; c) construir hipóteses e antever resultados; d) formular estratégias de ataque a questões; e) estruturar o saber científico e tecnológico numa concepção interdisciplinar; f) dominar critérios e processos próprios das Ciências Naturais; g) entender a propriedade aleatória dos eventos naturais e sociais e usar ferramentas apropriadas para medidas, determinar amostras e realizar cálculo de probabilidades.

Os critérios determinados pelos PCN referentes à avaliação ditam que os mecanismos utilizados na ação de avaliar devem ser pautados na intencionalidade de desempenho dos alunos quanto às suas habilidades e competências previstas na matriz de referências. De acordo com Rabelo (2013), às matrizes de referência trazem o objeto de uma avaliação e são compostas por um grupo de descritores que dão indícios das habilidades dos alunos ansiadas em cada etapa do aprendizado e suscetíveis de serem conferidas em teste de desempenho.

3. O ensino de Proporcionalidade

Para Imenes (2008) a proporcionalidade, provavelmente, é o conceito matemático mais disseminado no mundo. Sua aplicabilidade abrange campos de diversas áreas do conhecimento como a Biologia, a Física, a Química, a Engenharia, além de muitos dos tópicos da própria Matemática como regra de três, frações, porcentagem, teorema de Tales, etc. Exercendo assim papel fundamental no âmbito escolar e colaborando no progresso cognitivo do aluno. Contudo, para Spinillo (2002), esse conceito vem sendo explorado de maneira mecanizada e não capacita o aluno a aprender a raciocinar proporcionalmente. Os PCN do Ensino Fundamental propõem o ensino de proporcionalidade no 6º e/ou 7º ano (terceiro ciclo). Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do raciocínio que envolve proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade (BRASIL, 1998, p. 65). Verifica-se então que o objetivo nessa etapa do ensino recai na construção do pensamento matemático do aluno, com o intuito de despertar o raciocínio proporcional. Contudo, o período de aplicação nas escolas tem duração de um ou dois meses no máximo para o professor trabalhar os tópicos de: razão; proporção; grandezas diretamente proporcionais; grandezas inversamente proporcionais; regra de três simples; regra de três composta; juros simples.

De acordo com Silva (2008), esse prazo é demasiadamente curto para se trabalhar tantos tópicos de forma conjunta e condensada. Isso acarretará danos à aprendizagem dos alunos, pois se o conceito de proporcionalidade se relaciona com vários outros da Matemática deveria então ser estudado continuamente sempre integralizado a esses conteúdos.

Os autores Geraldo Ávila e Elon Lages Lima debatem nos artigos "Razão, proporção e regra de três", "Ainda sobre regra de três", "Que são grandezas proporcionais?" e "Novamente a proporcionalidade", publicados na Revista do Professor de Matemática nas edições 8, 9, 9 e 12, respectivamente, o ensino de proporcionalidade depreendendo o "arcaísmo da abordagem tradicional", ou seja, a metodologia dita por Imenes (2008) como tradicional, "não se deve impor a solução dos problemas de proporcionalidade direta pela igualdade de duas razões" (TINOCO, 1997., p. 68). Para Lima (2012), deve-se explorar o conceito de proporcionalidade a partir de situações-problema, promovendo no aluno o poder de reconhecimento dessas situações em diferentes contextos. O "ponto crucial" na abordagem de proporcionalidade deve ser o entendimento da definição de grandezas proporcionais para que o aluno possa desenvolver um raciocínio proporcional e de posse desse entendimento elaborar estratégias de resolução de problemas, sem haver necessidade de regras mnemônicas ou quaisquer outros artifícios. Geraldo Ávila defende que as questões com relação à proporção devem ser ensinadas no contexto dos números reais, usando igualdades, equações e buscando definir grandezas diretamente e inversamente proporcionais através das equações $y = kx$ e $y = k/x$, com k sendo uma constante. Lima (2012) faz uma abordagem formal do conceito de proporcionalidade usando função matemática e definindo grandezas diretamente e inversamente proporcionais por meio das igualdades $f(nx) = nf(x)$ e $f(nx) = 1/n\ f(x)$, respectivamente.

4. Análise de conteúdo

De acordo com Bardin (2016) a Análise de Conteúdo é um conjunto de técnicas de investigação da comunicação que pondera o rigor da objetividade com a uberdade da subjetividade, produzindo indicadores quantitativos e/ou qualitativos. Seu objetivo é a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção com recorrência nesses indicadores. Sua natureza é empírica e assim sendo não dispõe de um modelo exato, porém pode ser fixadas regras de procedimentos para sua operacionalização. A mensuração dos dados obtidos com o foco na frequência com que surgem caracteriza uma análise quantitativa ao passo que uma análise qualitativa busca identificar a existência ou a carência de uma característica qualquer, específica ou predominante no conteúdo analisado. Na prática, a Análise de Conteúdo no trabalho foi uma análise de respostas a questões abertas envolvendo Proporcionalidade, partindo de uma leitura flutuante até a definição da proposta de análise, ou seja, como classificá-las e qual critério a ser obedecido.

Segundo Bardin (2016) e Minayo (2000) o procedimento de deslinde, regularização e representação do conteúdo de mensagens, fornido pela Análise de Conteúdo, divide-se em três momentos discrepantes do estudo: a pré-análise; a exploração do material e o tratamento dos resultados obtidos e interpretação. A pré-análise é a fase de organização das ações e do planejamento do desenvolvimento das operações sucessivas, é onde ocorre a escolha do material a ser analisado, com o objetivo de operacionalizar e sistematizar as ideias iniciais. Na exploração do material é feita a codificação dos dados brutos do estudo. De maneira conveniente administram-se sistematicamente as decisões tomadas na pré-análise. A codificação consiste essencialmente de procedimentos manuais como recorte, contagem, catalogação e especificação de acordo com as normas adotadas. Para Cury (2010) esta fase é dita descrição analítica, abrange um estudo minucioso do corpus usando mecanismo de unitarização (processo de releitura do material buscando definir unidades de análise) e categorização. Bardin (2016) defende que neste ínterim o analista deverá ter com o tratamento dos dados brutos resultados evidenciados e válidos, resignados a provas estatísticas. Algumas operações estatísticas como a porcentagem e análise fatorial possibilitaram edificar diagramas, figuras e até gráficos das informações obtidas. Dispondo de resultados expressivos e insuspeitos é possível preconizar inferências e antecipar esclarecimentos a respeito dos objetivos pretendidos ou redirecionar o estudo pelo surgimento inusitado de novas evidências. A autora diz que essa fase exige um aprofundamento da análise sobre os resultados obtidos, pois é uma característica individual a maneira de produzir uma categorização, a intuição, as ideias, o instinto, a assimilação, a percepção e a visão que orienta a pesquisa são peculiares de cada pesquisador.

5. Análise de erros

Segundo Cury (2007), com relação à pesquisa, a Análise de Erros caracteriza-se por apresentar pontos incomuns com temas da Educação Matemática e da própria Matemática. Considera a Análise de Erros uma "tendência na Educação Matemática", pois a mesma utiliza subsídios da Matemática, nas suas vertentes filosófica e histórica, além de outras áreas, como Educação, Psicologia, Antropologia e Sociologia.

Tem-se então que o erro constitui um saber, de alguma forma, adquirido pelo aluno, sendo necessário levá-lo a questionar suas respostas, seus argumentos e seus métodos de resoluções. Entretanto, não se deve tirar sua confiança com uso desnecessário de afirmações do tipo "o que você está fazendo é errado, o correto é de outra forma", nem fazê-lo repetir exaustivamente, tornando o processo de aprendizado mecânico e tedioso. Portanto a Análise de Erros na resolução de situação-problema deve ser uma prática ligada à aprendizagem.

O aproveitamento dos erros na aprendizagem proporciona um feedback dos alunos a respeito da metodologia aplicada. Nesse processo um fato importante chama a atenção, para o aluno o erro cometido inexiste e o mesmo só será percebido caso o professor o incentive a analisar sua própria produção. Somente após tomar consciência do erro o aluno poderá compreendê-lo e superá-lo. Essa reflexão torna-se imprescindível no contexto da pesquisa educacional, pois compreende concomitantemente saberes: científico, edificado na sala de aula e avaliativo. Para ficar a par da existência do erro, redefinir e corrigir seu raciocínio é necessário que o aluno seja ou se torne um ser ativo, com autonomia suficiente para interagir com o objeto de conhecimento e com outros sujeitos envolvidos no estudo. Essas ações educativas estão embasadas na estruturação do conhecimento e do desenvolvimento cognitivo. Uma perspectiva didática poderá ser dada pela Análise de Erros, desde que o professor conheça e busque compreender o erro, "os erros da aprendizagem servem positivamente de ponto de partida para o avanço, na medida em que são identificados e compreendidos" (LUCKESI, 2011, p. 138). Na análise das respostas dos alunos o importante não é o acerto ou o erro em si, mas os modos de assimilação que eles apresentam de certos conhecimentos na elaboração de textos escritos, podendo revelar suas dificuldades no aprendizado, Cury (2007).

Conforme Rabelo (2013), às avaliações constituídas de múltiplas escolhas (assim como as subjetivas) previamente elaboradas (de maneira que as alternativas incorretas sejam os prováveis erros cometidos pelos alunos) são mecanismos de investigação de erros. O elaborador, com certeza, não conseguirá pôr nas alternativas incorretas todos os prováveis erros nem mesmo afirmar categoricamente que a marcação de uma dessas alternativas foi em função do pensamento equivocado imaginado pelo professor na formulação da avaliação, mas irá desfrutar de um conjunto de informações que o auxiliarão no refinamento das habilidades desses alunos.

6. Engenharia de Construção de Itens

De acordo com Rabelo (2013), foi necessária a reformulação ocorrida nas avaliações educacionais, desde a formulação a metodologia estatística para a interpretação dos resultados. A Engenharia de Construção de Itens é uma ciência emergente, que fundamenta, com um conjunto de normas e regras, o processo de elaboração de avaliações. Esta ciência caracteriza-se por valorizar a Matriz de Referência e os Itens.

A Matriz de Referência agrupa as competências e habilidades que cada estudante deve apresentar após o processo de aprendizagem. Por vez, os Itens são as questões que compõem a avaliação, elaborados a partir da matriz adotada. Mas o que seriam essas competências e habilidades? Na verdade, são as expectativas que os órgãos competentes criaram para possibilitar o levantamento de dados educacionais, como o nível de aprendizagem dos estudantes.

Segundo Rabelo (2013) o item serve de pilar para a construção dos indicadores de qualidade que produzirão material para a elaboração das ações de melhoria do processo de ensino e aprendizagem. Sendo importante salientar a diferenciação entre item de prova e uma prova: cada item de prova é uma circunstância previamente formulada, que vai estimular o indivíduo a dar uma resposta, transformando-se em uma amostra de desempenho associada a um instrumento distinto antevisto em uma grade de referência. Ao passo que uma prova é a solicitação para que alguém exponha seus conhecimentos objetivando avaliar características antecipadamente definidas. Ainda segundo o autor, a estrutura básica de um item de múltipla escolha divide-se em três partes relacionadas de maneira coesa e coerente: texto-base, enunciado (ou comando) e as alternativas (gabarito e os distratores).

Aspectos Metodológicos

Agora vamos tratar das etapas do desenvolvimento do estudo, os métodos utilizados na pesquisa de campo e a forma adotada para a organização dos dados obtidos. O trabalho teve como ponto de partida, em abril de 2016, a definição do objeto de estudo, cuja escolha foi pautada de acordo com: a relevância do conteúdo no estudo da Matemática; o quão explorado e debatido foi anteriormente; a incidência nas provas do ENEM; a aplicabilidade em situações problemas; o nível de aprendizado atingido atualmente; a funcionalidade em soluções de situações problemas; as tendências de ensino.

A etapa seguinte foi o inventário do referencial teórico bibliográfico, onde buscou-se por autores que pudessem dar embasamento nas temáticas: história da Proporcionalidade; análise de conteúdo; análise de erros; educação matemática; resolução de problemas; avaliação escolar. A averiguação bibliográfica estendeu-se ainda ao estudo da Engenharia de Construção de Itens e aos PCN´s.

A pesquisa se desenvolveu em dois colégios: Colégio Dom Amando e Colégio Álvaro Adolfo da Silveira, uma da rede particular e outra da rede pública de ensino, respectivamente. Para a análise das respostas dos alunos utilizou-se uma turma do 3º ano do ensino médio do turno da manhã, de cada uma dessas escolas. Foram trabalhados questionários de 75 (setenta e cinco) alunos dessas turmas, 35 alunos (trinta e cinco) do Colégio Dom Amando e 40 alunos (quarenta) do Colégio Álvaro Adolfo da Silveira.

O encontro com os alunos foi dado inicialmente por uma conversa informal, com o intuito de debater as concepções relativas ao estudo de proporcionalidade. Nesta atividade foram ouvidos depoimentos dos alunos a respeito de suas dificuldades no aprendizado de Matemática.

Expuseram então: a) falta de hábito de estudo; b) antipatia com a disciplina; c) dificuldade com cálculos. No encontro seguinte, foi aplicado o questionário com os quatro itens de múltiplas escolhas, cuja duração foi de 40 (quarenta) minutos, com 5 (cinco) minutos e tolerância. Os itens do questionário aplicado na pesquisa de campo foram embasados na Engenharia de Construção de Itens com a preocupação de manter a imparcialidade na interpretação do aluno e com o cuidado de averiguar a relação com os seus prováveis erros para que os mesmos pudessem ser usados como fonte de estudo. Foram objetivos na elaboração dos itens: conceber os itens cumprindo as orientações da Engenharia de Construção de Itens; ter como classificar os erros efetivados pelos alunos; manter a coerência com as resoluções dos PCN´s.

Com a qualificação dos distratores, os erros dos alunos puderam ser deduzidos e classificados por categorias. O passo seguinte foi de procurar as causas iminentes desses erros

utilizando a abordagem de Análise de Conteúdo. Seguiram-se então as três fases apontadas por Bardin (2016): a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados. Primeiramente foi feita uma leitura flutuante, organizando o material de acordo com a formulação de hipóteses dos erros apresentados nos distratores de cada item. Após a sistematização dos documentos, definiu-se o corpus, ou seja, o domínio específico do foco do estudo que nesse caso são os erros cometidos na marcação nos itens do questionário aplicado. A exploração do material, de caráter interpretativo, ocorreu de forma individual buscando: a) entender quais e como os fundamentos matemáticos foram aplicados pelos alunos; b) esclarecer, através de suas marcações, o mecanismo utilizado para fazê-lo.

A próxima etapa foi o tratamento de resultados, com a realização da descrição dos erros cometidos pelos alunos representados por tabelas e gráficos. Essa análise além de concretizar as hipóteses do estudo serviu como mecanismo de reconhecimento da construção

do aprendizado das turmas.

Resultados e Discussões

As observações foram norteadas em conformidade com as competências e habilidades de uma matriz de referência construída de maneira fidedigna aos moldes da matriz adotada pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP. Contudo, é importante ressaltar que foram utilizadas somente algumas das competências e habilidades da matriz de referência do INEP, que cada área de conhecimento foi formada por suas competências e habilidades representadas por C e H, respectivamente e que os eixos cognitivos dados foram:

I – Dominar Linguagem (DL): ter domínio do uso da linguagem matemática;

II – Compreender Fenômenos (CF): entender os processos e conceitos matemáticos;

III – Enfrentar Situações-problema (SP): selecionar os dados e tomar decisões que o ajude a resolver situações-problemas;

IV – Construir Argumentos (CA): elaborar argumentações consistentes que possam respaldar suas soluções;

V – Elaborar Propostas (EP): através dos conhecimentos desenvolvidos, apresentar propostas de intervenção.

É dada a seguir a relação das competências e habilidades da Matriz de Referência usada:

Competências de área 1 (C1) – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e inteiros. Habilidades: H1 – Reconhecer significados e representações dos números e operações; H2 – Perceber padrões numéricos; H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos; H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico; H5 – Avaliar intervenções usando conhecimentos numéricos.

Competências de área 2 (C2) – Construir noções de grandezas e medidas. Habilidades: H6 – Identificar relações entre grandezas e unidades de medidas; H7 – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas; H8 – Avaliar o resultado de uma medição; H9 - Avaliar intervenções usando conhecimentos de grandezas e medidas.

Competências de área 3 (C3) – Construir variações de grandezas. Habilidades: H10 – Identificar a relação de dependência entre as grandezas; H11 – Resolver problemas com grandezas direta e inversamente proporcionais; H12 – Analisar informações de variação de grandezas; H13 - Avaliar intervenções usando conhecimentos de variação de grandezas.

Competências de área 4 (C4) – Modelar problemas usando representação algébrica. Habilidades: H15 – Identificar representações algébricas que expressem a grandeza; H16 – Interpretar gráfico cartesiano com relações às grandezas; H17 – Resolver problemas de modelagem de conhecimentos algébricos; H18 – Uso de conhecimentos algébricos para elaborar argumentos; H19 - Avaliar intervenções usando conhecimentos algébricos.

Portanto a classificação de cada item foi dada de acordo com a competência/habilidade mais significativa na sua resolução. Para as discussões, os erros identificados no questionário avaliativo foram enumerados e classificados em 16 categorias. A finalidade dessa categorização foi de poder quantificar o número de ocorrências dos erros cometidos pelos alunos em cada um dos itens, o que facilitou observar a relação entre eles. Para uma análise mais rápida e precisa, as 16 categorias de erros foram distribuídas em cinco classes de acordo com a semelhança observada entre elas:

Classe A: Caracteriza-se por erro no entendimento do enunciado, mas com cálculos corretos.

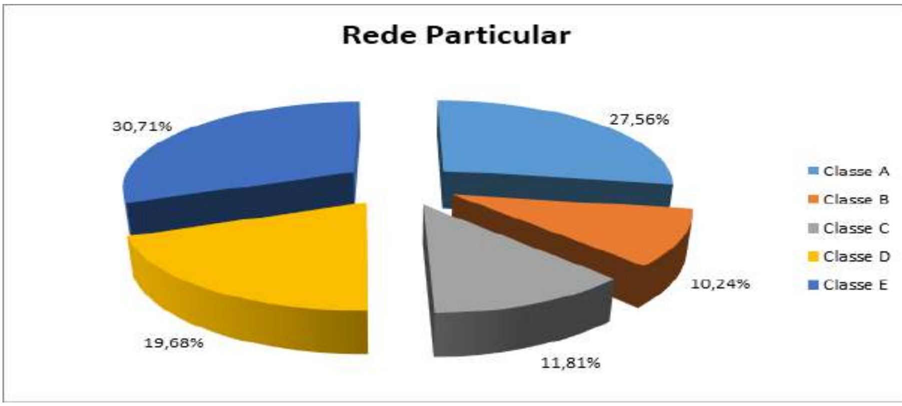
Classe B: Caracteriza-se por entendimento correto do enunciado, mas com erro de cálculo.

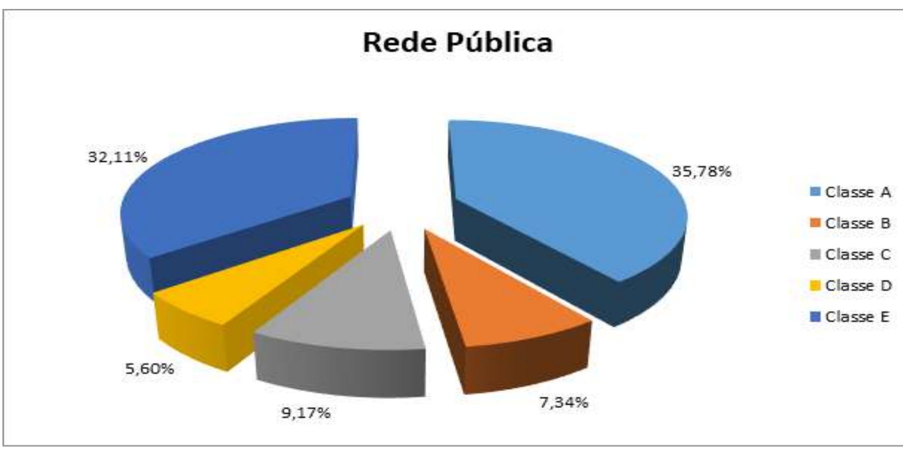
Classe C: Caracteriza-se por entendimento correto, mas com falha na conclusão do cálculo.

Classe D: Caracteriza-se por erro no entendimento do enunciado e no cálculo.

Classe E: Caracteriza-se pelo uso equivocado das alternativas para criar argumento de resposta.

A distribuição dessas classes nos erros cometidos pelos alunos da rede privada e da rede particular está disposta nos gráficos a seguir:



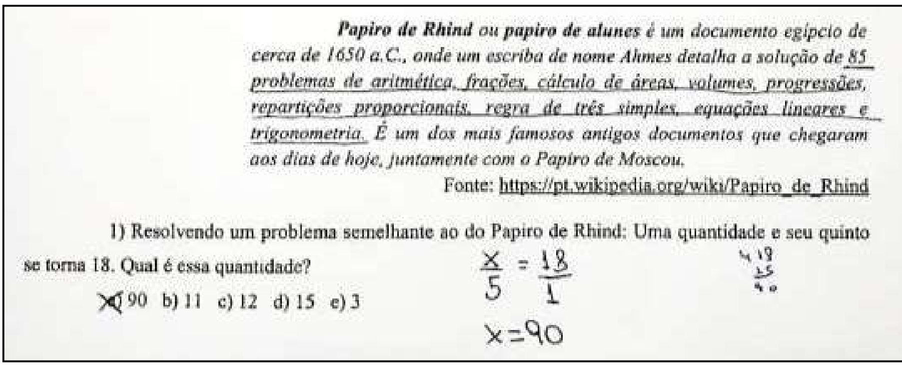


A classe A e a classe E foram as que apresentaram maior incidência, este fato foi um indicativo do não desenvolvimento dos eixos cognitivos: Compreender Fenômenos (CF) e Construir Argumentos (CA). Além de explicitar a carência de algumas competências e habilidades.

A seguir apresentam-se dois exemplos de descrições das competências e habilidades ausentes nos alunos que cometeram erros da classe A:

Das Competências de área 1 (C1), Habilidade 4 (H4): Neste exemplo o aluno que marcou a alternativa a) 90 do item 1, além de não compreender corretamente o enunciado e nem montar a proporção como deveria, não foi capaz de avaliar a razoabilidade do resultado, pois se uma quantidade somada com sua quinta parte é igual a 18 essa quantidade não poderia ser maior que 18.

Figura – Resolução de aluno da escola pública.



***Papiro de Rhind** ou **papiro de alunes** é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares e trigonometria. É um dos mais famosos antigos documentos que chegaram aos dias de hoje, juntamente com o Papiro de Moscou.*

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Rhind

1) Resolvendo um problema semelhante ao do Papiro de Rhind: Uma quantidade e seu quinto se torna 18. Qual é essa quantidade?

a) 90 b) 11 c) 12 d) 15 e) 3

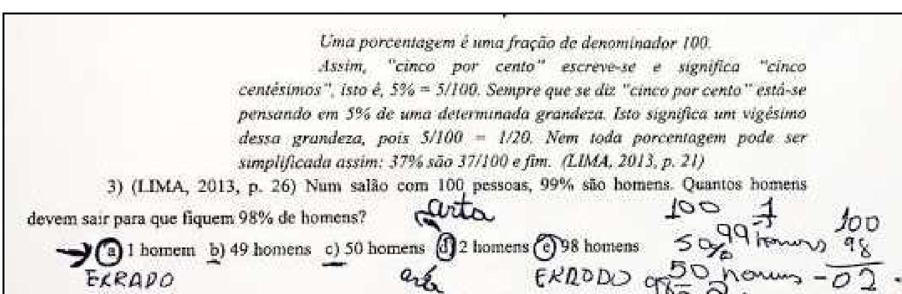
$\frac{x}{5} = \frac{18}{1}$

$x = 90$

Fonte: Autores

Das Competências de área 2 (C2), Habilidade 7 (H7): Neste exemplo o aluno que marcou a alternativa d) 2 homens do item 3, pois não foi capaz de resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas;

Figura – Resolução de aluno da escola particular.



Uma porcentagem é uma fração de denominador 100. Assim, "cinco por cento" escreve-se e significa "cinco centésimos", isto é, 5% = 5/100. Sempre que se diz "cinco por cento" está-se pensando em 5% de uma determinada grandeza. Isto significa um vigésimo dessa grandeza, pois 5/100 = 1/20. Nem toda porcentagem pode ser simplificada assim: 37% são 37/100 e fim. (LIMA, 2013, p. 21)

3) (LIMA, 2013, p. 26) Num salão com 100 pessoas, 99% são homens. Quantos homens devem sair para que fiquem 98% de homens?

a) 1 homem b) 49 homens c) 50 homens d) 2 homens e) 98 homens

ERRADO

Fonte: Autores

Considerações Finais

A realização dessa pesquisa fortaleceu argumentos já conhecidos, com a experiência da docência dos autores, a respeito das dificuldades dos alunos na aprendizagem de proporcionalidade, do uso de metodologias sem rendimento, do enrijecimento dos métodos avaliativos e da carência de novidades no processo de ensino. De fato, evidenciou a importância do conceito de proporcionalidade e a necessidade de adequações e melhorias nas metodologias de ensino, para que realmente haja aprendizagem e fixação de conhecimento significativo. Porém, numa visão mais ampla, o trabalho favoreceu o surgimento de prerrogativas em relação ao estudo, às avaliações e a obras futuras.

No início da pesquisa havia uma hipótese de trabalho, que era analisar e classificar os

erros, com o intuito de construir o maior acervo possível de informações quanto ao aprendizado da proporcionalidade e as estratégias usadas pelos alunos nas resoluções, o que

justificou a escolha do objeto de pesquisa. O esperado era que os alunos do Ensino Médio já

tivessem uma boa interpretação de texto e vencido as dificuldades com as operações básicas

da aritmética; no entanto os erros com as maiores frequências foram da Classe A e da Classe

E, ambas caracterizadas pelo não entendimento do enunciado e uso equivocado das alternativas para criar argumentos de resposta. Este fato abriu um leque de questionamentos:

a) como esses alunos puderam concluir o Ensino Fundamental? b) quais assuntos deveriam servir de pré-requisitos para a aprendizagem de proporcionalidade? c) como criar ações didáticas interdisciplinares que possam sanar o problema de má interpretação de texto? Além disso, o desenvolvimento da obra revelou a importância da Engenharia de Construção de Itens, guiando os estudos rumo a novos questionamentos, tais como: a) qual a maneira de avaliar a qualidade dos distratores? b) a que ponto um distrator bem elaborado pode induzir o aluno e influenciar sua resposta? c) quantos distratores poderão ser previstos? d) qual o número ou a percentagem de incidência de um distrator bem elaborado? e) a partir de qual série é viável o uso da engenharia de itens? O aprendizado dessa engenharia trouxe consigo um campo de conhecimentos envolvente e empolgante como a Análise de Conteúdo, a Análise de Erros e a metodologia de resolução de problemas. Dentre as três etapas da análise de conteúdo, de acordo com Bardin (2016), a realização da Categorização dos erros (com a construção de oito quadros que facilitaram a representação) foi um divisor de águas no estudo, pois após essa etapa a forma de tratamento dada a esses erros passou a ser diferenciada. Este fato ficou marcado na elaboração dos distratores, pois foi preciso considerar a categorização como o universo a ser trabalhado. Porém, mesmo com todo rigor aplicado nesse estudo mais questionamentos foram necessários: a) há a necessidade de uma retomada na categorização por conta de respostas evasivas que não foram incluídas? b) se há essa necessidade, como fazer essa inclusão? A ação avaliativa elaborada e aplicada neste estudo teve como eixo de conteúdo o erro cometido que funcionou como um canal de informações. Constatou-se então que o erro é a matéria prima do aprendizado e o mesmo deve ser identificado e tratado na ótica da metodologia de Análise de Erros. Este estudo propôs algumas inquietudes a respeito do ensino de Proporcionalidade já investigadas por outros pesquisadores, contudo não se ateve a apresentar intervenções no reparo dessas dificuldades e erros. Tem-se então a oportunidade nos trabalhos futuros da continuação dessa pesquisa ou de investigações similares da mesma temática. Por fim, o erro é uma amostra de um saber adquirido pelo aluno, dando ao docente informação necessária para a elaboração de ações didáticas que busquem a melhoria da metodologia de ensino aplicada.

Referências

Ávila, Geraldo. **"Ainda sobre a regra de três."** *Revista do Professor de Matemática, São Paulo* 9 (1986): 1-9.

Ávila, Geraldo. **"Razões, proporções e regra de três."** *Revista do Professor de Matemática* 8 (1986): 1-8.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2016.

BRASIL, Ministério da Educação**. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino**

Fundamental. 5ª à 8ª série, Brasília, SEF, 1998.

CORREIA, C. E. F. **Matemática, Análise de Erros e Formação Continuada de Professores Polivalentes**. São Paulo: Porto de Ideias, 2010.

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. (1ª ed.) (1ª reimp.). Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

COSTA, E. F. **Elaboração de itens para avaliação em larga escala**. São Carlos. Dissertação de Mestrado, PROFMAT, 2018.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 3ª ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra. 2011.

IMENES, L. M. P. **Proporcionalidade um tratamento funcional. Slides dos Seminários de Ensino de Matemática Sema**, 2008. Disponível em https://cutt.ly/JxcIFhw. Acesso em abril de 2017.

JÚNIOR, José Ruy Giovanni; CASTRUCCI, Benedito. **A Conquista da matemática**, 7° ano. ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009

LIMA, Elon L. et al**. Matemática do ensino médio. Volume 1**. Rio de Janeiro: SBM. 2012.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar**. São Paulo: Cortez, 2011.

ORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática: ideias e desafios**, 6ºano. Ed. São Paulo: Saraiva 1998.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de

Janeiro: Interciência, 2006.

SILVA, E. A. **Pensamento proporcional e regra de três: estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas**. Dissertação de Mestrado, UTP, 2008.

SILVA, R. F. **Análise de Erros no processo de resoluções de proporcionalidade**. Dissertação de Mestrado, PROFMAT, 2017.

RABELO, M. **Avaliação educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SPINILLO, A. G. **O papel das intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção.** Psicologia Reflexiva e Crítica. Porto Alegre, v. 15, n. 3, p. 475-487, 2002.

Análise de erros com questões de aritmética da Obmep

Michael Machado de Moares[1]
Mario Tanaka Filho[2]
Rodrigo Medeiros dos Santos[3]

Introdução

Sabe-se que o ensino de Matemática é alvo de debates nos mais diversos níveis escolares, principalmente no que se refere ao ensino básico. Diversos indicadores, tais como SAEB, ENEM e PISA, mostram que existe muito a ser feito para se ter um ensino de Matemática desejável na Educação Básica. Talvez seja a Educação Básica o maior desafio da Educação no Brasil. Na última pesquisa realizada pelo PISA (MORENO, 2016) o país apresentou a primeira queda desde 2003 em Matemática, e constatou que sete em cada dez alunos brasileiros, com idade entre 15 e 16 anos, estão abaixo do nível básico de conhecimento. A avaliação foi realizada em 70 países, a posição do Brasil em matemática foi 66ª. "Os resultados do Brasil no Pisa são gravíssimos porque apontam uma estagnação em um patamar muito baixo. 70% dos alunos do Brasil abaixo do nível 2 em matemática é algo inaceitável. O Pisa é mais uma evidência do que vemos todos os dias nas escolas", afirmou Denis Mizne, da Fundação Lemann (MORENO, 2016).

1 IFAP. E-mail: mychaell.moraes@gmail.com
2 Ufopa. E-mail: tanakafi@gmail.com
3 Ufopa. E-mail: rodrigomedeiros182@hotmail.com

O fato é, nesse momento deve-se criar alternativas objetivando reverter este cenário, buscando identificar no que se baseiam as principais dificuldades dos alunos, no que se refere à aprendizagem, para posteriormente desenvolver métodos que possibilitem ao menos amenizar tais dificuldades. Assim, como forma de contribuir para melhoria do ensino, foi realizado este trabalho, tendo por base a técnica de Análise de Erros. Esta técnica vem ganhando destaque no Brasil por conta dos estudos de vários pesquisadores, dentre os quais cita-se Cury (2007), a qual vislumbra a possibilidade de utilizar a Análise de Erros como Metodologia de Ensino ou Metodologia de Pesquisa.

Este capítulo foi escrito com base no trabalho de conclusão de curso de MORAES (2018), cujo objetivo foi realizar uma análise sobre os erros produzidos por alunos da Educação Básica em problemas de Aritmética retirados da 12a OBMEP realizada em 32 cidades do Oeste do Pará, onde são elencados os erros cometidos com maior frequência, distribuindo a análise em três níveis segundo a divisão na OBMEP. A justificativa pela escolha dos problemas de Aritmética dá-se em razão de estes comporem a base dos tópicos matemáticos. Acredita-se que esta produção pode produzir a reflexão dos professores quanto a visão dos erros no processo de ensino e aprendizado, mostrando como as respostas dos alunos, ainda que incorretas podem conduzir o aprendizado rumo a um grau elevado, se forem trabalhadas de forma adequada.

Fundamentação Teórica

Será feito um passeio pela história da OBMEP, logo depois será posto em pauta algumas reflexões quanto o ensino de Aritmética. Por fim expondo sobre Análise de Conteúdo, revelando as etapas de tal procedimento. Finalizando com a Análise de Erros, sendo instituída uma reflexão sobre a visão do erro no processo de ensino, e apresentando a análise de erros como metodologia de pesquisa.

OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, é um projeto de inclusão social que objetiva descobrir, incentivar e reconhecer talentos em processo de formação nas diversas áreas do conhecimento em todo território nacional. Esta vem sendo realizada desde 2005 pelo Ministério da Educação (MEC), pelo Ministério de Ciências e Tecnologia (MCT) em parceria com o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) (BRASIL, 2017a).

A OBMEP foi inspirada no projeto NUMERATIZAR, realizado em 2003 no estado do Ceará, cujo foco era desenvolver estratégias para melhorar o ensino de Matemática na Educação Básica, defendendo que "descobrir, divulgar e aprimorar os talentos de nossa juventude é a forma mais efetiva e rápida de inclusão social" (SCHIRLO; MEZA, 2013, p. 5).

A OBMEP vem sendo realizada anualmente, incentivando alunos e professores, contribuindo de forma significativa para o avanço da educação básica, ela é composta por três níveis, o nível 1 abrange os alunos do 6o ano e 7º ano do ensino fundamental, o nível 2 é composto pelos alunos do 8º ano e do 9º ano do ensino fundamental, e o nível 3 é efetuado pelos alunos do ensino médio. Desde sua implantação a quantidade de participantes tem sido expressiva, chegando a ser considerada uma das maiores competições de matemática do planeta. A OBMEP cumpre seu papel e a cada nova edição revela novos talentos, além de incentivar escolas e professores a prepararem seus alunos.

Tabela 2.1 – Dados quantitativos da OBMEP

Ano	Qtd. de Escolas	Qtd. de alunos na 1ª fase	Qtd. de alunos na 2ª fase	% M. P
2005	31031	10.520.831	457.725	93.50
2006	32.655	14.181.705	630.864	94,50
2007	38.450	17.341.732	780.333	98,10
2008	40.397	18.336.029	789.998	98,70
2009	43.854	19.198.710	841.139	99,10
2010	44.717	19.665.928	863.139	99,16
2011	44.691	18.720.068	818.566	98,90
2012	46.728	19.166.371	823.871	99,42
2013	47.144	18.762.859	954.926	99,35
2014	46.711	18.192.526	907.446	99,41
2015	47.580	17.972.333	889.018	99,48
2016	47.474	17.839.424	913.889	99,59
2017	53.231	18.240.497	941.630	99,57

Fonte: Dados do Portal da OBMEP

Nota: % M. P - Percentual de municípios que participaram; Qtd. - Quantidade

A OBMEP completou 15 anos em 2020. Desde 2005 destina-se a revelar talentos em todas as partes do Brasil e assim produz resultados significativos com impacto direto no ensino da Matemática. De acordo com Brasil (2017b), por meio do certame, foi possível constatar que de fato os talentos existem, dentre os premiados, destacou-se pequenas cidades que demonstraram excelentes resultados. Firmando o slogan "Revelando Novos Talentos para o Brasil", inspirando outras escolas, professores e alunos em todos os cantos do país.

Ensino de Aritmética

A aprendizagem e o ensino de Matemática possuem extrema importância em todos os estágios da formação intelectual, pois, em concordância com Brasil (1998, p. 24), "A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo, e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural". Portanto nessa ótica, o estudante através do conhecimento matemático será capaz de compreender o mundo à sua volta, interagido com ele, estando apto a instruir mudanças no meio em que vive. Assim, o anseio do ensino de Aritmética é produzir significado para os alunos, ou seja, influenciar diretamente em suas práticas cotidianas, tornando-se legítimo e consistente.

A etimologia do termo Aritmética procede do latim arithmetica, com origem na palavra grega aritmetikos, que por sua vez é composta por arithmos que se refere a número, e por tiko que se remete a ciência, portanto, aritmética significa ciência dos números. A Aritmética surgiu naturalmente pela necessidade do homem de contar, esta é a base de toda a Matemática, nela se estabelecem conceitos importantes, como os sistemas e base posicional, representações dos algarismos, operações, estudo de frações, conceitos sobre múltiplos e divisores, dentre outros.

Análise de Conteúdo

A análise de conteúdo consiste em um conjunto de instrumentos metodológicos em constante aperfeiçoamento que se aplicam a conteúdos diversificados que podem ser aplicados em diversas áreas. Destaca-se nesse tema os esforços de Bardin (2016). Pode-se afirmar que a análise de conteúdo tem enfoque direcionado a revelar conteúdos latentes, trazendo à tona informações "ocultas". Tornando-se extremamente eficaz no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que contém um caráter investigativo, assim termina por contribuir de forma positiva para aquisição do conhecimento.

A interpretação dos dados coletados é a principal etapa de um projeto de pesquisa, e é justamente esse o papel da análise de conteúdo – metodologia de grande importância para as ciências da comunicação, desenvolvida nos Estados Unidos no início do século XX. (BARDIN, 2016).

Com objetivos abrangentes as análises possuem enfoques na frequência com que surgem os elementos nas pesquisas (produções). Em contrapartida os resultados qualitativos direcionam-se para a ausência ou presença de determinada característica visando ultrapassar o alcance simplesmente descritivo das técnicas quantitativas para atingir interpretações mais profundas com base na inferência. Moraes (2003 apud CURY, 2007, p. 64) afirma que "os textos não carregam um significado a ser apenas identificado: são significantes, exigindo que o leitor ou pesquisador construa significados com base em suas teorias e pontos de vista". As análises de conteúdo, segundo Bardin (2016), desenvolvem-se em três passos, a saber: Pré Análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Análise de Erros

A análise de erros em uma visão geral, consiste em diligenciar uma atenção especial à produção escrita dos alunos, com intuito de compreender o raciocínio do discente principalmente quando apresentam respostas erradas.

Nas concepções de Silva e Buriasco (2006) a ação de analisar a produção dos discentes, faz com que o educador reflita sobre sua prática pedagógica, evidenciando a necessidade de procedimentos didáticos capazes de reconhecer e traçar estratégias que produzam resultados satisfatórios que possibilitem construir e reconstruir conhecimentos.

A Análise de erros é uma tendência em Educação Matemática, que ganha grande destaque no Brasil pelos estudos de vários autores, dentre os quais destacam-se os de Cury (2007). A autora se baseia nas propostas de Bardin (1979) para análise de conteúdo, adaptando uma metodologia centrada na construção do conhecimento, isto é, defende que a postura adotada por muitos professores ao corrigir uma atividade considerando apenas os acertos e ignorando os erros, não produz no aluno habilidades de autonomia.

A Análise de Erros pode ser trabalhada de duas formas, como Metodologia de Pesquisa ou como Metodologia de Ensino. Para os fins desta produção, será abordado análise de erros apenas com metodologia de pesquisa, tendo um caráter investigativo, que possibilita ao aluno e ao professor entender como se dá a construção do conhecimento, influenciando diretamente na postura do educador em sua prática docente.

De acordo com esta metodologia de pesquisa, é desnecessário detectar os erros dos alunos apenas para conhecê-los. Para a autora a análise da produção dos alunos não tem por objetivo atribuir conceito ou nota, pois ainda que possa ser utilizada no processo de avaliação, é mais produtivo empregar essa análise para investigar as falhas de aprendizagem e planejar estratégias de ensino, provocando assim uma "mudança no comportamento dos educadores".

A partir dessa postura é possível alcançar sucesso no aperfeiçoamento dos conhecimentos latentes dos alunos, ou seja, por meio da análise de erros, se pode delinear a forma como os educandos assimilaram e/ou assimilam de maneira incorreta determinado conteúdo. Ainda que este processo possa ser empregado em diversas ciências e áreas do conhecimento, é notória sua aplicabilidade acentuada no que se refere ao ensino de Matemática nos mais variados níveis escolares, pois os meios utilizados para constatar o grau de assimilação da aprendizagem, segundo Feltes (2007, p.31), "são as provas escritas, testes e listas de exercícios, onde as respostas dos alunos, devem ser fiéis ao foco sob o qual o conteúdo foi estudado".

O erro pode ser considerado como ponto de partida, como fonte de informação, proporcionando aprendizagens. Deve ser encarado como uma etapa a ser vencida pelos alunos. Ele denuncia o percurso que o discente traçou, o caminho que ele percorreu até chegar a uma determinada resposta, e esses caminhos, esses percursos fazem parte de possibilidades na construção do seu conhecimento (FELTES, 2007, p.31).

Nesses princípios aplica-se a análise de erros como metodologia de pesquisa, objetivando compreender a construção do conhecimento dos alunos por meio de suas produções escritas, para posteriormente desenvolver métodos e estratégias de ensino que produzam no educando uma reflexão, incentivando-o a reconstruir o conhecimento pautado nos erros anteriormente concebidos.

Metodologia

Classifica-se a pesquisa, segundo o roteiro apresentado por Gil (2010), inicialmente quanto à área do conhecimento, conforme o CNPq em Ciências Exatas e da Terra; segundo sua finalidade é aplicada (pesquisa voltada à aquisição de conhecimentos com vistas à aplicação numa situação específica); conforme seus objetivos têm caráter descritiva (baseia-se nas características de uma determinada população) e explicativa (propósito identificar fatores que determinam ou contribuem para ocorrência de fenômenos); os dados são quantitativos e qualitativos; o grau de controle das variáveis é não experimental; o tipo da Pesquisa é Teoria Fundamentada em Dados (Grounded Theory).

O pesquisador, mediante procedimentos diversos, reúne um volume de dados referente a determinado fenômeno. Após compará-los, codificá-los e extrair suas regularidades, conclui com teorias que emergiram desse processo de análise. Têm-se, pois, uma teoria fundamentada nos dados. O propósito do pesquisador não é, pois, o de testar uma teoria, mas de entender uma determinada situação, como e por que os participantes agem dessa maneira e por que essas situações se desenvolvem daquele modo. (GIL, 2010, p.41).

Nestes princípios, o objeto desta produção científica é empregar a análise de erros como metodologia de pesquisa seguindo os preceitos de Cury (2007), visando: a) Analisar e classificar os principais erros sobre Aritmética dos alunos da Educação Básica; b) Relacionar as principais dificuldades detectadas entre o Ensino Fundamental, e o Ensino Médio; c) Revelar algumas falhas de aprendizagem.

Portanto, essa comunicação possui características direcionadas a encontrar, categorizar e explorar as respostas equivocadas dos estudantes no ensino básico no contexto das provas da OBMEP, produzindo um estudo embasado capaz de inferir as habilidades e competências no que tange os conteúdos iniciais de aritmética detidos pelos discentes das escolas públicas.

Local e Sujeitos da Pesquisa

As provas que compõem o corpus da pesquisa são as aplicadas na segunda fase da OBMEP no dia 10 de setembro de 2016, estas perfazem um total de 4377, sendo 1952 do nível 1, 1482 do nível 2 e 943 do nível 3, conforme a tabela abaixo:

Tabela 3.1 – Frequência de provas, por nível, da 2ª fase da OBMEP realizada nos municípios da Região do Oeste do Pará, em 2016

Cidade	N 1	N 2	N 3	Total	Cidade	N 1	N 2	N 3	Total
Alenquer	81	72	5	158	Mojuí dos Campos	36	18	25	79
Almeirim	26	28	7	61	Monte Alegre	130	101	63	294
Altamira	108	95	53	256	Novo Progresso	0	23	18	41
Anapú	24	25	0	49	Óbidos	108	86	56	250
Aveiro	32	21	19	72	Oriximiná	92	73	86	251
Belterra	32	21	16	69	Pacajá	69	50	31	150
Brasil Novo	32	21	13	66	Placas	40	23	0	63
Cachoera da Serra	0	4	0	4	Porto de Moz	12	12	0	24
Castelo dos Sonhos	14	7	7	28	Prainha	81	69	28	178
Curuá	33	29	18	80	Rurópolis	48	22	8	78
Curuai	0	9	0	9	Santarém	505	359	318	1182
Faro	12	7	9	28	Senador José Porfílio	21	18	6	45
Itaituba	120	73	22	215	Terra Santa	32	21	21	74
Jacareacanga	12	16	0	28	Trairão	14	11	3	28
Juruti	139	94	56	289	Uruará	28	8	20	56
Medicilândia	37	31	25	93	Vitória do Xingu	34	30	10	74
					Total	**1952**	**1482**	**943**	**4377**

Fonte: Corpus da pesquisa

Nota: N 1, N 2 e N 3 significam respectivamente, nível 1, nível 2 e nível 3.

Destas foram selecionados três problemas que versam sobre os conteúdos de Aritmética, sendo um problema de cada nível. Ressalta-se que há uma gama de provas que não foram analisadas, pois foram enviadas a correção nacional da OBMEP, e por essa razão não se teve acesso. Porém, tais provas não afetam os resultados da pesquisa, uma vez que correspondem a uma porcentagem menor do que 1,5%.

Responde-se duas perguntas quanto à composição do corpus:

1. Qual a razão para analisar-se problemas com conceitos de Aritmética?

Decidiu-se analisar essa gama de problemas pois eles apresentam conceitos inicias (operações básicas, fatoração, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum, sistema de base posicional, etc), assim pode-se identificar as falhas de raciocínio usadas pelos alunos em problemas que exigem o conhecimento mínimo de Matemática, porém de extrema importância.

2. Por que problemas da OBMEP? Têm-se duas razões em particular:

a) Estes problemas são selecionados de forma a exigir do aluno uma interpretação mais elaborada, uma vez que são problemas contextualizados propostos por uma comissão de professores experientes compromissados com a Educação Básica.

b) Os professores podem usar a análise de erros para fazer o aluno compreender onde está errando, com o estímulo de ter um desempenho melhor em sua vida acadêmica e consequentemente profissional, além de poder se preparar para olimpíadas futuras, criando estratégias de ensino que incentive o aluno a aprender.

Mesmo diante de tais restrições na constituição do corpus (selecionando apenas três problemas), os dados ainda são extensos, logo faz-se preciso selecionar uma amostra com dimensão suficiente que não venha interferir nos resultados gerais da população, ou seja, uma amostra que permita generalizar os resultados.

Na Tabela 3.2 encontram-se as amostras conforme cada cidade da região Oeste do Pará envolvida na pesquisa, para um nível de confiança de 95% com margem de erros 3%.

Para obter a estimativa de forma individualizada foi dividida a quantidade de provas de cada cidade pela população do nível, o percentual assim obtido foi multiplicado pela amostra do respectivo nível, resultando na quantidade de provas que compõem o corpus.

Por exemplo, para a cidade de Santarém no nível 1, os dados são: Quantidade de provas Nstm = 505, população do nível N = 1952, percentual pstm = 505/1952 = 0,258709016, multiplicando pstm pela amostra do nível, ou seja, (0,258709016)*(690) = 179, portanto 179 é a amostra da cidade de Santarém para o nível 1.

Tabela 3.2 – Frequência da amostra de provas, por nível, da 2ª fase da OBMEP realizada nos municípios da Região do Oeste do Pará, em 2016

Cidade	N 1	N 2	N 3	Total	Cidade	N 1	N 2	N 3	Total
Alenquer	29	30	3	61	Mojuí dos Campos	13	8	13	34
Almeirim	9	12	4	25	Monte Alegre	46	42	33	121
Altamira	38	40	28	106	Novo Progresso	0	10	10	20
Anapú	8	10	0	18	Óbidos	38	36	30	104
Aveiro	11	9	10	30	Oriximiná	33	31	46	110
Belterra	11	11	9	31	Pacajá	24	21	16	61
Brasil Novo	11	9	7	27	Placas	14	10	0	24
Cachoera da Serra	0	2	0	2	Porto de Moz	4	5	0	9
Castelo dos Sonhos	5	3	4	12	Prainha	29	29	15	73
Curuá	12	12	10	34	Rurópolis	17	9	4	30
Curuai	0	4	0	4	Santarém	179	150	169	498
Faro	4	3	5	12	Senador José Porfílio	7	8	3	18
Itaituba	42	31	12	85	Terra Santa	11	9	11	31
Jacareacanga	4	7	0	11	Trairão	5	5	2	12
Juruti	49	39	30	118	Uruará	10	3	11	24
Medicilândia	13	13	13	39	Vitória do Xingu	12	13	5	30
					Total	**690**	**621**	**501**	**1812**

Fonte: Corpus da pesquisa

Nota: N 1, N 2 e N 3 significam respectivamente, nível 1, nível 2 e nível 3.

Portanto, serão realizadas as análises dos erros cometidos pelos alunos nos problemas de Aritmética na realização da prova da 2ª fase da 12ª OBMEP, conforme amostra de 1812 alunos da rede pública das escolas do Oeste do Pará.

Análise dos resultados

O corpus da pesquisa foi analisado, e constituiu-se as categorias de respostas, posteriormente por meio das similaridades das categorias foram estipuladas as Classes de erros compostas por agrupamentos das categorias.

No decorrer teve início a análise dos erros em cada nível de forma individualizada, destacando os dados de maneira quantitativa e qualitativa. Para se ter detalhes nos resultados, fez-se uma análise de cada subitem, averiguando quais classes estão inseridas neles. Ainda foram selecionadas ilustrações das respostas do corpus e anexadas nas respectivas classes e níveis.

Após a seleção da amostra, iniciou-se o processo de análise das respostas dos alunos, seguindo as etapas: Pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Em seguida teve início a Exploração do Material. A estratégia adotada consistiu em enumerar as provas de cada cidade. Em seguida foi criada uma planilha no Microsoft Excel, para cada uma das 32 cidades envolvidas. A partir daí foram verificadas as produções escritas dos educandos, tais verificações deram origem às categorias de respostas que surgiam no decorrer da análise.

Abaixo é apresentada as classes, nota-se que estas possuem dimensões abrangentes, e podem conduzir o leitor às ambiguidades. Para solucionar esta questão, apresenta-se a tabela 4.1, com a finalidade de dar mais objetividade às classes. Tal tabela, expressa em quais classes às dificuldades expostas pelos alunos estarão inseridas para os fins da análise aqui realizada.

Tabela 4.1 – Dificuldades dos alunos que compõem às classes de erros

Classe	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Erro relacionado à falta de concentração					X										
Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	X	X	X			X									
Erro relacionado à má interpretação									X						X
Erro relacionado ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas				X				X			X				
Erro relacionado à aplicação de conhecimento equivocado							X								
Erro relacionado a todas as classes										X		X	X	X	

Nota: A: Operações elementares. B: Conceitos de algarismos. C: Contagem com números naturais. D: Critérios de divisibilidades. E: Falta de atenção (Inicia corretamente, mas se perde no decorrer). F: Média aritmética. G: Aplicação de conhecimento inadequado. H: Progressão aritmética. I: Compreensão do enunciado. J: Discorda do enunciado. K: Conceito de múltiplos. L: Reescreve o enunciado do problema. M: Sem justificativa. N: Resposta sem sentido. O: Baseia em subitens anteriores.

Dados Gerais

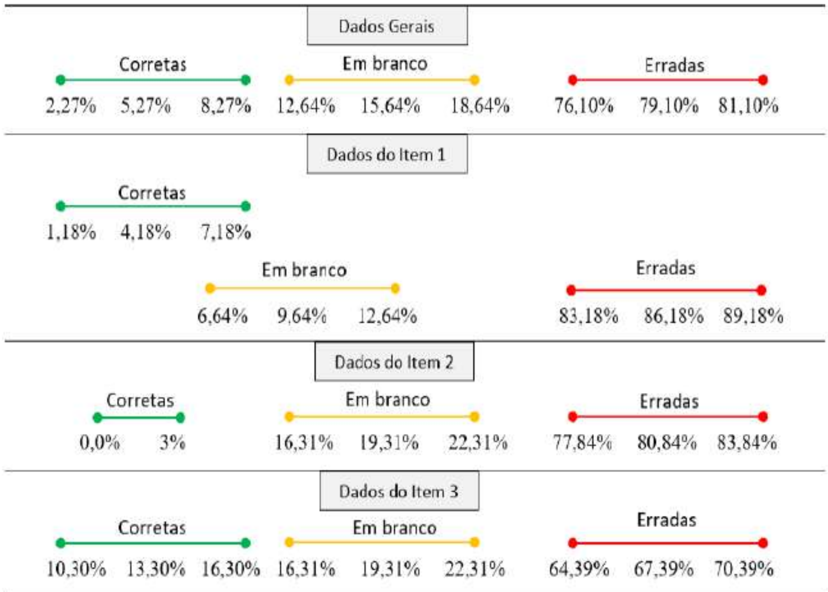
Apresenta-se a seguir os dados gerais das quantidades de respostas corretas, em branco e erradas presentes no corpus da pesquisa, tais dados estão expressos na tabela 4.2. Destaca-se que estimativas da proporção serão apresentadas na forma de intervalos de confiança. Assim quando dois intervalos de confiança se superpõem, isso implica em empate técnico.

Tabela 4.2 – Dados quantitativos da pesquisa

	Item 1		Item 2		Item 3		Total	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
Corretas	85	4,18	0	0	201	13,30	286	5,27
Em branco	196	9,64	361	19,16	292	19,31	849	15,64
Erradas	1753	86,18	1523	80,84	1019	67,39	4295	79,10
Total	2034	100	1884	100	1512	100	5430	100

Em termos gerais, foram analisadas 5430 respostas, sendo 2034 do nível 1, 1884 do nível 2 e 1512 do nível 3. Ainda na tabela 4.2 encontram-se os percentuais das respostas corretas, em branco e erradas. Segundo o plano de amostragem estabelecido estes resultados possuem um nível de confiança de 95%, com margem de erro de 3%. Estes dados devem ser interpretados em intervalos de confiança, conforme a figura abaixo.

Figura 4.1 – Intervalos de confiança das respostas corretas, em branco e erradas



Em relação aos dados gerais, o percentual de acertos está em 5,27%, com margem de erros de três pontos percentuais. As respostas em branco correspondem à 15,64%, com margem de erros de 3%. E as respostas erradas são responsáveis por 79,10% com margem de erros de 3%.

Destaca-se uma particularidade em cada item. No item 1, é possível perceber que acontece um empate técnico entre as quantidades de respostas "corretas" e as "em branco", em torno de 7%. No item 2, as respostas corretas representam 0% podendo chegar à 3% com à margem de erro. O item 3, foi o que obteve maior percentual de acertos, 13,3% com 3% para mais ou para menos.

As respostas "corretas" e as respostas "em branco" não foram consideradas, à análise é feita apenas nas respostas erradas. Tal análise será conduzida por meio da seguinte dinâmica, apresentando: a) o item do respectivo nível; b) os tópicos de Aritmética que o aluno precisa dominar para solucionar o item; c) um panorama geral da quantidade de respostas corretas, em branco e erradas no item; d) às categorias de respostas no item; e) às classes de erros no item; f) às classes de erros nos subitens do item.

Análise do Item no Nível 1

Dá-se início aos procedimentos de análise no item do nível 1. Abaixo tem-se o item que versa sobre os conceitos de Aritmética que será objeto de estudo neste nível.

Na tabela seguinte há a análise quantitativa dos alunos que acertaram, não responderam ou erraram o item 1.

Tabela 4.3 – Dados quantitativos do item 1

Item 1	Subitem a)		Subitem b)		Subitem c)	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
Corretas	70	10,32	17	2,51	0	0
Em branco	54	7,96	59	8,70	83	12,24
Erradas	554	81,71	602	88,79	595	87,76
Total	678	100	678	100	678	100

Por meio dos dados conclui-se que o subitem com o maior percentual de acerto foi o a) com 10,32%, isto se deve ao fato deste exigir apenas habilidade de contagem dos números naturais. Posteriormente se apresenta o subitem b) com um percentual de acerto de 2,51% e o subitem c) com 0% de acerto, entre os subitens b) e c) há um empate técnico dentro da margem de erro.

Ao considerar-se o percentual de erros, percebe-se que não há grande diferença nos subitens, todos com mais de 80%, destacando-se o subitem c) onde não houve acertos.

Em seguida as categorias foram agrupadas segundo semelhança nos tipos de respostas, se apenas com as respostas erradas.

Tabela 4.4 – Classes de erros do item 1

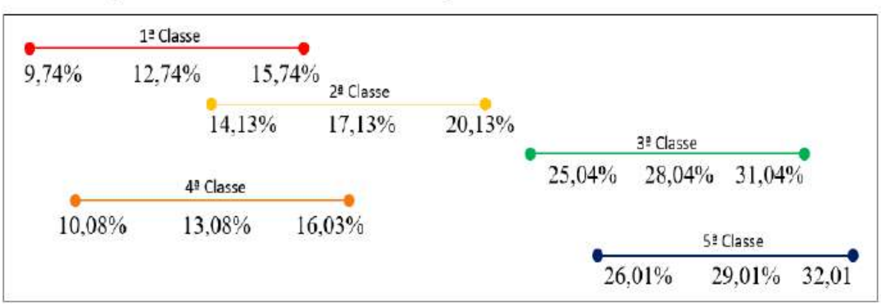
Classe	C.R	fi	fr (%)
1ª Erro relacionado à falta de concentração	A2 B3	223	12,74
2ª Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	A4 B2 B6	300	17,13
3ª Erro relacionado à má interpretação	A5 A3 C7 C6 C4	491	28,04
4ª Erro relacionado ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas	C2 C3	229	13,08
5ª Erro relacionado à todas as categorias	B1 C1 C5 C8	508	29,01
Total		1751	100

Nota: C. R - Significa categoria de resposta.

Constituem-se cinco classes neste item. Levando em consideração as respostas erradas, no total registraram-se 1751 respostas, pelo fato do item ser subdividido em a), b) e c), ou seja, há provas que estão sendo contadas até três vezes (amostra 678).

Destaca-se na tabela 4.5 com índices mais elevados a 5ª classe e a 3ª classe, posteriormente a 1a classe, a 2a classe e a 4a classe. Portanto, os erros relacionados a todas às classes, e os erros devidos à má interpretação, foram os que ocorreram com maior frequência.

Figura 4.4 – Intervalo de confiança das classes de erros no item 1



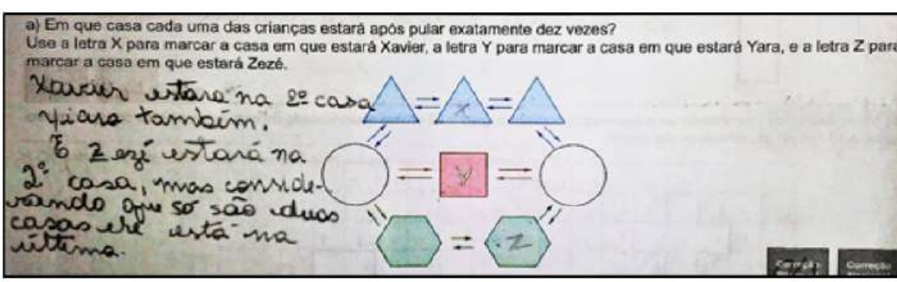
Ainda sobre às classes de erros deste item, observa-se na figura 4.4 que há um empate técnico entre a 1ª classe, 2ª classe e a 4ª classe. Acontece outro empate técnico entre a 3ª classe, e a 5ª classe. Na tabela que segue é apresentado um panorama por subitem, considerando as classes apresentadas.

Tabela 4.4 – Dados quantitativos das classes nos subitens do item 1

Classes do item 1	Subitem a)		Subitem b)		Subitem c)	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
1ª Erro relacionado à falta de concentração	168	30,32	55	9,14	0	0
2ª Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	166	29,96	134	22,26	0	0
3ª Erro relacionado à má interpretação	220	39,71	0	0	271	45,55
4ª Erro relacionado ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas	0	0	0	0	229	38,49
5ªErro relacionado à todas as categorias	0	0	413	68,60	95	15,97
Total	553	100	602	100	595	100

A seguir, apresentam-se um respostas relacionada a 1ª Classe, no subitem a): Erro relacionado à falta de concentração (30,32%), para ilustrar esse item. Esses dados são discutidos com maiores detalhes na dissertação. Abaixo um exemplo de resposta encontrada nesse item.

Figura 4.5 – Erro da 1ªclasse no subitem a) do item 1



Na solução exposta o aluno compreende o item, e inicia o processo de contagem dos pulos de Xavier, Yara e Zezé, fazendo corretamente a contagem dos pulos de Xavier e Zezé, entretanto erra ao contar os 10 pulos de Yara. Conclui-se que o aluno era capaz de solucionar essa etapa do problema, porém por falta de atenção falha. Uma possível justificativa é que o aluno pode (no caso de Yara) ter contado as casas como pulos.

Análise do Item no Nível 2

Agora seguem os procedimentos de análise no item do nível 2. Abaixo tem-se o item que versa sobre os conceitos de Aritmética que será objeto de estudo neste nível.

Tabela 4.7 – Dados quantitativos do item 2

Item 2	Subitem a)		Subitem b)		Subitem c)	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
Corretas	0	0	0	0	0	0
Em branco	131	20,86	107	17,04	123	19,59
Erradas	497	79,14	521	82,96	505	80,41
Total	628	100	628	100	628	100

Por meio dos dados conclui-se que não houve acertos no item. Uma possibilidade para justificar este fato encontra-se nas dificuldades dos educandos em relação às operações básicas, além de não saberem interpretar o enunciado. Outro fato é a ausência do conhecimento de múltiplos dos números naturais.

Considera-se o percentual de erros, vê-se que não há grande diferença nos subitens, todos com aproximadamente 80%. Destaca-se que nos subitens os que não responderam errado, deixaram em branco, demostrando que não possuem domínio dos conceitos exigidos para solucionar o item. Em seguida, as categorias de erros foram agrupadas segundo semelhanças nos tipos de respostas, originando assim as classes de erros, as provas em branco foram descartadas, trabalha-se apenas com as respostas erradas.

Tabela 4.9 – Classes de erros do item 2

Classe	Cat	fi	fr (%)
1ª Erro relacionado à má interpretação	A1 B2 C2 C6 A4	1067	70,06
2ª Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	A2 A5 A7 B1 B3 C1 C3 B6	363	23,83
3ª Erro relacionado ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas	A3 B5 B4	73	4,79
4ª Erro relacionado a aplicação de conhecimento equivocado	A6 C4 C5	20	1,31
Total		1523	100

Foram constituídas quatro classes neste item, levando em consideração as respostas erradas, e descartando as em branco. No total registram-se 1523 respostas, pelo fato do item ser subdividido em a), b) e c), ou seja, há provas que estão sendo contadas até três vezes (amostra 628). Destaca-se a 1ª classe com 70,06%, em seguida a 2ª classe com 23,83%, posteriormente a 3ª com 4,79% e pôr fim a 4ª classe com 1,31%.

Figura 4.8 – Intervalo de confiança das classes de erros intem 2

A figura mostra as estimativas da proporção para às classes segundo os intervalos de confiança. É possível constatar que existe um empate técnico entre a 3ª classe, e a 4ª classe.

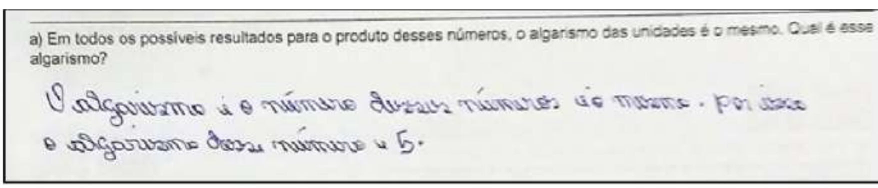
A tabela seguinte apresenta de forma quantitativa os dados das classes nos subitens.

Tabela 4.10 – Dados quantitativos das classes nos subitens do item 2

Classes do nível 2	Subitem a) fi	Subitem a) fr (%)	Subitem b) fi	Subitem b) fr (%)	Subitem c) fi	Subitem c) fr (%)
1ª Erro relacionado à má interpretação	252	50,70	391	75,05	424	83,96
2ª Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	187	37,63	104	19,96	72	14,26
3ª Erro relacionado ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas	47	9,46	26	4,99	0	0
4ª Erro relacionado a aplicação de conhecimento equivocado	11	2,21	0	0	9	1,78
Total	497	100	521	100	505	100

Esses dados são discutidos com maiores detalhes na dissertação. Abaixo um exemplo de resposta encontrada nesse item.

Figura 4.9 – Erro da 1ª classe subitem a) do item 2


a) Em todos os possíveis resultados para o produto desses números, o algarismo das unidades é o mesmo. Qual é esse algarismo?

Fonte: Corpus da pesquisa

Na resposta apresentada o aluno não é capaz de compreender o enunciado, pois no mesmo há a informação que o algarismo das unidades obtido do produto entre os valores apresentados é o mesmo, porém o aluno entende que o algarismo das unidades dos dois valores que serão multiplicados (2A5 e 13B) são os mesmos, e assim afirma que a resposta é 5, pois 5 é o algarismo das unidades de 2A5.

Análise do Item no Nível 3

Agora seguem os procedimentos de análise no item do nível 3. Abaixo tem-se o item que versa sobre os conceitos de Aritmética que será objeto de estudo neste nível. Na tabela seguinte há a análise quantitativa dos alunos que acertaram, não responderam ou erraram o item 3.

Tabela 4.11 – Dados quantitativos do item 3

Item 3	Subitem a)		Subitem b)		Subitem c)	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
Corretas	84	16,67	117	23,21	0	0
Em branco	31	6,15	99	19,64	162	32,14
Erradas	389	77,18	288	57,14	342	67,86
Total	504	100	504	100	504	100

Por meio dos dados da tabela 4.11 conclui-se que o subitem com o maior percentual de acerto foi o b) com 23,21%. A maioria dos alunos que acertou este item, chegou à solução observando um padrão nas linhas e colunas do medimágico. Posteriormente se apresenta o subitem a) com um percentual de acerto de 16,67% e o subitem c) com 0% de acerto.

Considera-se o percentual de erros, vê-se que o subitem c) obteve com 67,86%, e 32,14% não responderam, o que pode ser inferido como 100% de erros, demostrando que não possuem domínio dos conceitos exigidos para solucionar o item. Em seguida o subitem consta com 77,18% de erros e o b) com 57,14% de respostas erradas.

Estabeleceram-se 21 categorias de respostas, além das provas em branco, onde sete são do subitem a), oito do subitem b) e seis do subitem c), estas foram agrupadas segundo semelhança nos tipos de respostas originando-se as classes de erros, as provas em branco foram descartadas, trabalhasse apenas com as respostas erradas.

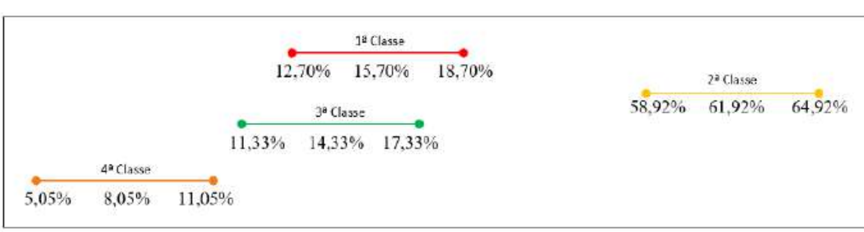
Tabela 4.13 – Classes de erros do item 3

Classe	Categoria	fi	fr (%)
1ª Erro relacionado à falta de concentração	A3 B4 A4	160	15,70
2ª Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	A5 B2 B7 B8 A6 C1	631	61,92
3ª Erro relacionado à aplicação de conhecimento equivocado	B1 C2 C3 C4	146	14,33
4ª Erro relacionado à má interpretação	C5 C6	82	8,05
Total		1019	100

Instituem-se neste item quatro classes. Levando em consideração as respostas erradas, no total registraram-se 1019 respostas, pelo fato do item ser subdividido em a), b) e c), ou seja, há provas que estão sendo contadas até três vezes (amostra 504).

A seguir tem-se o gráfico que fornece um panorama geral das respostas erradas do nível 3, segundo as classes de erros deste item. Destaca-se a 2ª classe com 61,92%, em seguida a 1ª classe com 15,70%, a 3ª com 14,33%, e a 4ª classe aparece com 8,05%. Portanto, os erros relacionados à deficiência nos conceitos básicos, foram os que ocorreram com maior frequência. A figura abaixo, mostra os intervalos de confiança das classes de acordo com o plano de amostragem.

Figura 4.12 – Intervalos de confiança das classes de erros no item 3



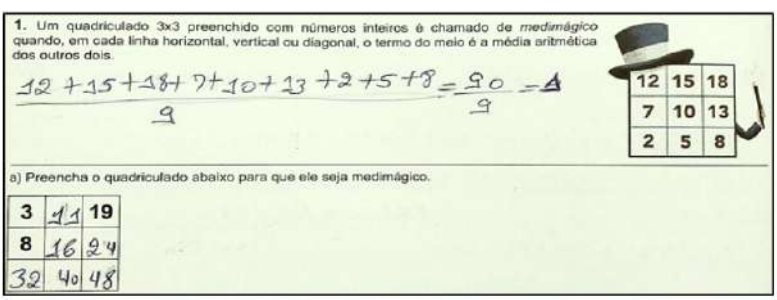
Ainda sobre às classes de erros deste item, observa-se na figura 4.39, que há um empate técnico entre a 1ª classe e a 3ª classe. Inicia-se uma análise detalhada das classes em cada subitem. A tabela seguinte apresenta de forma quantitativa os dados das classes nos subitens.

Tabela 4.14 – Dados quantitativos das classes nos subitens do item 3

Classes do item 3	Subitem a)		Subitem b)		Subitem c)	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
1ª Erro relacionado à falta de concentração	106	27,25	54	18,75	0	0
2ª Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	283	72,75	224	77,78	124	36,26
3ª Erro relacionado à aplicação de conhecimento equivocado	0	0	10	3,47	136	39,77
4ª Erro relacionado à má interpretação	0	0	0	0	82	23,98
Total	389	100	288	100	342	100

A seguir, apresentam-se uma resposta, incidindo na 1ª Classe: Erro relacionados à falta de concentração (27,25%).

Figura 4.12 – Erro da 1ª classe no subitem a) do item 3



Fonte: Corpus da pesquisa

Na solução acima preenche-se o quadriculado com alguns valores corretos. Em seguida o aluno calcula a média aritmética dos valores que ele preencheu, isso mostra que o aluno detém conhecimento suficiente para calcular a média aritmética. Portanto infere-se que o erro pode ter sido gerado por falta de atenção (mais uma vez o aluno demonstra falta de atenção na divisão de 90 por nove).

Discussão dos Resultados

Por meio da análise de erros aplicada como metodologia de pesquisa para identificar os conhecimentos dos alunos, foi possível perceber que apesar dos significativos esforços, ainda existe um extenso caminho a ser trilhado, para poder alcançar os resultados satisfatórios no que tange o ensino de Matemática na Educação Básica no Oeste do Pará.

A análise do corpus mostra que os educandos não possuem domínio das habilidades mínimas exigidas para o nível escolar que se encontram, por exemplo, alunos no Ensino Médio com grande dificuldade de interpretar um problema aplicando conceitos matemáticos em situações contextualizadas. Muitas vezes o aluno é educado a apenas resolver equações ou repetir técnicas de resoluções que se resumem às manipulações algébricas, isso é muito comum no Ensino Fundamental 2, por exemplo, onde trabalha-se com expressões algébricas (fatorações diversas, simplificações, ...). Entretanto, as questões da OBMEP valorizam o raciocínio lógico e a criatividade em suas resoluções, o que acaba por revelar um grau de aprendizado e/ou capacidade de resolução de problemas do aluno.

Nessas concepções, entende-se que para os alunos terem um aproveitamento positivo no aprendizado, deveriam ser capazes de não apenas propor uma solução, porém, estarem aptos a questionar os argumentos empregados em seu raciocínio, pois um problema não está necessariamente resolvido quando se obtém a resposta, ainda que correta. A prova de que o problema está de fato resolvido é dada quando este compreende o que fez, sendo capaz de justificar por que as suas ações foram as adequadas.

Por meios dos resultados, conforme tabela 4.2 foi possível concluir que 94,74% das respostas analisadas estão erradas (considerando as em branco). Os erros revelam ineficiência na aprendizagem nos seguintes tópicos: sistema de numeração, desconhecendo os algarismos do sistema de base 10; contagem dos números naturais; conceitos de números inteiros, paridade, primos; operações básicas: Adição, subtração, multiplicação e divisão; conceitos de múltiplos e divisões; média aritmética; resolução de equação do primeiro grau.

Assim, põe-se em evidência um índice elevado de deficiência nos conceitos de Aritmética por parte dos envolvidos. Vê-se na tabela 4.2, que de um total de 5430 respostas analisadas apenas 286 foram corretas, em termos de percentual, corresponde a 5,27% das respostas.

Os conceitos básicos são a base do conhecimento matemático, sem dominá-los os estudantes não conseguirão bons rendimentos nos demais conceitos. Destacam-se aqui erros na resolução de equações algébricas e cálculo da média aritmética. Os dados mostram que os alunos tentam resolver, porém não possuem conhecimentos suficientes, procuram justificativas em padrões observados ou em fatos que são verdadeiros, porém sem relação com o exigido, por exemplo, no subitem c), muitos alunos responderam: porque o medimágico é 3x3; porque 9 é inteiro; porque 9 é ímpar; porque 9 é múltiplo dele mesmo; a soma dos valores nos subitens a) e b) é múltiplo de 9, então será para qualquer medimágico.

Finaliza-se essa discussão ressaltando a importância de se trabalhar os erros dos alunos em sala de aula. Aqui a análise de erros foi usada como metodologia de pesquisa para destacar os principais erros de Aritmética cometidos pelos alunos. Encerra-se com o pensamento de Brownell (1942 apud KRULIK, 1987, p. 66), "Em vez de ser protegida contra o erro, a criança deveria ser exposta ao erro muitas vezes, ser encorajada a detectar e a demonstrar o que está errando, e por quê".

Considerações Finais

Nesta produção, foi feito um levantamento dos principais erros de Aritmética cometidos pelos alunos da Educação Básica na Região Oeste do estado do Pará, abrangendo 32 cidades. Tal levantamento foi empregado em uma população de 4377 alunos, isso corresponde à 13131 resposta, pois cada aluno deveria resolver três subitens.

Em virtude desta população ser extensa, estabeleceu-se um plano de amostragem, que permitiu aos resultados terem um nível de confiança de 95%, com margem de erro de 3%. Assim, à amostra selecionada (por procedimentos aleatórios), foi de 1812 alunos, perfazendo um total de 5436 respostas analisadas.

A pesquisa realizada nessa dissertação foi classificada com Teoria Fundamentada em Dados (Grounded Theory), por essa razão, às categorias de respostas e às classes de erros, foram estipuladas na pesquisa conforme às respostas presentes no corpus. No todo foram listadas 58 categorias de respostas e 6 classes de erros, distribuídas nos três itens.

No processo de análise dos dados, notou-se que o percentual de respostas erradas estava em entorno de 80% do total dos dados da amostra. Sendo os principais erros relacionados à má interpretação, e os erros relacionados à deficiência nos conceitos básicos.

Considera-se que este levantamento tem impacto direto na forma como os professores encaram o "erro", ou seja, que estes possam mudar (se for o caso) a forma de trabalhar os "erros" dos alunos. Uma vez que a prática hoje estabelecida pela influência e formação, os leva a tratar os erros apenas como um mecanismo de punição ou atribuição de nota.

Chega-se a confirmação que à análise de erro usada como metodologia de pesquisa pode contribuir para aprendizagem, construindo e reconstruindo o conhecimento detido pelos alunos. Ressalta-se que tudo o que foi abordado até o momento nesta produção não encerra o assunto, muito pelo contrário, estabelece novas hipóteses, que devem ser discutidas e exploradas, sempre centrando o objetivo em elevar o grau de conhecimento dos educandos.

Ao término desta dissertação, surgiram novos questionamentos em relação as atitudes dos alunos: a) Eles possuem preocupação com à interpretação dos problemas propostos em sala de aula? b) Ao receberem suas atividades corrigidas, eles verificam onde erraram, ou apenas observam a nota? c) Qual posicionamento desejam mostrar, quando discordam do enunciado do problema sem justificativa? d) Possuem o hábito de questionar a veracidade de suas próprias soluções? e) Quando erram um problema, preferem esconder o erro, ou procuram ajuda para compreender o que não está certo?

As respostas para essas perguntas, apenas os professores e os alunos podem dar. Trabalhar o tema da análise de erros nos aspectos dessas interrogações, requer uma abordagem em uma visão mais especifica, não apenas a análise de erros com metodologia de pesquisa, porém, também como metodologia de ensino, com interações diretas entre o professor e o aluno.

Referências

BARDIN, L. Análise de conteúdo. Lisboa: Edições 70, 1979.

BARDIN, L. Análise de conteúdo. São Paulo, SP, BR: Edições 70, 2016.

BRASIL, M. Revista obmep 12 anos. Portal da OBMEP, 2017. Disponível em: < http://www.obmep.org.br/images/Revista_OBMEP_12_anos.pdf >. Acesso em: 14 jul. 2017.

BROWNELL, W. A. “Problem Solving”. Em The Psychology of Learning. [S.l.]: 41o livro do ano da National Society for the Study of Education. Chicago, 1942. Citado na BUSSAB, W.

CURY, H. N. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática. [S.l.]: Zetetiké, volume 3, 1995.

CURY, H. N. Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. [S.l.]: Autêntica, 2007.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos. [S.l.]: 3 ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. [S.l.]: 5. ed. São Paulo, Editora Atlas, 2010.

MORRETO, V. P. Prova um momento privilegiado de estudos e não um acerto de contas. [S.l.]: DP&A Editora, RJ, 2005.

MORAES M. M. Análise de erros em problemas de aritmética: uma abordagem na 2a fase da OBMEP no oeste do Pará – Santarém, Pará, 2018, disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160040897

Formação inicial de professores de matemática: caminhos possíveis

Hamilton Cunha de Carvalho[1]
José Ricardo e Souza Mafra[2]

Para início de conversa...

Em nosso percurso como educadores matemáticos, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, não foram poucas as vezes que nos deparamos com alunos que diziam não serem "bons" em matemática ou que até mesmo não gostavam da disciplina (inclusive no próprio curso de licenciatura em matemática!). Sempre nos causou espanto o fato de que, na escola ou na academia, dizer algo como "não gosto de ler", podia causar transtornos homéricos a quem ousasse proferir essa "blasfêmia" em voz alta, enquanto que, quando se trata da matemática, propalar a plenos pulmões sua ojeriza a essa matéria é visto com certa naturalidade e, em alguns casos, encontra até apoio entre os pares que igualmente não morrem de amores por ela. Concordamos que ler é fundamental para o desenvolvimento de qualquer pessoa que vive em sociedade e também rechaçamos a ideia de que ler não pode ser algo prazeroso e crucial na vida de qualquer cidadão, mas por que parece não haver esse mesmo tipo de concordância quando o assunto é matemática?

[1] Ufopa. E-mail: neohamilton@gmail.com
[2] Ufopa. E-mail: jose.mafra@ufopa.edu.br

Muito disso se deve ao fato de as pessoas terem no imaginário que matemáticos devem ser dotados de inteligência acima do normal. Esse pensamento é reforçado por grande parte dos livros didáticos que temos hoje, talvez o único contato formal e escrito da maioria das pessoas com a matemática. Lá, quando se fala de algum matemático e de sua contribuição histórica, parece que estamos lidando com um semideus que, no alto de toda sua inteligência, conseguiu um feito inatingível pelo resto dos mortais.

Não estamos querendo desmerecer as grandes personagens que contribuíram para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Apenas queremos chamar atenção para o fato de que existem muitas outras pessoas que, assim como nós, gostam de matemática, sabem quanto prazer ela pode proporcionar, percebem sua importância para sociedade, mas que realizam um trabalho com ela menos glamouroso e, certamente, menos "divino".

O matemático britânico Keith Devlin, em um discurso realizado em 1997 na Universidade da Califórnia em Berkeley, sugeriu a formandos do curso de matemática que um caminho possível para tentar mudar essa percepção seria a propagação de "memes". Para ele, memes são pensamentos e ideias que as pessoas produzem e tornam públicos, ou seja, são entidades autorreplicantes que se multiplicam e se espalham pela sociedade; eles influenciam no jeito como a sociedade se desenvolve e forma sua cultura. E quem melhor para espalhar uma mudança de *status quo* de uma área que os próprios professores que a ensinam?

É nessa perspectiva que desenvolvemos no Laboratório de Aplicações Matemáticas - LAPMAT várias atividades com professores da Educação Básica e com bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID que também são alunos do curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física - LIMF da Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA.

Neste texto, descreveremos algumas ações realizadas no ano letivo de 2017 e tentaremos expor como o trabalho executado no LAPMAT por esses bolsistas e futuros professores de matemática pôde influenciar na sua formação e prática docente destacando alguns fatores que cremos serem pertinentes nessa análise.

LAPMAT: Espaço De Formação Docente

Para Ewbank (1977, p. 214), a expressão Laboratório de Matemática é "utilizada para representar um lugar, um processo, um procedimento". Ou seja, um espaço físico que possui uma estrutura adequada para abrigar atividades práticas relacionadas à Matemática.

Já Lorenzato (2012) define o Laboratório de Educação Matemática - LEM como:

> (...) um local da escola reservado preferencialmente não só para aulas regulares de matemática, mas também para tirar dúvidas de alunos; para professores de matemática planejarem suas atividades, sejam elas aulas, exposições, olimpíadas, avaliações, entre outras, discutirem seus projetos, tendências e inovações; um local para criação e desenvolvimento de atividades experimentais, inclusive de produção de materiais instrucionais que possam facilitar o aprimoramento da prática pedagógica. (p.06)

Se por um lado o primeiro autor traz a dimensão do trabalho voltado para a experimentação e aquisição de conceitos dentro da matemática, por outro, o segundo autor amplia a visão desse espaço no que se refere ao ensino e à aprendizagem de matemática.

Em nossa pesquisa, consideraremos o Laboratório de Aplicações Matemáticas - LAPMAT, vinculado ao Programa de Ciências Exatas - PCE da UFOPA, como um LEM corroborando com a visão que Turrioni (2004) dá para este tipo de ambiente. Para autora, é um:

> (...)ambiente que funciona como um centro para discussão e desenvolvimento de novos conhecimentos dentro de um curso de Licenciatura em Matemática, contribuindo tanto para o desenvolvimento profissional dos futuros professores como para sua iniciação em atividades de pesquisa. (p.63)

Acrescenta ainda que o LEM, dentro das universidades, tem um papel importantíssimo na construção da identidade de um educador. Pode proporcionar ao licenciando a construção de conceitos, o *know-how* no uso de um laboratório de ensino e aprendizagem de matemática em seu futuro espaço profissional e o desenvolvimento da capacidade de ser um professor pesquisador de sua própria prática.

O LAPMAT funciona na sala 230 do campus Amazônia da UFOPA e "desenvolve atividades de pesquisa e extensão, além de comportar o PIBID" (UFOPA, 2015, p.51). Em nossa visão, não é apenas mais uma sala de aula na universidade, mas um ambiente que auxilia na compreensão e aprendizagem de conceitos matemáticos e na formação de professores. Atualmente, fazem parte da equipe do LAPMAT três coordenadores que são professores da UFOPA dos quais dois são autores deste trabalho, dois professores da rede estadual de ensino que são supervisores do PIBID e 14 licenciandos do curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física - LIMF que são bolsistas do PIBID.

Teoricamente falando, nossas ações dentro do LAPMAT valorizam a experiência e a reflexão na experiência baseada na epistemologia da prática e estão pautadas nas contribuições trazidas por Schon (2000) e o seu conceito de "professor reflexivo". Diz respeito ao profissional da educação que observa, analisa e reflete sobre sua prática pedagógica, tendo em vista o aperfeiçoamento de sua atividade docente. O autor sugere três momentos nos quais o professor pode intervir em sua prática, que são: a reflexão prévia, reflexão na ação e a reflexão sobre a ação.

Com uma outra nomenclatura, mas que contém sentido semelhante ao proposto pelo autor, dividimos o desenvolvimento das ações ocorridas no LAPMAT em i) *Planejamento*: ocorre em reuniões semanais que visam a articulação de propostas de intervenção sugeridas por todos os integrantes do laboratório. São formuladas hipóteses, recursos didáticos, atividades, entre outros, que serão trabalhados nas escolas públicas da cidade; ii) *Ações*: é a prática em si. Resulta na atuação do bolsista *in loco*, aplicando e colocando em execução as propostas; iii) *Avaliação*: é a análise de nossa prática. Utilizamos como instrumentos de análise relatórios mensais e individuais feitos por cada bolsista e postados em uma sala virtual da plataforma Moodle para, posteriormente, serem socializados nas reuniões. Aqui podemos descobrir falhas ou lacunas que trazem reflexões sobre a possibilidade de melhoria das ações.

A equipe do LAPMAT planejou e executou uma série de atividades e ações que foram executadas em algumas escolas públicas de Santarém-PA ou dentro da própria universidade que serão pormenorizadas em seguida.

Feiras de Matemática

Eram ações pontuais que duravam dois turnos uma vez por mês em escolas de ensino básico na rede pública de ensino. As feiras tinham como objetivo promover a (re)construção e divulgação de conhecimentos matemáticos com os alunos da educação básica.

Os bolsistas levavam para as escolas vários materiais manipulativos, jogos, quebra-cabeças, softwares etc. e montavam um ambiente de aprendizagem matemática que era visitado por alunos do educandário. Como tínhamos a capacidade de atender entre 25 e 30 alunos por vez, levávamos alternadamente uma turma por vez ao ambiente e estes lá permaneciam por um ou dois tempos de aula. Dentre os recursos levados, podemos destacar as atividades com tangram, cubo mágico, sólidos geométricos, xadrez, discos de frações entre outros.

Clubes de Matemática

É a principal ação do LAPMAT e teve como objetivo trabalhar a matemática de forma lúdica e atrativa com os alunos da Educação Básica. As atividades dos clubes aconteceram em três escolas públicas da cidade cujos nomes serão omitidos: Escola Estadual 1 (1 turma pela tarde), Escola Estadual 2 (1 turma pela tarde) e Escola Federal 1 (2 turmas, uma pela manhã e outra pela tarde).

O modelo de clube implementado na Escola Estadual 1 era ligeiramente diferente daquele implementado nas outras duas instituições de ensino, embora as atividades desenvolvidas fossem as mesmas. Nessa escola, os encontros ocorriam em dois tempos de aula por semana dentro da grade de horários de uma turma de 9º ano do ensino fundamental, enquanto que, nas duas outras instituições, as atividades ocorriam uma vez por semana durante uma hora e meia no contraturno e os alunos participantes eram selecionados pelo professor supervisor do PIBID entre alunos do 1º ano do ensino médio. Assim, na Escola Estadual 1, todos os alunos da turma deveriam participar dos encontros do clube, enquanto no Escola Estadual 2 e Escola Federal 1 eram disponibilizadas 20 vagas por turma do clube em cada instituição, sendo o professor supervisor orientado a utilizar como critério de seleção o desejo do aluno de participar do projeto.

Nas escolas onde as atividades eram realizadas no contraturno, não havia um espaço específico para a prática matemática como um laboratório ou similar, por isso utilizávamos uma sala de aula disponível na escola e a "transformávamos" em um clube que, infelizmente, só funcionava como tal no momento em que as atividades estavam acontecendo, já que estes espaços eram aproveitados para outras atividades das escolas em outros dias e horários.

Os bolsistas eram responsáveis por conduzir as ações propostas e os professores supervisores davam suporte pedagógico no sentido de intervir quando assim se fizesse necessário.

As atividades trabalhadas nos clubes foram planejadas para durarem, em média, de dois a três encontros, dependendo do desempenho dos alunos. Dentre elas, podemos destacar: bases numéricas, trabalhando com frações, xadrez, geometria com régua e compasso, cubo mágico, soroban e Euclidea. Para o maior detalhamento de todas essas atividades estamos escrevendo um livro intitulado Guia de Atividades que, apesar de estar ainda no prelo, encontra-se em fase final de sua escrita.

Portanto, o clube de matemática além de ter sido um espaço de experimentação matemática para o aluno da educação básica, onde foram utilizados materiais concretos, atividades lúdicas e objetos de aprendizagem, também se constituiu em um momento de experimentação pedagógica para os bolsistas.

Teatro de Tangram

É um espetáculo teatral que utiliza peças de tangram feitas de madeira, pintadas com tinta fosforescente e iluminadas por luz negra. Durante a apresentação, as luzes são apagadas e um narrador, já gravado anteriormente, conta uma das versões sobre o surgimento do tangram enquanto atores vestidos totalmente de preto se organizam no palco e produzem formas que ilustram a narrativa com um fundo musical guiando o ritmo da montagem de imagens.

No período referente a presente pesquisa, foram feitas duas apresentações. A primeira foi encenada por todos os bolsistas do LAPMAT e alguns voluntários durante o 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Norte que falaremos a seguir. A segunda apresentação ocorreu em uma escola pública de Educação Básica da cidade, onde a encenação foi feita por 28 alunos do próprio educandário, cabendo a quatro bolsistas a tarefa de coordenar a peça.

Os participantes do teatro de tangram puderam experimentar uma forma mais atrativa e diferenciada de divulgar a matemática através da encenação teatral utilizando peças do tangram. Nesse sentido, consideramos que o teatro do tangram foi algo prazeroso e divertido de se realizar, pois envolveu o encontro de ideias, criou práticas de cooperação e desenvolveu capacidades sociabilizadoras.

Apoio e Participação em Eventos

O 2° Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Norte foi organizado pelo Mestrado Profissional em Rede – PROFMAT em parceria com o LAPMAT. O evento é vinculado à Sociedade Brasileira de Matemática – SBM e teve por objetivo possibilitar uma maior reflexão sobre a formação profissional da área de matemática, em especial do professor atuante na educação básica, debatendo propostas e possibilidades de melhorias na qualidade de ensino.

A equipe do LAPMAT teve participação decisiva durante o evento, pois participou da elaboração de mesas redondas, integrou a organização da apresentação de pôsteres e deu todo o suporte necessário para a realização dos minicursos e grupos de trabalho.

Ciclos de Minicursos

O projeto Ciclo de Minicursos foi um projeto de extensão cadastrado na Pró-reitoria de Cultura, Comunidade e Extensão – PROCCE na UFOPA e teve por objetivo ofertar cursos de curta duração (geralmente 10 horas/curso) à comunidade acadêmica em geral. Foram oferecidos cursos de Cálculo, Calculadora Científica, Matemática Básica e outros. Todos foram planejados e executados pelos bolsistas do PIBID e tiveram a supervisão dos coordenadores do LAPMAT.

Após termos uma ideia de como o LAPMAT desenvolve as ações com os bolsistas do PIBID, partiremos agora para a análise de uma pesquisa realizada com eles depois da execução de todas essas atividades.

Pibid e Formação de Professores de Matemática

Ao término do ano letivo de 2017, pedimos aos 11 bolsistas presentes em nossa última reunião pedagógica do ano que respondessem por escrito a seguinte pergunta: *De que forma o trabalho como bolsista do PIBID influenciou na sua formação?* Não estipulamos número mínimo de laudas, tempo mínimo ou demos qualquer outra informação que pudesse "interferir" nas respostas dos pesquisados. Apenas dissemos que a escrita era livre e pedimos para que não se identificassem a fim de garantir que o teor das respostas estivesse o mais próximo possível daquilo que eles realmente estavam pensando.

A figura a seguir é resultante da análise e categorização feita por nós das respostas dadas pelos bolsistas. Por motivos éticos, omitiremos a identidade dos bolsistas e nos referiremos a eles como bolsista 1, bolsista 2 e assim por diante.

Infográfico referentes à pesquisa realizada com bolsistas do PIBID de matemática da UFOPA.

Fonte: Elaboração própria.

Conhecer o ambiente escolar: 05 bolsistas

Quando o futuro professor se insere no ambiente escolar, passa a enxergar a educação com outro olhar, procurando entender a realidade da escola e o comportamento dos alunos, dos professores e dos profissionais que a compõem. Com isso faz uma nova leitura do ambiente (escola, sala de aula, comunidade), procurando meios para intervir positivamente. Portanto, aqui definiremos "conhecer o ambiente escolar" como um entendimento mais claro das situações ocorridas no interior das escolas, o que, consequentemente, possibilita uma adequada intervenção dentro dessa realidade.

Para o bolsista 5, o trabalho dentro do PIBID "*vai fazer com que eu veja o ambiente escolar de uma maneira melhor*". Entendemos essa fala como um contato direto do futuro professor com as dinâmicas próprias da escola de uma forma geral. Ou seja, a compreensão de que esse ambiente é dotado de recursos materiais, professores, funcionários, pais e comunidade em geral; e que cada um desses agentes possui um papel próprio dentro desse mesmo ambiente.

Além do mais, toda essa dinâmica sofre vários tipos de influência, pois mesmo tendo objetivos, características e até recursos semelhantes, as escolas podem exibir aspectos distintos. O bolsista 8 destaca: "*uma coisa que eu acho importante ressaltar é quanto à disparidade de ensino de uma escola para outra, tendo em vista a infraestrutura de cada localidade*". Ou seja, por mais parecidos que fossem os espaços físicos de algumas escolas que pudemos ter contato com o PIBID de matemática, elas revelaram que alunos que estavam na mesma série tinham desempenho bem distintos. Enquanto alguns tinham extrema facilidade em compreender e participar dos encontros, outros exibiam dificuldades de aprendizado e até mesmo problemas de comportamento no decorrer das atividades.

Já o bolsista 1 afirmou: "*como futuro professor de matemática, fazer parte desse laboratório* [LAPMAT] *foi bem importante pois me fez ver e sentir como é realmente o ambiente dentro de uma sala de aula*". No que tange à atuação específica dentro da sala de aula, para tornar-se um ambiente favorável, percebemos que o futuro professor de matemática precisou experimentar normas e regras de convivência estabelecidas em comum acordo com os alunos para poder fundamentar uma interação mais significativa. Esse tipo de contato direto com aluno dentro da sala de aula pode favorecer o entendimento do futuro professor de matemática de que todos os indivíduos envolvidos percebam que essas regras se constroem com a participação de todos dentro de um processo de troca mútua, base essencial de ambiente escolar que se pretende democrático.

Ter contato com metodologias de ensino: 05 bolsistas

A pesquisa mostrou que 5 alunos identificaram o contato com diferentes metodologias de ensino como um ponto importante nas atividades realizadas no PIBID.

O bolsista 2 afirmou que "*como bolsistas passamos a ter um olhar mais crítico com relação às metodologias de ensino adotadas na escola*". Dentro de um curso de licenciatura, o futuro professor de matemática tem contato (ou deveria ter…) com os mais variados métodos de ensino. Tem a oportunidade de identificar novas e variadas estratégias para solucionar problemas que muitas vezes ele nem imaginava encontrar na sua área profissional. Ele passa a desenvolver mais o raciocínio, a capacidade e o espírito crítico, além da liberdade do uso da criatividade.

Para o bosista 9: "*a experiência adquirida nos clubes e feiras, o aprendizado das atividades ministradas, as reuniões de criação de roteiro, são exemplos de ganho positivo que adquiri e que não recebo em sala de aula* [graduação] *, mas que estou recebendo no LAPMAT*".

Segundo Mendes (2008), conhecer métodos alternativos de ensino torna-se indispensável para o educador matemático, visto que ajuda a construir uma diretriz norteadora do seu fazer pedagógico. O trabalho com práticas diversas permite que se "compreenda suas características, seus princípios pedagógicos e seus modos de abordagem, visando situá-lo acerca das possibilidades de uso de cada uma delas na medida em que o processo ensino-aprendizagem necessitar" (p.10). É possível notar também que esse aluno faz uma comparação entre aquilo que é alvo das ações do PIBID e aquilo que esse aluno já teve contato dentro do curso de licenciatura. Falta-nos elementos mais contundentes para afirmar que existe uma lacuna entre a teoria formal que se recebe na academia e a prática vivenciada por ele *in loco*, afinal de contas os pesquisados estão em diferentes estágios de seus processos de formação e alguns ainda não tiveram a oportunidade de cursar disciplinas de estágio ou de prática de ensino. Mas essa fala pode fornecer um subsídio importante no que tange à possibilidade do programa PIBID inserir o futuro professor de matemática no contexto das escolas públicas desde o início de sua formação acadêmica, proporcionando-lhe uma série de alternativas metodológicas diante do trabalho docente, já que esse é um dos objetivos primordiais do programa.

Ter confiança para a prática docente: 06 bolsistas

Dentre todos itens listados, a questão da confiança perante uma turma foi o mais mencionado entre os participantes da pesquisa. No gráfico, vemos que 6 alunos expuseram esses fatores e alguns relatos referentes a eles estão transcritos abaixo:

Bolsista 7: "*Desde que entrei no curso de matemática e física, eu me via com uma grande barreira que era a falta de capacidade de falar em público. Como o curso exige isso de mim o LAPMAT foi e é um ambiente no qual me ajudou muito*".

Bolsista 8: "*De forma geral, o PIBID é de grande importância para minha formação acadêmica, tendo em vista que nos passa mais segurança para trabalhar com os alunos*"

Bolsista 3: "*Percebi que além de aprender as atividades, perdi o medo de encarar a turma* [na escola]".

Bolsista 1: "*Me ajudou a desenvolver autoconfiança e a perder o medo de enfrentar a turma*".

Para construir uma identidade enquanto educador, experiências precisam ser vividas e socializadas em sala de aula, pois produzem discussões e possibilitam uma reflexão crítica de suas próprias práticas. Além do mais, o professor é uma pessoa que leva com ele uma bagagem repleta de histórias e de modelos. Segundo Silva e Felicetti (2014), "antes de ser professor, ele foi aluno e, implicitamente, traz na sua prática os traços dos modelos que teve enquanto aprendente" (p.22). Para além disso, agora como educadores, o futuro professor precisa se desvencilhar da ideia do ser passivo e mero transmissor de informações e passar ao protagonismo da tomada de decisões que acontecem no "chão" da sala de aula.

Ainda segundo as autoras, muitas vezes pode vir à tona a insegurança e o receio de não desenvolver um bom trabalho em sala de aula. Coisas como esperar, dar tempo para o aluno pensar, responder a perguntas, auxiliar o aprendente a criar estratégias para transpor eventuais dificuldades etc., podem causar uma certa falta de confiança ao docente em início de carreira. Alguns temem não conseguir dominar a classe, outros se preocupam em não saber todo o conteúdo que julgam necessário, uns questionam-se quanto ao método que adotarão e outros, ainda, anseiam por ministrar aulas.

Nas falas anteriores, pareceu-nos que os alunos demonstraram uma preocupação não só com o conteúdo que irão ministrar em classe, mas ter a confiança de "saber ensinar", ou seja, ter a capacidade de transformar o conhecimento que eles adquiriram em situações, métodos e técnicas que permitam com que seus alunos também se apropriem desse saber.

Inserir-se no meio acadêmico: 05 bolsistas

Vimos na figura 4 que cinco bolsistas expuseram que o trabalho como bolsista do PIBID pôde dar-lhes a oportunidade de se inserirem no meio acadêmico, ou seja, ter contato com seus pares fora do âmbito das aulas regulares do curso de graduação.

Para o Bolsista 1 "*Ajudou a me inserir no meio acadêmico, na comunidade da UFOPA*". Já para o aluno 6 "*aprendemos muito mais com as pessoas que nos rodeiam no* LAPMAT". Segundo Gonçalves e Gonçalves (1998), esse contato e troca de experiências entre os futuros professores de matemática pode favorecer uma formação mais completa, crítica e com articulações mais consistentes entre a teoria e sua prática. Afirmam que os cursos de formação de professores deveriam ter esse viés. Segundo eles:

> (...) parece-nos que uma boa medida seria criarmos condições para que a experiência pedagógica ao estudante começasse o mais cedo possível, em seu curso de licenciatura, pois aí teria um conteúdo prático para sua reflexão sobre a prática, associada à teoria de um âmbito universitário, tendo condições de discutir e questionar, auxiliado por seus professores e colegas (p.116)

O Bolsista 2 destacou que: "*o projeto exigiu de nós bolsistas responsabilidade com nossas atividades, desempenho, dedicação e colaboração*". Com relação a este último, é importante salientar que existe uma diferença entre colaboração e cooperação. Enquanto na cooperação, mesmo existindo uma ajuda mútua na realização de tarefas, suas finalidades não são fruto de negociação conjunta do grupo, podendo existir relações desiguais e hierárquicas entre os seus membros. Já na colaboração, por outro lado, ao trabalharem juntos, os membros de um grupo se apoiam, visando atingir objetivos comuns negociados pelo coletivo, estabelecendo relações que tendem à não-hierarquização, liderança compartilhada, confiança mútua e corresponsabilidade pela condução das ações (DAMIANI, 2008).

Pareceu-nos que o Bolsista 2, ao caracterizar o trabalho realizado no PIBID de matemática como um trabalho colaborativo, destaca uma preocupação constante dentro do LAPMAT no que tange a favorecer uma cultura de trabalho colaborativo, pois, em nosso entendimento, é fundamental que se crie ambientes para a promoção de trocas de experiência e, consequentemente, de aprendizagens no sentido do desenvolvimento da destreza na análise crítica, na resolução de problemas e na tomada de decisões.

Tornar-se um bom professor: 02 bolsistas

Ser professor de matemática requer algumas qualidades como: saber escutar, ser paciente, conhecimento do conteúdo, práticas pedagógicas adequadas, respeito pelos alunos e, principalmente, respeito por aquilo que faz (LORENZATO, 2010). Esses quesitos poderiam ser facilmente encaixados no bojo de qualidades para as demais licenciaturas, mas, analisando especificamente nossa pesquisa, vemos que dois dos alunos mencionaram que o trabalho nas atividades do PIBID pôde proporcionar a eles alguns desses aspectos que julgaram ser fundamentais na sua formação.

Para o Bolsista 2: "*durante esse período, fomos e continuamos sendo moldados para nos tornar ótimos professores.*" Percebemos que essa menção se deve ao fato de o aluno estabelecer a condição de bom professor de matemática a um processo contínuo de formação.

Para Mattos (2018), o professor, durante a formação, constrói sua prática adquirida em meio a discursos de diferentes formadores e a variados autores que estes formadores lhe apresentam. Essa construção ocorre vinculada a sua vivência pessoal, a sua experiência profissional e aquilo que o professor traz de sua cultura, seus valores, suas crenças e seus costumes oriundos da família e da sociedade que o circunda. Desse modo, o professor constitui suas representações do que é um bom professor.

Planejar atividades: 02 bolsistas

O gráfico mostra que dois alunos fizeram menção sobre a importância do planejamento das atividades como um dos fatores que influenciaram sua formação no período pesquisado.

Para o Bolsista 11, "*as reuniões que ocorrem semanalmente nos ensinam e nos mostram como ser bons professores que têm preocupação como o que vai ensinar e como vai ensinar*". Para Libâneo (2008), o planejamento proporciona ao professor uma linha de raciocínio que o direciona em suas ações, sendo que a ação docente vai ganhando eficácia na medida em que o professor vai acumulando e enriquecendo experiências ao lidar com situações concretas de ensino. Segundo o autor, "serve, de um lado, dos conhecimentos do processo didático e das metodologias específicas das matérias e, de outro, da sua própria experiência prática" (p.225).

Portanto, pareceu-nos que as reuniões prévias antes da execução das atividades do LAPMAT puderam fazer com que o referido aluno tivesse a concepção de que o planejamento de aula é de fundamental importância para que se atinja êxito no processo de ensino-aprendizagem, já que a sua ausência pode ter como consequência aulas monótonas e desorganizadas, desencadeando o desinteresse dos alunos e tornando as aulas desestimulantes.

Ainda para o Bolsista 11, o planejamento conseguiu fazer com ele deixasse "*o comodismo de lado na hora de elaborar atividades*". Aqui vamos interpretar o comodismo a que se refere o aluno como consequência direta da falta de interesse de muitos professores de matemática em planejar suas ações. Ou quando o fazem, não as executam plenamente. Infelizmente, nossa experiência, enquanto educadores, tem mostrado que, para esses professores, planejar é apenas atender à burocracia escolar, ou seja, o planejamento não se concretiza na prática. A partir do momento que não se acredita nos resultados de suas ações, deixa-se de praticá-la na forma que estava incialmente prevista, pois não se acredita no possível sucesso da ação praticada. Cabe ao professor uma mudança de postura: procurar conhecer melhor as vantagens e desvantagens de usar o planejamento para adquirir argumentos importantes e decidir a viabilidade ou não de sua utilização em suas práxis (MENEGOLLA e SANT'ANNA, 2002).

Aptidão para o magistério: 02 bolsistas

Historicamente os cursos de licenciatura em matemática e em física são alguns dos que contém os mais altos índices de evasão. Ao longo do seu percurso acadêmico, os alunos constatam que o desprestígio da profissão docente, junto com os baixos salários e a longas jornadas de trabalho, acaba se tornando fatores desestimulantes à permanência no curso. Vale ressaltar, ainda, que muito deles chegam com defasagem de aprendizagem da escola de ensino básico e encontram muitas dificuldades ao ingressar no curso, levando-os a muitas reprovações e isso também contribui com o aumento do número de abandonos do curso.

Voltando nossos olhares para a nossa pesquisa, percebemos também que um dos fatores que colabora para isso é o fato de que os graduandos percebem que não tem aptidão para o magistério. Para o Bolsista 1, o trabalho no PIBID de matemática "*me fez pensar se esse é realmente o ramo que desejo seguir como carreira*". Já o Bolsista 8 afirmou: "*Não sei se irei ingressar na profissão de professor, mas vale pela experiência*".

Considerações Finais

Como vimos nos relatos dos bolsistas, as escolas onde o PIBID de matemática da UFOPA atuou possuem uma organização pautada, na maior parte de suas ações, baseadas na transmissão e repetição de conteúdo. Ou seja, mesmo com o esforço dos professores das escolas de Educação Básica que tivemos a oportunidade de trabalhar, o sistema no qual os futuros professores tiveram contato é um sistema onde os alunos são passivos e não conseguem participar efetivamente do processo de ensino e aprendizagem.

As ações do PIBID tentaram superar esse sistema no sentido de proporcionar ao licenciando oportunidade de estar inserido no ambiente escolar já nos primeiros semestres do curso de LIMF e de fazer com que os alunos atendidos pudessem ser o agente principal na construção de seu próprio conhecimento.

Este encaminhamento certamente apresentou aos alunos de graduação e futuros professores, uma outra percepção de modos e práticas de ensino, voltadas para uma amplitude maior de opções e alternativas docentes. Em contraste, os alunos dos estabelecimentos de ensino os quais foram realizadas as atividades puderam ter a oportunidade de vivenciar práticas, estilos e comportamentos alternativos voltadas para as aprendizagens da matemática.

Uma consequência direta, em termos de resultados destas experiências, mostra o quanto o trabalho com PIBID pôde contribuir de maneira significativa na formação dos futuros professores do curso de LIMF. Muitos deles ainda não tinham sentido o que é "o chão" de uma sala de aula e puderam vivenciar situações que só poderiam acontecer nos estágios obrigatórios do curso - o que, em nosso entendimento, apresenta um curto momento, em sua trajetória acadêmica - ou (o que é mais preocupante) somente quando inseridos no mercado de trabalho.

A dinâmica apresentada e implementada nesta proposta fornece elementos significativos e contributivos para o acrescimento de desenvolvimento acadêmico, em nível de formação inicial. Finalmente, achamos de fundamental importância a continuidade dessas ações para os anos subsequentes, haja visto que a pesquisa mostrou apenas uma pequena faceta daquilo que é vivenciado dentro das atividades do LAPMAT.

Referências

DAMIANI, M. F. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. **Revista Educar**, n° 31. Curitiba-PR: Editora UFPR, p.213-230, 2008.

EWBANK, W. A. **The mathematics laboratory: what? why? how?** NCTN. Alberta, 1977.

GONÇALVES, T. O. e GONÇALVES, T. V. O. Reflexões sobre a prática docente situada: buscando novas perspectivas para a formação de professores. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D. e PEREIRA, E. M. A. **Cartografias do trabalho docente.** Campinas – SP: Mercado das Letras, 1998. p.207-236.

LIBÁNEO, J. C. **Didática.** 2ª Ed. São Paulo- SP: Editora Cortez, 2008.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3. ed. Campinas - SP: Autores Associados, 2010.

MATTOS, S. M. N. **Ser bom professor de matemática: a visão do professor iniciante**. In: I CIMACYC - Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe. Santo Domingo, República Dominicana. 6 - 8 de novembro de 2013. Disponível em: http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/20-384-1-DR-C.pdf. Acesso em fevereiro de 2018.

MENDES, I. A. **Tendências metodológicas no ensino de matemática**. Obras completas EDUCIMAT. Vol. 41. Belém – PA:EdUFPA, 2008.

MENEGOLLA, M.; SANT'ANNA, I.M. **Por que planejar, como planejar? Currículo-área-aula.** 11º ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

RODRIGUES, A. E. A., CARVALHO, H. C. e DINIZ, H. A. C. Clube de Matemática Como Espaço de Formação Docente. **Educação Matemática em Revista**. Ano 21, Ed. 49b, p.90-97, 2016.

SILVA, G. B. e FELICETTI, V. L. Habilidades e competências na prática docente. **Revista Educação Por Escrito**. Porto Alegre: V. 5, nº 1, p.17-29, 2014.

SCHON, D. A. **Educando o profissional reflexivo**: um novo design para o ensino e a aprendizagem. Trad. Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre – RS: Artes Médicas Sul, 2000.

TURRIONI, A. M. S. **O Laboratório de Educação Matemática na Formação Inicial de Professores**. 2004. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas – UNESP, Rio Claro - SP.

UFOPA - UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física**. Santarém – PA: UFOPA, 2015.

ISBN 978-65-994437-5-6