



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS
LICENCIATURA INTEGRADA EM MATEMÁTICA E FÍSICA**

ANTONIO CERINO DIAS FERREIRA

**O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES
UMA VISÃO DINÂMICA A PARTIR DO GEOGEBRA**

**SANTARÉM-PA
2019**

ANTONIO CERINO DIAS FERREIRA

**O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES
UMA VISÃO DINÂMICA A PARTIR DO GEOGEBRA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física do Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará como componente curricular obrigatório para a obtenção do grau de licenciado pleno.

**Orientador(es): Prof. Me. Aroldo Eduardo Athias
Rodrigues**

**SANTARÉM-PA
2019**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/UFOPA

F383p Ferreira, Antonio Cerino Dias

O processo de construção dos poliedros de Arquimedes: uma visão dinâmica a partir do GeoGebra. / Antonio Cerino Dias Ferreira. – Santarém, Pará, 2019.

50fls.;il.;

Inclui bibliografias.

Orientador Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Licenciatura Plena em Matemática.

1. Geometria. 2. Poliedros de Arquimedes. 3. GeoGebra. I. Rodrigues, Aroldo Eduardo Athias, *orient.* II. Título.

CDD: 23 ed. 516

ANTONIO CERINO DIAS FERREIRA

**O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES
UMA VISÃO DINÂMICA A PARTIR DO GEOGEBRA**

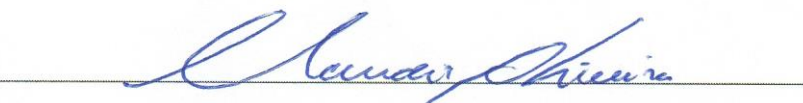
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física do Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará como componente curricular obrigatório para a obtenção do grau de licenciado pleno.

Aprovado em, 10 de abril de 2019

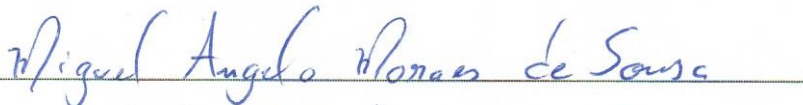
Banca Examinadora:



Prof. Me. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues
Orientador - Ufopa



Prof. Dr. Claudir Oliveira
Examinador - Ufopa



Prof. Me. Miguel Ângelo Moraes de Sousa
Examinador - Ufopa

**SANTARÉM-PA
2019**

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todas as pessoas que gostam de passear pelo universo da geometria e a todos que queiram conhecer um pouco mais sobre o mundo dos sólidos geométricos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder sabedoria, força e determinação. Qualidades que foram de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu orientador Aroldo Eduardo Athias Rodrigues pela excelente orientação e dicas valiosas que ajudaram a tornar este trabalho possível.

Aos professores Hugo Diniz e Hamilton Carvalho e aos colegas de trabalho, que faziam e continuam fazendo parte do Laboratório de Aplicações Matemáticas (LAPMAT), por todo apoio e orientações no decorrer da minha jornada acadêmica.

Aos professores e colegas de aula (da turma de LIMF 2013) pelos bons momentos de amizade, aprendizado e troca de conhecimento.

E por fim, a minha família, em especial minha mãe que sempre me apoiou nessa caminhada, mesmo nos momentos mais difíceis.

OBRIGADO!

“A Matemática é a mais alta das ciências, o dom mais alto que os deuses deram aos homens.”

Arquimedes

RESUMO

O tema central deste trabalho são os Poliedros de Arquimedes. Nele buscamos apresentar o processo de construção destes sólidos a partir dos poliedros de Platão. Para isso, foram realizadas diversas construções a partir do *software* de matemática dinâmica, GeoGebra. Assim, os objetivos centrais deste trabalho são: apresentar o processo de obtenção dos sólidos arquimedianos a partir dos platônicos com o suporte visual de construções feitas por nós no GeoGebra e mostrar as principais ideias que permitirão ao leitor tentar reproduzir estes arquivos no formato ggb ou produzir outros com a mesma finalidade. Além disso, é apresentada uma breve exposição da história relacionada ao tema, tratando de assuntos correlacionados e mostrando quem foram os principais matemáticos envolvidos, em especial, Arquimedes. Foram alcançados os objetivos propostos, visto que as construções estão prontas e disponíveis para o público no repositório de materiais existentes no site oficial do GeoGebra. Pressupõe-se que o leitor deste trabalho já possua conhecimentos básicos na área da Geometria (plana, espacial e analítica), bem como alguma familiaridade com a interface do *software* GeoGebra. Este trabalho não teve como foco a produção de um material didático que pudesse ser trabalhado em turmas da educação básica. Buscamos, no entanto, criar uma apresentação que permitisse a um professor ou estudante de graduação a introdução ao tema, cabendo a estes definirem o uso que farão do conhecimento adquirido, visto que, embora os Poliedros de Arquimedes não façam parte do conteúdo previsto no currículo deste nível de ensino, dependendo da abordagem trazida pelo docente, este estudo pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio e para ampliação da visão espacial de alunos da escola, habilidades que são certamente desejáveis.

Palavras-chave: Geometria. Poliedros de Arquimedes. GeoGebra.

ABSTRACT

The central theme of this work is Archimedes' Polyhedrons. In it we seek to present the process of construction of these solids from the polyhedrons of Plato. For this, several constructions were realized from the software of dynamic mathematics, GeoGebra. Thus, the central objectives of this work are: to present the process of obtaining Archimedean solids from the Platonic with the visual support of constructions made by us in GeoGebra and to show the main ideas that will allow the reader to try to reproduce these files in ggb format or to produce others for the same purpose. In addition, a brief exposition of the history related to the subject is presented, dealing with correlated subjects and showing who were the main mathematicians involved, especially Archimedes. The proposed objectives have been achieved since the constructions are ready and available to the public in the repository of materials on the official GeoGebra website. It is assumed that the reader of this work already has basic knowledge in the area of Geometry (flat, spatial and analytical), as well as some familiarity with the GeoGebra software interface. This work did not focus on the production of didactic material that could be worked on in basic education classes. However, we seek to create a presentation that allows a professor or undergraduate student to introduce the theme, and it is up to them to define their use of the knowledge acquired, since, although Archimedean Polyhedrons are not part of the content provided in the curriculum of this level of teaching, depending on the approach taken by the teacher, this study can contribute to the development of the reasoning and to the expansion of the spatial vision of school students, skills that are certainly desirable.

Keywords: Geometry. Archimedes' polyhedrons. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estatua de Platão	3
Figura 2 - Poliedros convexos regulares	4
Figura 3 - Imagem de Arquimedes	5
Figura 4 – Comparação do rombicuboctaedro e do giro-bicúpula quadrangular alongada.....	7
Figura 5 - Exemplos de prisma e de antiprisma	8
Figura 6 - Poliedros de Arquimedes	8
Figura 7 - O octaedro e o seu dual.....	9
Figura 8 - Poliedros de Catalan	10
Figura 9 - Truncatura do tetraedro.....	12
Figura 10 - Ilustração do tetraedro com as marcações de truncatura dos vértices	12
Figura 11 - Truncatura do octaedro	13
Figura 12 - Truncatura do icosaedro.....	13
Figura 13 - Truncatura do cubo	13
Figura 14 - Projeção ortogonal do cubo truncado e sua representação no plano	14
Figura 15 - Truncatura do dodecaedro	15
Figura 16 - Projeção ortogonal de uma face do dodecaedro truncado e sua representação	15
Figura 17 - Cuboctaedro obtido por truncaturas tanto no cubo, quanto no octaedro	16
Figura 18 - Cuboctaedro obtido pela intersecção do cubo e do octaedro.....	17
Figura 19 - Icosidodecaedro obtido por truncaturas tanto no dodecaedro, quanto no icosaedro	18
Figura 20 - Cuboctaedro truncado obtido por truncaturas no cuboctaedro	18
Figura 21 - Rombicuboctaedro obtido por expansão no cubo.....	19
Figura 22 - Projeção ortogonal do rombicuboctaedro e sua representação.....	20
Figura 23 - Parte da projeção do rombicuboctaedro ampliada.....	20
Figura 24 - Rombicosidodecaedro obtido pela expansão no dodecaedro	21
Figura 25 - Cuboctaedro truncado obtido por expansão no cubo truncado.....	21
Figura 26 - Projeção ortogonal do cuboctaedro truncado e sua representação	22
Figura 27 - Projeção do cuboctaedro truncado	22
Figura 28 - Icosidodecaedro truncado obtido por expansão no dodecaedro truncado	23
Figura 29 - Cubo snub obtido de um cubo	24
Figura 30 - Dodecaedro snub obtido de um dodecaedro	24
Figura 31 - O tetraedro e pontos utilizados na criação de ferramenta.....	26

Figura 32 - Passos para criar uma ferramenta no GeoGebra.....	26
Figura 33 - O tetraedro com as marcações de alguns pontos	27
Figura 34 - Representação do tetraedro truncado no GeoGebra	28
Figura 35 - O tetraedro truncado e as pirâmides resultantes das truncaturas	28
Figura 36 - Vetores construídos a partir do centro do tetraedro.....	29
Figura 37 - O resultado do processo de truncatura em um tetraedro.....	29
Figura 38 - O cubo e os pontos que geram a ferramenta.....	31
Figura 39 - O cubo e os pontos centrais das faces que serão transladadas.....	31
Figura 40 - O cubo e suas faces transladadas	32
Figura 41 - O processo de expansão para obtenção do rombicuboctaedro	33
Figura 42 - Passos para condicionar o aparecimento do controle deslizante	33
Figura 43 - Caixa de diálogo para criar um controle deslizante.....	34
Figura 44 - A expansão e a rotação das faces de um cubo	35
Figura 45 - Representa do cubo snub no Geogebra.....	35

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
1 GRANDES MATEMÁTICOS E OS POLIEDROS.....	3
1.1 Platão e os Poliedros Regulares.....	3
1.2 Um pouco sobre Arquimedes	4
1.3 Poliedros Semirregulares.....	7
1.4 Poliedros de Catalan	9
2 O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES	11
2.1 Poliedros Obtidos por Truncatura	11
2.2 Poliedros Obtidos por Expansão.....	19
2.3 Poliedros Obtidos por Snubificação	23
3 IDEIAS CENTRAIS PARA AS CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA.....	25
3.1 Construindo por Truncatura	25
3.2 Construindo por Expansão.....	30
3.3 Construindo por Snubificação	34
CONSIDERAÇÕES	36
REFERÊNCIAS	38

INTRODUÇÃO

A Geometria é uma área de estudo da matemática muito bem consolidada. O senso comum de que é o estudo das formas nos mostra que, seja nas escolas ou no dia a dia, estamos em constante contato com ela.

O tema central deste trabalho são os sólidos de Arquimedes, ou melhor, a construção destes sólidos. Na verdade, temos dois objetivos principais: *as construções* e *as construções das construções*. Vamos agora explicar o que queremos dizer com isto. Nosso primeiro objetivo foi o de criar arquivos no GeoGebra que possibilitassem às pessoas encontrar um suporte visual para compreensão do processo de construção de cada um dos sólidos de Arquimedes. Este objetivo foi atingido, visto que tais construções estão prontas e disponibilizadas no repositório de materiais do site do GeoGebra (<https://www.geogebra.org/materials>). Quanto ao segundo objetivo, foi concretizado por nós no capítulo 3 ao compartilharmos com o leitor as principais ideias utilizadas na produção dos arquivos disponibilizados no formato ggb, caso este deseje se aventurar em suas próprias construções.

Em se tratando de um trabalho da área da matemática, provavelmente o leitor esperaria encontrar aqui uma grande quantidade de contas e cálculos. Para não decepcionar o leitor, resolvemos apresentar alguns dos cálculos envolvidos na construção dos sólidos arquimedianos a partir dos platônicos, contudo, na maioria dos casos isto não foi possível. Isto ocorre porque muitas construções foram obtidas por processos de tentativa e erro, sendo o efeito visual desejado obtido por meio de resultados apenas aproximados. Há ainda o caso de poliedros, cujos valores utilizados em nossas construções foram obtidos com base em construções feitas por outro autor que às disponibilizou no site oficial do GeoGebra. Nos casos em que as construções estavam alicerçadas em resultados exatos procuramos compartilhar com o leitor as contas e raciocínios que nos permitiram obter tais resultados. Nos demais casos, limitamos a uma abordagem mais descritiva que tem o mérito de expor o processo criativo exigido na elaboração de cada uma delas.

Quando começamos a escrever este trabalho, não encontramos muitas construções no enorme repositório de materiais existente no site oficial do GeoGebra que envolvessem os sólidos de Arquimedes. Além disso, detectamos nesse repositório a quase completa escassez de materiais mostrando o processo de obtenção destes sólidos a partir dos poliedros de Platão. Isto serviu como motivação para produção do material que constitui este trabalho, justificando sua necessidade, em tempos nos quais o ensino e o uso dos recursos tecnológicos mais recentes

devem caminhar juntos em prol de uma aprendizagem mais efetiva. Se temos a possibilidade de criar recursos visuais que permitirão a nossos alunos obter uma melhor compreensão de ideias que exigem alto nível de abstração, então por que não fazê-lo?

A escolha do GeoGebra deve-se ao fato de ser este um *software* de código aberto e de estar disponível gratuitamente para usuários não comerciais. Ele possui os seguintes aplicativos gratuitos para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux: GeoGebra Clássico 5, GeoGebra Clássico 6, Calculadora Gráfica, Calculadora Gráfica 3D, Geometria e Realidade Aumentada, todos eles disponíveis para download no endereço eletrônico <https://www.geogebra.org/download>. A opção pela utilização do GeoGebra Clássico 5, deve-se ao fato de ser esta a única versão off-line disponível para uso em *desktops* e *notebooks*, quando as construções apresentadas aqui começaram a ser feitas. Assim, por estarmos mais familiarizados com esta versão e em nome da padronização das construções apresentadas, optamos por permanecer utilizando esta versão, apesar de termos hoje o GeoGebra Clássico 6 disponível.

Este trabalho está estruturado em três capítulos. No primeiro capítulo procuramos apresentar um pouco da história que envolve os poliedros de Arquimedes: tratamos inicialmente dos poliedros de Platão, trouxemos um pouco da história de Arquimedes e discorremos sobre poliedros semirregulares, regulares não convexos e sobre os duais dos poliedros de Arquimedes, denominados sólidos de Catalan.

O segundo capítulo é aquele no qual mostramos como os sólidos de Arquimedes podem ser obtidos a partir dos platônicos, sem qualquer preocupação em mencionar os passos de construção no GeoGebra. Aqui as construções feitas e disponibilizadas por meio de links ao longo do texto exemplificam os processos de truncatura, expansão e snubificação de poliedros.

No último capítulo desenvolvemos aquele que é o nosso segundo objetivo principal, compartilhar com o leitor as ideias que lhe permitirão fazer suas próprias construções, mostrando como obter os pontos onde deve realizar as truncaturas e como transladar ou rotacionar as faces de um poliedro. Para isso, recorreremos algumas vezes aos resultados apresentados no capítulo anterior.

Esperamos que professores e alunos possam encontrar nesta breve exposição de uma pequena parte de um tópico dentro de uma área tão maior e magnífica quanto geometria espacial o encanto que nos motiva no caminho da aprendizagem matemática.

1 GRANDES MATEMÁTICOS E OS POLIEDROS

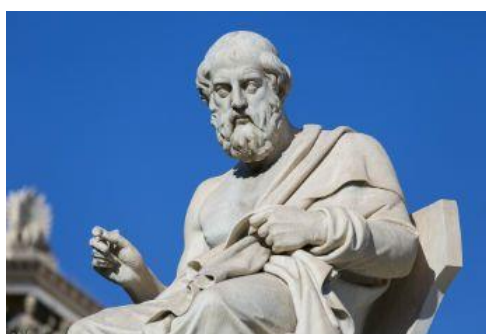
Neste capítulo abordaremos um pouco da história que envolve os poliedros. Traremos algumas das contribuições de Platão, Arquimedes, Catalan e outros. Não se sabe ao certo quando o ser humano passou a se interessar pelo estudo dos poliedros. As pirâmides evidenciam o conhecimento que os egípcios tinham sobre esse assunto. Além disso, obras de filósofos antigos como Platão e Euclides debruçavam-se sobre questões de geometria espacial. Um fato que pode ter contribuído para que os poliedros chamassem a atenção de grandes filósofos e matemáticos, de modo que estes dedicassem parte de suas vidas para o estudo das propriedades desses sólidos geométricos, é sua presença constante na forma dos objetos que nos cercam.

Hoje, mais ainda que na época em que estes sábios viveram, vamos encontrar facilmente os poliedros. Estão na caixa de sapato ou de perfume, nos prédios e até mesmo na CPU de computadores. Nos jogos de tabuleiro temos os dados, na construção civil temos o Museu do Louvre, que contém alguns projetos arquitetônicos inspirados nesses sólidos. Exemplos não nos faltam.

1.1 Platão e os Poliedros Regulares

Arístocles (c. 428 – c. 347 a.C.), mais conhecido como Platão, foi um filósofo grego que nasceu em Atenas (Grécia) e que foi responsável pela fundação, em 386 a.C., da famosa Academia em sua cidade natal.

Figura 1 - Estatua de Platão

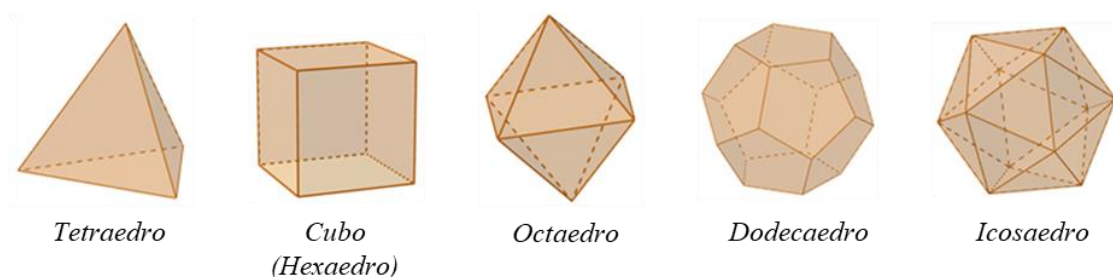


Fonte: Disponível em <https://www.todamateria.com.br/platao/>. Acesso em 15/03/2019

Na obra *Timeu*, Platão descreveu os poliedros convexos regulares que hoje levam seu nome e que são denominados de acordo com o número de faces que cada um contém: o primeiro, por possuir quatro faces triangulares é chamado de tetraedro; o segundo, cubo ou hexaedro, já que possui seis faces quadradas; o terceiro é denominado octaedro pelo fato de ter

oito faces, que também são triângulos; o quarto sólido possui doze faces pentagonais, daí o nome dodecaedro; e o quinto tem como nome icosaedro e é constituído por vinte faces também triangulares, como mostra a Figura 2. Podemos ver, também, um detalhamento sobre o significado dos nomes de cada um desses poliedros em EVES (2004).

Figura 2 - Poliedros convexos regulares



Fonte: O autor (2019)

No livro *Introdução à História da Matemática*, o autor explica o significado místico atribuído pelos gregos a estes cinco sólidos:

No trabalho de Platão, *Timeu* misticamente associa os quatro sólidos mais fáceis de construir – o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o cubo – com os quatro elementos primordiais empedoclianos de todos os corpos materiais – fogo, ar, água e terra. Contornava-se a dificuldade embaraçosa em explicar o quinto sólido, o dodecaedro, associando-o ao Universo que nos cerca. (EVES, 2004, p. 114)

Apesar de Platão ter se interessado pelos poliedros convexos regulares, credita-se ao matemático grego Teeteto (c. 417 a.C. – c. 369 a.C.) a descoberta e a comprovação da existência desses sólidos (OLIVEIRA, 2012, p.177).

No Livro XIII dos *Elementos*, Euclides provou a existência de apenas cinco poliedros convexos regulares e que não há possibilidade de existirem outros. Euclides seguiu a mesma ordem usada por Platão em *Timeu* para fazer as construções. Podemos ver as construções do tetraedro, do octaedro, do cubo, do icosaedro e do dodecaedro, respectivamente (MOREIRA, 2017, p. 14).

1.2 Um pouco sobre Arquimedes

Arquimedes (287-212 a.C.) é, para muitos, o maior matemático da Antiguidade (ASSIS, 2008). Nascido em Siracusa, era filho de Fídias, um astrônomo que obteve estimativa para os diâmetros do Sol e da Lua. Carregava em seu nome a marca de um gênio. Como nos explicam Netz e Noel, 2007:

A palavra “Arquimedes” é composta de duas partes: *arché*, que significa princípio, domínio ou causa original; e *mêdos*, que significa mente, pensamento ou intelecto. Se interpretarmos seu nome da esquerda para a direita ele poderia significar algo como “a mente principal.” Mas na Grécia antiga era mais comum interpretarmos o nome da direita para a esquerda. Neste caso seu nome significaria “a mente do princípio”, assim como o nome Diomedes significaria “a mente de Deus”. (NETZ; NOEL, 2007, p. 59-60)

Arquimedes passou um tempo no Egito, provavelmente em Alexandria, onde entrou em contato com *Os Elementos*, de Euclides. Quando em Siracusa, correspondia-se com viajantes e moradores de Alexandria, tendo muitas de suas obras guardadas na Biblioteca. Como bem sabemos, diversas invasões e sucessivos incêndios destruíram praticamente todo o acervo da Biblioteca de Alexandria. O que se salvou da obra de Arquimedes foram apenas algumas correspondências com outros intelectuais da época.

Figura 3 - Imagem de Arquimedes



Fonte: Disponível em <https://historiadamatematica.wordpress.com/arquimedes/>. Acesso em 15/03/2019

O valor de suas obras, não apenas para a matemática e a física, como para a engenharia, foi sentida até mesmo na sua morte. Uma força romana liderada pelo general Marcelo sitiou Siracusa tanto por mar quanto por terra. Arquimedes e suas invenções foram de grande utilidade para que os siracusanos conseguissem resistir por mais tempo à invasão romana.

Plutarco relata o seguinte:

(...) Quando os romanos assaltaram os muros de Siracusa em dois lugares simultaneamente, os habitantes ficaram paralisados de medo e de pavor, acreditando que nada era capaz de resistir a esta violência e a estas forças. Mas quando Arquimedes começou a manejar suas máquinas, ele lançou contra as forças terrestres todos os tipos de mísseis e rochas imensas que caíam com grande estrondo e violência (...). Os soldados romanos ficaram com um pavor tão grande que, se vissem uma

pequena corda ou pedaço de madeira saindo dos muros, começavam imediatamente a gritar, que lá vinha de novo, Arquimedes estava para lançar alguma máquina contra eles, então viravam as costas e fugiam. Marcelo então desistiu dos conflitos e assaltos, colocando toda sua esperança em um longo cerco. (PLUTARCO. Trad.: DRYDEN, 2008, p. 1)

Só após três anos de cerco que Marcelo conseguiu tomar Siracusa. Esse foi, também, o momento da morte de Arquimedes, que não fora planejada. Plutarco segue narrando:

Mas nada afligiu tanto Marcelo quanto a morte de Arquimedes, que estava então, como quis o destino, concentrado trabalhando em um problema por meio de um diagrama e, tendo fixado sua mente e seus olhos no tema de sua especulação, não percebeu a incursão dos romanos, nem que a cidade havia sido tomada. Neste estado de estudo e contemplação, um soldado, chegando até ele de maneira inesperada, mandou que o seguisse até Marcelo; o que ele se recusou a fazer até que tivesse terminado seu problema e chegado a uma demonstração. O soldado então, enfurecido, tirou sua espada e o matou.

Outros escrevem que um soldado romano, correndo até ele com uma espada levantada, disse que ia matá-lo. Arquimedes, olhando para trás, implorou-lhe seriamente para esperar um pouco, para que ele não deixasse de forma inconclusa e imperfeita o trabalho que estava fazendo. Mas o soldado, não sensibilizado pelo seu pedido, matou-o instantaneamente. Outros relatam ainda que quando Arquimedes estava levando para Marcelo instrumentos matemáticos, relógios de Sol, esferas e ângulos ajustados para medir com a vista o tamanho aparente do Sol, alguns soldados, vendo-o e pensando que transportava ouro em um recipiente, o assassinaram. O certo é que sua morte muito afligiu a Marcelo; e que Marcelo sempre considerou aquele que o matou como um assassino; e que ele procurou pelos parentes [de Arquimedes] e os honrou com muitos favores. (PLUTARCO. Trad.: DRYDEN, 2008, p. 2)

Após a morte de Arquimedes, Marcelo ordenou que se cumprisse a vontade dele enquanto em vida, de que em seu túmulo fosse colocado um cilindro circunscrito a uma esfera dentro dele, juntamente com uma inscrição dando a razão entre os volumes destes corpos. Seu túmulo foi visto pela última vez por Cícero, no ano de 70 d.C., segundo o qual:

Quando fui questor na Sicília consegui descobrir seu túmulo (...) percebi uma pequena coluna pouco visível sobre os arbustos. Em cima dela havia uma esfera e um cilindro (...) os versos ainda estavam visíveis, embora aproximadamente a segunda metade de cada linha estivesse gasta. (TORRES, apud ASSIS, 2008, p. 21)

Podemos ver mais detalhes sobre a história e as principais contribuições desse grande matemático em Contador (2012). Devido à escassez de material, não temos como afirmar

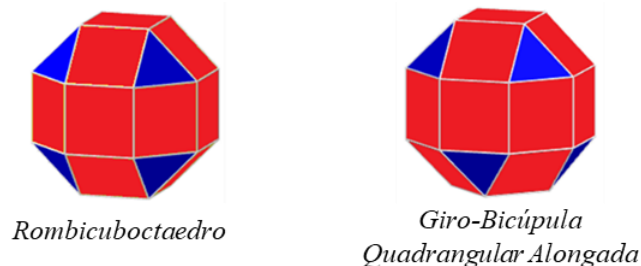
quando, nem como Arquimedes descobriu os poliedros semirregulares, mas sabemos que partiu dos poliedros de Platão e que ele realmente desenvolveu tais pesquisas, pois, por exemplo, Pappus de Alexandria (século III d.C.), faz referência a estes estudos de Arquimedes no Livro V de sua obra *Coleção Matemática* (MOREIRA, 2017, p. 16). Tais poliedros serão nosso objeto de estudo na seção seguinte e também no capítulo 2.

1.3 Poliedros Semirregulares

Enquanto nos sólidos de Platão todas as faces são polígonos regulares do mesmo tipo, os poliedros semirregulares são constituídos por faces na forma de polígonos regulares, porém de dois ou mais tipos, desde que se garanta que seus vértices sejam congruentes.

Se excluirmos os prismas e os antiprismas, há exatamente quatorze poliedros convexos semirregulares. Porém, para que tenhamos um sólido de Arquimedes é necessário também que haja isometria espacial, isto é, que enviemos um vértice a qualquer outro vértice do poliedro sem que sejamos capazes de perceber que o poliedro se moveu. Acontece que um desses 14 poliedros, a giro-bicúpula quadrangular alongada, não satisfaz essa condição, não podendo, portanto, ser considerada sólido de Arquimedes. Este último poliedro é formado por duas cúpulas e um anel de quadrados que as separa. O rombicuboctaedro pode ser obtido da giro-bicúpula quadrangular alongada mantendo a cúpula superior e o anel de quadrados parados enquanto efetuamos uma rotação da cúpula inferior até que um novo anel de quadrados seja formado. A Figura 4 nos mostra o rombicuboctaedro ao lado da giro-bicúpula quadrangular alongada.

Figura 4 – Comparação do rombicuboctaedro e do giro-bicúpula quadrangular alongada

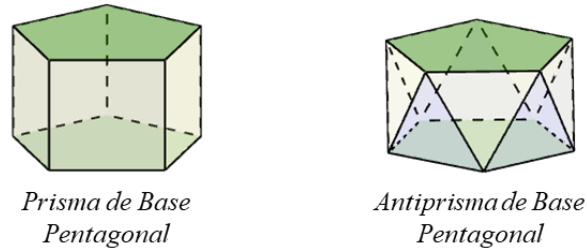


Fonte: O autor (2019)

No parágrafo anterior mencionamos prismas e antiprismas. Embora os prismas sejam bem conhecidos, não podemos dizer o mesmo a respeito dos antiprismas, que podem ser imaginados como prismas cujas faces laterais são substituídas por triângulos após uma rotação de uma das bases. Claro que esta não é uma definição precisa. Vendrame (2014) faz um conceito

basico sobre antiprisma, já Dulce (2019) traz uma definição mas formal sobre prismas. A Figura 5 mostra um prisma ao lado de um antiprismas.

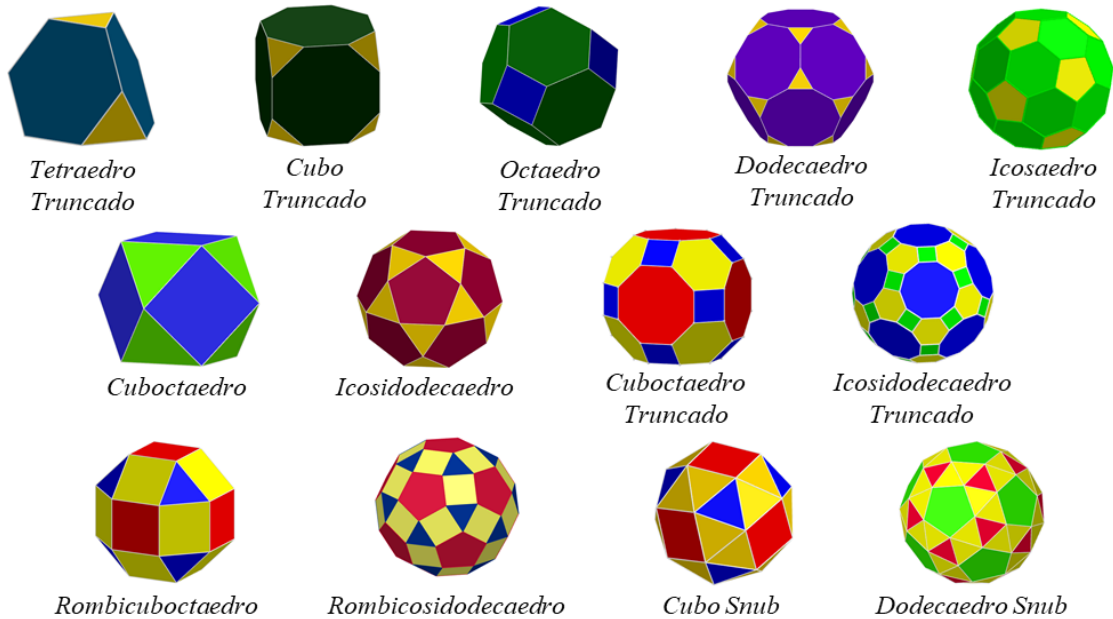
Figura 5 - Exemplos de prisma e de antiprisma



Fonte: O autor (2019)

Depois da morte Arquimedes, o estudo sobre os poliedros arquimedianos foi retomado pelo matemático Alemão Johannes Kepler (1571-1630), que estudou os sólidos semirregulares. Foi ele quem deu nome a cada um dos poliedros de Arquimedes. Em sua obra *Harmonices Mundi*, Kepler mostrou a existência de somente treze sólidos arquimedianos (OLIVEIRA, 2012, p. 189). Esses poliedros são denominados de acordo com o processo que pode ser utilizado para obtê-los os quais serão abordados no decorrer do capítulo 2. A Figura 6 traz os treze poliedros com seus respectivos nomes.

Figura 6 - Poliedros de Arquimedes



Fonte: o autor (2019)

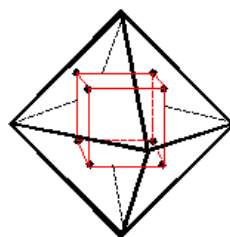
Kepler também descrever dois dos quatro poliedros regulares não convexos, o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro estrelado na obra *Harmonices Mundi*, publicada

em 1619. Louis Poinsot (1777-1859) descreveu o grande dodecaedro e o grande icosaedro. Porém, a primeira imagem conhecida do pequeno dodecaedro estrelado, data de 1430, em um mosaico do pavimento da catedral de São Marcos em Veneza, atribuído a Paolo Uccello. (BATISTA, 2010, p. 1). O grande dodecaedro estrelado foi publicado em 1568 por Wenzel Jamnitzer na obra *Perspectiva Corporum Regularium*. Estas aparições anteriores não vieram acompanhadas de descrições rigorosas sobre as propriedades matemáticas e a forma de obtermos esses poliedros, o que veio a ocorrer apenas com Kepler e com Poinsot, que emprestaram seus nomes para eles. Mais tarde, Cauchy provaria que existem apenas nove poliedros regulares: os cinco platônicos e os quatro de Kepler-Poinsot. (NASCIMENTO, 2015, p. 13-15).

1.4 Poliedros de Catalan

Eugene Charles Catalan (1814-1894) era um matemático belga que também foi atraído pelos poliedros. Em sua pesquisa procurou entender os duais dos poliedros de Arquimedes, que são chamados de poliedros de Catalan em sua homenagem. Mas o que é o dual de um poliedro? Para darmos uma noção a respeito deste conceito, imagine que tomássemos pontos no interior de cada uma das faces de um poliedro do tipo A tais que unindo pontos de faces adjacentes fosse possível obter as arestas de um poliedro do tipo B, um poliedro obtido assim é denominado dual do poliedro do tipo A. Repetindo este mesmo processo com o poliedro do tipo B é possível encontrar um novo poliedro, que será do tipo A, no sentido de que este último preservaria uma série de características do primeiro, como, por exemplo, o número de vértices, arestas e faces. Assim, podemos simplesmente dizer que dois poliedros dos tipos A e B são duais um do outro. Exemplos de duais são os poliedros de Platão que têm os duais em pares com exceção do tetraedro cujo seu dual é ele mesmo. Podemos ver uma discussão mais detalhada sobre Dualidade no trabalho de Sartor (2013), que fala sobre os duais dos poliedros de Platão. A Figura 7 mostra um exemplo de dualidade entre o octaedro e o cubo.

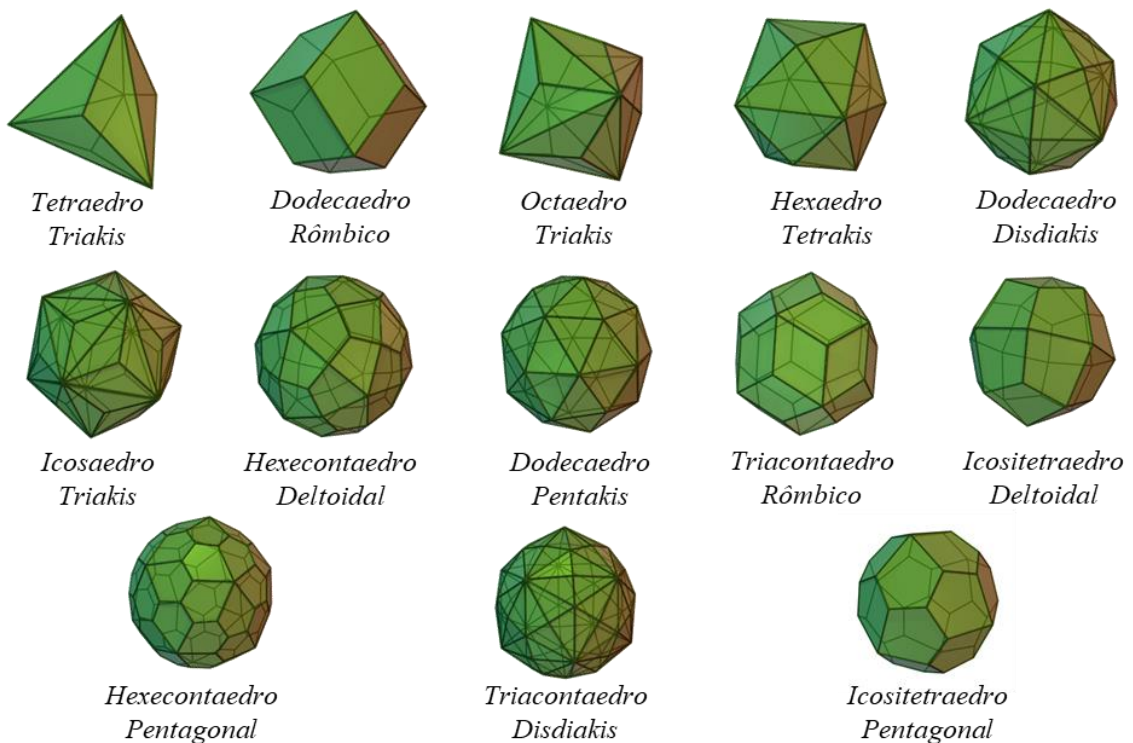
Figura 7 - O octaedro e o seu dual



Os poliedros de Catalan são poliedros convexos de faces uniformes, mas não de vértices uniformes, isto é, todas as faces destes sólidos possuem o mesmo número de lados, porém não concorrem em todos os vértices a mesma quantidade de arestas. Isto se deve ao fato de que os sólidos de Arquimedes, que os geram, são de vértices uniformes e não de faces uniformes. As faces que formam os sólidos de Catalan não são polígonos regulares, mas os ângulos diédricos são todos iguais.

Existindo treze poliedros de Arquimedes, temos treze sólidos de Catalan, conforme a Figura 8.

Figura 8 - Poliedros de Catalan



Fonte: Imagem adaptada. Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Sólidos_de_Catalan. Acesso em 15/03/19

Neste primeiro capítulo apresentamos alguns conceitos básicos e aspectos históricos sobre os poliedros. Agora vamos concentrar nosso estudo nos poliedros semirregulares de Arquimedes, como podemos construí-los e as relações matemáticas presentes nesse desenvolvimento.

2 O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Neste capítulo, mostraremos como obter os 13 poliedros de Arquimedes por três processos de construção distintos: truncatura, expansão e snubificação. Informalmente, podemos dizer que truncar um poliedro consiste em retirar uma parte deste por meio de um corte, para uma definição mais rigorosa e detalhada consulte, por exemplo, Sá & Rocha (2012). Os outros dois processos, expansão e snubificação, consistem em afastar, a uma determinada distância, as faces do poliedro original e preencher os espaços entre elas com polígonos, devendo ainda ser efetuada a rotação das faces antes desse preenchimento no caso da snubificação.

Uma parte importante deste trabalho de conclusão de curso foi a produção de arquivos no formato ggb que nos permitem enxergar de forma dinâmica o processo de construção de cada poliedro de Arquimedes. Assim, neste capítulo, toda vez que fizermos a primeira menção ao nome de um destes poliedros estará disponível um *hiperlink* que permitirá o acesso ao arquivo disponibilizado por nós na plataforma do GeoGebra, bastando clicar no nome do poliedro para acessá-lo. Para aqueles que estiverem utilizando o trabalho impresso disponibilizamos também o endereço para acessar a construção na forma de nota de rodapé.

Quando nos referirmos aos poliedros de Arquimedes por seus nomes, utilizaremos a nomenclatura de forma restrita, isto é, supondo que são sempre semirregulares. Quando não quisermos utilizar o termo desta maneira, faremos isto de forma explícita.

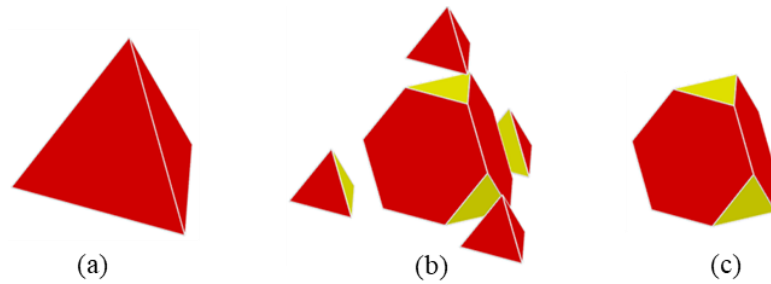
2.1 Poliedros Obtidos por Truncatura

O mais simples de todos os poliedros regulares é, sem dúvida, o tetraedro, que possui apenas quatro faces. Assim, o mais simples de todos os poliedros de Arquimedes é aquele que se obtém deste por meio da truncatura de seus vértices, isto é, o tetraedro truncado. Por isso mesmo será o primeiro cuja construção será abordada por nós.

Para realizar tal construção tomemos um tetraedro regular como o da Figura 9a cujas arestas têm todas a como medida. Escolhendo um dos vértices e marcando os pontos que pertencem às arestas concorrentes a este vértice e que distam dele $\frac{a}{3}$, devemos efetuar um corte passando por esses três pontos, extraíndo a pirâmide obtida como resultado do corte. Fazendo este processo em todos os vértices do tetraedro como na Figura 9b, obtemos como resultado final o [tetraedro truncado](#)¹ da Figura 9c.

¹ <https://www.geogebra.org/m/repntpzbz>

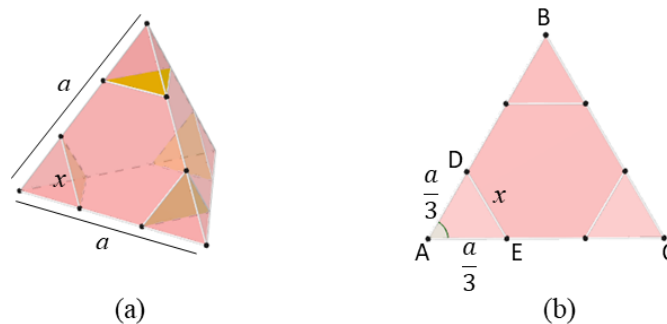
Figura 9 - Truncatura do tetraedro



Fonte: O autor (2019)

Para termos certeza que o poliedro assim obtido é realmente o tetraedro truncado, precisamos garantir que todas as suas arestas terão a mesma medida. Pelo modo como a truncatura foi realizada (veja Figura 10a), é óbvio que as arestas que são lados apenas de hexágonos medem $\frac{a}{3}$, já que foram obtidas da divisão da aresta do tetraedro original em 3 partes iguais. Quanto às arestas que são compartilhadas por hexágonos e triângulos, estas possuem também medida $x = \frac{a}{3}$ e isto pode ser demonstrado verificando que os triângulos ABC e ADE são semelhantes pelo caso *LAL*, como nos ajuda a enxergar a Figura 10b.

Figura 10 - Ilustração do tetraedro com as marcações de truncatura dos vértices



Fonte: O autor (2019)

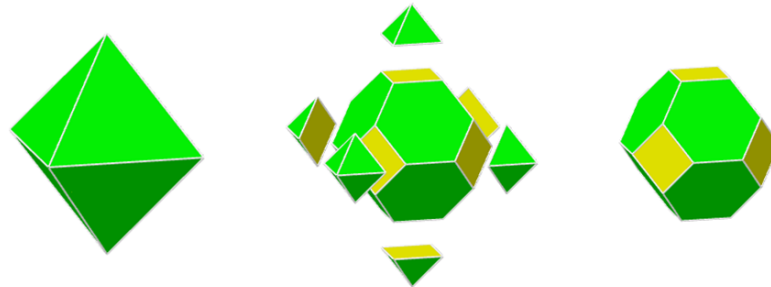
Note que o que fizemos foi apenas garantir que todas as arestas do poliedro possuem a mesma medida. É fácil ver que os ângulos de uma mesma face serão também todos iguais e que, portanto, todas as faces são polígonos regulares. No trabalho de Almeida (2015) podemos ver raciocínios e cálculos semelhantes relacionados as cinco primeiras construções. As construções do [octaedro truncado](https://www.geogebra.org/m/cma2euhh)² e do [icosaedro truncado](https://www.geogebra.org/m/ypzfjqsf)³ (cujos processos de truncatura estão representados nas Figuras 11 e 12), podem ser obtidas de forma completamente análoga, já que estes sólidos derivam do octaedro e do icosaedro, os quais também possuem faces triangulares.

² <https://www.geogebra.org/m/cma2euhh>

³ <https://www.geogebra.org/m/ypzfjqsf>

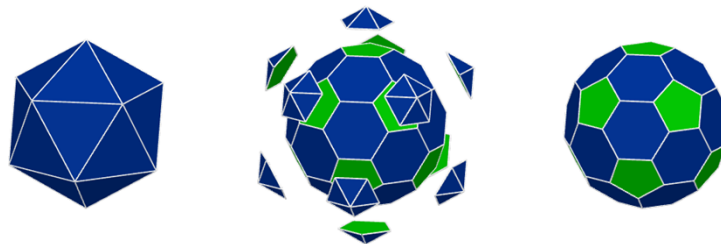
Porém, nos casos de um cubo e de um dodecaedro cujas arestas meçam a , se considerarmos os pontos de interseção entre as arestas e o plano de corte, a distância d de cada um desses pontos até o vértice mais próximo é diferente de $\frac{a}{3}$.

Figura 11 - Truncatura do octaedro



Fonte: O autor (2019)

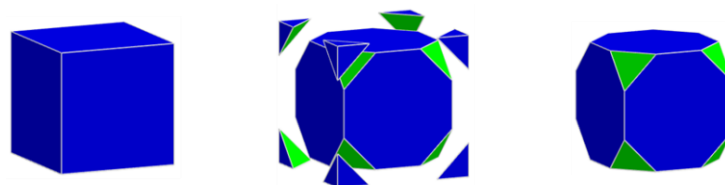
Figura 12 - Truncatura do icosaedro



Fonte: O autor (2019)

Vejamos, então, como essas distâncias podem ser calculadas nestes dois casos, começando pelo caso do [cubo truncado](#)⁴, que pode ser obtido a partir de um cubo de aresta a , como indicado na Figura 13.

Figura 13 - Truncatura do cubo

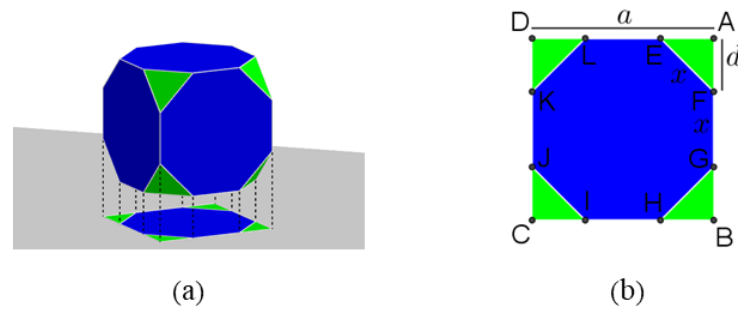


Fonte: O autor (2019)

Fazendo a projeção ortogonal do cubo truncado, como indicado na Figura 14a, podemos obter, no plano, uma imagem que nos possibilita visualizar onde serão efetuados os cortes que resultarão na truncatura dos vértices.

⁴ <https://www.geogebra.org/m/uhc7b2f5>

Figura 14 - Projeção ortogonal do cubo truncado e sua representação no plano



Fonte: O autor (2019)

A projeção obtida na Figura 14a está representada na Figura 14b pelo quadrado $ABCD$. Nela, chamamos de x o comprimento do lado do octógono regular $EFGHIJKL$, que é obtido após a truncatura dos vértices, e de d a distância que vai do vértice A a um dos pontos de corte mais próximos deste vértice, digamos F . Observando a Figura 14b, é fácil concluir que

$$d = \frac{a - x}{2}. \quad (2.1)$$

Sabendo que o triângulo $\triangle AEF$ é reto em \hat{A} , podemos aplicar o teorema de Pitágoras, obtendo

$$x^2 = \left(\frac{a - x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - x}{2}\right)^2.$$

Desenvolvendo a expressão acima, chega-se a seguinte equação quadrática em x :

$$x^2 + 2ax - a^2 = 0,$$

cujas raízes são

$$x = -a \pm a\sqrt{2}. \quad (2.2)$$

Como o valor negativo não nos interessa, usaremos somente a raiz positiva. Fazendo a substituição da equação (2.2) na equação (2.1) obtemos:

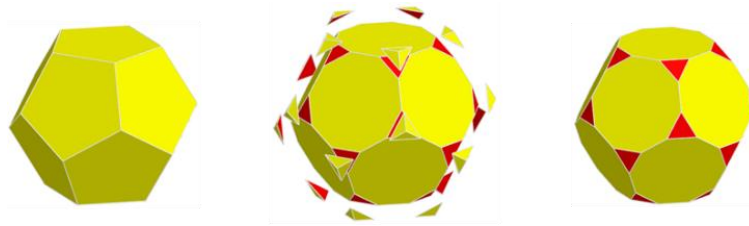
$$d = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2}, \quad (2.3)$$

que é a distância procurada dada em função apenas de a .

Consideremos agora o caso do [dodecaedro truncado](#)⁵ obtido a partir de um dodecaedro de aresta a , como ilustrado na Figura 15.

⁵ <https://www.geogebra.org/m/e5rtv22n>

Figura 15 - Truncatura do dodecaedro

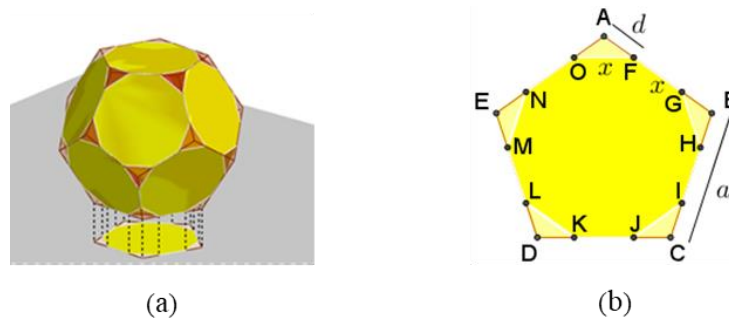


Fonte: O autor (2019)

Seguindo uma linha de raciocínio parecida com a utilizada para o caso do cubo truncado podemos determinar, para o caso do dodecaedro truncado, a distância d de cada um dos pontos de interseção do plano de corte com as arestas até o vértice mais próximo.

A Figura 16a mostra um dodecaedro no qual estão destacadas as pirâmides que surgirão depois de efetuada a truncatura dos vértices. Ao fazer a projeção ortogonal de uma de suas faces obtemos como resultado a Figura 16b.

Figura 16 - Projeção ortogonal de uma face do dodecaedro truncado e sua representação



Fonte: O autor (2019)

Chamaremos de x o comprimento do lado do decágono $FGHIJKLMNO$. Assim, podemos concluir a partir da Figura 16b que

$$d = \frac{a - x}{2}. \quad (2.4)$$

Sabendo que os ângulos internos de cada face de um dodecaedro são iguais a 108° , pois são pentágonos regulares, podemos aplicar a lei dos cossenos ao triângulo isósceles ΔAFO da Figura 16b para determinar o valor de x em função de a . Logo, temos que

$$x^2 = 2 \left(\frac{a - x}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{a - x}{2} \right)^2 \cos 108^\circ.$$

Desenvolvendo a expressão acima obtemos:

$$2x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - a^2 \cos 108^\circ + 2a \cos 108^\circ x - x^2 \cos 108^\circ.$$

Que pode ser reescrita como uma equação quadrática na incógnita x :

$$(1 + \cos 108^\circ)x^2 + (2a - 2a \cos 108^\circ)x + (a^2 \cos 108^\circ - a^2) = 0. \quad (2.5)$$

Calculando o valor de Δ , chegamos a:

$$\Delta = 8a^2(1 - \cos 108^\circ),$$

que é positivo, visto que $\cos 108^\circ < 0$.

Portanto, as raízes da equação (2.5), que são dadas por

$$x = \frac{2a \cos 108^\circ - 2a \pm 2a\sqrt{2(1 - \cos 108^\circ)}}{2(1 + \cos 108^\circ)},$$

são ambas números reais.

Note que, somente a raiz

$$x = \frac{a \cos 108^\circ - a + a\sqrt{2(1 - \cos 108^\circ)}}{1 + \cos 108^\circ}$$

é positiva. Portanto, apenas ela nos interessa.

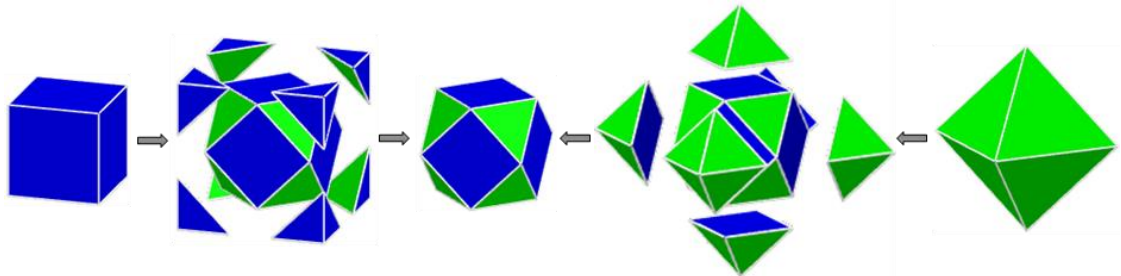
Substituindo o valor obtido para x na equação (2.4), temos que:

$$d = \frac{2a - a\sqrt{2(1 - \cos 108^\circ)}}{2(1 + \cos 108^\circ)}, \quad (2.6)$$

que nos dá a distância procurada.

Dois outros poliedros que também podem ser obtidos por meio de truncaturas são o cuboctaedro e o icosidodecaedro. O cuboctaedro pode ser obtido tanto a partir da truncatura dos vértices do [cubo](#)⁶ (lado esquerdo da Figura 17), quanto a partir da truncatura dos vértices do [octaedro](#)⁷ (lado direito da Figura 17), daí seu nome. Nesse sentido, o cuboctaedro não deixa de ser uma espécie de cubo truncado ou octaedro truncado, embora não tenha este nome, que foi atribuído aos sólidos vistos mais acima. A diferença, é que, agora, o corte se dá de maneira mais profunda, sendo feito no ponto médio da aresta, tanto em um caso, quanto no outro.

Figura 17 - Cuboctaedro obtido por truncaturas tanto no cubo, quanto no octaedro



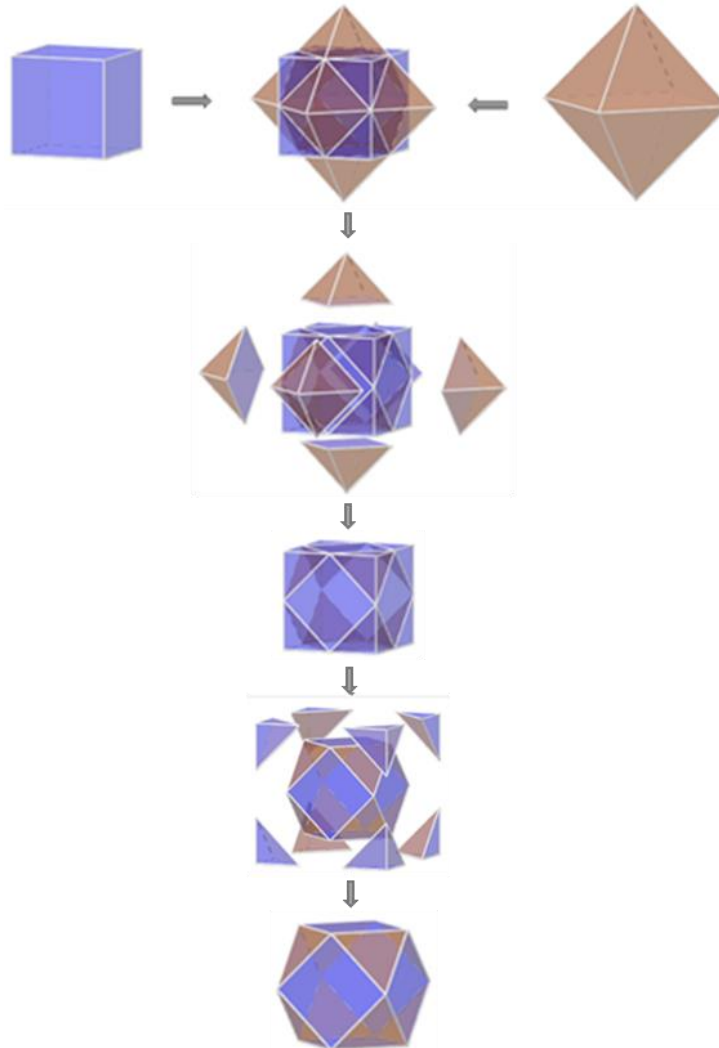
Fonte: O autor (2019)

⁶ <https://www.geogebra.org/m/hutrdzep>

⁷ <https://www.geogebra.org/m/bezkyhpn>

Outra maneira de visualizar o [cuboctaedro](#)⁸ é a partir da intersecção de um cubo de aresta a com um octaedro de aresta $a\sqrt{2}$, os quais são duais. Basta, para isso, trincar as partes que não se intersectam, como mostrado na Figura 18.

Figura 18 - Cuboctaedro obtido pela intersecção do cubo e do octaedro



Fonte: O autor (2019)

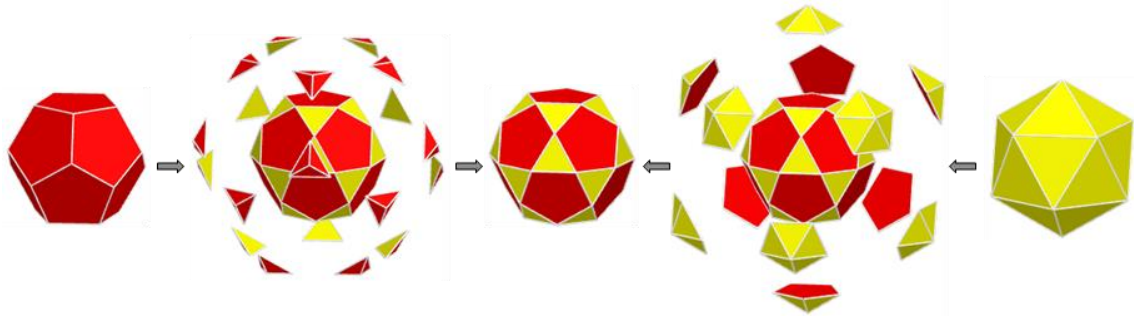
Como podemos observar na Figura 19, por meio de procedimento análogo ao que foi feito anteriormente com o cuboctaedro, podemos obter o icosidodecaedro. Aqui, porém, o [dodecaedro](#)⁹ e o [icosaedro](#)¹⁰ assumem o papel do cubo e do octaedro.

⁸ <https://www.geogebra.org/m/exvq2kuw>

⁹ <https://www.geogebra.org/m/m2racgrh>

¹⁰ <https://www.geogebra.org/m/k2p6trt9>

Figura 19 - Icosidodecaedro obtido por truncaturas tanto no dodecaedro, quanto no icosaedro

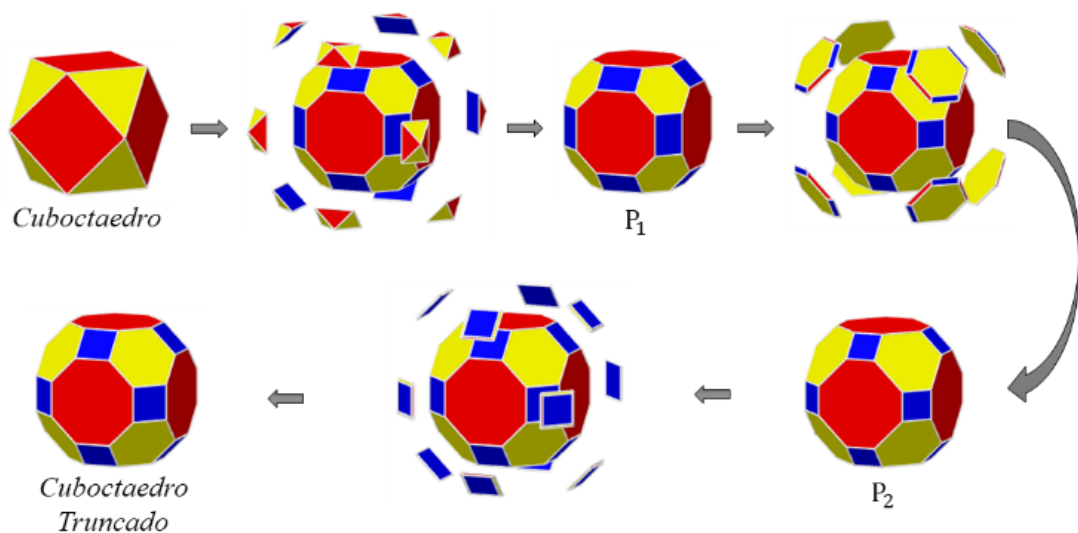


Fonte: O autor (2019)

A partir do cuboctaedro e do icosidodecaedro obtidos anteriormente, podemos, efetuando novas truncaturas, obter tanto o cuboctaedro truncado, quanto o icosidodecaedro truncado.

Há vários processos que podem ser utilizados para a obtenção do cuboctaedro truncado. Aqui utilizaremos sucessivas truncaturas como ilustrado na Figura 20. A primeira delas consiste na truncatura dos vértices do cuboctaedro, gerando um poliedro P_1 que não é ainda arquimediano, já que algumas de suas faces não são polígonos regulares. Realizando novas truncaturas, paralelas as faces hexagonais de P_1 obtemos um poliedro P_2 , que ainda não é o [cuboctaedro truncado](https://www.geogebra.org/m/ejtn87z)¹¹, o qual é obtido a partir de truncaturas realizadas em P_2 paralelamente as faces retangulares.

Figura 20 - Cuboctaedro truncado obtido por truncaturas no cuboctaedro



Fonte: O autor (2019)

¹¹ <https://www.geogebra.org/m/ejtn87z>

O icosidodecaedro truncado pode ser obtido por um processo semelhante a este, daí seu nome. Tanto o cuboctaedro truncado, quanto icosidodecaedro truncado também podem ser obtidos por meio de um processo chamado de expansão. Outros dois sólidos, que apesar de serem obtidos por truncatura a partir do cuboctaedro truncado e do icosidodecaedro truncado, respectivamente, mas que optamos em construí-los por expansão, são o rombicuboctaedro e o rombicoidodecaedro. Trataremos destes na próxima seção.

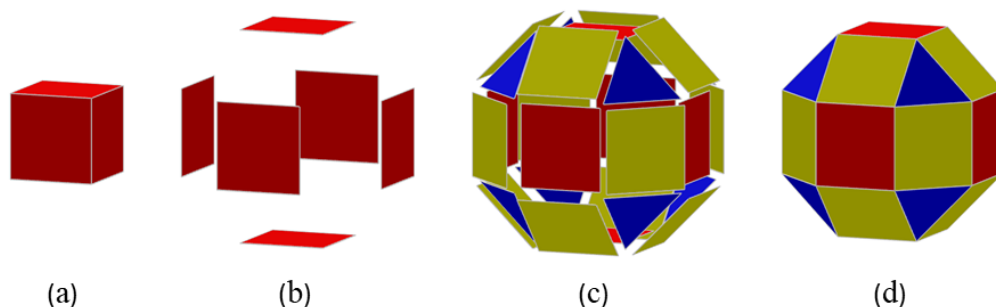
2.2 Poliedros Obtidos por Expansão

Como dito no início deste capítulo, o processo de expansão consiste em afastar as faces de um poliedro qualquer por uma determinada distância e preencher os espaços vazios que surgem como resultado deste afastamento com polígonos.

Nesta seção, assim como na seguinte, vamos nos referir às estruturas poliédricas ocas, que são utilizadas no processo de expansão e snubificação, por poliedros.

O primeiro poliedro explorado por nós será o [rombicuboctaedro](#)¹². Optamos por começar esta seção com esta construção por ser a mais simples das construções por expansão. Ela pode ser feita tanto pela expansão das faces de um cubo, quanto pelas de um octaedro. Contudo, vamos mostrar apenas a obtenção desse sólido por meio da expansão das faces de um cubo.

Para isso tomemos um cubo cujas arestas meçam a (Figura 21a). Primeiramente, devemos afastar cada face deste poliedro a uma distância de $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ de sua posição inicial, conforme a Figura 21b, depois devemos preencher os espaços vazios, que resultam do afastamento destas faces, com triângulos equiláteros e quadrados, como indicado na Figura 21c. Assim, teremos como resultado final o rombicuboctaedro, ilustrado na Figura 21d.



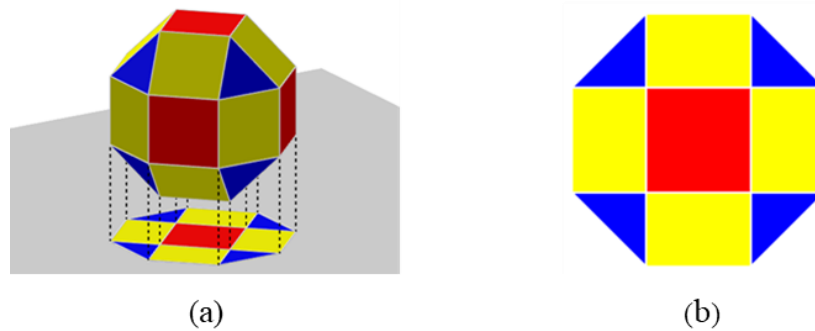
Fonte: O autor (2019)

¹² <https://www.geogebra.org/m/wwmn2tty>

O valor da distância apresentada acima, na qual se deve efetuar o deslocamento das faces de um cubo de forma que estas sejam afastadas de suas posições iniciais, no cubo, até suas posições finais, no rombicuboctaedro, pode ser deduzido seguindo passos similares aos já realizados por nós neste capítulo. Vejamos, então, como deduzir o valor dessa distância.

Fazendo a projeção ortogonal do rombicuboctaedro no plano (Figura 22a), obtemos como resultado da projeção a Figura 22b.

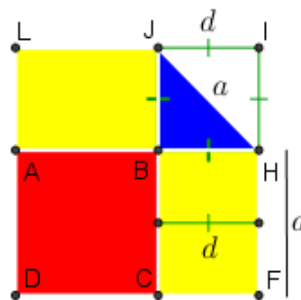
Figura 22 - Projeção ortogonal do rombicuboctaedro e sua representação



Fonte: O autor (2019)

Tomando uma parte da Figura 22b, a qual está representada pela Figura 23. Nela, construímos o quadrado $BHIJ$ cujo comprimento dos seus lados são iguais à d , distância que devemos realizar o deslocamento das faces de um cubo.

Figura 23 - Parte da projeção do rombicuboctaedro ampliada



Fonte: O autor (2019)

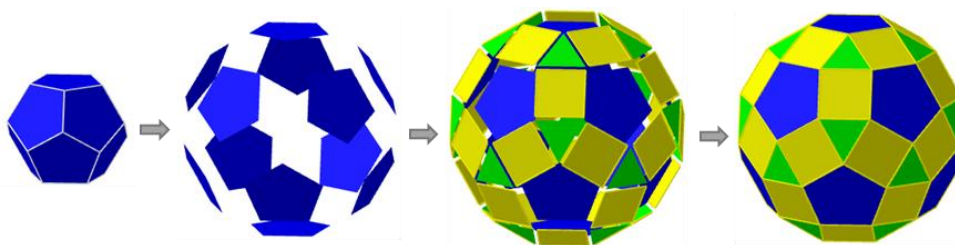
Note, que a diagonal do quadrado $BHIJ$ mede a , já que é a projeção ortogonal de uma aresta do rombicuboctaedro (Figura 22a) Daí, temos que $a = d\sqrt{2}$, o que implica em

$$d = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad (2.7)$$

que é a distância exata procurada.

Na Figura 24 podemos visualizar a construção do [rombicosidodecaedro](#)¹³ por meio da expansão do dodecaedro. Note, contudo, que o processo utilizado para calcular a distância de afastamento das faces do cubo para obtenção do rombicuboctaedro não é completamente análogo aos cálculos que precisariam ser feitos para este caso, já que, se escolhêssemos o plano que contém uma das faces do dodecaedro para efetuarmos a projeção não teríamos todas as demais faces deste poliedro paralelas ou perpendiculares ao plano de projeção como no caso do cubo. Podemos entretanto afirmar que, exceto por este fato, o processo de construção do rombicosidodecaedro é completamente análogo àquele utilizado para a obtenção do rombicuboctaedro.

Figura 24 - Rombicosidodecaedro obtido pela expansão no dodecaedro

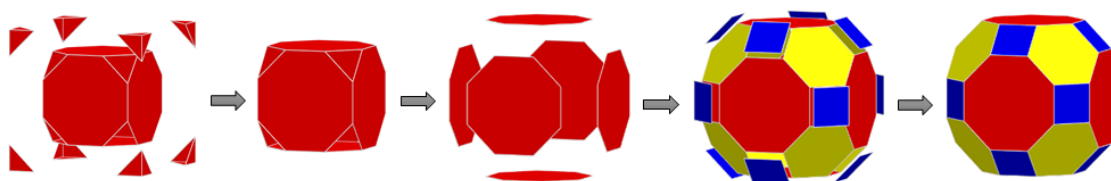


Fonte: O autor (2019)

Vejamos agora o processo de construção do cuboctaedro truncado por expansão, cuja construção a partir da truncatura do cuboctaedro já foi apresentada anteriormente.

Truncando um cubo de aresta a , retirando as faces triangulares e expandindo as faces octogonais pode-se obter o [cuboctaedro truncado](#)¹⁴, conforme apresentado na Figura 25.

Figura 25 - Cuboctaedro truncado obtido por expansão no cubo truncado



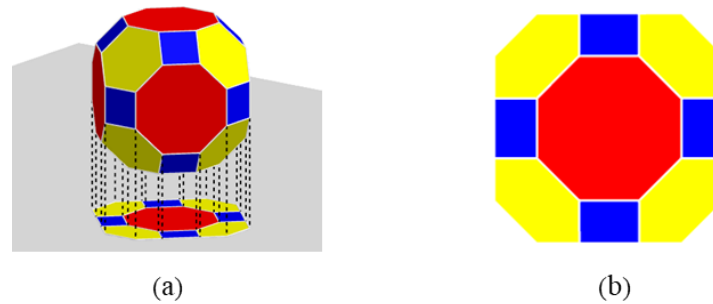
Fonte: O autor (2019)

Contudo, devemos determinar a distância de afastamento das faces octogonais do cuboctaedro truncado a partir de sua posição original no cubo truncado. Para isso tomemos a projeção ortogonal do mesmo no plano, conforme a Figura 26a.

¹³ <https://www.geogebra.org/m/yyjmu2p8>

¹⁴ <https://www.geogebra.org/m/fmwd8mvr>

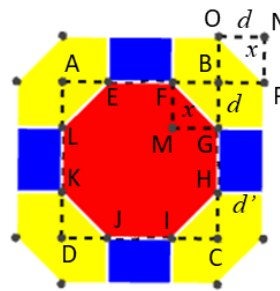
Figura 26 - Projeção ortogonal do cuboctaedro truncado e sua representação



Fonte: O autor (2019)

Na Figura 26b, construímos o quadrado $ABCD$, correspondente a uma das faces do cubo original e que circunscreve o octógono $EFGHIJKL$. Depois construímos os quadrados $BGMF$ e $NPBO$ (Figura 27).

Figura 27 - Projeção do cuboctaedro truncado



Fonte: O autor (2019)

Note que as diagonais dos quadrados $BGMF$ e $NPBO$, medem ambas x , visto que são as projeções ortogonais de duas arestas do cuboctaedro truncado e que são ambas paralelas ao plano de projeção (Figura 26a). Daí, tem-se que

$$BGMF \equiv NPBO.$$

Logo, se d' representa a distância de deslocamento das faces do cubo truncado e d a medida do lado do quadrado $BGMF$, então:

$$d' = d. \quad (2.8)$$

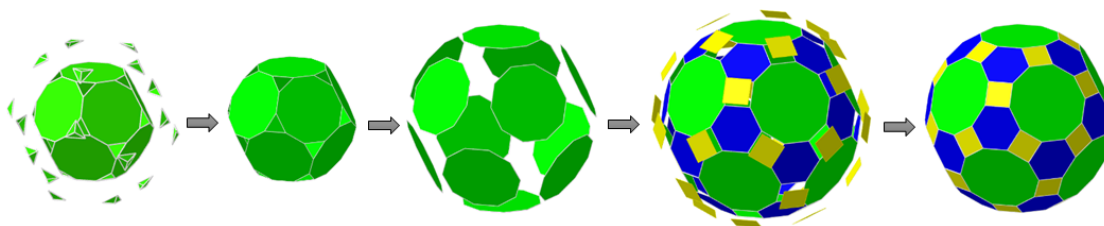
Mas já sabemos que $d = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2}$, pois é a mesma distância do corte para a truncatura de um cubo.

Portanto, da equação (2.8) temos que

$$d' = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2}. \quad (2.9)$$

No que diz respeito às relações entre os processos de obtenção do icosidodecaedro truncado e do cuboctaedro truncado, valem os mesmos comentários feitos sobre o rombicosidodecaedro e o rombicuboctaedro, sendo assim nos limitaremos aqui a apresentar o processo de construção do [icosidodecaedro truncado](#)¹⁵ por meio da Figura 28.

Figura 28 - Icosidodecaedro truncado obtido por expansão no dodecaedro truncado



Fonte: O autor (2019)

Passemos agora a tratar daqueles sólidos obtidos pelo processo de snubificação.

2.3 Poliedros Obtidos por Snubificação

Quando, no processo de expansão, é necessário fazer a rotação das faces por um determinado ângulo, então esse processo passa a ser denominado *snubificação*. Utilizando a *snubificação* no cubo e no dodecaedro, podemos construir os dois últimos sólidos arquimedianos: o [cubo snub](#)¹⁶ e o [dodecaedro snub](#)¹⁷, o que justifica seus nomes. Os valores utilizados aqui para efetuar a translação ou a rotação das faces são valores aproximados e obtidos a partir das construções dos mesmos disponíveis no repositório de materiais do site oficial do GeoGebra. O leitor pode acessar tais construções e verificar o nome de seu autor nos endereços disponibilizados nas notas de rodapé 16 e 17 ou simplesmente clicando nos *hiperlinks* presentes neste parágrafo.

Para a construção do [cubo snub](#)¹⁸ devemos afastar as faces de um cubo de aresta a por uma distância que corresponde a aproximadamente $0,64a$ e depois rotacioná-las por um ângulo que mede cerca de $16,5^\circ$, preenchendo em seguida os espaços vazios com triângulos equiláteros obtemos este poliedro de Arquimedes (Figura 29).

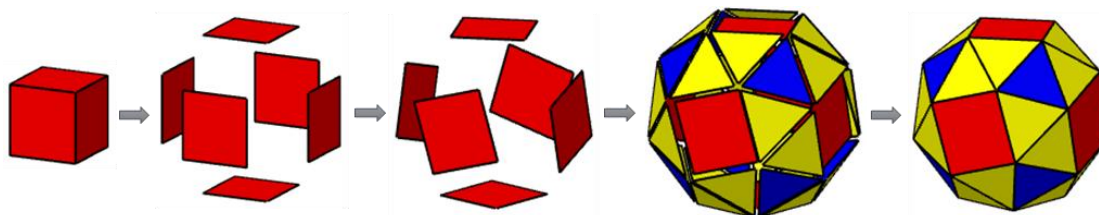
¹⁵ <https://www.geogebra.org/m/z3pac8sn>

¹⁶ <https://www.geogebra.org/m/RjukDwyb>

¹⁷ <https://www.geogebra.org/m/ctHjYcA5>

¹⁸ <https://www.geogebra.org/m/dpa8t9uj>

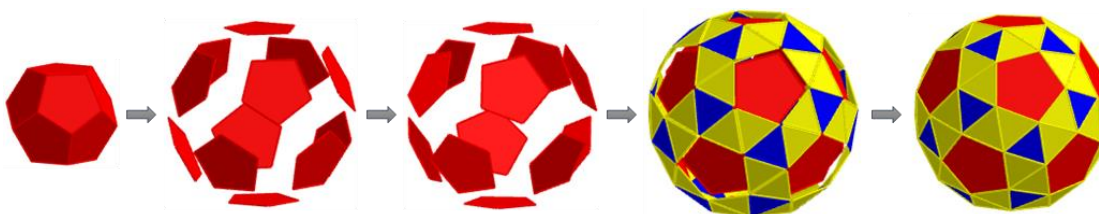
Figura 29 - Cubo snub obtido de um cubo



Fonte: O autor (2019)

Por outro lado, afastando as faces de um dodecaedro a uma distância aproximada de $0,87a$, rotacionando-as a um ângulo de aproximadamente $13,1^\circ$ e preenchendo os espaços vazios com triângulos equiláteros teremos o [dodecaedro snub](#)¹⁹, como visto na Figura 30.

Figura 30 - Dodecaedro snub obtido de um dodecaedro



Fonte: O autor (2019)

Também podemos encontrar o cuboctaedro snub e o icosidodecaedro snub fazendo a snubificação no cuboctaedro e no icosidodecaedro, porém só vamos considerar aqui os dois sólidos *snubs* que completam os treze sólidos arquimedianos.

Veremos, no próximo capítulo, como podemos, a partir dos tópicos abordados até aqui, construir os sólidos de Arquimedes com o *software* GeoGebra.

¹⁹ <https://www.geogebra.org/m/nfxqd5ea>

3 IDEIAS CENTRAIS PARA AS CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

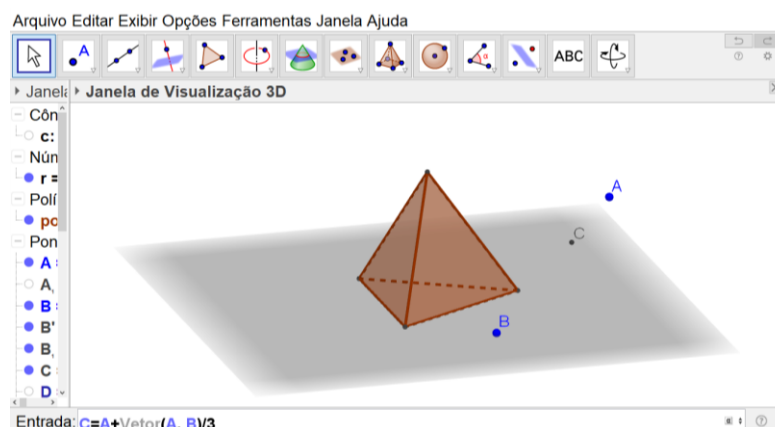
Neste capítulo, mostraremos como é possível utilizar o Geogebra para apresentar de forma dinâmica os três processos tratados no capítulo anterior e utilizados na construção dos poliedros de Arquimedes: a truncatura, a expansão e a snubificação. Para tanto, mostraremos de que forma simulamos os cortes feitos no processo de truncatura dos vértices, como realizar o afastamento das faces presente nos processos de expansão e snubificação e como efetuar a rotação das faces que ocorre apenas neste último processo. Não apresentaremos o passo a passo da construção de cada um dos 13 sólidos de Arquimedes. Ao invés disso, selecionamos um caso exemplar de cada um dos processos para apresentar as ideias centrais destas construções. Pensamos que, assim, além de evitarmos a repetitividade, que poderia tornar este texto cansativo e enfadonho, damos ao leitor a chance de experimentar seu próprio caminho e realizar suas próprias tentativas na construção dos sólidos que não serão aqui apresentados por nós. É preciso deixar claro, contudo, que não faz parte dos objetivos deste trabalho introduzir o leitor ao funcionamento do *software* GeoGebra, mas sim mostrar para aqueles que já possuem alguma familiaridade com a interface deste *software*, um pouco mais do seu potencial, apresentando para ele alguns recursos que talvez lhe sejam desconhecidos e o quanto as ideias matemáticas são importantes para ampliar o potencial de uso desta ferramenta.

3.1 Construindo por Truncatura

Abordaremos nesta seção a construção do tetraedro truncado como modelo para todas as construções feitas aqui por meio do processo de truncatura. Inicialmente devemos construir um tetraedro na *Janela de Visualização 3D*, o que pode ser feito utilizando o comando *Tetraedro* ($\langle \text{ponto} \rangle, \langle \text{ponto} \rangle$). Para efetuar a truncatura devemos conhecer a distância d , percorrida sobre a aresta do tetraedro, de um dos vértices até o plano no qual será efetuado o corte. Neste caso, como foi dito no capítulo 2, essa distância é obtida dividindo cada aresta em três partes iguais.

Com o objetivo de facilitar o processo de construção, podemos criar uma ferramenta que nos permita encontrar os pontos por onde devem passar os cortes. Contudo, para construirmos tal ferramenta devemos criar, na *Janela de Visualização 3D*, dois pontos A e B , com os quais podem obter o vetor \overrightarrow{AB} , e no campo de entrada escrever a equação $C = A + \text{Vetor}(A, B)/3$, que tem como resultado o ponto C , o qual estará a $\frac{1}{3}$ de distância do ponto de origem de \overrightarrow{AB} , como exemplificado na Figura 31.

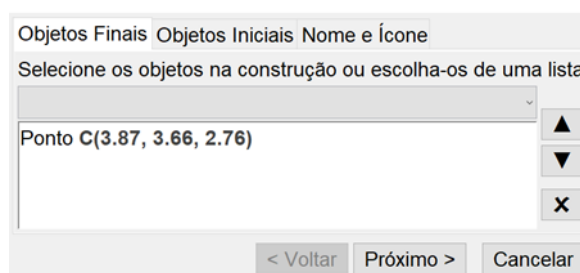
Figura 31 - O tetraedro e pontos utilizados na criação de ferramenta



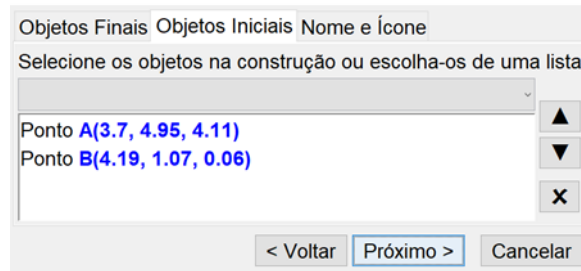
Fonte: Print screen da interface do GeoGebra

Selecione no menu a opção *Ferramentas* e depois clicando em *Criar uma Nova Ferramenta*, abrimos uma caixa de diálogo com três abas. Na primeira aba, denominada *Objetos Finais* (veja a Figura 32a), informamos o objeto que queremos que seja gerado pelo uso da ferramenta que, em nosso exemplo, é o ponto *C*. Na segunda aba, denominada *Objetos Iniciais* (Figura 32b), informamos os objetos que nos permitirão criar o novo objeto por meio do uso da ferramenta, em nosso exemplo esses objetos são os pontos *A* e *B*. Finalmente, na terceira e última aba, denominada *Nome e Ícone* (Figura 32c), informamos obrigatoriamente o nome da ferramenta que estamos criando (Truncar, em nosso exemplo) e o comando associado a ela que poderá ser digitado no campo de entrada depois que a ferramenta estiver criada. Opcionalmente, podemos escolher uma imagem para o ícone da ferramenta que será gerada. Caso não escolhamos nenhum arquivo de imagem o GeoGebra utiliza a imagem padrão de uma chave de rosca. Seguindo todos os passos descritos aqui geramos uma ferramenta cujo ícone aparecerá na *Barra de Ferramentas* e cujo comando ficará disponível para ser digitado no campo de entrada.

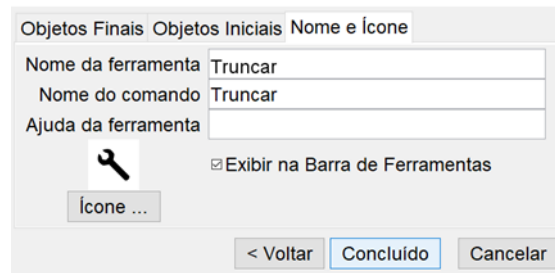
Figura 32 - Passos para criar uma ferramenta no GeoGebra



(a)



(b)

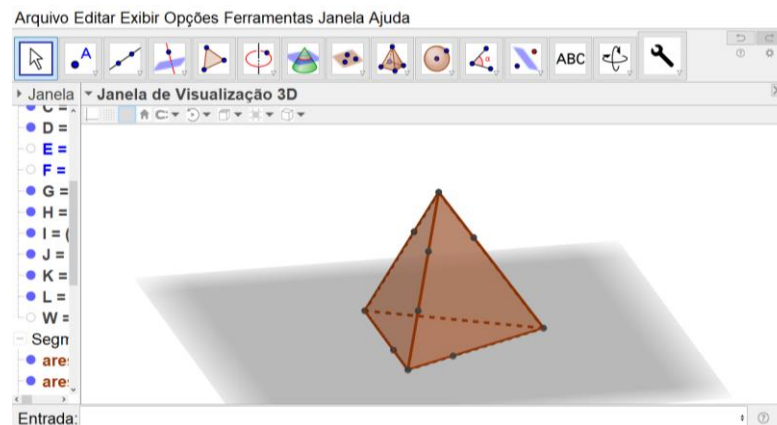


(c)

Fonte: Print screen da interface do GeoGebra

Com a ferramenta já criada, ao selecionarmos dois vértices do poliedro é criado o ponto na distância exata por onde deve passar o corte. Clicando em cada um dos vértices do tetraedro criam-se os pontos necessários para a truncatura. A Figura 33 exibe alguns destes pontos.

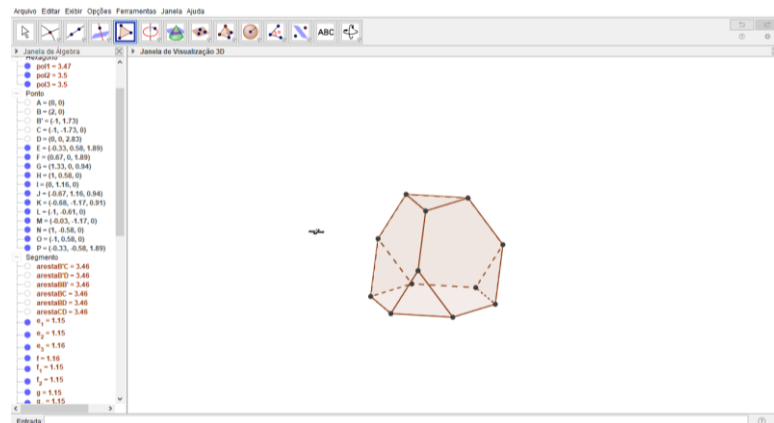
Figura 33 - O tetraedro com as marcações de alguns pontos



Fonte: Print screen da interface do GeoGebra

Ocultando o tetraedro e deixando apenas os pontos gerados pelo uso da nova ferramenta, podemos, então, com o auxílio da ferramenta *Polígono*, criar as faces do novo poliedro, o tetraedro truncado, que é um dos treze poliedros de Arquimedes (Figura 34).

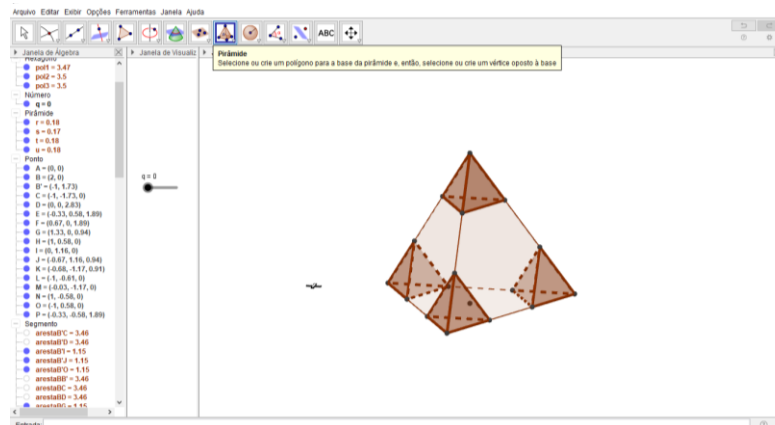
Figura 34 - Representação do tetraedro truncado no GeoGebra



Fonte: Print screen da interface do GeoGebra

Depois, para dar mais dinamismo para a construção, podemos animá-la de tal forma que não apenas o poliedro resultante apareça, mas também o processo que o gerou, isto é, a truncatura dos vértices do tetraedro. Para isso, primeiro, na *Janela de Visualização*, criamos um controle deslizante q com valor mínimo 0 e, depois de exibir novamente os vértices do tetraedro original, utilizamos a ferramenta *Pirâmide* para construir as pirâmides correspondentes a parte que foi retirada do tetraedro como indicado na Figura 35.

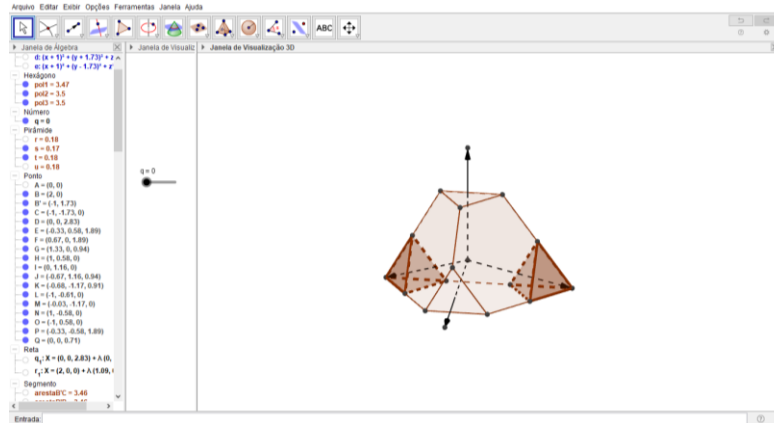
Figura 35 - O tetraedro truncado e as pirâmides resultantes das truncaturas



Fonte: Print screen da interface do GeoGebra.

Para fazer as pirâmides se movimentarem ao mexer o controle deslizante q , criam-se retas perpendiculares às faces triangulares passando pelos vértices do tetraedro, com o objetivo de encontrar o ponto de interseção entre elas, que também é o centro da esfera que circunscreve o sólido, depois, constroem-se vetores tais que suas origens sejam o ponto central da esfera encontrado e suas extremidades sejam os vértices do tetraedro, conforme observamos na Figura 36.

Figura 36 - Vetores construídos a partir do centro do tetraedro

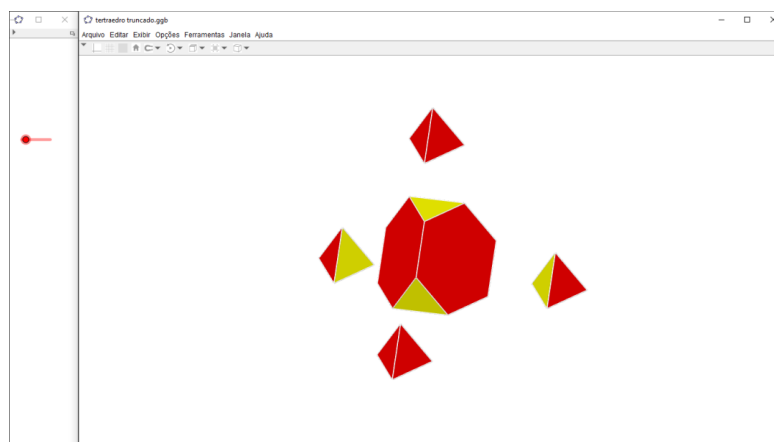


Fonte: Print screen da interface do GeoGebra

Para fazer a translação de cada pirâmide de acordo com o sentido e direção dos vetores construídos devemos utilizar o comando $Transladar(\langle objeto \rangle, \langle vetor \rangle)$. Escrevemos, no lugar da entrada $\langle objeto \rangle$, o nome do objeto que se quer transladar, neste caso uma das pirâmides e, no lugar da entrada $\langle vetor \rangle$, o produto do vetor associado à pirâmide pelo controle deslizante q .

Aplicando esta operação em todas as pirâmides, podemos movê-las todas ao mesmo tempo utilizando o controle deslizante q . Para finalizar podemos mudar as cores das faces do sólido como na Figura 37.

Figura 37 - O resultado do processo de truncatura em um tetraedro



Fonte: Print screen da interface do GeoGebra

Realizando procedimentos similares aos apresentados aqui podemos construir outros sólidos de Arquimedes a partir dos sólidos regulares. Porém, para isso, devemos saber a distância d de truncamento para cada caso.

3.2 Construindo por Expansão

Para exemplificar o processo de expansão abordaremos aqui a construção do rombicuboctaedro a partir do cubo. A construção do cubo na *Janela de Visualização 3D* é semelhante à do tetraedro, apresentada na seção anterior, bastando trocar no comando a palavra *Tetraedro* pela palavra *Cubo*. Para expandir as faces do cubo de forma que possamos construir o rombicuboctaedro, devemos, primeiramente, conhecer a distância d pela qual estas faces foram transladas de sua posição inicial, no cubo, até sua posição final, no rombicuboctaedro. Vimos no capítulo anterior que essa distância é $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, na qual a é o comprimento da aresta do cubo.

Nessa construção, portanto, devemos encontrar os centros de cada face do cubo e o ponto em que estarão estes centros ao final da translação, isto é, os centros das faces quadradas do rombicuboctaedro que resultaram deste movimento de translação. Para a obtenção destes últimos pontos seria necessária a repetição de um conjunto de passos que podemos reduzir por meio da criação de uma nova ferramenta. Para isso devemos considerar os pontos A , centro do cubo, B , centro de uma de suas faces na posição anterior a expansão, e C , posição ocupada por B durante a expansão. Digitando no campo de entrada a fórmula $C = B + b*\text{sqrt}(2)*\text{vetor}(A, B)$, na qual b é o valor fornecido por um controle deslizante que varia de 0 a 1 e cuja manipulação será responsável pelo efeito de translação das faces obtemos o ponto C a partir dos pontos A e B e do controle deslizante b .

Para encontrarmos a fórmula utilizada na criação da ferramenta traçamos a seguinte meta: encontrar o ponto C que corresponde ao deslocamento do ponto B , na direção e no sentido do vetor \overrightarrow{AB} , por uma distância $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (veja Figura 38). Isto pode ser feito fazendo

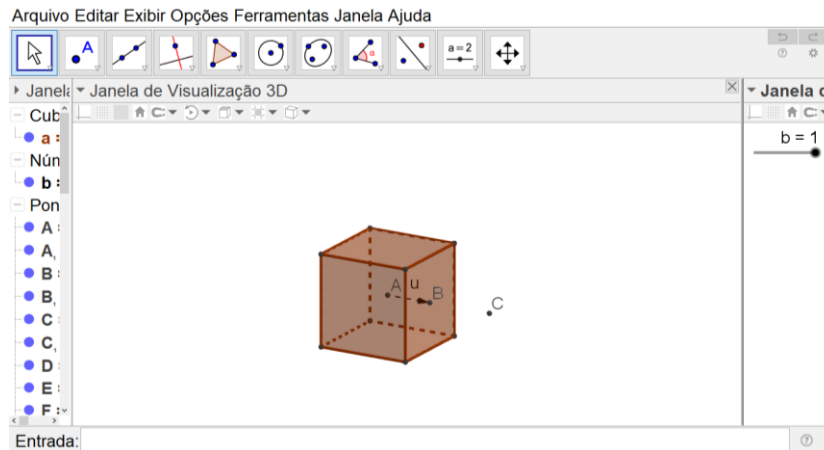
$$C = B + \overrightarrow{BC}. \quad (3.1)$$

Porém, como ainda não temos o ponto C , que é justamente o ponto que procuramos, precisamos escrever o vetor \overrightarrow{BC} de outra forma. Como a distância entre B e C é $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, sabemos que este deve ser o módulo do vetor \overrightarrow{BC} . Além disso, sabemos que \overrightarrow{BC} deve ser um múltiplo escalar de \overrightarrow{AB} , já que possui a mesma direção deste. Como o vetor \overrightarrow{AB} possui comprimento $\frac{a}{2}$, concluímos que $\overrightarrow{BC} = \sqrt{2} \overrightarrow{AB}$. Substituindo este último resultado em (3.1), obtemos

$$C = B + \sqrt{2} \overrightarrow{AB}, \quad (3.2)$$

que é praticamente a fórmula digitada no campo de entrada, exceto pelo fato de que acrescentamos a ela o fator b multiplicando o termo $\sqrt{2} \overrightarrow{AB}$, para que o ponto C ganhe mobilidade.

Figura 38 - O cubo e os pontos que geram a ferramenta

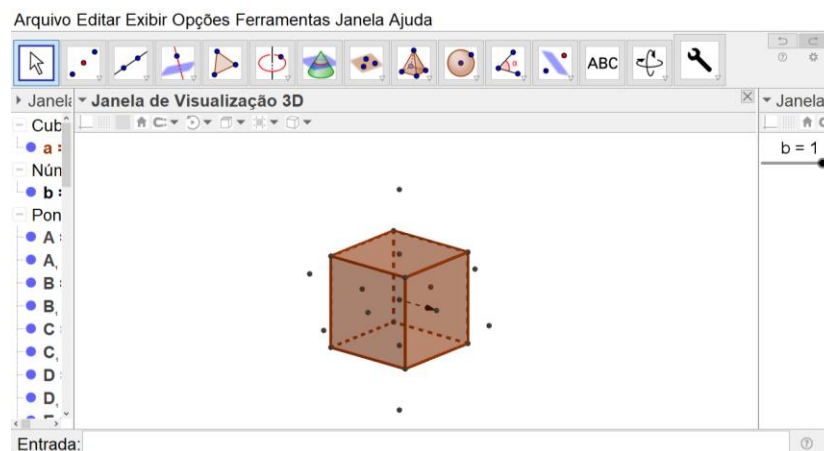


Fonte: Print screen da interface do GeoGebra

Após a criação do ponto C torna-se possível criar, de forma análoga ao que foi feito na seção anterior, a ferramenta que terá este ponto como objeto final e os pontos A e B e o controle deslizante b como objetos iniciais.

Com a ferramenta já criada, ao selecionarmos o centro do cubo e o centro de uma de suas faces obtemos o ponto correspondente ao centro da face transladada. Repetindo este procedimento para cada uma das faces o resultado obtido é o que vemos na Figura 39.

Figura 39 - O cubo e os pontos centrais das faces que serão transladadas

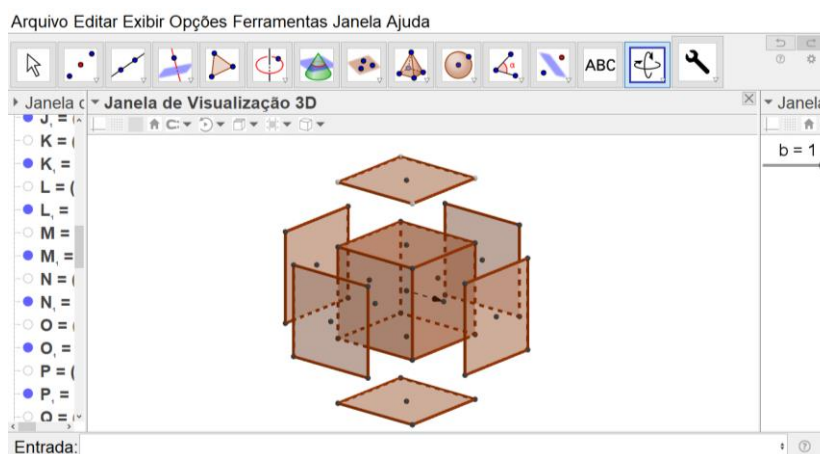


Fonte: Print screen da interface do GeoGebra

Para transladar as faces do cubo basta escrevermos o comando *Transladar* ($\langle \text{objeto} \rangle, \langle \text{vetor} \rangle$) no campo de entrada, entretanto, com intuito de diminuir a

quantidade de objetos para não sobrecarregar o arquivo, podemos escrever na parte $\langle \text{vetor} \rangle$ o comando $\text{Vetor}(\langle \text{ponto} \rangle, \langle \text{ponto} \rangle)$, ao invés de criar os vetores que fornecem a direção de cada uma das translações. Os pontos que devem ser informados no comando Vetor são o centro de uma das faces do cubo e o ponto gerado a partir deste centro pela ferramenta criada. Realizando este procedimento para cada uma das faces do cubo obtemos o efeito explicitado pela Figura 40.

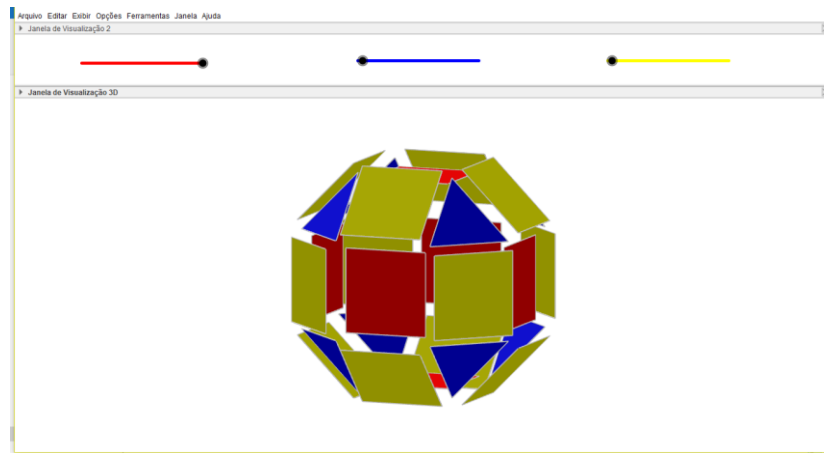
Figura 40 - O cubo e suas faces transladadas



Fonte: Print screen da interface do GeoGebra

Como o objeto utilizado no comando Transladar é um polígono, o resultado da translação será também um polígono, contudo, sem os vértices, os quais são necessários para a criação dos polígonos que preencherão o espaço criado entre as faces transladadas. Para obter tais vértices basta utilizar o comando $\text{Vértices}(\langle \text{Polígono} \rangle)$. Obtidos todos os vértices podemos, então, com a ferramenta Polígono , construir os triângulos equiláteros e quadrados que preencherão os espaços vazios. Para darmos mais dinamismo à construção podemos transladar tais polígonos utilizando procedimentos que, por serem similares aos que descrevemos há pouco, não descreveremos novamente aqui. Realizados todos estes procedimentos, devemos ocultar os objetos que não desejamos que apareçam ao final da construção e modificar as propriedades dos objetos criados, como as cores, por exemplo. O resultado final é o que aparece na Figura 42, na qual podemos ver três controles deslizantes, um vermelho, responsável pela translação das faces do cubo e mais outros dois, responsáveis pela aproximação das faces que farão o preenchimento dos espaços vazios.

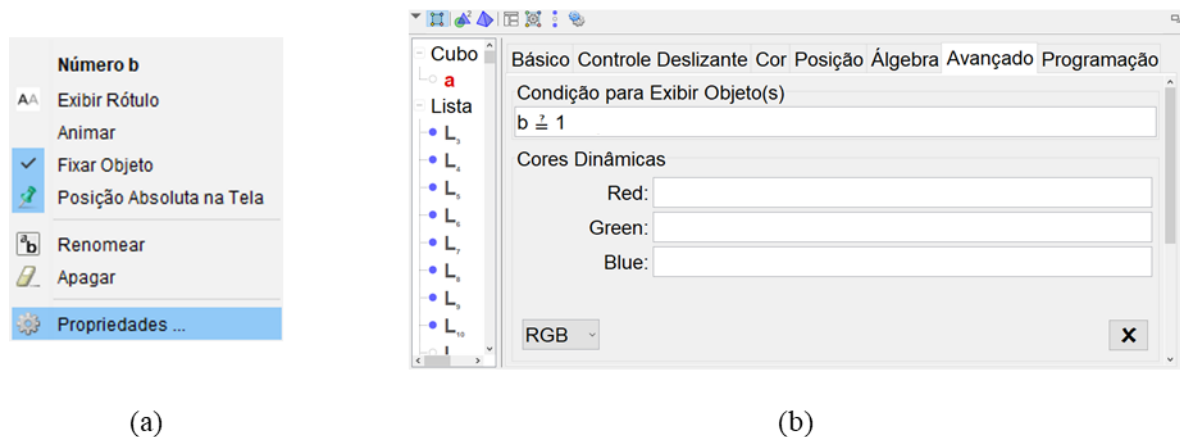
Figura 41 - O processo de expansão para obtenção do rombicuboctaedro



Fonte: Print screen da interface do GeoGebra

Como não queremos que os controles deslizantes azul e amarelo apareçam antes que o ponto sobre o controle deslizante vermelho esteja o mais à direita possível (o que acontece quando $b = 1$), precisamos criar uma condição para seu aparecimento, acessando as propriedades de um deles ao clicar com o botão direito do mouse sobre ele (Figura 42a), se abrirá uma caixa de diálogo, indo até a aba *Avançado* e digitando $b = 1$ no campo *Condição para Exibir Objeto(s)* (Figura 42b) este controle deslizante só aparecerá quando esta condição for satisfeita. Pode-se proceder da mesma forma para o outro controle deslizante.

Figura 42 - Passos para condicionar o aparecimento do controle deslizante



(a)

(b)

Fonte: Print screen da interface do GeoGebra.

Fazendo processos semelhantes aos apresentados acima pode-se, por exemplo, construir o rombicoidodecaedro a partir do dodecaedro regular.

3.3 Construindo por Snubificação

Vimos na seção anterior como expandir as faces de um cubo e optamos agora por apresentar o processo de obtenção do cubo snub, cuja construção se dá de maneira similar, porém seguido da rotação das faces transladadas.

Não mostraremos aqui como expandir as faces, visto que já o fizemos na seção anterior para o rombicuboctaedro. Apenas alertamos àqueles que desejarem reproduzir esta construção que se lembrem de substituir em seus cálculos o valor d da distância de translação das faces pela aproximação $d = 0,64a$, em que a representa o comprimento da aresta do cubo.

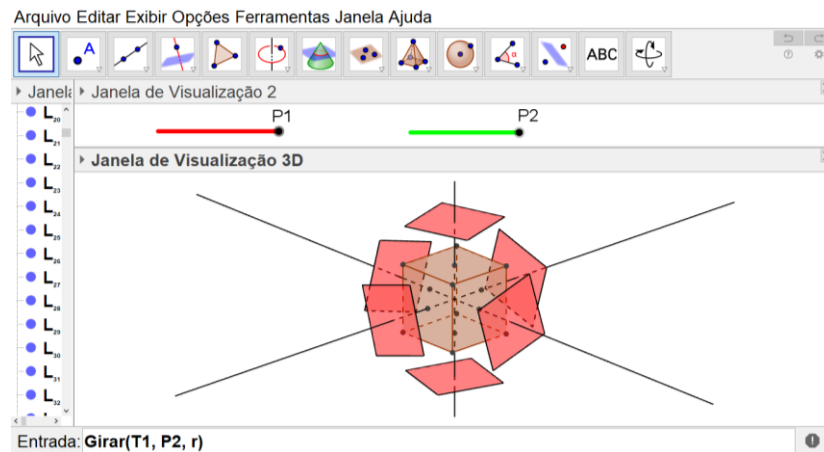
Vejamos então como proceder para efetuar a rotação de uma face transladada T_1 . Inicialmente, devemos criar um controle deslizante P_2 e uma reta r passando pelo centro do poliedro e pelo centro de T_1 . O controle deslizante deve ser do tipo *Ângulo* e variar de 0° a $16,5^\circ$, como indicado na Figura 43.

Figura 43 - Caixa de diálogo para criar um controle deslizante

Fonte: Print screen da interface do GeoGebra.

Em seguida deve-se escrever no campo de entrada o comando *Girar*(*<Objeto>*, *<Ângulo>*, *<Eixo de Rotação>*), ou, neste exemplo, digitar simplesmente *Girar*(T_1 , P_2 , r). O mesmo procedimento deve ser repetido para cada face transladada, utilizando sempre o mesmo valor absoluto do ângulo P_2 para todas elas, mas buscando o eixo de rotação correspondente. Porém, para que todas as faces sejam rotacionadas no mesmo sentido, devemos escrever os ângulos com os sinais opostos para cada par de faces que sejam paralelas. A Figura 44, mostra o resultado dessa operação.

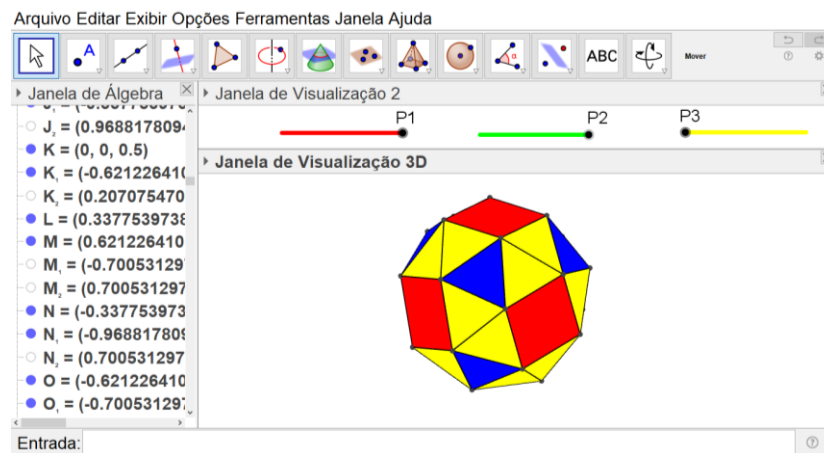
Figura 44 - A expansão e a rotação das faces de um cubo



Fonte: Print screen da interface do GeoGebra

Para finalizar preenchem-se os espaços vazios, entre as faces do cubo, com triângulos equiláteros. O resultado é mostrado na Figura 45.

Figura 45 - Representa do cubo snub no Geogebra



Fonte: Print screen da interface do GeoGebra.

É possível obter o dodecaedro snub realizando passos de construção semelhantes aos que foram tratados nesta seção. Com a construção do cubo snub encerramos este capítulo esperando que ele tenha contribuído com o leitor na apresentação de ferramentas e comandos que ampliam as possibilidades de uso do GeoGebra, um *software* que certamente vem contribuindo para a transformação da forma de ensinar matemática nas escolas.

CONSIDERAÇÕES

Como foi dito na introdução deste trabalho, os objetivos os quais nos propusemos atingir foram alcançados, uma vez que obtivemos e disponibilizamos no repositório de materiais do site do GeoGebra construções referentes aos 13 sólidos arquimedianos, as quais não apenas exibem estes sólidos, mas também apresentam a forma pela qual cada um deles é obtido a partir de poliedros de Platão.

Além disso, esperamos que este trabalho contribua para despertar no leitor a curiosidade sobre este tema tão fascinante que é a geometria, em especial a geometria espacial, possibilitando o contato com um tema pouco abordado em instituições de ensino básico, como é o caso dos poliedros de Arquimedes.

Não defendemos aqui a ideia de que tal tema deveria necessariamente ser abordado pelo professor com alunos da educação básica, pois não acreditamos que o foco do ensino deva ser em trabalhar o conteúdo A ou o conteúdo B, mas sim levar até o aluno ideias encantadoras, que estimulem seu raciocínio e sua criatividade, o que pode ser feito também por meio desta temática, dependendo isto apenas da abordagem escolhida pelo professor.

Embora as construções dos arquivos no formato ggb representem uma parte muito importante deste trabalho, tentamos não nos limitar a mera apresentação de tais construções. Buscamos mostrar também um pouco da história ligada ao tema dos poliedros de Arquimedes e alguns dos cálculos matemáticos utilizados para tornar estas construções possíveis. Mesmo que em muitos casos não tenhamos sido capazes de realizar as construções com base em resultados exatos, mas por meio de aproximações, outros raciocínios foram utilizados no sentido de criar estimativas que fossem razoáveis. Esperamos poder, futuramente, continuar nossos estudos a respeito do tema com a finalidade de realizarmos construções embasadas em resultados mais precisos, certos de que isso contribuirá para o desenvolvimento de nossos conhecimentos no campo da geometria.

Assim como temos a intenção de melhorar as construções já feitas aqui, temos também a intenção de criar novas construções, que apresentem formas diferentes de construir cada poliedro, não só mostrando que não há uma forma única de proceder, mas também explorando a matemática que está por trás de cada um destes processos.

Finalmente, como o leitor pôde constatar na leitura deste trabalho, ao acessar as construções disponibilizadas no site do GeoGebra, o material produzido encontra-se ainda disperso no site. É nossa intenção que, no futuro, tais construções possam estar reunidas em um livro dinâmico disponibilizado naquele site, acompanhado de explicações relativas a cada um

dos sólidos de Arquimedes orientando o leitor sobre a forma de manipular cada uma das construções para que o efeito visual desejado possa ser obtido.

Por fim, esperamos que este trabalho não represente o fim de mais uma jornada investigativa sobre sólidos geométricos, mas o pontapé inicial para que, na Academia ou nas salas de aulas, alunos e professores possam conhecer mais profundamente e construir suas próprias investigações, como a humanidade tem feito desde a Antiguidade.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, T. C. S de. **A Base de Conhecimento para o Ensino de Sólidos Arquimedianos**. 2015. Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica (PUC). São Paulo. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11038/1/Talita%20Carvalho%20Silva%20de%20Almeida.pdf>. Acesso em: 16 abril 2019. 188p.

ASSIS, André. **Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca**. 2008.

BATISTA, Sílvia. **Poliedros de Kepler-Poinsot**. Disponível em: http://www.es.iff.edu.br/poliedros/poli_kepler.html. Acesso em: 10 jan 2019.

B. BOYER, Carl. **História Da Matemática**. Uta C. Merzbach; [tradução de Helena Castro]. São Paulo. Blucher, 2012.

CARVALHO, B. de A. **Desenho Geométrico**. Rio de Janeiro. Ao Livro Técnico, 1958.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história**. vol I. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática : contexto & aplicações : ensino médio**. 3. Ed. São Paulo. Ática, 2016.

DULCE, O. **Fundamentos de Matemática Elmentar, 10: Geometria Espacial, Posição e Métrica**. Osvaldo Dulce, José Nicolau Pompeo. 7ª ed. São Paulo. Atual, 2013. 472p.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. tradução: Hygino H. Domingues. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 3. ed ver. e ampl. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2009.

Geogebra Clássico 5. **Software Geogebra**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>. Acesso em: 17 de abril de 2019.

História da matemática. **Arquimedes**. Disponível em: <https://historiadamatematica.wordpress.com/arquimedes>. Acessado em: 15 mar 2019.

MELO, H. S. **Os 13 Sólidos Arquimedianos**. 2014. 12f. Trabalho Acadêmico (Licenciado em Matemática) Universidade dos Açores.

MOREIRA. **Poliedros**. Disponível em: www.dma.ufv.br/downloads/MAT%20208/2017-II/textos/POLIEDROS_Marli%20D.%20D.%20Moreira%20-%20MAT%20208%20-%202017-II.pdf. Acesso em: 19 dez 2018.

SARTOR, N. L. **O Universo dos Poliedros Regulares**. 2013. Dissertação (Mestre em Matemática) Universidade Federal do Mato Grosso (UFMG), Cuiabá, MG. 78p.

NASCIMENTO, Márcio. **Poliedros de Kepler-Poinsot**. Disponível em: www.veraviana.net/keplerpoinsot. Acesso em: 10 jan 2019.

NEVES, J. R. de S. **Poliedros Arquimedianos**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRP). Recife - BR-PE, 2017, 97p.

NETZ; NOEL. **Il Codice Perduto di Archimede**. Rizzoli, Milano, 2007. Traduzido por C. Capararo. **Poliedros. Poliedros duales**. Disponível em: <http://www.cs.us.es/cursos/rc/POLIEDROS.htm>www.cs.us.es/cursos/rc/POLIEDROS_files/polied45.gif. Acesso em: 21 mar 2019.

PLATÃO. (2011). **Timeu-Crítias**. Tradução do grego, introdução, notas e índices: Rodolfo Lopes. Coimbra: Centro de Estudos Clássicos e Humanísticos.

PLUTARCO. **Marcellus**. Traduzido por Dryden. Disponível em: <http://classics.mit.edu/Plutarch/marcellu.html>. Acesso em: 19 dez 2018

SÁ, Carlos Correia de; ROCHA, Jorge. **Treze viagens pelo mundo da Matemática**. Carlos Correia de Sá e Jorge Rocha (editores). 2.ed. Rio de Janeiro. SBM, 2012.

Toda matéria. **Platão**. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/platao/>. Acesso em: 15 mar 2019.

Wikipedia. **Sólidos de Catalan**. Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Sólidos_de_Catalan. Acesso em: 15 mar 2019.

VENDRAME, Geni Viana do Carmo. **Área da Superfície e Volume de Prismas e Cilindros**. Maringá, PR: 2014. Disponível em: <http://www.profmat.uem.br/dissertacoes-2/Geni.pdf>. Acesso em: 16 de abril de 2019.