UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS

LICENCIATURA INTEGRADA EM MATEMÁTICA E FÍSICA

BRENDA LARISSA RUELA SANTOS

BATALHA DOS POLÍGONOS E TEOREMA DE PICK: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

SANTARÉM – PA

2021

BRENDA LARISSA RUELA SANTOS

BATALHA DOS POLÍGONOS E TEOREMA DE PICK: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Ciências Exatas, do Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará para a obtenção do título do curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física.

Orientador: Prof. Me. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

SANTARÉM – PA

2021

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus por ter proporcionado tantas vitórias na minha vida até o presente momento. Agradeço a toda minha família por toda confiança e investimento durante toda a minha formação. Em especial a minha madrinha, e segunda mãe, Aldenize Xavier e minha mãe Aldalene Oliveira por acreditarem em mim e me proporcionarem inúmeras oportunidades.

Agradeço imensamente ao meu orientador, Aroldo Rodrigues, por me apresentar o tema deste trabalho e por me acompanhar e compartilhar de muitos ensinamentos nessa fase final. Serei eternamente grata. Um agradecimento especial aos colaboradores do Laboratório de Aplicações Matemáticas (LAPMAT), os coordenadores Hugo Alex, Aldenize Xavier, Aroldo Rodrigues, Hamilton Carvalho, por serem grandes responsáveis pela minha formação como professora e por me confortar e incentivar em momentos em que precisei.

Aos professores do curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física por toda a compreensão e ajuda durante toda a formação.

Agradecer aos meus amigos de vida Fernanda Paiva e Matheus Gama, por estarem sempre presentes comemorando as vitórias e apoiando nas derrotas. As minhas irmãs de curso, Alzenira Leão e Jailza Castro, que fazem parte das minhas melhores lembranças da universidade e que serão eternas em minha vida. E agradecer ao meu namorado e amigo, Caio Rafael, por ser incansável ao me ajudar e ser um grande incentivador na minha vida. Obrigada por todo apoio e carinho de sempre. Amo vocês.

A todos que contribuíram de alguma forma para a minha formação, o meu muito obrigada de coração.

RESUMO

Esse trabalho de conclusão de curso apresenta uma proposta de intervenção no ensino da geometria para professores da educação básica através da atividade, denominada Batalha dos Polígonos e Teorema de Pick, que envolve a aplicação de um jogo virtual criado no *software* GeoGebra que se assemelha ao jogo de batalha naval. O jogo consiste em utilizar a malha quadriculada no cálculo da área de polígonos através do método da contagem de pontos, o meio pelo qual o Teorema de Pick usa para o cálculo de áreas de polígonos simples. O trabalho apresenta uma demonstração do Teorema de Pick acessível para professores da educação básica assim como a descrição da proposta de atividade para a aplicação em sala de aula. Ao final deste trabalho há um breve relato de experiência com base nas observações feitas durante o desenvolvimento dessa aplicação no projeto Clubes de Matemática. Apesar de surgirem algumas dificuldades relatadas no decorrer da aplicação, ainda assim os objetivos do trabalho foram parcialmente alcançados.

Palavras-chave: Teorema de Pick; Batalha dos Polígonos; Ensino de Geometria.

ABSTRACT

This course completion paper presents a proposal for intervention in the teaching of geometry for teachers of basic education through the activity called Battle of Polygons and Pick's Theorem, which involves the application of a virtual game created in GeoGebra software that resembles the game of battleship. The game consists of using the grid to calculate the area of polygons using the point counting method, the means by which Pick's Theorem uses to calculate the areas of simple polygons. The paper presents a demonstration of Pick's Theorem accessible to basic education teachers as well as the description of the proposed activity for classroom application. At the end of this work there is a brief experience report based on observations made during the development of this application in the Math Clubs project. Despite some difficulties reported during the application, the objectives of the work were partially achieved.

Keywords: Pick's Theorem; Battle of Polygons; Teaching of Geometry.

“A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”

Johannes Kepler

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos uma proposta de atividade para o ensino de geometria por meio de um jogo desenvolvido por nós no *software* Geogebra. O conteúdo envolvido nesta atividade é um interessante resultado relacionando o cálculo da área de polígonos planos com a contagem de pontos em uma malha, este resultado é conhecido como Teorema de Pick, nomeado assim por ter sido descoberto pelo matemático vienense, Georg Pick.

As muitas dificuldades apresentadas pelos alunos para aprender Geometria nos fazem refletir sobre as estratégias que vem sendo utilizadas no ensino desta área da Matemática. Não é de hoje que pesquisadores como Pavanello (1993, 1995) tentam compreender os motivos que levavam muitos professores a deixar de abordar com seus alunos este importante tema, motivos estes que perpassavam por uma formação deficiente dos professores nesta área do conhecimento.

De acordo com Biani (2013), essa deficiência pode ser explicada pelo contexto histórico do ensino da matemática no Brasil, uma vez que a geometria era ensinada apenas para os homens no final do século XIX. Para as mulheres que possuíam acesso à educação era abordado apenas o ensino de álgebra básica. Lorenzato e Vila (1993) também compartilham da ideia de que esse descaso com a geometria vem de um passado em que o Ensino de Matemática no Brasil era dividido em ensino primário e ensino secundário. O ensino primário, denominado escola para o povo, não possuía o ensino da geometria, dando ênfase a álgebra e a uma preparação voltada para as práticas comerciais. Já o ensino secundário, que era pago, era denominado escola para as elites e nele a geometria era incluída de forma abstrata e sem aplicações práticas, mas ênfase era ainda para a álgebra e o ensino como um todo privilegiava a formação nas áreas jurídicas.

Assim como Pavanello (1993), também Lorenzato e Vila (1993), relatam que o problema do abandono da geometria se dava pela má formação dos professores, o que por consequência gerava insegurança nos profissionais que acabam priorizando outros temas, deixando a geometria para ser trabalhada no final dos bimestres de forma rápida. Biani (2013) conclui em sua pesquisa que atualmente a geometria está resumida em nomenclaturas, fórmulas e definições, sem qualquer ligação com a prática cotidiana do aluno, não permitindo a este desenvolver a capacidade de resolver problemas, fazer questionamentos, associar diferentes campos da matemática e identificar a matemática nas práticas diárias. Biani (2013) afirma ainda sobre o ensino da geometria que:

> (...) quando presente (o que já seria uma vantagem), limitava-se às nomenclaturas e definições, à identificação de algumas propriedades das figuras planas e espaciais, ao cálculo de perímetro e área por meio de fórmulas, às aplicações nas produções em aulas de artes. Tudo dentro de uma visão mecânica, memorativa, que se limita ao fornecimento de conteúdos, ao treinamento por meio de atividades com pouca ou nenhuma vinculação com o cotidiano, o empírico ou o concreto.

Entrando na discussão do cálculo de área de figuras planas, pelo qual perpassa este trabalho, Muller e Lorenzato (2016) defendem que os conceitos de área e perímetro devem ser trabalhados nos anos iniciais, partindo do mundo concreto para, em seguida, passar para o mundo abstrato das formas e, por último, pela necessidade de efetuar medições destas formas, chegar ao mundo dos números. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pg. 272:

> (...) a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras.

Sendo assim, com base no que foi exposto acima, surge a necessidade de dar uma resposta ao problema da capacitação de professores e uma das estratégias para isso é o desenvolvimento e divulgação de novas metodologias para o ensino de geometria, garantindo que os profissionais do ensino tenham contato com tais metodologias ainda em sua formação inicial. Em diversas universidades do mundo existem projetos com tais objetivos, a proposta abordada neste trabalho é oriunda de um projeto deste tipo e foi desenvolvida por nós dentro do Laboratório de Aplicações Matemáticas (Lapmat), do qual participamos durante toda nossa formação acadêmica. O Lapmat é um laboratório da Ufopa que conta com a colaboração de professores e acadêmicos financiados pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid).

O Lapmat, através do subprojeto Clubes de Matemática realiza um conjunto de atividades que visam trabalhar a matemática de forma lúdica e por meio de práticas que se diferenciam daquelas frequentemente utilizadas no ensino tradicional. A proposta destas atividades é a de tornar os alunos protagonistas no processo de ensino-aprendizagem, de modo que estes possam descobrir por si mesmos os diversos conceitos trabalhados. O Lapmat propõe as atividades de forma que os acadêmicos da Licenciatura Integrada em Matemática e Física sejam responsáveis pelas aplicações das atividades. No laboratório acontecem reuniões semanais, entre os coordenadores do projeto, os bolsistas e os voluntários envolvidos. Nelas, algumas vezes ocorrem capacitações para os acadêmicos, que compartilham relatos do que ocorre durante as aplicações das atividades, trazem sugestões para melhorar as atividades existentes ou propostas de novas atividades.

Não podíamos deixar de mencionar aqui o Lapmat porque foi deste espaço de formação, e por meio do projeto dos Clubes de Matemática, que surgiu a ideia do desenvolvimento desta atividade para o trabalho com o cálculo da área de figuras planas a partir do Teorema de Pick e por meio do uso de um jogo. Este trabalho pretende contribuir com professores da educação básica atuantes no ensino fundamental e médio, bem como com acadêmicos que estejam atuando na sala de aula em algum projeto de formação.

O objetivo geral deste trabalho é apresentar uma proposta de atividade para o ensino de geometria envolvendo a utilização de um jogo abordando o cálculo da área de figuras planas a partir do Teorema de Pick.

Um professor ou acadêmico que pretenda utilizar a atividade proposta aqui por nós terá certamente a necessidade de se apropriar dos conteúdos que ela aborda. Pensando nisso é que colocamos entre nossos objetivos específicos explorar diferentes aspectos do Teorema de Pick tais quais sua história, compreensão do enunciado e a apresentação de uma demonstração acessível aos professores da educação básica. Outro objetivo é a produção do jogo em formato digital e sua disponibilização no site oficial do GeoGebra, a fim de que este possa ser utilizado por professores que já atuam ou que estão em processo de formação inicial, inclusive no ensino remoto.

O capítulo 1 trata do Teorema de Pick e inicia com uma breve biografia de Georg Alexander Pick. Em seguida discute-se o enunciado do teorema, destacando o fato de que se aplica somente a polígonos simples. Dando sequência apresentamos uma demonstração desenvolvida por nós e que está dividida em quatro etapas: primeiro mostramos que o teorema se aplica a qualquer triângulo com os lados sobre a malha; na sequência, para qualquer triângulo retângulo; em seguida, para um triângulo qualquer, parte esta da demonstração que se subdivide em três diferentes casos (3 triângulos retângulos, 3 triângulos retângulos e 1 retângulo, 2 triângulos retângulos); por fim, mostramos que o teorema se aplica a qualquer polígono simples.

O capítulo 2 é voltado para a descrição da atividade envolvendo o jogo *Batalha dos Polígonos*. De início é feita a descrição deste jogo, indicando a finalidade de cada ferramenta presente na versão digital desenvolvida e como utilizá-las. Posteriormente são apresentadas as regras do jogo e disponibilizado um hiperlink para acesso a ele pelo site oficial do GeoGebra. O capítulo finaliza com um breve relato sobre como foi a aplicação da atividade na escola.

Nas considerações finais observamos que os objetivos deste trabalho foram plenamente atingidos, embora os objetivos da atividade tenham sido alcançados apenas parcialmente nesta primeira aplicação que foi realizada na escola e descrita aqui. Entendemos que os motivos que impediram que objetivos da atividade fossem totalmente atingidos guardam relação com o contexto em que se deu sua aplicação. Também reservamos para as considerações finais propostas de melhoria na aplicação desta atividade. Esperamos que o leitor faça bom proveito deste trabalho.

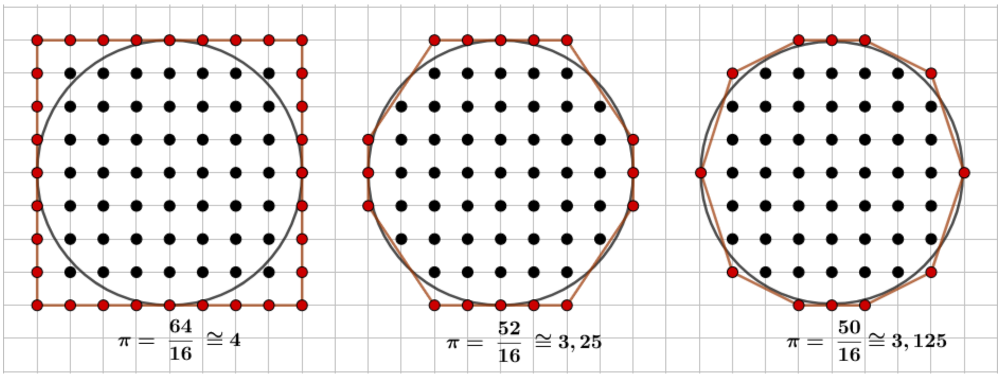
1. TEOREMA DE PICK

O Teorema de Pick é um interessante resultado que permite o cálculo da área de polígonos planos a partir da contagem de pontos em uma malha quadriculada. Para isso, basta que a figura seja um polígono simples com vértices localizados sobre a malha e que verifiquemos a quantidade de pontos da malha sobre a borda e no interior do polígono. De acordo com Abreu (2015), este resultado pode também ser utilizado para o cálculo aproximado da área de regiões irregulares, como regiões geográficas, sendo de grande importância para estimar quantas pessoas ocupam um determinado espaço em um evento de grande público, além de determinar uma área de desmatamento ou de uma queimada, podendo também auxiliar na estimativa da área que um certo crime ambiental prejudicou, entre outras inúmeras aplicações.

E mesmo o número π, este irracional que já foi calculado de tantas formas, pode ter sua expansão desvendada por meio deste teorema através do procedimento explicado a seguir.

Com um círculo desenhado em uma malha quadriculada traçam-se os polígonos com vértices sobre a malha que mais se aproximam do círculo dado. Aumentando cada vez mais o número de lados o polígono e o círculo tendem a coincidir. Basta então realizar a contagem dos pontos sobre a borda do polígono e em seu interior e aplicar o Teorema de Pick para obter a área A_n do polígono de n lados. O número π pode então ser obtido como a razão entre A_n e o quadrado do raio do círculo. A Figura 1 ilustra o que acabamos de explicar, nela os pontos destacados em vermelho e preto representam, respectivamente, os pontos que estão na borda e no interior do polígono.

Figura 1 – Obtendo o valor de π através do Teorema de Pick



Fonte: Elaborada pela autora no Geogebra

Nas próximas seções veremos um pouco da história do matemático que dá nome ao teorema, seu enunciado e uma demonstração proposta por nós para ele a partir de ideias que encontramos em um vídeo que o leitor pode acessar clicando aqui e cujo endereço encontra-se nas referências deste trabalho.

1.1 Um pouco sobre Georg Alexander Pick

De acordo com JJ O'Connor e EF Robertson (2005), George Alexander Pick, cujo retrato vemos na Figura 2, nasceu em 10 de agosto de 1859 em Viena, Áustria e morreu em 26 de julho de 1942 em Theresienstadt, atual República Tcheca. Estudou na universidade de Viena, e se formou em 1879 em matemática e física. Mostrando-se um grande matemático da sua época. Desenvolveu trabalhos em diversos campos, principalmente na matemática, com um total de 67 artigos, abordou tópicos como álgebra linear, análise funcional, cálculos de integrais e geometria. Quase todos os artigos tratavam de funções de uma variável complexa, equações diferenciais e geometria diferencial. Alguns termos, como Matrizes Pick, Interpolação Pick-Nevanlinna e o Lema Schwarz-Pick, são usados até hoje.

Figura 2 – Georg Alexander Pick

Fonte: Página da biografia de Pick na Wikipédia.[1]

O'Connor e Robertson (2005) ainda relatam que Pick estudou na Universidade de Viena e atuou como professor e posteriormente reitor na Universidade Alemã de Praga, em 1900. O Teorema de Pick é possivelmente sua contribuição mais conhecida. Ele foi publicado em Praga, em 1899, no artigo chamado *Geometrisches zur Zahlenlehre* (Resultados Geométricos sobre a Teoria dos Números). Apesar de ser um teorema simples e elegante, este ficou esquecido por quase 70 anos. Georg Pick não deve tê-lo considerado uma grande descoberta na época. Mas essa fórmula passou a ser bem conhecida a partir 1969, através do matemático Hugo Dyonizy

[1] Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Alexander_Pick. > Acesso em: 19 fev. 2020.

Steinhaus (1887-1972), que a publicou em seu livro "Mathematical Snapshots". A partir dessa publicação, o teorema ganhou atenção e admiração de muitos, como cita Elon Lages Lima (1991) em seu livro Meu professor de matemática e outras histórias pg. 101, "a fórmula de Pick é fácil, bonita e divertida".

1.2 Enunciado do teorema

Antes de abordarmos o teorema, precisamos definir alguns conceitos:

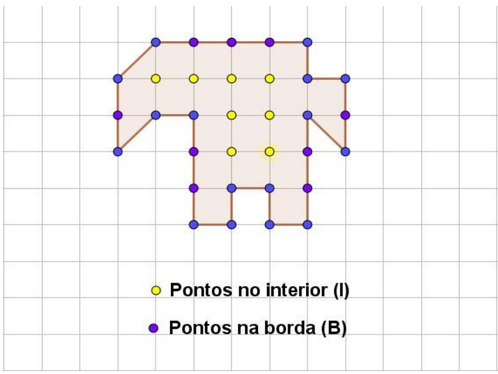
- Polígonos simples: é um polígono sem "buracos" tal que a interseção entre dois de seus lados não consecutivos é vazia.
- Pontos do interior: pontos da malha que estão no interior do polígono.
- Pontos da borda: pontos da malha que pertencem aos lados do polígono, incluindo os vértices.

Utilizando as definições acima e denotando respectivamente por I e por B a quantidade de pontos localizados no interior e na borda de um polígono de área A, podemos enunciar o:

Teorema de Pick. *A área de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma malha quadriculada é dada pela fórmula* $A = I + \frac{B}{2} - 1$.

No enunciado acima, fica subentendido que a unidade de medida de área são os quadrados que compõem a malha na qual o polígono está localizado. No exemplo a seguir utilizamos este teorema para calcular a área do polígono simples da Figura 3.

Figura 3 – Polígono simples na malha quadriculada



Fonte: Elaborada pela autora no Geogebra

Observa-se que a Figura 3 possui 8 pontos no interior e 25 pontos na borda. Aplicando o teorema para descobrir a área desse polígono, temos:

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

$$A = \frac{25}{2} + 8 - 1$$

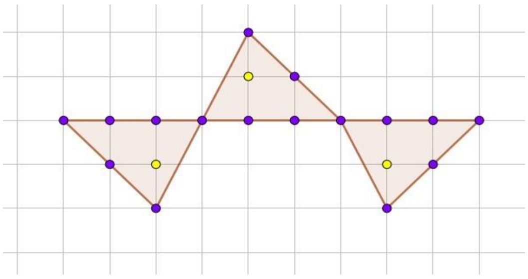
$$A = 19{,}5\ u.a.$$

Nota-se que ao contar quantos quadrados inteiros e metades de quadrados estão no interior do polígono formado obtemos exatamente o valor que foi calculado pelo teorema.

Exemplo 2:

A Figura 4, se encarada como um único polígono, é um exemplo daquilo que não se encaixa na definição de polígono simples. Observe o que acontece quando o Teorema de Pick é aplicado a ela.

Figura 4 – Figura na malha quadriculada



Fonte: Elaborada pela autora no Geogebra

A Figura 4 possui três pontos no interior e dezesseis pontos na borda. Aplicando a fórmula de Pick, temos

$$A = \frac{16}{2} + 3 - 1$$

$$A = 10,$$

que evidentemente não é o resultado correto**.** Basta calcular a área dos três triângulos que formam o polígono para chegar à conclusão de que o valor correto é igual a 9 unidades de área.

1.3 Demonstração do teorema

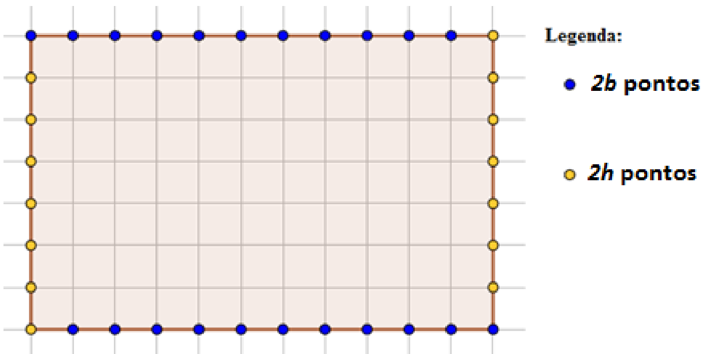
A demonstração do Teorema de Pick será dividida em quatro etapas: para retângulos cujos lados estão sobre a malha, para triângulos retângulos cujos catetos estão sobre a malha, para triângulos quaisquer e, finalmente, para polígonos em geral.

1.3.1 Retângulo com lados sobre a malha

Note que os comprimentos da base (b) e da altura (h) do retângulo estão associados a quantidade de pontos da malha que pertencem a borda do retângulo (B_R), como mostra a figura 5. É importante destacar que os pontos de interseção (vértices) serão contados apenas uma vez. Dessa forma, b e h passam a corresponder exatamente a quantidade de pontos da malha que pertencem a base e a altura do retângulo fornecido. Assim, a quantidade de pontos da borda (B_R) desse retângulo pode ser obtida por meio da fórmula:

$$B_R = 2b + 2h$$

Figura 5 – Caso 1: Pontos da borda do retângulo

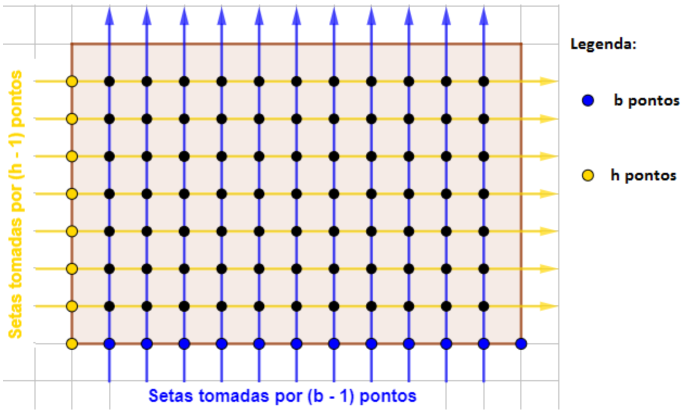


Fonte: Elaborada pela autora no Geogebra

Em relação aos pontos interiores do retângulo ($\boldsymbol{I_R}$) podem ser contados a partir de b e de h multiplicando esses valores um pelo outro depois de ser diminuída uma unidade de cada um deles. É importante destacar que os pontos de interseção são contados apenas uma vez. Observe a Figura 6.

$$I_R = (b - 1).(h - 1)$$

Figura 6 – Caso 1: Pontos do interior do retângulo



Fonte: Elaborada pela autora no Geogebra

Substituindo as equações acima na fórmula de Pick, temos que a área do retângulo (A_R) é:

$$\frac{B_R}{2} + I_R - 1 = \frac{2b + 2h}{2} + (b-1).(h-1) - 1 = \frac{2b}{2} + \frac{2h}{2} + bh - b - h + 1 - 1$$
$$= b + h + bh - b - h = bh = A_R$$

Mostrando que o teorema é válido para esse tipo de retângulo, já que equivale ao produto do comprimento da base pelo comprimento da altura, que como é sabido fornece a área de qualquer retângulo.

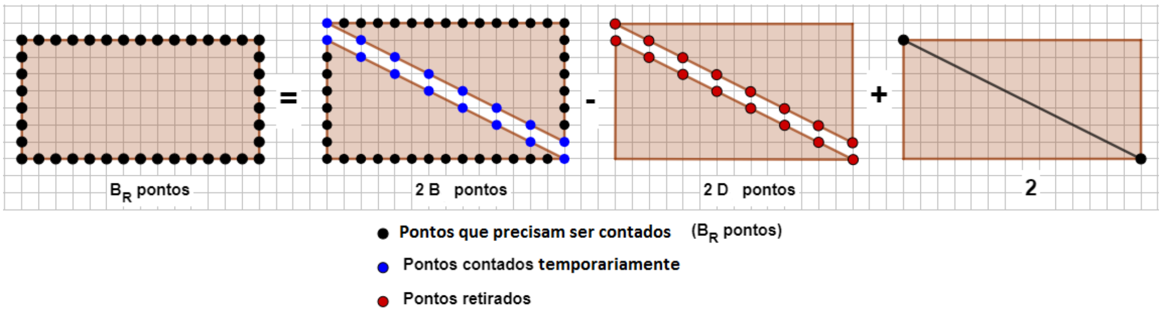
1.3.2 Triângulo retângulo com catetos sobre a malha

Ao traçar a diagonal de um retângulo com lados sobre a malha surgem dois triângulos retângulos congruentes. Para esses dois triângulos, denomina-se de B a quantidade de pontos da malha que estão na borda, I a quantidade de pontos da malha que estão no interior e D a quantidade de pontos da diagonal do triângulo. Sendo assim, para contabilizar os pontos da borda do retângulo usaremos a equação que é expressa em função das quantidades B e D:

$$B_R = 2B - 2D + 2$$

Essa fórmula se justifica porque podemos imaginar inicialmente que B_R é igual a soma das quantidades de pontos das bordas dos dois triângulos sem suas hipotenusas, as quais coincidem com uma das diagonais do retângulo. Como nesse processo as extremidades da diagonal (que são vértices do retângulo então, pertencem a borda) deixaram de ser contadas, as duas precisam ser contabilizadas novamente, o que justifica somar 2 na fórmula. Observe a Figura 7.

Figura 7 – Caso 2: Pontos da borda de um triângulo retângulo



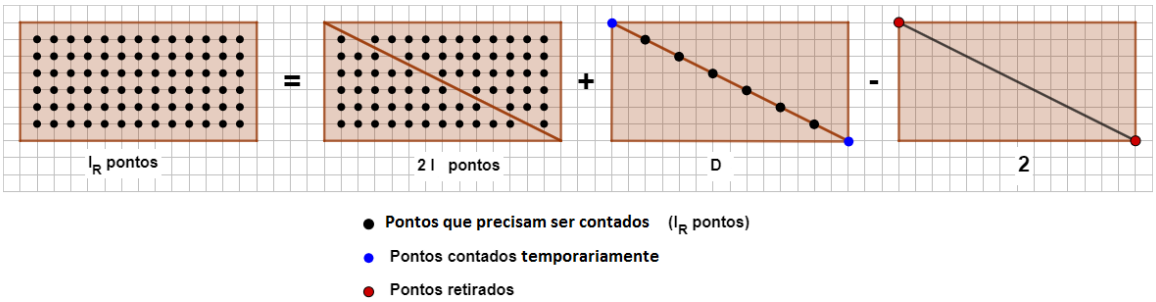
Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra

Em relação a quantidade de pontos do interior desse retângulo (I_R), esta será dada pela soma da quantidade I de cada um dos triângulos, mas agora os pontos sobre a diagonal D precisam ser contados, retirando apenas os dois vértices que pertencem à borda.

$$I_R = 2I + D - 2$$

A Figura 8 representa o que acabamos de descrever.

Figura 8 – Caso 2: Pontos do interior de um triângulo retângulo



Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra

Substituindo as duas equações na fórmula de Pick (já provada para esse caso), a área A_R do retângulo será dada por:

$$A_R = \frac{B_R}{2} + I_R - 1$$

$$A_R = \frac{2B - 2D + 2}{2} + 2I + D - 2 - 1$$

$$A_R = \frac{2B}{2} - \frac{2D}{2} + \frac{2}{2} + 2I + D - 3$$

$$A_R = B + 2I - 2$$

Como a área A_T do triângulo retângulo é a metade da área do retângulo A_R, temos que:

$$A_T = \frac{A_R}{2}$$

$$A_T = \frac{B + 2I - 2}{2}$$

$$A_T = \frac{B}{2} + I - 1$$

Ou seja, a própria fórmula de Pick. Sendo assim, o teorema também se aplica para um triângulo retângulo com catetos sobre a malha.

1.3.3 Triângulo Qualquer

Note que um triângulo ABC cujos vértices são pontos da malha de coordenadas (X_A, Y_A), (X_B, Y_B) e (X_c, Y_c) pode ser colocado no interior de um retângulo R cujos vértices são (m_x, m_y), (M_x, m_y), (M_x, M_y) e (m_x, M_y), em que m_x e m_y são os valores mínimos assumidos pelas abscissas e pelas ordenadas dos pontos A, B e C e M_x e M_y são os máximos. Para esta etapa da demonstração precisamos analisar as diferentes configurações segundo às quais isto pode acontecer. Como somos nós que nomeamos os vértices A, B e C, podemos, sem perda de generalidade, supor que $X_A \leq X_B \leq X_C$. Assim, considerando apenas as abscissas dos pontos A, B e C e que estes não podem ser colineares, já que são os vértices de um triângulo, temos apenas os três casos abaixo para analisar:

(1) $X_A = X_B < X_C$

(2) $X_A < X_B = X_C$

(3) $X_A < X_B < X_C$

E para cada um dos três casos acima, é preciso considerar os 12 casos abaixo para as ordenadas dos pontos A, B e C:

(1) $Y_A = Y_B < Y_C$

(2) $Y_A < Y_B = Y_C$

(3) $Y_A < Y_B < Y_C$

(4) $Y_B = Y_C < Y_A$

(5) $Y_B < Y_C = Y_A$

(6) $Y_B < Y_C < Y_A$

(7) $Y_C = Y_A < Y_B$

(8) $Y_C < Y_A = Y_B$

(9) $Y_C < Y_A < Y_B$

(10) $Y_C < Y_B < Y_A$

(11) $Y_B < Y_A < Y_C$

(12) $Y_A < Y_C < Y_B$

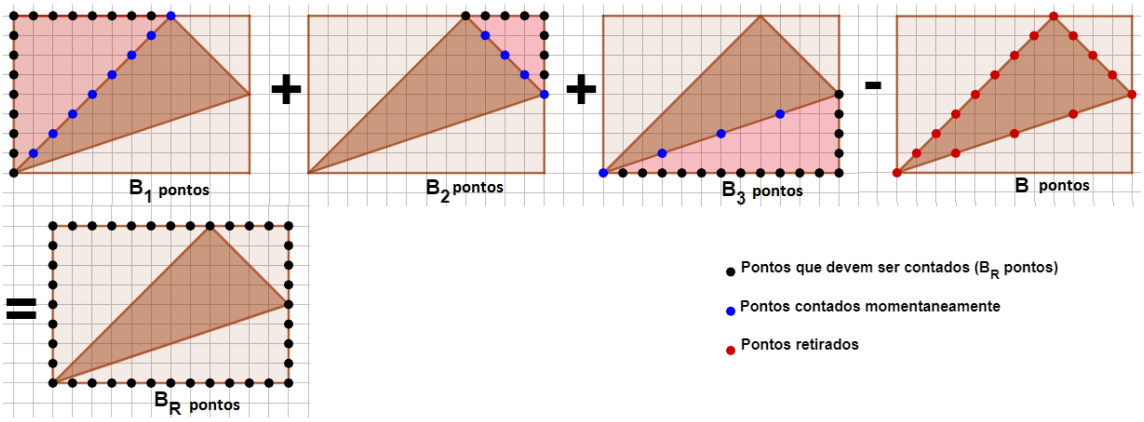
Quando $X_A = X_B$ podemos desprezar os casos nos quais $Y_A = Y_B$ e quando $X_B = X_C$ podemos desprezar os casos nos quais $Y_B = Y_C$, já que os pontos A, B e C devem ser distintos. Assim, há, na verdade, 32 combinações possíveis a serem analisadas. Entretanto, é possível agrupá-las em apenas 4 configurações, quando consideramos quais os polígonos que, junto com o triângulo ABC, preenchem o interior do retângulo. Das 4 configurações possíveis 3 recaem em casos ainda não estudados e uma recai no caso anterior. Vejamos então os três novos casos.

a) Três triângulos retângulos: Em algumas situações testadas, ao desenhar o triângulo ABC, surgiram outros três triângulos retângulos. Como o teorema já foi demonstrado para retângulos e triângulos retângulos, para essa figura basta calcular a área do retângulo e subtrair as áreas dos três triângulos retângulos. Sendo assim, chamaremos os triângulos retângulos de T_1, T_2 e T_3 e de T o triângulo ABC.

Da mesma forma que na demonstração anterior, as variáveis associadas ao retângulo serão escritas em função das variáveis associadas aos triângulos. Os pontos da borda do retângulo (B_R) são dados pela soma dos pontos pertencentes às bordas de T_1, T_2 e T_3, chamadas de B_1, B_2 e B_3, respectivamente. Mas ao somar todas as laterais desses triângulos retângulos, são contados alguns pontos que fazem parte do interior do retângulo e que são justamente os pontos da borda de T, que chamaremos de B, exceto pelos vértices (observe a figura 9). Daí vem a relação dada abaixo:

$$B_R = B_1 + B_2 + B_3 - B$$

Figura 9 – Caso 3: Pontos da borda para o caso (a)



Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra

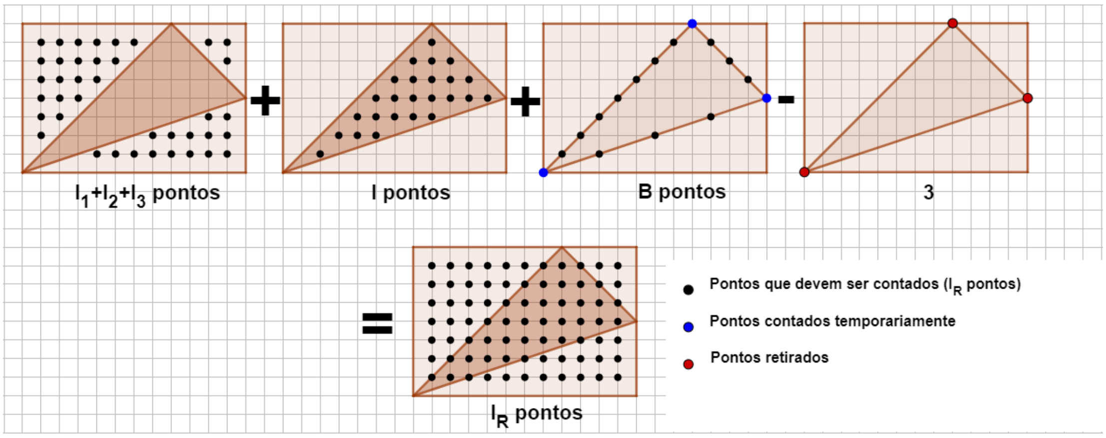
Note que os vértices de T, que pertencem a borda do retângulo, são contados uma única vez, pois pertencem sempre a dois dos triângulos T_1, T_2 e T_3, sendo assim contabilizados duas vezes, mas subtraídos uma vez, justamente por pertencerem a B_T.

Os pontos do interior do retângulo (I_R), além da soma dos pontos interiores de todos os triângulos, precisa somar a borda do triângulo T, que faz parte do interior do retângulo. Retirando apenas os três vértices de T que fazem parte da borda.

$$I_R = I_1 + I_2 + I_3 + I + B - 3$$

A representação da Figura 10 abaixo está dividida em etapas, a qual mostra separadamente a contagem de pontos de cada triângulo:

Figura 10: Caso 3: Pontos do interior para o caso (a)



Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra

Como a área do triângulo ABC (A) é dada pela área do retângulo (A_R) subtraída da soma das áreas dos triângulos $T_1,\ T_2$ e T_3 ($A_1,\ A_2,\ A_3$) temos:

$$A = A_R - (A_1 + A_2 + A_3)$$

$$A = \frac{B_R}{2} + I_R - 1 - \left[\left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1\right) + \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1\right) + \left(\frac{B_3}{2} + I_3 - 1\right)\right]$$

$$A = \frac{B_1 + B_2 + B_3 - B}{2} + I_1 + I_2 + I_3 + I + B - 3 - 1 - \left[\left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1\right) + \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1\right) + \left(\frac{B_3}{2} + I_3 - 1\right)\right]$$

$$A = \frac{B_1 + B_2 + B_3 - B}{2} + I_1 + I_2 + I_3 + I + B - 4 - \frac{B_1 + B_2 + B_3}{2} - I_1 - I_2 - I_3 + 3$$

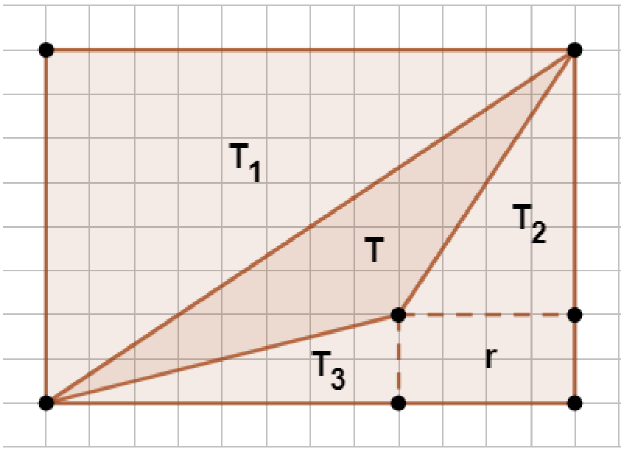
$$A_T = -\frac{B}{2} + B + I - 1$$

$$A_T = \frac{B}{2} + I - 1$$

Também chegando ao Teorema de Pick. Logo, para esse caso, o teorema se aplica.

b) Três triângulos retângulos e um retângulo: Nesse caso, após o triângulo construído surgem outros três triângulos retângulos T_1, T_2, T_3 e um retângulo r. Para calcular a área do triângulo T (A) é preciso subtrair da área do retângulo R (A_R) as áreas de T_1, T_2, T_3 e r (A_1, A_2, A_3, A_r). Observamos na figura 11:

Figura 11 - Caso 3: Divisão que origina o caso (b)



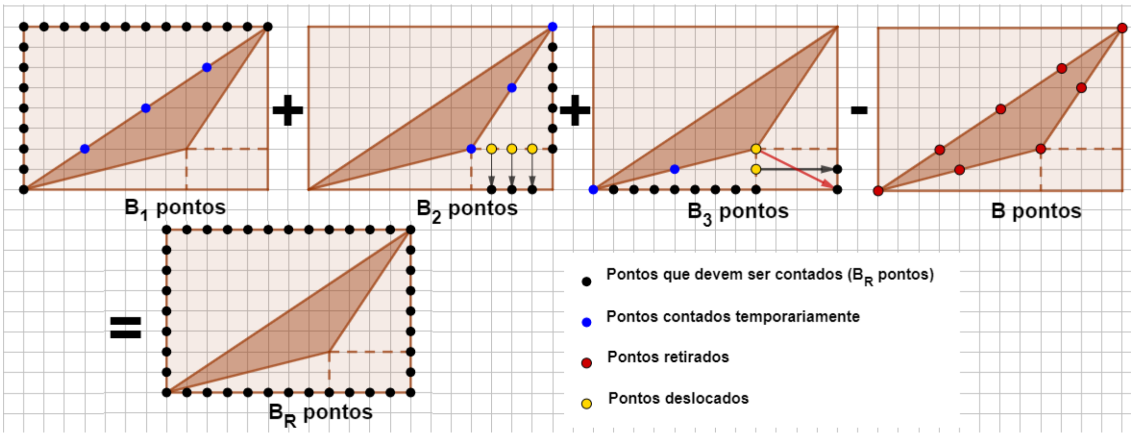
Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra

Os pontos da malha referentes à borda de R (B_R) serão contabilizados pela fórmula abaixo, sendo B_1, B_2, e B_3 os pontos que estão na borda de T_1, T_2 e T_3, respectivamente, e B os pontos que estão na borda de T:

$$B_R = B_1 + B_2 + B_3 - B$$

De fato, a quantidade de pontos da borda de r não aparece na fórmula, pois já foi contada em B_2 e B_3 como podemos observar na Figura 12. Os pontos em amarelo representam os pontos que pertenceriam à borda de r pois foram contados como pontos das bordas de B_2 e B_3 e, por fazerem parte do interior de R, foram deslocados para completar a borda. Na figura note a quantidade de vezes que os vértices de T são contados e retirados para assim mostrar de forma clara que todos os pontos foram contados apenas uma vez, como está em destaque:

Figura 12 – Caso 3: Pontos da borda para o caso (b)



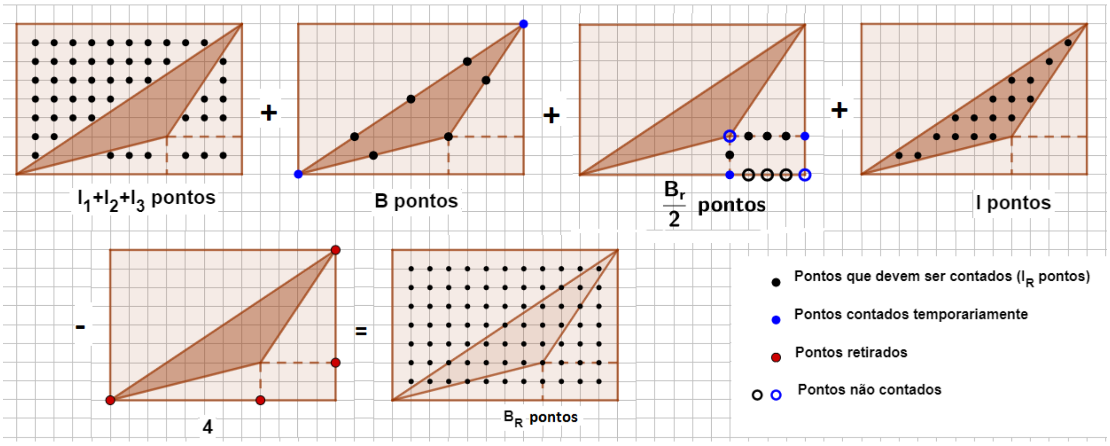
Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra

Em relação aos pontos do interior, é preciso somar os pontos interiores de T, T_1, T_2, T_3 e r (I, I_1, I_2, I_3, I_r), além dos pontos das bordas de T (B) retirando apenas os vértices que pertencem à lateral do retângulo. O retângulo r possui pontos que se encontram no interior de R, que equivalem exatamente à metade dos pontos da borda de r, chamando de $\frac{B_r}{2}$, também retirando os dois vértices. Note na figura 13 que os espaços circulados no retângulo r são pares dos pontos que foram contados, para ficar de forma clara que somente a metade foi contabilizada. Sendo assim, os pontos do interior que pertencem à malha podem ser calculados da seguinte forma:

$$I_R = I_1 + I_2 + I_3 + I_r + I + B + \frac{B_r}{2} - 4$$

Tudo isso está representado na figura 13:

Figura 13 – Caso 3: Pontos do interior do caso (b)



Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra

Inserindo as equações da borda e interior do retângulo na área do triângulo T (A), temos:

$$A = A_R - (A_1 + A_2 + A_3 + A_r)$$

$$A = \frac{B_R}{2} + I_R - 1 - \left[\left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1\right) + \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1\right) + \left(\frac{B_3}{2} + I_3 - 1\right) + \left(\frac{B_r}{2} + I_r - 1\right)\right]$$

$$A = \frac{B_1 + B_2 + B_3 - B}{2} + I_1 + I_2 + I_3 + I_r + I + B + \frac{B_r}{2} - 4 - 1 - \left[\frac{(B_1 + B_2 + B_3 + B_r)}{2} + I_1 + I_2 + I_3 + I_r - 4\right]$$

$$A = \frac{B_1 + B_2 + B_3 - B}{2} + I_1 + I_2 + I_3 + I_r + I + B + \frac{B_r}{2} - 4 - 1 - \frac{(B_1 + B_2 + B_3 + B_r)}{2} - I_1 - I_2 - I_3 - I_r + 4$$

Cancelando os termos simétricos, restam apenas:

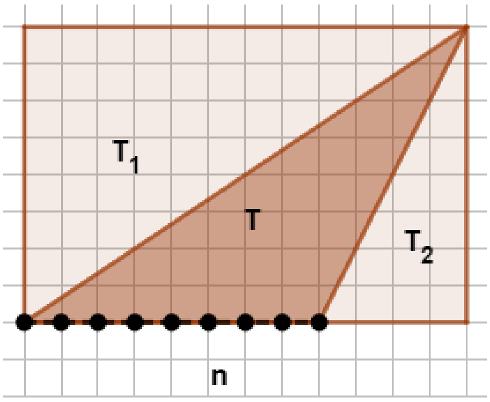
$$A = B - \frac{B}{2} + I - 1$$

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

Chegando, novamente, ao teorema. O que prova que é válido para esse caso.

c) **Dois triângulos retângulos:** Na figura 14, percebemos dois triângulos T_1 e T_2, além do triângulo T, preenchendo o interior do retângulo R. Nela é possível observar também que um dos lados de T está contido em um dos lados de R. Tal problema não havia surgido nos casos anteriores. Chamaremos de $\boldsymbol{n}$ a quantidade de pontos que estão neste lado de T.

Figura 14 – Caso 3: Divisão que origina o caso (c)



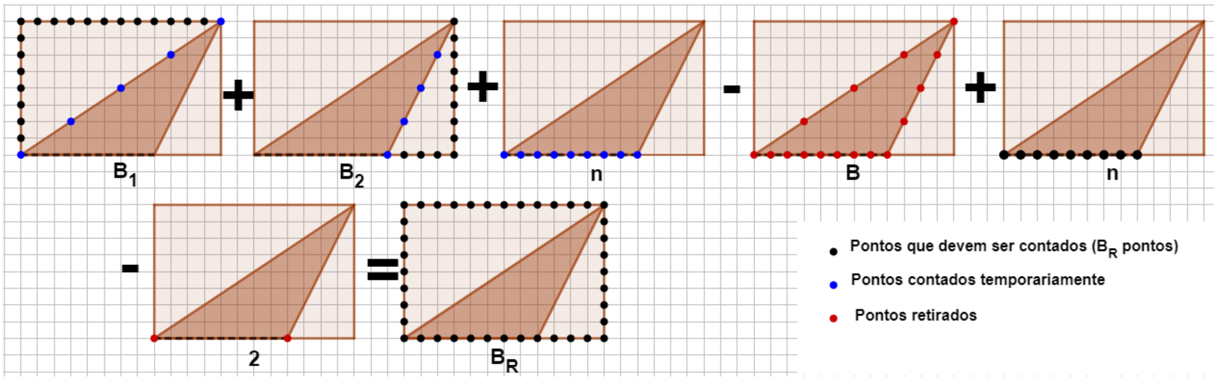
Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra

Dessa forma, a contagem de pontos da borda do retângulo (B_R) deverá ser feita da seguinte forma: a soma dos pontos que estão nas bordas de T_1 e T_2, chamados de B_1 e B_2, retirando apenas os pontos pertencentes à borda de T (B). Mas neste caso específico, há pontos em comum entre B e B_R, que anteriormente foi denominado de n. Sendo assim, será acrescentado à borda do retângulo $2n$, pelo fato de ter sido retirado com a borda de T. Obtemos então:

$$B_R = B_1 + B_2 - B + 2n - 2$$

A Figura 15 representa os pontos da borda do retângulo.

Figura 15 – Caso 3: Pontos da borda do caso (c)

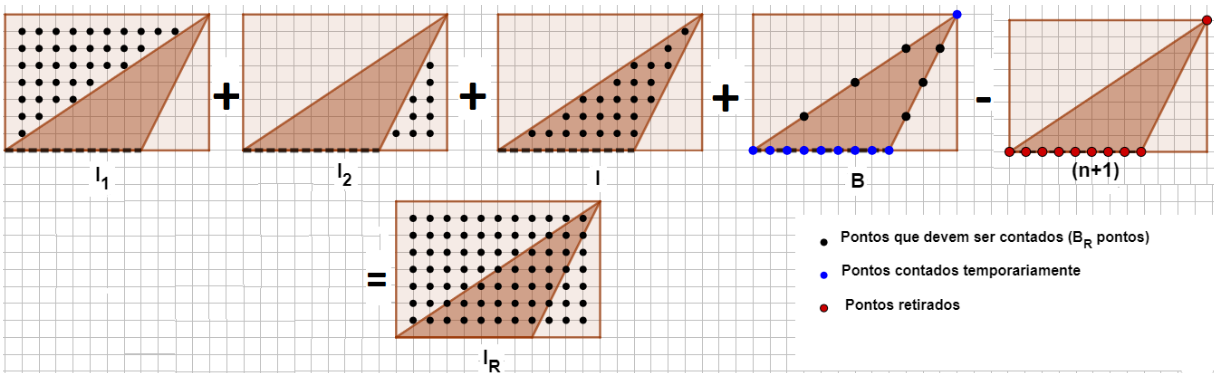


Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra

A quantidade de pontos do interior do retângulo (I_R), também tem o impasse com a quantidade de pontos n, mas de uma forma mais simplificada. É dado pela soma da quantidade de pontos interiores de T, T_1 e T_2 (I_1, I_2, I_3) além da quantidade de pontos da borda de T (B) que pertencem ao interior do retângulo, retirando apenas a parte n e um vértice que sobra de T. Observe na figura 16.

$$I_R = I_1 + I_2 + I + B - (n+1)$$

Figura 16 – Caso 3: Pontos do interior do caso (c)



Fonte: Elaborada pela autora no Geogebra

Como nos casos anteriores, a área A_T é dada pela área A_R subtraindo as áreas dos dois triângulos restantes (A_{T1}, A_{T2}).

$$A = A_R - (A_1 + A_2)$$

$$A = \frac{B_R}{2} + I_R - 1 - \left[\left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1\right) + \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1\right)\right]$$

$$A = \frac{B_1 + B_2 - B + (2n-2)}{2} + I + I_1 + I_2 + B - (n+1) - 1 - \left[\left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1\right) + \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1\right)\right]$$

Cancelando os termos simétricos, restam apenas:

$$A = B - \frac{B}{2} + I - 1$$

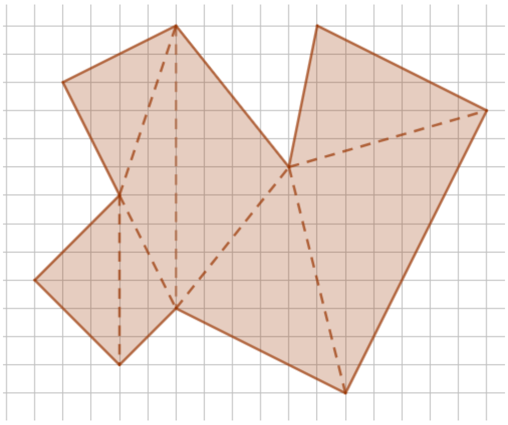
$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

Chegando novamente ao teorema de Pick. Assim, para todos os tipos de triângulos o teorema de Pick se aplica.

1.3.4 Qualquer polígono simples

Nesta última etapa, vamos finalmente mostrar que o teorema de Pick é válido para polígonos simples em geral, os quais podem ser sempre decompostos em triângulos cujos vértices são também vértices do polígono dado. Como exemplifica a figura 17, temos um polígono P_n que foi decomposto em n triângulos. Esta demonstração será feita por indução sobre a quantidade n de triângulos utilizada na decomposição do polígono simples.

Figura 17 – Caso 4: Qualquer polígono simples



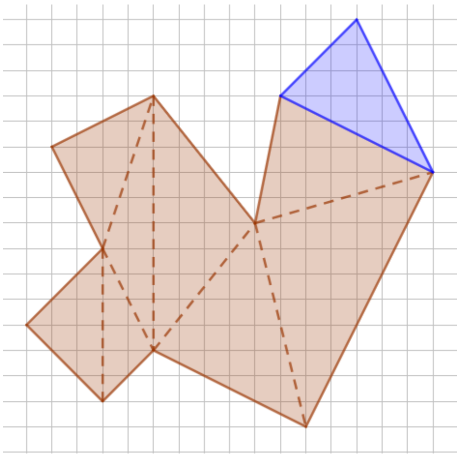
Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra

Se $n = 1$ é porque o polígono dado é um triângulo qualquer. Portanto, por tudo que foi demonstrado antes, a base da indução está feita.

Vamos então ao passo indutivo, isto é, vamos provar que o Teorema de Pick é válido para qualquer polígono simples que possa ser decomposto em $n + 1$ triângulos supondo-o válido para qualquer polígono simples que possa ser decomposto em n triângulos, lembrando que os vértices desses triângulos serão sempre vértices dos polígonos dados.

Seja dado então um polígono simples P_{n+1} decomponível em $n + 1$ triângulos. É claro que tal polígono pode ser interpretado como a união de um polígono P_n formado por n triângulos com mais um triângulo T. Obviamente o Teorema de Pick se aplica tanto ao polígono P_n (pela hipótese da indução) quanto ao triângulo T (pela base da indução). Dessa forma, a área de P_{n+1}, simbolizada por A_{n+1}, será dada pela área A_n de P_n acrescida da área A de T, isto é, $A_{n+1} = A_n + A$. Como podemos observar na figura 18, na qual o triângulo destacado em azul representa T.

Figura 18 - Caso 4: Polígono com $n + 1$ triângulos



Fonte: Elaborada pela autora no Geogebra

Assim, se B_n e I_n são as quantidades de pontos da borda e do interior de P_n, então, através do Teorema de Pick, temos:

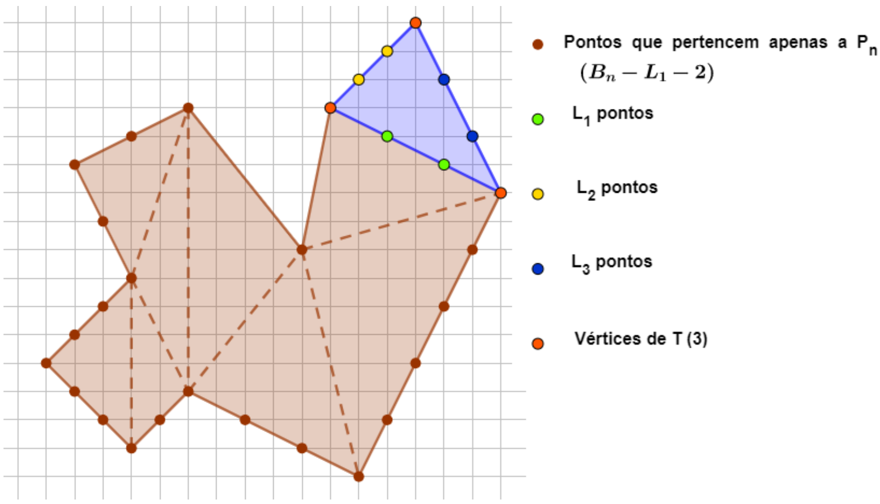
$$A_n = \frac{B_n}{2} + I_n - 1$$

Analogamente para a área A, se chamarmos de B e I as quantidades de pontos da borda e do interior de T, temos, novamente pelo Teorema de Pick:

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

Se chamarmos de L_1, L_2 e L_3 as quantidades de pontos da borda do triângulo T que não são vértices e que estão posicionados respectivamente sobre cada um dos lados ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 desse triângulo, sendo ℓ_1 o lado comum com P_n. Então, a quantidade B de pontos da borda de T será dada por $B = L_1 + L_2 + L_3 + 3$. A figura 19 representa o que acabamos de explicar.

Figura 19 – Caso 4: Pontos da borda de P_{n+1}



Fonte: Elaborada pela autora no Geogebra

Substituindo a expressão que acabamos de encontrar para B no Teorema de Pick aplicado ao triângulo T obtemos:

$$A = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + 3}{2} + I - 1.$$

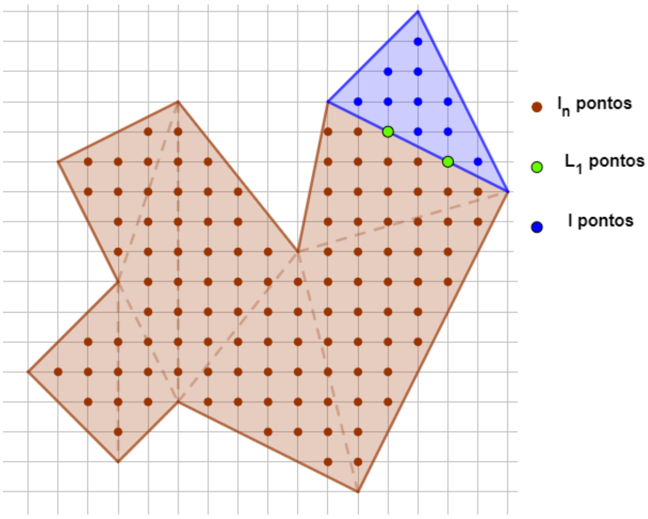
Note ainda que a quantidade $B_{n+1} = B_n - L_1 + L_2 + L_3 + 1$ de pontos da borda de P_{n+1} equivale a quantidade B_n de pontos da borda de P_n acrescida das quantidades L_2 e L_3 de pontos sobre os lados ℓ_2 e ℓ_3 e do novo vértice (motivo para somar 1) e subtraída da quantidade L_1 de pontos sobre o lado ℓ_1, que para P_{n+1} são pontos interiores.

Isolando o termo B_n, que será utilizado mais adiante, obtemos:

$$B_n = B_{n+1} + L_1 - L_2 - L_3 - 1.$$

Em relação a quantidade I_{n+1} de pontos do interior de P_{n+1}, é fácil concluir, como ilustra a figura 20, que $I_{n+1} = I_n + L_1 + I$.

Figura 20 – Caso 4: Pontos do interior de P_{n+1}



Fonte: Elaborada pela autora no Geogebra

Isolando o termo I_n:

$$I_n = I_{n+1} - L_1 - I$$

Após definido cada termo é possível calcular a área A_{n+1} do polígono P_{n+1}. Essa área será a área anterior (A_n) somada com a área do triângulo acrescido (A).

$$A_{n+1} = A_n + A$$

Utilizando o teorema de Pick, que se aplica tanto a A_n quanto a A, ficamos com

$$A_{n+1} = \frac{B_n}{2} + I_n - 1 + \frac{B}{2} + I - 1.$$

Substituindo os termos encontrados anteriormente para B_n, I_n e B, temos a fórmula

$$A_{n+1} = \frac{B_{n+1} + L_1 - L_2 - L_3 - 1}{2} + I_{n+1} - L_1 - I - 1 + \frac{L_1 + L_2 + L_3 + 3}{2} + I - 1.$$

Simplificando os termos simétricos obtemos

$$A_{n+1} = \frac{B_{n+1}}{2} + I_{n+1} - 1.$$

Assim provamos que a validade do teorema de Pick para um polígono P_{n+1}, composto por $n + 1$ triângulos, decorre de sua validade para um polígono P_n composto por n triângulos.

Isto finaliza nosso argumento, baseado no método de indução matemática, demostrando a validade do Teorema de Pick para qualquer polígono simples.

2. BATALHA DOS POLÍGONOS E O TEOREMA DE PICK

O jogo Batalha dos Polígonos foi criado com base em outro jogo, denominado Jogo dos Polígonos, produzido por alunos da Universidade Federal de Pernambuco para o Projeto Rede: Jogos na Educação Matemática. O endereço do site que contém o texto com a descrição deste jogo (inspirado no popular jogo de batalha naval) encontra-se neste link: https://docplayer.com.br/58949741-Projeto-rede-jogos-na-educacao-matematica-jogo-dos-poligonos-historico-e-descricao.html

O jogo Batalha dos Polígonos, além de promover a interação entre os alunos por meio de uma atividade lúdica e trabalhar conceitos sobre polígonos, tem como ideia principal fazer com que o aluno desperte seu espírito investigativo e, através de questionamentos, deduza a fórmula de Pick. Algumas regras básicas são as mesmas do jogo original de batalha naval, a diferença principal é que, ao invés de navios de guerra, trabalharemos com construções de polígonos. Embora seja possível produzi-lo com materiais concretos, optamos por uma versão digital do jogo. O arquivo foi criado no *software Geogebra Classic 6* e disponibilizado no site oficial do GeoGebra, de modo que sua versão digital está disponível para professores e alunos. Para acessá-lo, basta entrar neste link: https://www.geogebra.org/m/njmqxmwq.

Nas próximas seções descreveremos as regras do jogo e sua aplicação em uma escola da rede pública de ensino com alunos da educação básica.

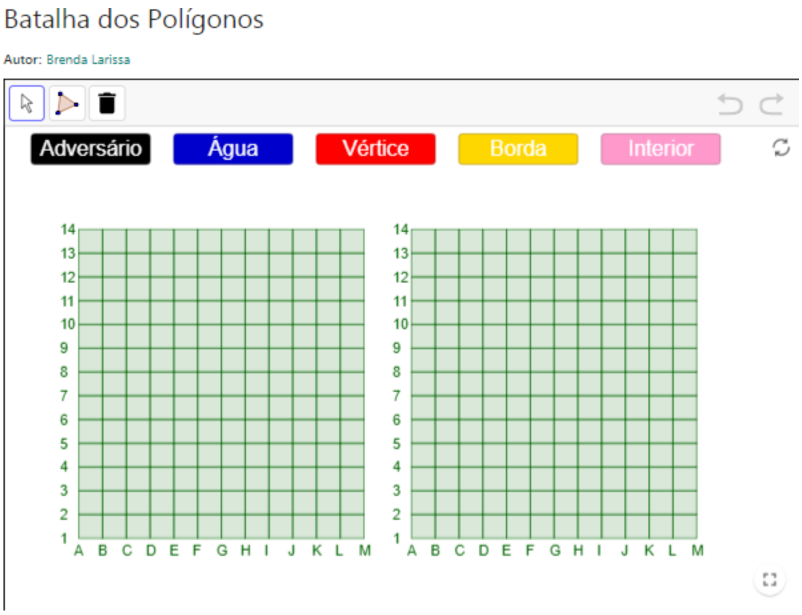
2.1 Regras do jogo

O jogo acontece com dois participantes, sendo que cada jogador utiliza dois tabuleiros. A finalidade do jogo é “afundar” a maior quantidade possível de polígonos, dentre os construídos pelo adversário. Chamaremos de Tabuleiro 1 aquele no qual o jogador construirá os seus próprios polígonos, os quais o adversário tentará afundar e de Tabuleiro 2, o tabuleiro de ataque, que serve para o jogador registrar suas próprias jogadas, a fim de descobrir os polígonos do adversário.

Antes de tratar das regras do jogo em si, expliquemos alguns aspectos da construção.

Clicando na ferramenta *Polígono*, que aparece no menu superior e cujo ícone é representado por um triângulo, o jogador poderá criar seus próprios polígonos no Tabuleiro 1, que na Figura 21, aparece do lado esquerdo. Para movimentar um ponto criado, o jogador deve estar com a ferramenta *Mover*, representada pelo cursor, selecionada. Esta ferramenta encontra-se do lado esquerdo da ferramenta *Polígono*. Já do lado direito, está disponível a ferramenta *Apagar*, cujo ícone é representado por uma lixeira preta, e que serve para apagar objetos criados por engano. Há ainda, no canto superior direito, um ícone para reiniciar a construção, representado por duas pequenas setas em posição circular. Acima delas, há outras duas setas que tem a finalidade de desfazer ou refazer a última ação.

Figura 21 – Apresentação dos tabuleiros do jogo “Batalha dos polígonos”



Fonte: Elaborada pela autora no Geogebra

Os botões coloridos acima dos tabuleiros têm a função de criar pontos que terão a mesma cor que eles. Cada um desses pontos tem uma utilidade diferente.

Vamos então às regras do jogo:

- Cada jogador deve construir quatro polígonos no Tabuleiro 1.
- Os polígonos construídos devem ser polígonos simples, os quais já foram definidos anteriormente neste trabalho.
- O polígono construído deve ter área maior do que um quadrado e seus vértices devem ser pontos da malha do tabuleiro.
- Dois polígonos não podem possuir interseção entre si (isto inclui não possuírem o mesmo vértice ou lado em comum).

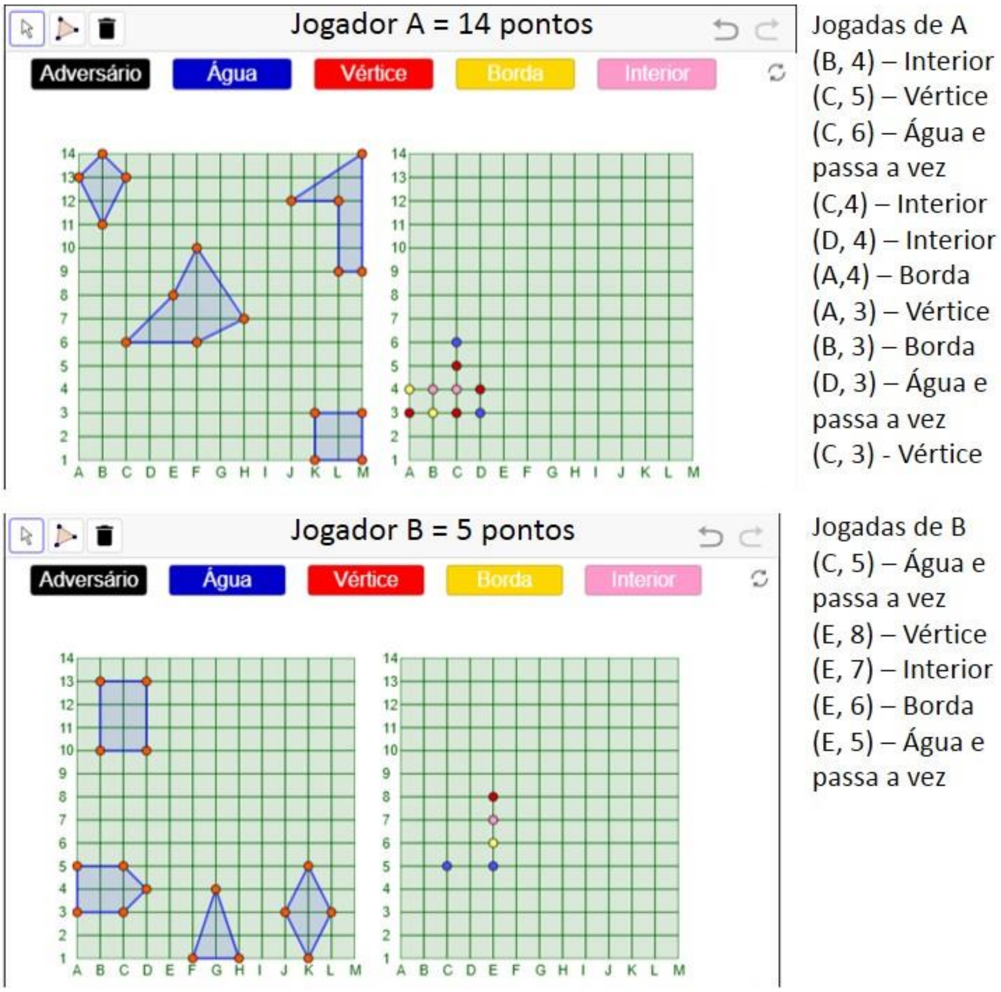
Visto isso, vamos as regras do jogo:

- Os jogadores jogarão de forma alternada, mas só “passarão a vez” quando não acertarem alvo nenhum. Cada jogador, na sua vez, anunciará uma posição no tabuleiro, informando a letra da coluna e o número da linha. Para que o jogador tenha o controle das jogadas realizadas por ele, deverá marcar um ponto no Tabuleiro 2, cuja cor dependerá do alvo que ele atingiu (informado pelo adversário), sendo azul (água), caso o ponto escolhido não pertença a nenhum dos polígonos construídos pelo adversário, vermelha caso o ponto escolhido corresponda a um vértice, amarela, se for um ponto da borda que não seja vértice e rosa, caso o ponto escolhido pertença ao interior de algum dos polígonos. O jogador deverá ainda registrar as jogadas de seu adversário no Tabuleiro 1 utilizando pontos pretos.

- Cada participante terá ao todo 10 lances para tentar afundar o máximo de polígonos.
- Um polígono é afundado quando todos os vértices que formam essa figura são atingidos. Isso deverá ser informado pelo adversário e o jogador deverá anunciar qual o tipo de polígono que ele afundou.
- Vence a partida quem afundou mais polígonos.
- Em casos de empate, será adotado como critério de desempate a contagem de pontos. Os pontos da borda valem 2 pontos (incluindo vértices) e do interior apenas 1 ponto.

A Figura 22 ilustra como poderiam ficar os tabuleiros de dois jogadores que tivessem acabado de finalizar uma partida.

Figura 22 – Simulação de um jogo entre dois jogadores



Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra

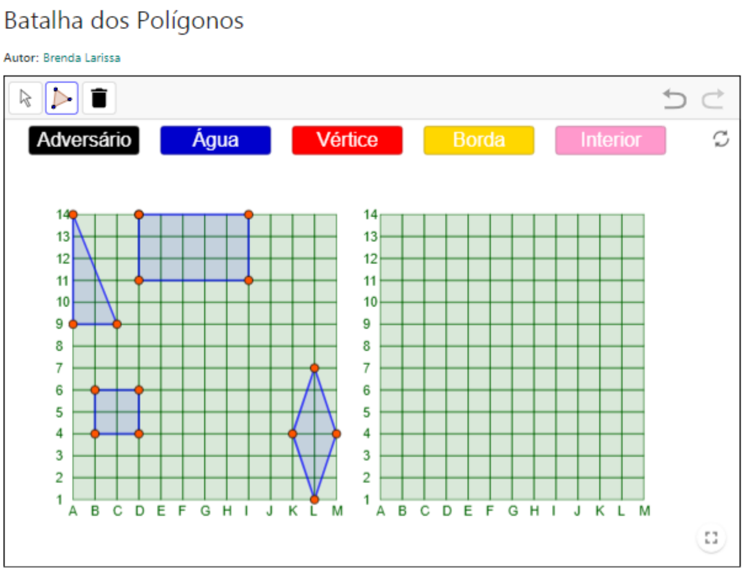
2.2 Preparação da atividade

Com o objetivo de fazer com que os estudantes refletissem sobre como a área de certas figuras planas depende dos elementos que às compõem (por exemplo, a área de um triângulo retângulo depende de seus catetos e a de um losango do comprimento das diagonais) foi solicitado que os jogadores construíssem no Tabuleiro 1 as seguintes figuras:

- Triângulo retângulo de área 5 u.a.
- Quadrado de área 4 u.a.
- Retângulo de área 15 u.a.
- Losango de área 6 u.a.

É importante orientar os alunos a buscarem a melhor estratégia na construção dos polígonos, de forma a dificultar que seu adversário os encontre. Na Figura 23 exemplificamos uma possível disposição dos polígonos no tabuleiro.

Figura 23 – Exemplo de jogada realizada por um jogador.



Fonte: Elaborada pela autora no Geogebra

Depois de finalizado o jogo, os dois jogadores deverão preencher a Tabela 1, que tem como finalidade levar os alunos a induzirem a fórmula de Pick. Para isso, o orientador da atividade deverá desafiar os alunos a encontrarem uma relação entre o valor da última coluna e aqueles registrados nas duas colunas anteriores.

Tabela 1 – Modelo de preenchimento da atividade

Polígono	**Pontos da borda**	$\frac{\boldsymbol{Pontos\ da\ borda}}{\mathbf{2}}$	**Pontos do interior**	**Área da figura**
Triângulo retângulo				**5**
Quadrado				**4**
Retângulo				**15**
Losango				**6**

Fonte: Elaborada pela autora

Na próxima seção descreveremos como transcorreu a experiência com a aplicação desta atividade em uma escola da rede pública de ensino.

2.3 Aplicação da atividade

O registro da aplicação foi feito através de observação participante e relato de conclusões feitas pelos bolsistas que aplicaram. Durante a atividade aplicada pela manhã, teve a presença de três acadêmicos e apenas quatro acadêmicos estavam presentes pelo horário da tarde, sendo uma a autora desse trabalho.

Vale destacar que a atividade *Batalha dos Polígonos e Teorema de Pick* foi planejada por nós no Lapmat e que conduzimos inclusive realizada capacitação com todos os bolsistas que seriam responsáveis pela aplicação da mesma.

A atividade descrita anteriormente foi aplicada no dia 7 de dezembro de 2019 com alunos do 1º ano do ensino médio e do 9º ano do ensino fundamental e três dias depois foi replicada apenas com alunos do 1º ano do ensino médio. Ela foi realizada em uma escola da rede estadual de ensino, em Santarém – PA, através do projeto Clubes de Matemática[2].

A condução da atividade foi realizada por seis bolsistas do Pibid[3] (três pela manhã e três pela tarde) vinculados ao Lapmat e contou com a participação da autora deste trabalho apenas no dia 7 de dezembro. A descrição feita aqui refere-se, portanto, apenas a este dia. Embora

[2] Para mais referências desse projeto acesse: http://www.lapmat.com.br/
http://www.lapmat.com.br/images/eventos/epenn2011/SOBRE%20A%20CRIA%C3%87%C3%83O%20DE%20CLUBES%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20EM%20ESCOLAS%20P%C3%9ABLICAS.pdf
[3] Pibid: Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência. Mais informações podem ser acessadas em http://portal.mec.gov.br/pibid

tenhamos consultado o registro dos relatos feitos pelos bolsistas que realizaram a aplicação no dia 10, praticamente nenhuma informação relevante foi encontrada neles.

Infelizmente, comparada com outras atividades também realizadas pelo projeto no decorrer do ano, essa contou com baixa quantidade de participantes devido à realização dos jogos internos da escola no mesmo período. Por conta disso, as turmas do 1º ano e do 9º ano do período vespertino precisaram ser reunidas. Ainda assim, no primeiro dia de aplicação, a atividade começou com a participação de oito alunos e foi concluída com apenas seis alunos, devido aos jogos da escola. No segundo dia, a atividade contou com menos alunos ainda (apenas quatro), durante o período matutino.

De início foi distribuído um *tablet* para cada aluno. Todos os aparelhos já possuíam o aplicativo do Geogebra instalado e o arquivo do jogo *Batalha dos Polígonos* já salvo. Em seguida, os bolsistas responsáveis pela atividade, explicaram as regras do jogo de forma detalhada para que não surgissem dúvidas durante a partida. Após a explicação das regras do jogo, foi fornecido um tempo para que os alunos se familiarizassem com o aplicativo e foram explicadas as funcionalidades dele: a função de cada botão, o significado das cores e das ferramentas, etc. Feito isso, os alunos estavam preparados para o jogo.

Os objetivos traçados para a aplicação desta atividade eram: explicitar as propriedades que caracterizam cada um dos polígonos utilizados na atividade; identificar a existência de dependência entre certos elementos constituintes de cada polígono e a área dos mesmos; induzir a fórmula de Pick a partir do preenchimento da Tabela 1, apresentada no final da seção anterior.

Os alunos apresentaram dificuldades de reconhecer alguns dos polígonos apenas pelo seu nome, em especial o losango e o triângulo retângulo. Foi necessária então a intervenção dos bolsistas, explicando o que caracterizava estas figuras. No caso do losango foi necessária a realização de desenhos no quadro, pois a descrição oral das características não foi suficiente.

Em relação a construção dos polígonos de modo que possuíssem as áreas dadas, os alunos não apresentaram grandes dificuldades. No entanto, notou-se que levaram em consideração a contagem de quadradinhos da malha, sem utilizar necessariamente os elementos que compõem as figuras para efetuarem o cálculo das áreas. Optou-se por dar liberdade ao aluno para que escolhesse a forma que utilizaria para encontrar as áreas desejadas.

Quanto ao jogo em si, foram feitas algumas observações para melhorar a reprodução do jogo. Um problema observado, foi que o aluno conseguia mover a malha, o que atrapalhava a jogada, pois isto resultava no movimento de todo o tabuleiro e modificava a posição de todos os objetos na construção. O problema já foi devidamente resolvido na versão que disponibilizamos na plataforma. Os alunos demonstraram grande envolvimento e empolgação enquanto jogavam.

Ao final da partida, os alunos foram orientados a preencher a Tabela 1 utilizando as quantidades de pontos da borda e do interior dos polígonos construídos por eles. A seguir, foi solicitado que tentassem obter os valores da última coluna (que já vinha preenchida), a partir dos valores registrados por eles. Foi necessária a intervenção dos bolsistas explicando que a primeira coluna preenchida por eles tinha como finalidade apenas a obtenção da coluna seguinte, não sendo necessária para o cálculo da área fornecida na última coluna. Mesmo com esta intervenção, nenhum dos alunos presentes foi capaz descrever, mesmo que oralmente o resultado da fórmula de Pick, apenas notaram que o valor da área presente na última coluna se aproximava da soma dos valores registrados nas duas colunas anteriores, mas nenhum deles chegou a argumentar que o resultado da soma era sempre uma unidade maior. Mesmo depois de várias indagações feitas pelos bolsistas tentando induzi-los a obterem o resultado sozinhos, foi necessário apresentar a fórmula de Pick aos alunos, a qual era, até então, desconhecida por todos. Um fator que pode explicar o fato de os alunos não terem chegado sozinhos ao resultado é a ansiedade para participação nos jogos escolares.

Apesar dos contratempos, acredita-se que os objetivos propostos pela atividade foram atingidos, mesmo que parcialmente, sendo preciso levar em conta o fato de que toda experiência que envolve atividades educacionais está sujeita a interferência de fatores diversos, os quais influenciam nos resultados da aplicação sem necessariamente invalidá-la.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ressaltamos que é importante que o leitor não confunda os objetivos deste trabalho de conclusão de curso com os objetivos propostos pela atividade *Batalha dos Polígonos e o Teorema de Pick* tratada nele. Embora a aplicação da atividade tenha ocorrido em uma escola da educação básica da rede estadual de ensino de Santarém – PA com alunos do 9º ano do ensino fundamental e 1º ano do ensino médio e esteja descrita em uma das seções deste trabalho, ressaltamos que a análise desta aplicação não faz parte dos parte dos objetivos deste trabalho.

Por tudo o que foi discutido até aqui é possível concluir que os objetivos propostos neste trabalho foram alcançados, ainda que os objetivos descritos para a aplicação da atividade tenham sidos atingidos apenas de forma parcial. Sabemos que não é o único fato para essa conclusão sobre a aplicação da atividade, mas acredita-se que os fatores externos a ela que ocorriam na escola, como o fato de que os alunos estavam participando dos jogos escolares no mesmo horário das atividades do Clubes de Matemática, possam ter influenciado para que a atividade não tenha alcançado todos os resultados esperados pois contribuiu diretamente para a falta de concentração gerando ansiedade para finalização desta. Uma análise feita para essa conclusão é que deveria ter sido feito um trabalho no primeiro momento sobre os conceitos de alguns polígonos para posteriormente ser aplicado o jogo com os questionamentos. É possível que o aluno sendo preparado anteriormente faça com que os objetivos da atividade sejam alcançados com mais facilidade.

Levando em consideração que este trabalho foi finalizado em meio a pandemia de COVID-19, que teve como consequência o ensino remoto, pretendo replicar essa atividade em um futuro próximo. O jogo *Batalha dos Polígonos* é reproduzido apenas de forma online e isso permite que seja utilizado nesta forma remota de ensino.

Outro fato importante de mencionar é a relação do Teorema de Pick com o jogo Batalha dos Polígonos. Deve-se destacar que o teorema pode ser utilizado para viabilizar uma estratégia de jogo na qual o jogador pode criar polígonos de mesma área minimizando a quantidade de pontos da borda e do interior.

Ainda durante a aplicação do jogo, surgiu um questionamento sobre as áreas dos polígonos que foram dadas como condição para a construção dos polígonos e já entregues preenchidas na tabela. Temos pontos favoráveis e contra sobre essa escolha. Primeiro que com as áreas determinadas o aluno consegue perceber que é possível criar polígonos de mesma área mas com tamanhos diferentes e perceber que se alterar o tamanho de algum elemento da figura sempre será necessário alterar de algum outro para retornar a área pedida, com a escolha livre isso não seria facilmente compreendido. Porém, tendo diferentes valores para as áreas amplia ainda mais a aplicação do teorema, mostrando sua função em uma quantidade maior de áreas.

É compreensível que para o professor da educação básica, planejar uma atividade é de certa forma desgastante devido ao tempo e trabalho. Com isso, o jogo dos polígonos vem como uma proposta para o ensino da geometria por ser de fácil acesso e sem precisar produzir materiais, sendo ainda possível reproduzi-lo no ensino remoto.

A atividade apresentada ainda precisa de melhorias em relação ao passo-a-passo da aplicação. É um planejamento futuro continuar o desenvolvimento dessa atividade de forma que os obstáculos com a reprodução do jogo nessa primeira aplicação sejam resolvidos e assim possa ser disponibilizada de forma completa para professores e alunos.

REFERÊNCIAS

LEITE, Bruno; GONÇALVES, D. ; LANDIM, E. ; CARVALHO, I.. Projeto Rede: Jogos na educação matemática. **Jogo dos polígonos: histórico e descrição.** Disponível em: https://docplayer.com.br/58949741-Projeto-rede-jogos-na-educacao-matematica-jogo-dos-poligonos-historico-e-descricao.html. Acesso em 21 jan. 2019.

BIANI, R. P. **Considerações sobre a geometria nos anos iniciais do ensino fundamental**. Ciências em Foco, Campinas, SP, v. 4, n. 1, 2013. Disponível em: https://econtents.bc.unicamp.br/inpec/index.php/cef/article/view/9195. Acesso em: 03 mar 2020.

MULLER, Maria Cândida; LORENZATO, Sérgio. **Geometria nos anos iniciais: sobre os conceitos de área e perímetro.** XIV Conferência interamericana de Educação Matemática. Chiapas, México. 2015. Disponível em: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/292/161. Acesso em 13 jun 2020.

JUNIOR, F. S. S.; MICENA, F. P. **Sugestões para Aplicação do Teorema de Pick na Educação Básica.** Universidade Federal de Alagoas. 11 Ago 2014. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v03a05-sugestoes-para-aplicacao-do-teorema.pdf. Acesso em: 18 fev 2019.

PIMENTEL, Jailson, 1971 - **O ensino de geometria por meio de construções geométricas**. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória/ES. 2013.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática: e outras histórias.** 6. ed. SBM, 2012. p. 1-206.

ATZ, Dafne. **Teorema de Pick e o estudo de área e perímetro no Geoplano online.** PPGEMat/UFRGS. RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação V. 13 Nº 2, dezembro, 2015.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática – Terceiro e Quarto ciclos do ensino fundamental.** Brasília. 1998.

KILHIAN, Kleber. O baricentro da mente. **A Fórmula de Pick e a Aproximação de PI.** 19 fev 2011. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2011/02/formula-de-pick-e-aproximacao-de-pi.html. Acesso em 04 jan 2021.

O'CONNOR, JJ.; ROBERTSON, EF. Arquivo de história da matemática. **Georg Alexander Pick**. Ago, 2015. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pick/. Acesso em: 22 dez 2020.

JUNIOR, Francisco Silvério da Silva. **Sobre o Cálculo de Áreas e o Teorema de Pick.** Dissertação –Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2013.

LORENZATO, Sérgio; VILA, Maria do Carmo. **Século XXI: qual matemática é recomendável?** A posição do "The Nacional council of supervisors of mathematics". Revista Zetetiké. Ano I. nº 1/1993.

PAVANELLO, Maria Regina. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências.** Revista Zetetiké. V. 1 n. 1/1993: dez/ jan. 06 dez 2009. Disponível em: https://doi.org/10.20396/zet.v1i1.8646822. Acesso em 12 fev 2021.

HERMES, J. D. V.; CUNHA, C. A. R. **O Teorema de Pick.** Dissertação – Profmat. Universidade Federal de São Carlos del-Rei (UFSJ), 2014. SBM.

TIGGEMANN, Iara Suzana; [et al.]. **Geoplanos e redes de pontos. –** Conexões e Educação Matemática. Belo Horizonte : Autêntica Editora,2013. Série o Professor de Matemática em Ação ; v. 4

MULLER, Maria Cândida; LORENZATO, Sérgio. **Percepção de docentes e futuros docentes dos anos iniciais sobre os conceitos de área e perímetro.** Rev. EDUCA, Porto Velho (RO), v.3, n.6, pp. 151-173, 2016.

DA COSTA, Renata Abreu. **Teorema de Pick: uma abordagem para o cálculo de áreas de polígonos simples.** Dissertação – Universidade Federal do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF). Campo dos Goytacazes – RJ. Maio de 2015.

MARCHI, Felipe; [et al]. **Material didático sobre o Teorema de Pick.** UNICAMP, 2017. Youtube. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/njmqxmwq. Acesso em 12 jan 2019

SANTOS, Brenda; RODRIGUES, Aroldo. **Jogo Batalha dos Polígonos.** *Geogebra*. Março, 2021. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/njmqxmwq.

Apêndice A – Regras do jogo "Batalha dos polígonos" (Inspirado no jogo de Batalha naval)

O jogo está disponível em https://www.geogebra.org/m/njmqxmwq e pode ser acessado por qualquer aparelho com acesso à internet. Também pode ser produzido com materiais pedagógicos se baseando nos tabuleiros do arquivo.

Objetivo: Descobrir o máximo de polígonos do adversário.

Recomendações:

a) Os polígonos devem ter mais que um quadradinho de área.

b) Entre os polígonos construídos é obrigatório ter pelo menos um quadradinho de distância entre eles, ou seja, não devem ter polígonos unidos em um mesmo ponto.

Regras do jogo:

1- O jogo pode acontecer entre dois jogadores ou entre dois grupos.

2- Você receberá dois tabuleiros: o tabuleiro 1 é de defesa e o tabuleiro 2 é o de ataque.

3- Para movimentar os pontos basta clicar em qual marcador você deseja que vai ser liberado um ponto.

4- No tabuleiro 1 desenhe quatro polígonos diferentes (quadriláteros, pentágonos, hexágonos, entre outros). Lembre-se de não dar dicas e nem permitir que o seu adversário veja as construções. Aproveite a criatividade para dificultar a busca do seu oponente.

5- Na sua jogada, você deverá indicar a coordenada (Letra e número) que deseja acertar. O seu oponente deverá informar em qual local foi acertado. Dependendo no local, você marcará no tabuleiro 2 a cor referente. Azul – Tiro na água; Vermelho: Vértice do polígono; Verde – Interior do polígono; Amarelo – Borda do polígono.

6- Na jogada do seu adversário, ele indicará a coordenada desejada e você informará o local acertado. E marcará com o ponto preto no tabuleiro 1 a jogada.

7- É obrigatório você informar quanto todos os vértices de uma figura forem atingidos. Quando ocorrer, o adversário deverá dizer o nome do polígono. E em caso de acerto, ficará em vantagem.

8- Vence o participante que acertar mais polígonos.

9- Em caso de empate, será adotado a contagem de pontos: se for acertado na borda da figura, contará 2 pontos. Os vértices também contarão 2 pontos. Os lances que acertarem no interior da figura contarão 1 ponto.