



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ – UFOPA**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO**  
**PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**LICENCIATURA INTEGRADA EM MATEMÁTICA E FÍSICA**

**ESTUDO EXPLORATÓRIO SOBRE DIFICULDADES DE ESTUDANTES DO  
CURSO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO  
PARÁ NA COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO**

Santarém – PA

2020

**ESTUDO EXPLORATÓRIO SOBRE DIFICULDADES DE ESTUDANTES DO  
CURSO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO  
PARÁ NA COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO**

Monografia apresentada ao Programa de Ciências Exatas, vinculado ao Instituto de Ciências da Educação (ICED) da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura Integrada em Matemática e Física.

Orientador: Prof. Dr. Glauco Cohen Ferreira Pantoja

Santarém – PA

2020

**ESTUDO EXPLORATÓRIO SOBRE DIFICULDADES DE ESTUDANTES DO  
CURSO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO  
PARÁ NA COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO**

Monografia submetida ao Programa de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura Integrada em Matemática e Física.

Aprovada por:

*Prof. Dr. Glauco Cohen Ferreira Pantoja*  
Orientador – UFOPA

*Prof. Me. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues*  
Examinador – UFOPA

*Prof. Dr. Mário Tanaka Filho*  
Examinador – UFOPA

Santarém – PA

2020

## **DEDICATÓRIA**

À minha irmã, por sempre me apoiar e ser fonte de incentivo nesta caminhada da vida.

À minha mãe, por ser uma das razões na minha busca por dias melhores.

## AGRADECIMENTOS

Aos trabalhadores brasileiros pagadores de impostos que, de forma indireta, financiaram a ocupação de uma cadeira, a minha cadeira, em uma universidade pública. Os meus sinceros agradecimentos.

Ao meu professor orientador, Glauco, que fez jus ao seu papel pacientemente.

Às professoras do Programa, que sempre foram minha fonte de inspiração na condição de mulheres docentes de exatas, em especial Nilzilene e Lilian.

A todos os professores que lecionaram para minha turma, em especial Professor Mancuso, que passou o crivo, e ao professor Aroldo, que me acompanhou desde o princípio.

À minha irmã, que sempre apoiou os meus sonhos.

À minha vó, pela inspiração familiar como docente.

À minha tia Socorro, que me oportunizou garantindo as condições básicas para estudar durante o cursinho.

Ao Daniel, pelo amigo presente que foi nos momentos bons e ruins, durante essa caminhada que foi a graduação. Agradeço também aos pais do Daniel, que me acolheram em sua família, em sua casa.

Às minhas amigas Fabiana, Jaqueline, Mayse, Néia, pelo grande apoio que me deram e pelo exemplo de mulheres que são.

Aos meus amigos Douglas, Eduardo e TC pela companhia e pelas risadas.

A dona Rosana, que me recebeu em sua casa, casa essa que fiz morada nos últimos anos da graduação.

*“Se você entende como o universo funciona, de certa forma pode controlá-lo.”*

Minha Breve História – Stephen Hawking

## RESUMO

Este trabalho consiste em um estudo realizado com estudantes da Universidade Federal do Oeste do Pará, cujo objetivo foi mapear dificuldades enfrentadas na compreensão do conceito de função. Foram analisados registros de dois grupos de estudantes, o primeiro inclui alunos de uma turma de licenciatura de biologia e o segundo é composto por estudantes de bacharelado em biologia e engenharia sanitária. A metodologia utilizada pautou-se na análise de conteúdo, que é um método usado também em análise qualitativa de dados, e baseou-se na teoria dos campos conceituais, uma teoria cognitivista do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem. Os principais obstáculos encontrados estavam associados à ausência de conhecimentos matemáticos, explicitação de elementos e propriedades matemáticas e suas relações, redução da resolução de uma situação a um algoritmo, e dificuldade em estabelecer relação entre diferentes formas de representação de uma situação envolvendo o conceito.

Palavras-chave: Campos Conceituais, Função, Dificuldades.

## **ABSTRACT**

This work consists of a study conducted with students from the Universidade Federal do Oeste do Pará, whose objective was to map difficulties faced in understanding the concept of function. Records from two groups of students were analyzed, the first being students from a biology undergraduate class and the second is comprised of bachelor students in biology and health engineering. The methodology used was based on content analysis, a method also used in qualitative data analysis, and was based on the theory of conceptual fields, a cognitive theory of the concept. The main obstacles encountered were associated with the absence of mathematical knowledge, explanation of elements and mathematical properties and their relations, reduction of the resolution of a situation to an algorithm, and difficulty in establishing a relationship between different forms of representation of a situation involving the concept.

Word-Key: Conceptual Fields, Function, Difficulties.



## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	6
2. REVISÃO DA LITERATURA.....	8
3. REFERENCIAL TEORICO .....	9
4. METODOLOGIA.....	13
4.1 Análise de Conteúdo.....	13
4.2 Desenvolvimento do Estudo.....	16
4.2.1 Caracterização do Grupo A .....	17
4.2.2 Caracterização do Grupo B .....	17
5. RESULTADOS .....	19
5.1 Grupo A.....	22
5.1.1 Determinação do conjunto resultante da relação entre dois conjuntos .....	23
5.1.2 Representação de relações em diagramas .....	25
5.1.3 Representações que fazem alusão ao conceito função.....	27
5.2 Grupo B.....	29
6. CONCLUSÃO/DISCUSSÃO .....	35
7. REFERÊNCIAS .....	35
8. APÊNDICE.....	35
APÊNDICE A: Problemas propostos para o grupo B.....	35

## 1. INTRODUÇÃO

O conceito matemático função está presente no currículo de quase todas as séries escolares. No ensino fundamental, é frequentemente visto de maneira implícita. Um exemplo disso pode ser encontrado na resolução de problemas que envolvem variação proporcional direta entre duas grandezas. No ensino médio, sua utilização conceitual é precisamente mais direta, já que se fala explicitamente em função, seus tipos, atributos e comportamento.

No ensino superior, este conceito é revisitado e utilizado por estudantes de diferentes áreas, como ciências econômicas, biologia, matemática, medicina, geociências etc. Nesta fase, a crença sustentada por uma quantidade razoável de professores é que esses estudantes já compreendam o conceito, justamente por pressuporem que este conteúdo tenha sido estudado no ensino básico, e acabam inconscientemente não levando em consideração as dificuldades enfrentadas por seus alunos. Por outro lado, parte dos estudantes têm uma ideia limitada do conceito, que envolve as crenças de que função é apenas uma fórmula e de que pode ser manipulada algébrica ou numericamente sem a necessidade de atribuição de qualquer significado aos elementos constituintes de uma situação (Palis, 2013).

Saber quais os obstáculos que impedem o estudante de construir, executar/concluir a solução de um problema que envolve este conceito é importante principalmente para o professor, porque identificando tais dificuldades é possível, para este, delinear estratégias de ensino que facilitem a compreensão do conceito. Além disso, torna-se possível reconhecer estes obstáculos epistemológicos no campo conceitual e ajudar o estudante a superá-los. Isto posto, indicamos que este trabalho tem como objetivo mapear estas dificuldades e é neste sentido que orientamos o estudo: para entender as continuidades e rupturas entre os conhecimentos associados ao conceito em questão (Vergnaud, 1993).

A teoria dos campos conceituais, elaborada por Gérard Vergnaud, tem como objetivo fornecer uma estrutura às pesquisas sobre atividades cognitivas complexas, principalmente no que diz respeito às aprendizagens científicas e técnicas (Vergnaud, 1993). Para Vergnaud, a chave da teoria é considerar a ação do sujeito em situação e a sua organização. É uma teoria pertinente ao estudo, pois queremos identificar os entraves presentes na compreensão de um conceito.

Deste modo, o estudo consistiu na análise qualitativa de registros de estudantes vinculados à Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA. Os participantes da investigação estão classificados em dois grupos, A e B. O que difere um grupo do outro é o tipo de fonte da coleta de dados: no grupo A temos a utilização de tarefas de aula da disciplina de Cálculo I, ministrada na

turma de Licenciatura em Ciências Biológicas; enquanto que no B, a fonte dos dados são os registros da aplicação de uma tarefa com estudantes pertencentes aos cursos de bacharelado em biologia, licenciatura em ciências biológicas, e de engenharia sanitária. Dito isto, apresentamos a seguinte pergunta de pesquisa: “quais as principais dificuldades de estudantes vinculados à UFOPA dos cursos de ciências biológicas, engenharia sanitária e bacharelado em biologia, na aprendizagem do conceito de função?”.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

A revisão da literatura consistiu basicamente na pesquisa de estudos compatíveis com o objetivo deste trabalho. Através da plataforma Sucupira, foram realizadas buscas de periódicos da área de educação matemática. Feita a seleção das revistas, a procura pautou-se em pesquisas que abordavam as dificuldades encontradas por estudantes em relação ao conceito *função*. A seguir, são apresentados os achados da literatura.

Estudos de Neves e Resende (2016) evidenciam que embora os alunos envolvidos na pesquisa soubessem explicitar verbalmente a relação entre as grandezas em uma determinada situação, as dificuldades estavam associadas à representação algébrica e à linguagem simbólica escrita para expressar a função.

Nessa mesma linha de pensamento, Nunes e Santana (2017) destacam que a origem de concepções errôneas ligadas ao conceito *função* eram de ordens procedimentais, conceituais e de princípios matemáticos. As principais dificuldades enfrentadas pelos participantes estavam associadas à:

- interpretação de gráficos de funções;
- transformação da forma gráfica para a algébrica;
- determinação dos conjuntos envolvidos;
- concepção limitada ao classificar se uma determinada relação é função;
- identificação e relação de elementos das questões de forma adequada.

Além de existir entraves ligados à conversão das diferentes linguagens utilizadas para expressar uma função, há também obstáculos para determinar as variáveis dependentes e independentes, bem como interpretar relações funcionais (Palis, 2013; Andrade & Saraiva, 2012). Operações realizadas sobre funções já existentes, que implicam em transformação na representação gráfica dessas, tais como, reflexão, translação, contração/dilatação vertical ou horizontalmente, exige um esforço mais abstrato do ponto de vista matemático. Daher & Anabousy (2015), que realizaram uma pesquisa fazendo o uso do Geogebra, notaram dificuldades associadas à covariação das variáveis dependentes e independentes durante as transformações funcionais, e indicam que o que poderia estar motivando tal obstáculo seria a incapacidade de relacionar as representações algébrica e gráfica.

Percebe-se certo consenso entre os pesquisadores quanto às dificuldades enfrentadas para representar o conceito, identificar e operacionalizar os elementos que compõem uma determinada situação.

### 3. REFERENCIAL TEÓRICO

A teoria utilizada neste trabalho é cognitivista e busca descrever o real. Vergnaud (1993, p. 1) desenvolveu a teoria dos campos conceituais com a finalidade de compreender, do ponto de vista conceitual, continuidades e rupturas entre conhecimentos. Esse sistema teórico fornece ao professor e/ou pesquisador da área ferramentas de estudo sobre atividades cognitivas complexas do processo de conceitualização tangentes à aprendizagem de conteúdo científico escolar e acadêmico.

Para Vergnaud (1993), se nos interessamos pelo ensino ou a aprendizagem de um conceito, não podemos reduzi-lo à sua definição, isto é, o conceito não pode ser explicado ou descrito atribuindo-lhe sentido único. Segundo ele, para que um conceito faça sentido para uma criança, esta deve ser submetida constantemente a diferentes situações. Neste contexto, é importante destacar que a linguagem e o simbolismo são fundamentais para a conceitualização, uma característica presente nas ideias de Vygotsky. Se queremos ter uma noção do conhecimento em adaptação, devemos dar um lugar especial na forma em que a linguagem e o simbolismo assumem na ação do sujeito.

Vergnaud, divide as situações em duas classes e cada uma delas está diretamente relacionada a atributos do sujeito em situação. Há classes em que o sujeito tem competências para lidar com uma situação, e há aquelas em que o sujeito não dispõe das competências e eventualmente ele necessita de mais tempo, disposição, esforço, para resolver a situação. O conceito de esquema é utilizado nas duas classes, no entanto apresenta-se de maneira distinta. Vergnaud explica que:

*No primeiro caso, observa-se, para uma mesma classe de situações, comportamentos amplamente automatizados, organizados por um só esquema: No segundo caso, observa-se, a sucessiva utilização de vários esquemas, que podem entrar em competição que, para atingir a solução desejada, devem ser acomodados, descombinados e recombinaados. Este processo é necessariamente acompanhado por descobertas. (VERGNAUD, 1993)*

Desta maneira, levando em consideração estas diferenças, Vergnaud (1993) define **esquema** como sendo a **organização invariante do comportamento** para uma classe de situações dada. E é esta a chave para se estudar os conhecimentos-em-ação do sujeito. Neste processo, a automatização é de uma certa forma uma evidência de esquemas manifestados pelo estudante, mas isso não quer dizer que uma série de decisões conscientes não seja um esquema. Observa-se assim, que algoritmos são esquemas, porém a recíproca não é necessariamente verdadeira, pois os algoritmos passam por um processo iterativo um número finito de vezes e resultam em uma resposta (coerente ou não). Já os esquemas não, porque existe uma certa instabilidade em sua

estrutura. Se um esquema não funciona em uma determinada situação, deve ser modificado ou substituído por outro. Há muito de implícito nesse tipo de estrutura cognitiva, e são essas conceitualizações implícitas que constituem suas bases.

O conhecimento está organizado em sua forma predicativa, relacionada ao saber explicitar os objetos e suas propriedades, enquanto a fase operatória do conhecimento é responsável pelo saber fazer. O autor assume que uma teoria completa dos processos de aprendizagem e desenvolvimento cognitivo deve dar conta dessas duas instâncias simultaneamente (Vergnaud, 1993).

Vergnaud (1993) admite que o funcionamento cognitivo se baseia no repertório dos esquemas disponíveis, portanto, a ação em situação depende deles. A base conceitual (de conteúdo), implícita e explícita, está presente nos esquemas e é carregada, mais precisamente pelos invariantes operatórios, os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação. Os teoremas-em-ação são proposições tomadas como verdadeiras sobre o real e os conceitos-em-ação são categorias julgadas pertinentes sobre a realidade.

Os esquemas são constituídos por invariantes operatórios, inferências, regras de ação e de antecipações. Esta organização gera uma série de ações com um objetivo, e permite produzir diferentes sequências de ações, bem como tomadas de informações em função dos valores das variáveis e parâmetros da situação. Existe, portanto, uma dialética entre o conceito-em-ação e teorema-em-ação (Vergnaud, 1993).

Os invariantes não são de um tipo lógico único: nem um conceito-em-ação é um conceito, nem um teorema em ação é um teorema. Teorema e conceito são explícitos, os invariantes operatórios são todos os conhecimentos implícitos e explícitos contidos nos esquemas. Deste modo, denomina-se conceito como um conjunto de:

- Situações que fazem referência ao conceito – são as situações que dão sentido ao conceito.
- Invariantes Operatórios – todo conhecimento-em-ação contido nos esquemas associados ao conceito.
- Representações – formas de linguagem utilizadas para comunicar e descrever propriedades, situações, procedimentos de tratamento.

Campo conceitual é um conjunto de situações que requer um conceito principal. Por exemplo o conjunto dos campos conceituais das estruturas aditivas é o conjunto de situações, representações, invariantes operatórios, operações de pensamento que requerem uma subtração ou uma adição, ou ainda a combinação das duas operações (Vergnaud, 1993). Nesta mesma veia, o

campo conceitual do conceito de função deve incluir um conjunto análogo contendo aspectos que demandem o conceito de função em seu bojo.

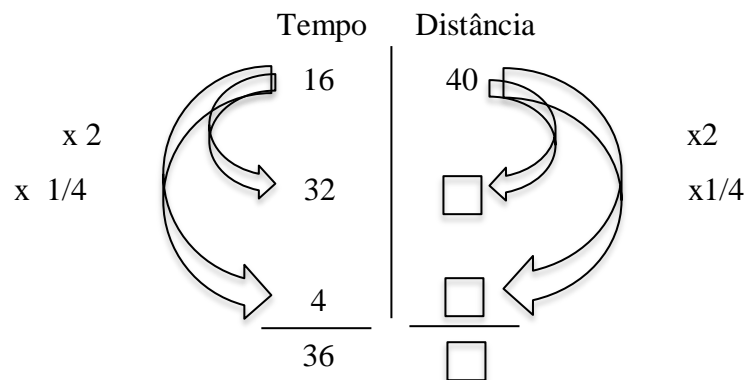
Considere as análises do problema abaixo proposto por Vergnaud( 1998) para elucidar os conceitos de esquema, teorema-em-ação e conceito-em-ação.

Um trem está operando a uma velocidade constante e alta. leva 16 minutos para ir do eixo ao Berlof. a distância entre o eixo e o berlof é de 40 km. De Berlof a Cadillac, são 36 minutos. qual a distância entre Berlof e Cadillac?

Uma forma de resolução dada a situação acima:

Estudante A:  $40 \times 2 = 80$  ;  $80 + 10 = 90$

O estudante A decompôs os 36 minutos em 2 tempos resultando em 16 minutos, acrescenta-se 4 minutos por ser  $\frac{1}{4}$  de 16 minutos. Deste modo, a distância corresponde a 2 tempos de 40km mais  $\frac{1}{4}$  de 40 km . Este procedimento pode ser escrito por uma sequência de expressões equivalentes:



$$f(36) = f\left(2 * 16 + \frac{1}{4} * 16\right) = 2f(16) + \frac{1}{4}f(16) = 2 * 40 + \frac{1}{4} * 40 = 80 + 10 = 90$$

A partir disso podemos ver o teorema, expresso abaixo:

$$f\left(2t + \frac{1}{4}t\right) = 2f(t) + \frac{1}{4}f(t)$$

No caso mais geral, temos:

$$f(\alpha t + \beta t) = \alpha f(t) + \beta f(t)$$

Onde  $f(t)$  corresponde a distância percorrida no tempo  $t$ . Nota-se que o estudante A atribui valores simples, ao fazer uso implicitamente do teorema de combinação linear. Para Vergnaud, não há melhor maneira de analisar o procedimento.



## 4. METODOLOGIA

Discutimos a metodologia em duas partes: a primeira aborda a descrição das técnicas e método de análise de dados conhecida por análise de conteúdo; a segunda descreve as formas de coletas de dados e caracteriza os grupos nos quais a intervenção foi desenvolvida. Intitulamos a primeira de análise de conteúdo e a segunda de desenvolvimento do estudo.

### 4.1 ANÁLISE DE CONTEÚDO

A pesquisa em educação é uma área muito fértil para a coleta de dados, no entanto, assume um nível de complexidade elevado no que diz respeito ao seu tratamento, análise e interpretação de seus resultados. Desta maneira, optou-se por utilizar a análise de conteúdo, por entender-se que este método está de acordo com os objetivos deste trabalho, qual seja, o de identificar invariantes operatórios associados ao conceito de função.

Moraes (1999) aborda de maneira clara duas opções direcionadas à análise de dados. A primeira versa sobre o tratamento de dados a partir de uma perspectiva quantitativa, na qual há o domínio da dedução verificativa, em que a teoria precede a análise, e cujo objetivo é o teste, a verificação desta teoria. Estamos falando de uma investigação objetiva, quantificada, que toma como base números para fazer inferências com base em categorias *a priori*. Diferentemente do método de dedução verificativa, Moraes (1999) destaca o procedimento de indução construtiva, no qual a teoria emerge da análise, e que se encontra em construção e reconstrução durante todo o processo. A subjetividade, neste último caso, é predominante e busca uma reflexão mais refinada para a compreensão dos fenômenos através da indução. A análise de conteúdo pode ser utilizada a partir destes dois prismas, no entanto há de se pensar em quais implicações seu uso pode gerar.

Vale ressaltar que este método tem origem no campo das ciências sociais, e foi desenvolvido por Laurence Bardin, uma psicóloga francesa que realizou pesquisas em psicossociologia e comunicação de massas. Moraes (1999) define análise de conteúdo como sendo:

*uma metodologia de pesquisa voltada a análise de dados qualitativos, e tem como objetivo descrever e interpretar o conteúdo contido nestes dados, sejam eles, documentos ou textos. Este método permite realizar uma descrição sistemática do conteúdo contido nos dados, de forma a atingir uma compreensão dos significados.*

A fonte de coleta de informações da metodologia baseia-se na comunicação verbal ou não-verbal, como cartas, cartazes, jornais, revistas, informes, livros, relatos autobiográficos, discos, gravações, entrevistas, diários pessoais, filmes, fotografias, vídeos etc. (Moraes, 1999). Estes dados devem estar na íntegra, portanto, não modificados para serem, então, submetidos ao

processo de análise. Neste caso, usaremos registros de tarefas, o que classifica os registros como decorrentes de comunicação verbal.

Algo muito importante que deve ser levado em conta neste processo é o contexto da comunicação: quem emite e quem recebe a mensagem; as diferentes formas de codificação e transmissão da mensagem; a existência de múltiplos significados. Por conta deste contexto de comunicação, existe a possibilidade de múltiplas análises para compreender os dados. Sabendo disso, as questões de objetivos definidas para esta análise são: para dizer o que? de que modo? E apresentam as seguintes características (Moraes, 1999):

*Tabela 1: Quadro expressando objetivos da análise de conteúdo (Moraes, 1999)*

Para dizer o que?	É o estudo cujo foco é a mensagem, o seu valor informacional, as palavras, argumentos, e ideias nela expressos.
De que modo?	o pesquisador estará voltado à forma como a comunicação se processa, seus códigos, seu estilo, a estrutura da linguagem e outras características do meio pelo qual a mensagem é transmitida.

Após respondermos estas questões, passamos para o próximo passo, que consiste na descrição das etapas adotadas na metodologia de análise de conteúdo. Estas etapas são definidas a seguir:

- **preparação das informações** – identificação das diferentes informações contidas nos registros para posterior codificação que tem como fim facilitar o acesso do pesquisador a aquela informação já vista;
- **unitarização** – envolve definição das unidades de análise, de modo que estas apresentem significado em si mesmas e possam ser isoladas uma a uma para serem, então, submetidas à categorização;
- **categorização** – agrupamento das informações com características comuns seguindo determinadas regras (homogeneidade, pertinência, exclusividade, exaustividade e consistência) para sintetizar a comunicação;
- **descrição** – comunicação dos resultados, detalhe das características das categorias apresentando os significados contidos nos dados;
- **interpretação** – análise que transcende a compreensão das categorias (Moraes, 1999).

A preparação das informações é a fase na qual é realizada uma leitura flutuante das informações. Este processo inicial inclui a identificação dos dados pertinentes ao estudo. Deste modo, o critério de seleção para determinar se um elemento pertence ou não ao conjunto de dados para a realização do estudo, tem que estar associado ao nível de conformidade que esses documentos podem ter com os objetivos de pesquisa. É sempre se perguntar se documento A ou

B, contém dados em potencial para alcançar os objetivos propostos da investigação. Durante esta triagem, criam-se códigos para identificar os dados, cuja finalidade é facilitar a localização dele.

A unitarização é uma etapa que requer uma releitura dos documentos selecionados na fase anterior para determinar as unidades de análise, ou seja, é a fase em que são estabelecidos elementos dotados de significados. Cada elemento ou unidade possui característica própria e única, por esse motivo devem estar isoladas umas das outras. Esta etapa exige um processo de retomada aos documentos, elaboração e reelaboração das unidades, passando por ajustes e reajustes. As unidades de análises podem ser representadas tanto por uma palavra, frase ou expressão, desde que tenham um significado em si mesmas. Durante este processo, há também o que Moraes (1999) chama de unidade de contexto, que resulta da integração dos significados de uma determinada informação ao seu cenário original, uma vez que na definição de uma unidade de análise, parte da informação é naturalmente desconsiderada.

A categorização consiste no agrupamento de dados com características comuns, e assim como na fase anterior esta deve ser feita de acordo com os objetivos e com o problema do estudo. Cada categoria pode fundamentar-se no critério de caráter: semântico, que diz respeito ao significado das palavras, de um modo mais geral ao significado da linguagem; sintático, em que as categorias podem ser definidas a partir de uma classe gramatical; léxico, que reúne todas as palavras e seus sentidos; e de caráter expressivo, que caracteriza-se pelos problemas de linguagem (Moraes, 1999).

A fase de categorização tem como finalidade compactar os dados, de modo a sintetizar a comunicação, representando os significados ali presentes. É um processo longo e exaustivo, pois também adota critérios para sua construção, como pertinência, exaustividade, homogeneidade, exclusividade e consistência.

A pertinência reside no julgamento de se uma categoria é adequada ou válida, se está em concordância com os objetivos da análise, com a natureza do material analisado, com a questão problema e fundamentação teórica do estudo. Sua pertinência relaciona-se com o quão significativo o conteúdo analisado é, frente ao problema do estudo. A exaustividade é o critério do qual decorre a ideia de que todo conteúdo significativo deve pertencer a uma categoria, ou seja, todas as unidades de análise devem ser classificadas. A homogeneidade é uma característica que destaca a uniformidade do conteúdo de uma categoria. Pode-se dizer que uma categoria é homogênea, se todo o conteúdo de análise classificado está em conformidade se vista em uma única dimensão de análise. A exclusividade é um critério para a construção de uma categoria que se relaciona ao fato de o conteúdo pertencer somente a uma categoria. Uma vez definida a categoria

de um determinado elemento de análise, este não pode se enquadrar em nenhuma outra categoria. A consistência diz respeito à consolidação dos significados das categorias ao longo do tempo.

Na descrição, é realizada uma síntese de cada categoria e são apresentados os significados presentes em cada unidade de análise. Este é o processo em que há a comunicação dos dados organizados em categorias com os seus significados e no qual se faz um delineamento das características de cada grupo. Para um estudo qualitativo, esta descrição pode ser apresentada por meio de um texto síntese, enquanto na dimensão de um estudo quantitativo esta fase é mostrada a partir de gráficos e tabelas.

A interpretação é a fase caracterizada pela compreensão que transcende os significados apenas descritos anteriormente. Há um dimensionamento maior e aprofundado do conteúdo encontrado, pois é neste ponto do trabalho que é feita uma reflexão em torno dos resultados do estudo sob uma perspectiva do referencial teórico utilizado na pesquisa ou ainda de uma teoria que pode emergir dentro da própria pesquisa.

## **4.2 DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO**

Neste trabalho, a metodologia utilizada para descrever e interpretar o conteúdo dos registros, tomando como referencial teórico de análise a teoria dos campos conceituais, conduz a questões norteadoras, como:

- Quais são os invariantes operatórios contidos nos esquemas dos estudantes diante de uma situação que envolve o conceito de função?
- Quais os significados presentes em suas representações ao fazer referência e/ou operacionalizar o conceito de função tanto de maneira explícita como de maneira implícita?
- Como as formas de representações do conceito em questão, e os significados produzidos por elas se relacionam?

Estes pontos podem evidenciar as dificuldades encontradas pelos estudantes na compreensão do conceito de função e, portanto, fazer um mapeamento sistemático destes obstáculos.

O estudo foi realizado com dois grupos e com formas de coleta de dados distintas: os registros de tarefas de uma turma de biologia, pois houve o acompanhamento deste grupo de estudantes durante toda a disciplina de cálculo; e a aplicação de uma atividade com estudantes de outros cursos de ciências biológicas. Aqui vamos nomear esses grupos como grupo A e grupo B. Abaixo encontram-se a caracterização destes grupos.

#### **4.2.1 Caracterização do grupo A**

O grupo A esteve composto por estudantes de primeiro semestre do curso de licenciatura em ciências biológicas. Nesta turma, foi ministrada a disciplina de cálculo I, componente curricular obrigatório, e a fonte de dados foi obtida através dos registros de tarefas realizadas, em grupo, em sala de aula.

A disciplina de cálculo I, contemplava conteúdos que iam de matemática básica ao estudo de funções, limites, derivadas e integral. O componente curricular foi ofertado para estudantes do primeiro período do curso de licenciatura em ciências biológicas. É importante dar destaque a este fato, pois os estudantes em sala de aula relatavam em conversas que não esperavam estudar tópicos de matemática em seu curso.

Durante o semestre, o docente responsável pela disciplina dividiu as aulas em dois momentos: o primeiro, destinado para desenvolvimento teórico do conteúdo programático; e o segundo momento era reservado a resolução de tarefas em grupo sob a orientação do professor. A cada dia de aula ocorriam estas atividades, e foi dessa maneira que os registros destes estudantes puderam ser acessados. Foram analisadas desde a tarefa inicial, denominada relações, até a avaliação somativa, intitulada funções. Neste intervalo, foram estudados conjuntos, relações, funções, tipos de funções.

#### **4.2.2 Caracterização do grupo B**

Foram convidados estudantes de cursos vinculados ao Instituto de Ciência e Tecnologia das Águas da UFOPA (ICTA) e do Instituto de Ciências da Educação (ICED) para participar do estudo. No total, dez alunos aceitaram voluntariamente colaborar com a atividade proposta, que consistia na aplicação de uma tarefa com três situações envolvendo o conceito de função. Desses dez estudantes, apenas cinco participaram de entrevistas.

Foram realizadas visitas em turmas do ICTA a fim de convidar estudantes que pudessem participar voluntariamente da aplicação de uma tarefa. Além desses alunos, o convite foi feito para os integrantes do grupo A. No total, dez estudantes se disponibilizaram a colaborar com a atividade, sendo eles: seis estudantes da licenciatura em ciências biológicas da turma 2018 (que também pertencem ao grupo A), nomeados aqui com codinomes como Fernanda, Geraldo, Nardiê, Alice, Vanessa, Denis; três do curso de bacharelado em biologia, a saber, Emanuele (turma de 2015), Lucas (turma de 2013), Poliana (turma de 2015); e uma aluna do curso de engenharia sanitária, Renata (turma de 2015). Todos cursaram disciplinas que versavam sobre o conceito função, seja em uma disciplina de matemática elementar, cálculo I ou estatística. Em primeira instância, o contato inicial com os participantes foi para levantar informações pertinentes à

atividade à qual seriam submetidos. Nesta etapa, fez-se: uma explicação do que se tratava o estudo, requisição de disponibilidade de horário, local e data para participação. Em um momento posterior, estes estudantes analisaram e responderam de forma escrita a três situações problemas contidas em uma tarefa.

Seguindo a metodologia adotada para o desenvolvimento deste trabalho, apresentamos os resultados na seção seguinte. Nessa fase, organizamos as informações coletadas durante o estudo e posteriormente iniciamos o processo de comunicação destas informações.

## 5. RESULTADOS

A partir dos registros, pudemos perceber obstáculos de ordem conceitual e operacional na compreensão do conceito de função. Obstáculos de ordem conceitual correspondem ao conjunto de concepções alternativas àquelas necessárias para o sujeito lidar de maneira cientificamente adequada com uma determinada classe de situações. Desta forma, quando as concepções dos estudantes se apresentavam de forma destoadada do conhecimento científico, eram entendidas como obstáculos, haja vista que o objetivo do ensino é facilitar a construção de conhecimento cientificamente aceito.

As representações dos estudantes foram base para esse estudo, pois esse conjunto, como parte integrante da terna proposta por Vergnaud, é o meio pelo qual os sujeitos se comunicam e descrevem procedimentos de análise, as situações, e propriedades. Dividimos a exposição dos resultados em três partes: a classificação de situações envolvendo o conceito de função; resultados para o grupo A, e resultados para o grupo B.

### 5.1. Classificação de situações envolvendo o conceito de função

Dividimos as classes de situações envolvendo o conceito de função em três tipos: determinação do conjunto resultante da relação entre dois conjuntos ( $S_1$ ); representação de relações em diagramas ( $S_2$ ), e representações que fazem referência indireta ao conceito de função ( $S_3$ ). Como dito anteriormente, as situações dão sentido ao conceito, pois cumprem o papel de referente real desse. Essa comunicação é feita através dos elementos pertinentes ao problema, podendo eles serem relevantes ou não à análise. Antes de prosseguir na investigação de como os estudantes mobilizam seus conhecimentos para resolver situações, é necessário descrevê-las.

#### 5.1.1. Determinação do conjunto resultante da relação entre dois conjuntos ( $S_1$ <sup>1</sup>)

As situações associadas a essa classe requerem operações de pensamento que retratam a relação entre dois conjuntos, de tal maneira que um terceiro conjunto possa ser determinado, uma vez definido o tipo de relação. Os objetos presentes nessa classe de situações envolvem os conjuntos de partida e chegada, os elementos que os compõem, e como esta relação está definida (equação). A exemplo, apresentamos a situação a seguir:

---

<sup>1</sup> Usaremos aqui  $S_i$  como um código para fazer referência a *classe de situações*. Por exemplo,  $S_1$  corresponde ao conjunto de situações que possui determinado atributo.

**Q1.** Considere os conjuntos  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  e  $B = \{2, 4, 9, 10\}$ . Seja  $R$  a relação entre  $A$  e  $B$ , tal que  $y = x^2$ . Determine o conjunto resultante desta relação e a represente no plano cartesiano.

O problema acima faz referência ao conceito de relação entre dois conjuntos. O que se solicita na questão é apenas o conjunto que represente essa relação, dentro das condições estabelecidas. O objetivo da questão procura saber se os alunos conseguem relacionar esses dois conjuntos através de uma lei de formação dada por uma expressão algébrica. A questão a seguir encontra-se nos mesmos moldes.

**Q2.** Considere o conjunto  $M = \{\text{raposa, onça, gato, coelho}\}$ ,  $A = \{\text{sabiá, galinha, avestruz}\}$  e a relação  $R$  tal que  $x$  é predador de  $y$ . Mostre que a relação é um subconjunto do produto cartesiano e a represente usando um diagrama de Euler-Venn.

Apesar dos elementos que compõem os conjuntos de partida e chegada serem distintos, o objetivo da questão continua a ser o mesmo, que é determinar o conjunto que representa a relação. Os objetos aqui presentes fazem referência ao conceito de relação. Embora a relação do segundo caso esteja definida por uma condição, ela apresenta conhecimentos de matemática e de biologia, pois deve-se determinar o conjunto cujos elementos são classificados a partir de componentes da cadeia alimentar. Deste modo, para determinar o conjunto resultante, temos que:

- identificar os conjuntos;
- identificar a maneira como se relacionam;
- operacionalizar as informações;
- determinar o conjunto resultante da relação.

Esses passos não precisam seguir uma ordem pré-determinada, mas isto tende a acontecer depois que a conceitualização se torna sistemática e o estudante desenvolve um esquema. No entanto, quando a conceitualização ainda se encontra de forma contingente, o estudante tende a articular esquemas prévios ou construir um novo para se virar no *aqui e agora* e o processo acaba por ficar muito mais dinâmico que na forma sistemática (Vergnaud, 1993). A seguir, descrevemos a classe de situações que envolvem representação de relações em diagramas.

### **5.1.2. Representação de relações em diagramas ( $S_2$ )**

Esta classe de situações tem como objetivo a representação da relação entre dois conjuntos em diagramas. Os objetos pertinentes a esta classe, são: conjuntos (partida e chegada); relação; par



ordenado; diagrama. A exemplo de análise vamos considerar as questões pertencentes a seção 5.1.1 só que agora admitindo a sua representação no diagrama de Euler-Venn. O objetivo da questão é de representar a relação no diagrama de Euler-Venn, para isso o esquema pode ser representado pela sequência:

- identificar os conjuntos da situação;
- representar os elementos dos conjuntos no seu respectivo diagrama;
- relacionar os elementos do conjunto de saída com o conjunto de chegada;
- representar a relação no diagrama.

Repare que as questões supracitadas têm duas metas, a primeira envolve a determinação do conjunto resultante da relação entre dois conjuntos e a segunda inclui a representação de relações entre conjuntos. Pode-se perceber que estas duas classes de situações envolvem operações de pensamento distintas. Portanto, estas duas tarefas têm duas subtarefas na sua constituição (Vergnaud, 1993).

### **5.1.3. Situações que fazem referência indireta ao conceito de função ( $S_3$ )**

Esta classe de situações requer operações de pensamento associadas à compreensão do conceito de função quando este não é manifestado explicitamente. Embora as situações apresentem objetos distintos, elas fazem referência ao conceito de função e queremos aqui identificar possíveis dificuldades para a compreensão deste conceito. A seguir é apresentada uma situação em que o conceito de função é implícito.

**Q3.** Considere um biólogo estudando o crescimento de um potro. No primeiro dia do estudo, o animal possui 50 kg. No fim do segundo mês, o potro possui 20% a mais de massa e alcança 60 kg. Se no fim do segundo mês, ele ganha mais 20% de massa corporal, qual o aumento total da massa do animal?

A questão faz referência à relação entre duas grandezas e à maneira como elas se relacionam, no entanto, o conceito de função não é mencionado. Pede-se o estado final da massa, decorridos dois meses. A situação busca entender se os alunos conseguem relacionar massa e tempo por meio da construção de uma regra. No exemplo a seguir, novamente o conceito de função não é apresentado de forma explícita, mas busca associar dois elementos de maneira que siga uma regra, e esta regra sim, é explícita.

**Q4.** A luz viaja pelo espaço com uma velocidade constante de  $c = 3.10^8 m/s$ . Suponha que um pulso luminoso seja produzido e que ele seja encontrado na posição  $x(t) = ct$ ,

quanto tempo será necessário para que ele viaje de uma distância  $d = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ , ou seja a distância entre a terra e o sol.

Para representar esta relação entre as grandezas, e de que maneira elas se relacionam é necessário:

- Identificar os objetos
- Identificar os elementos que devem se relacionar
- Identificar de que maneira os elementos se relacionam
- Operacionalizar os dados (aplicar a regra)
- Apresentar o estado final

Na sequência discutimos esquemas possivelmente utilizados pelos alunos para tentar dominar estas classes de situações, mas que os levaram a construir conhecimentos alternativos aos consensualmente aceitos no campo da matemática.

## 5.2. Esquemas evidenciados por alunos do grupo A

Foram consultadas 212 atividades de aula na fase inicial da análise para o grupo A, entre as quais se encontram as tarefas realizadas em equipes, a avaliação diagnóstica e a avaliação somativa de todo o curso de cálculo. Destas, 81 foram selecionadas de acordo com os objetivos de pesquisa, como propõe a fase inicial da análise de conteúdo (seleção do corpus). O quadro a seguir apresenta uma seção dos conteúdos abordados, suas respectivas atividades e suas localizações nas unidades do curso.

Quadro 1: atividades propostas e conteúdos abordados no curso.

U	Atividade	Conteúdo
I	Relações	Relações; produto cartesiano; operações entre conjuntos; representações das relações entre conjuntos em diagramas; plano cartesiano.
	Avaliação somativa I	
II	Avaliação diagnóstica II	Definição de função; caracterização dos tipos de função; representação algébrica e representação gráfica de funções.
	Funções	
	Funções de 1° e 2° graus	
	Funções racional e potência	
	Funções trigonométricas	
	Exponenciais e logaritmos	
Avaliação somativa II		

Na leitura flutuante, analisamos todas as tarefas e as separamos em quatro grupos: as respondidas em consonância com o conhecimento científico; as que não foram respondidas; as que

foram respondidas de maneira adequada ao conhecimento científico, mas que continham algum tipo de esquecimento (não-sistemático) insuficiente para classificá-la como obstáculo; e as que continham concepções alternativas ao conhecimento científico. Portanto, se os registros dos alunos nessas atividades apresentavam características que mostravam indícios de dificuldade frente ao conceito de função e conceitos correlatos, então este material era selecionado para integrar a análise nas próximas etapas. Logicamente, os três primeiros grupos foram excluídos da análise e foi considerado somente o último grupo.

Iniciamos esta apresentação a partir do estudo de relações, por entendermos que este conceito é de fundamental importância para a construção conceitual do conteúdo de função.

### 5.2.1 Determinação do conjunto resultante da relação entre dois conjuntos

Tomando como referência as questões Q1 e Q2 (classe  $S_1$ ), foi possível observar dois possíveis obstáculos manifestados pelos estudantes quando operacionalizam as informações (etapa 3), quais sejam, o de *determinar o conjunto resultante sem considerar a lei de formação como parte integrante da relação* ( $E_1^2$ ) e o de *determinar o conjunto resultante como um subconjunto do produto cartesiano* ( $E_2$ ).

Das dezenove avaliações analisadas, dois estudantes pararam na primeira etapa (sequer responderam), 12 apresentaram um esquema que se limita ao passo 2, dois concentram suas ações até a terceira etapa e três alunos executaram todas as etapas.

Os conceitos-em-ação contidos no esquema de determinar o conjunto resultante sem considerar a lei de formação como parte integrante da relação ( $E_1$ ) são: conjuntos; produto cartesiano; par ordenado. Este esquema representa a formação do conjunto resultante sem considerar a expressão algébrica como objeto que define o tipo de relação. Isto, por sua vez parece ser a causa do obstáculo a ser enfrentado.

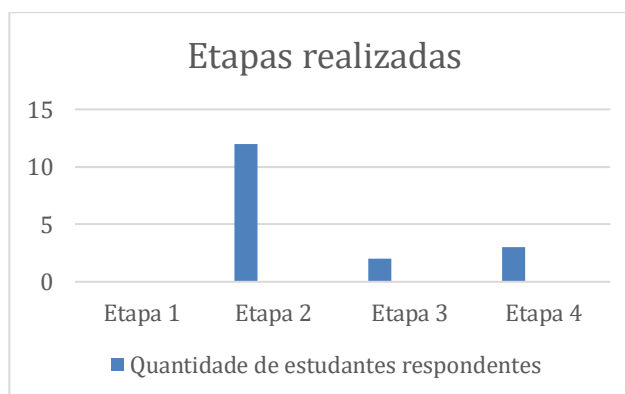


Figura 1: frequência de realização das etapas da situação Q1

<sup>2</sup> Usaremos aqui  $E_i$  para codificar os esquemas utilizados pelos estudantes.

O esquema se organiza da seguinte maneira: há a identificação dos conjuntos pertinentes à situação e da maneira pela qual eles se relacionam, porém as etapas seguintes encontram-se comprometidas, pois no momento de determinar quais elementos do conjunto de chegada satisfazem a relação, há uma ruptura, que talvez esteja associada à própria representação utilizada (equação). Não perceber que cada elemento do conjunto de partida representa o “ $x$ ” da equação e que só estará estabelecida uma relação entre  $x$  e  $y$  se existir um  $y$  que satisfaça à condição, nos leva a pensar que o estudante não consegue estabelecer ligações entre os objetos da situação. Como consequência, a falha de comunicação entre esses objetos impede que seja feita a referência ao conceito de relação.

- **Exemplo: Q1;**

- **Objetivos:** determinar o conjunto resultante da relação entre dois conjuntos;
- **Conceitos-em-ação:** relação, conjuntos, elementos, relação de pertinência;
- **Teoremas-em-ação:** se  $y$  é o quadrado de um elemento que pertence ao conjunto  $A$ , então o par ordenado  $(x, y)$  pertence à relação.

**Resposta do estudante:**

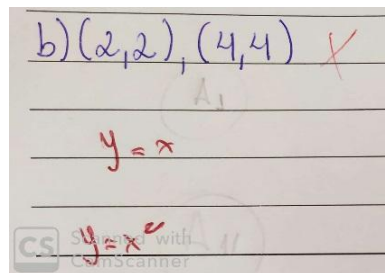


Figura 2: Registro da questão 1 (fonte: autor)

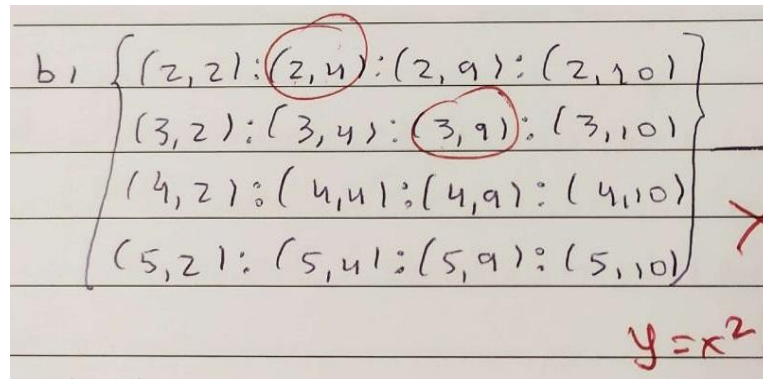
O esquema para *determinar o conjunto resultante como um subconjunto do produto cartesiano* ( $E_2$ ) abrange conceitos-em-ação como os que seguem: produto cartesiano, par ordenado e conjunto. É possível determinar o conjunto resultante a partir do produto cartesiano dos dois conjuntos envolvidos e apenas selecionar os pares que satisfazem a relação. Ele está organizado da seguinte maneira: identificação dos conjuntos, identificação de como a relação está definida, operacionalização das informações (determinar o produto cartesiano, selecionar os pares que satisfazem a relação) e determinação dos pares. Neste segundo caso, a problemática está em selecionar os pares, justamente por não estabelecer referência à maneira como a relação está definida, porque ele simplesmente não o sabe fazer.

- **Exemplo: Q1**

- **Objetivos:** determinar o conjunto resultante da relação entre dois conjuntos;

- **Conceitos-em-ação:** conjuntos, elementos, relação de pertinência, produto cartesiano;
- **Teoremas-em-ação Q1:** se  $y$  é o quadrado de um elemento que pertence ao conjunto A, então o par ordenado  $(x, y)$  pertence a relação;

**Resposta do estudante:**

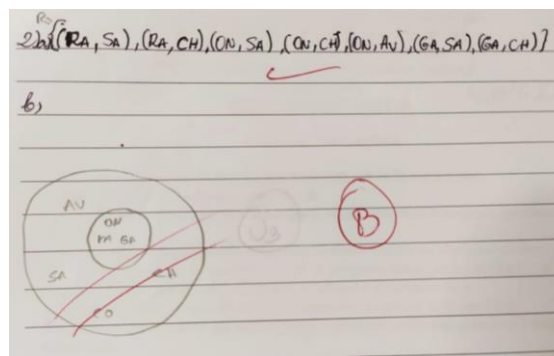


**Figura 3:** Registro da questão 1 usando produto cartesiano (Fonte: autor)

• **Exemplo: Q2**

- **Objetivos:** determinar o conjunto resultante da relação entre dois conjuntos;
- **Conceitos-em-ação:** conjuntos, elementos, relação de pertinência, produto cartesiano;
- **Teoremas-em-ação Q2:** se um animal pertencente ao conjunto M é predador de um animal pertencente ao conjunto A, então o par ordenado  $(x, y)$  pertence a relação.

**Resposta do estudante:**



**Figura 4:** Registro da questão 2 usando produto cartesiano (fonte: autor)

**5.1.2 Representação de relações em diagramas**

Tomando como referência as subtarefas de Q1 e de Q2 que requerem a representação de relações em diagramas ( $S_2$ ), pudemos identificar um obstáculo enfrentado pelos estudantes para a

compreensão das ações necessárias para resolvê-la, qual seja, a *representação da relação sem apresentar simbolicamente como os elementos estão relacionados* ( $E_3$ ).

Quanto à representação adotada em diagramas na questão Q1, resolvida individualmente (avaliação somativa), dois alunos chegaram apenas à terceira e quarta etapa, ou seja, apresentaram o conjunto resultante da relação no diagrama, mas não identificaram quais os conjuntos envolvidos e nem representaram os elementos dos conjuntos em seu respectivo diagrama; um estudante apresentou conceitualização explícita até a segunda etapa, e um alcançou somente a terceira etapa.

Para a Q2, resolvida em grupos (tarefa sobre relações), um grupo alcançou até a etapa 2, um grupo realizou todas as etapas, enquanto dois grupos chegaram somente à terceira etapa. A seguir apresentamos os esquemas associados às representações de relação em diagramas.

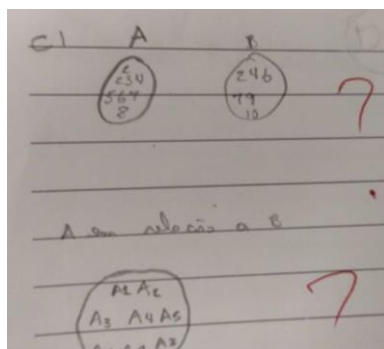
### a) Representação da relação sem apresentar simbolicamente como os elementos estão relacionados.

Os conceitos-em-ação a serem utilizados no esquema para *representação da relação sem apresentar simbolicamente como os elementos estão relacionados* ( $E_3$ ) consistem em: relação, conjunto e diagrama. Neste caso, o esquema associado à representação da relação entre dois conjuntos no diagrama limita-se à representação dos elementos dos conjuntos em seu respectivo diagrama. Ele se organiza da seguinte maneira: primeiro há a identificação dos conjuntos e depois são representados os elementos nos diagramas. As fases posteriores são ausentes, logo, pressupomos que isso se dá pela ausência de conexão entre os objetos, ou seja, o obstáculo está em estabelecer ligação entre os elementos do conjunto através da representação pictórica.

#### • Exemplo: Q1

- **Objetivo:** representar a relação no diagrama de Euler-Venn
- **Conceitos-em-ação:** conjuntos, elementos, relação.
- **Teoremas-em-ação Q1:** se  $y$  é o dobro de um elemento que pertence ao conjunto  $A$ , então  $x$  se relaciona com  $y$ .

**Resposta dos estudantes:**

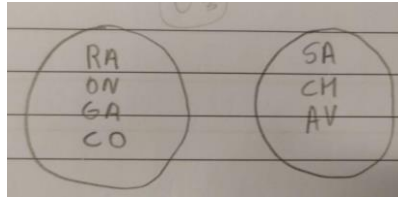


**Figura 5:** Registro da questão 1 usando diagrama (fonte: autor)

- **Exemplo: Q2**

- **Objetivo:** representar a relação no diagrama de Euler-Venn;
- **Conceitos-em-ação:** conjuntos, elementos, relação;
- **Teoremas-em-ação Q2:** se  $y$  é presa de um elemento que pertence ao conjunto  $M$ , então  $x$  se relaciona com  $y$ .

**Respostas dos estudantes:**



**Figura 6:** Registro da questão 2 usando diagrama (fonte: autor)

### 5.1.3 Situações que fazem referência indireta ao conceito de função

Tomando como referência a questão Q5 como situação que faz referência indireta ao conceito de função ( $S_3$ ), foi possível identificar um esquema descritivo do obstáculo à representação de relações funcionais ( $E_4$ ). A Q5 é enunciada da seguinte maneira:

**Q5.** Uma banda de rock tocava no mirante em um show beneficente e foi abordada por agentes da Secretaria do Meio Ambiente e Sustentabilidade SEMAS que queriam multá-la por estarem tocando com uma intensidade sonora de  $I=10^{-5} \text{ W/m}^2$  (medida em distância relevante) atestado pelos profissionais do órgão como valor de poluição sonora. Sabe-se que um valor aceito como de poluição sonora equivale a um nível de intensidade sonora de 80 dB e conhece-se uma expressão para esta grandeza, em decibéis ( $\beta$ ), como função da intensidade sonora  $I$ , medida em  $\text{W/m}^2$ :

$$\beta(I) = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right).$$

Os agentes estavam ou não certos sobre a condição de poluição sonora?

Durante o estudo, a etapa 4 foi a que mais apresentou instabilidade nas representações, em função da necessidade de associar os elementos relacionáveis à regra estabelecida não ser alcançada. A seguir, apresentamos possíveis esquemas de estudantes na tentativa de retratar a referência ao conceito função no confronto com uma situação.

Os obstáculos pertinentes a esse grupo apresentam esquemas associados a situações que fazem menção ao conceito função de forma explícita, ou seja, a situação apresenta de maneira direta como os elementos dos conjuntos se relacionam através de uma expressão algébrica. Os conceitos-em-ação presentes nestes esquemas são: função; relação, e grandezas físicas (massa, tempo, intensidade sonora, distância, altura). O esquema se organiza de forma invariante da seguinte maneira: identificação dos objetos pertencentes ao problema; identificação dos elementos

relacionáveis; identificação da regra que relaciona esses elementos. Na etapa de operacionalização dos dados, o esquema apresenta instabilidade em termos gerais, pois é nesta fase que se deve: relacionar os elementos identificados através da regra; enquadrar cada elemento em seu devido lugar; realizar operações com notação científica; resolver equações usando invariantes operatórios sobre potenciação, logaritmos e etc. Conhecimentos ausentes podem dar rompimento à continuidade do esquema, enquanto conhecimentos alternativos conduzem os estudantes a conclusões muito divergentes das aceitas como matematicamente corretas.

- **Exemplo: Q5;**

- **Objetivo:** determinar a intensidade sonora a partir da função e compará-la com o parâmetro dado;
- **Conhecimentos-em-ação:** intensidade sonora é uma grandeza física que mede a potência sonora por unidade de área. A poluição sonora está em função da intensidade sonora. Poluição sonora é definida um parâmetro de intensidade sonora: níveis de intensidade sonora superiores a 80dB. Para cada intensidade medida, teremos um nível de poluição sonora;
- **Teorema-em-ação:** Se o nível de intensidade sonora for superior a 80dB, então temos um caso de poluição sonora.

**Resposta dos estudantes:**

$$\begin{aligned}
 (3) \quad I &= 10^{-5} \text{ N/m}^2 \\
 NIS &= 80 \text{ dB (poluição)} \\
 B(I) &= 10 \log \left( \frac{I}{10^{-12}} \right) \\
 B(I) &= 10 \log \left( \frac{10^{-5}}{10^{-12}} \right) \\
 B(I) &= 10 \cdot \log 10^{-5} \cdot 10^{12} \\
 B(I) &= 10 \cdot 7 = 70 \cdot \log 10^7
 \end{aligned}$$

**Figura 7:** Registro da questão 5 (fonte: autor)

O estudante A, identifica os elementos da situação, como a intensidade medida, o nível máximo de intensidade sonora permitida e a função que associa cada registro de intensidade com a poluição sonora produzida. No entanto, ao passo que vai da penúltima linha para a última não explicita qual propriedade do logaritmo usou, e na última igualdade não apresenta a resposta de 70 dB, mas retorna ao passo anterior. A possibilidade para tal evento é que este estudante esteja enfrentando uma classe de situação para a qual não dispõe de competências para desenvolvê-la. Por mais que ele consiga explicitar os objetos e implicitamente utilize as propriedades, ele não as conclui por apresentar dificuldades no campo operatório.



3.  $I = 10^{-5} \frac{W}{m^2}$

$B(I) = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$

Figura 8: Registro da questão 5 (fonte: autor)

Já o estudante B, apresenta apenas os elementos pertinentes a situação, mas não estabelece nenhuma relação entre eles. Enquanto o estudante C, identifica os elementos, faz a conexão entre eles, porém ao realizar a forma operatória, do saber fazer, não dispõe de conhecimentos associados as propriedades de potências e logaritmos.

3-  $B(I) = 10 \cdot \log\left(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}\right)$

$B(I) = 10 \cdot \log I^{19}$

$B(I) = 10^{-11}$  não sei!

Figura 9: Registro da questão 5. (fonte: autor)

O que há de comum nos três casos? A forma operatória comprometida pela ausência de conhecimentos pertinentes a situação.

### 5.3. Esquemas evidenciados por alunos do grupo B

Como exposto anteriormente, o grupo B é composto por dez estudantes que se dispuseram a participar da atividade de pesquisa, qual seja, a aplicação de uma tarefa. Seguindo as etapas do desenvolvimento da metodologia de análise, inicialmente realizou-se a leitura flutuante das tarefas e foram selecionadas para estudo as tarefas de seis estudantes. Tal escolha se deve ao fato de esses seis serem os únicos respondentes ( dos dez participantes apenas seis responderam), e todos apresentarem algum tipo de dificuldade associada à compreensão do conceito de função.

Adotaremos aqui as mesmas categorias de análise utilizadas para o grupo A, pois os objetivos de análise são equivalentes para o grupo B, a saber, “de que modo?” e “para dizer o que?” Ressalta-se que há diferença no contexto e nas características dos participantes dos quais o grupo B foi constituído (vide descrição dos grupos).

Assim, de acordo com o que foi feito para o grupo A, serão consideradas para este estudo as classes de situações que contenham referências indiretas ao conceito de função ( $S_3$ ), seguindo o mesmo parâmetro de análise quanto aos esquemas identificados para o grupo supracitado. Todas as questões a seguir foram retiradas dos problemas propostos aos estudantes do grupo B.

A questão 6 (Q6) é uma das situações pertinentes à classe  $S_3$  e se utiliza da linguagem em forma de expressão algébrica para representá-lo.

**Q6.** (Adaptado de Moss, 1980) Hall (1964) investigou a mudança no tamanho da população da espécie zooplancônica *Daphnia galeata mendota* no lago *Base Line*, em Michigan. O tamanho da população  $N(t)$  no tempo  $t$ , foi modelado pela função:

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

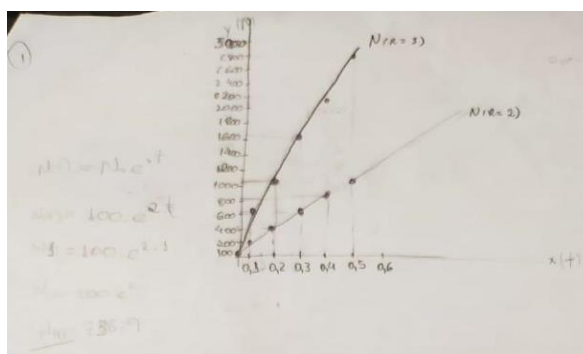
onde  $N_0$  denota o tamanho da população no tempo 0. A constante  $r$  é a taxa intrínseca de crescimento da população. a) Represente graficamente o modelo para  $N_0 = 100$  e  $r = 2$ . b) Compare com o gráfico anterior o gráfico de  $N(t)$  quando  $N_0 = 100$  e  $r = 3$ . Qual população cresce mais rápido?

A situação requer que seja estabelecida uma leitura das informações em sua representação gráfica, que se compare o estado final ao inicial e se faça inferências. Os conceitos-em-ação presentes nos esquemas são classificados por: relação; função; taxa intrínseca de crescimento. Os esquemas  $E_3$  são constituídos por ações como a: identificação dos objetos (tamanho da população, tempo, expressão algébrica, taxa de crescimento, população inicial); identificação dos elementos pertinentes à resolução (população inicial, dois parâmetros distintos, tempo e tamanho da população); identificação da regra que relaciona cada tempo com o tamanho da população correspondente, operacionalização (representar no plano cartesiano os elementos pertinentes, perceber o tipo de comportamento da função), estado final; representação do gráfico do comportamento da função no plano cartesiano.

• **Exemplo: Q6**

- **Conceitos-em-ação:** relação, função, taxa intrínseca de crescimento
- **Teoremas-em-ação:** o modelo apresenta comportamento de crescimento exponencial.

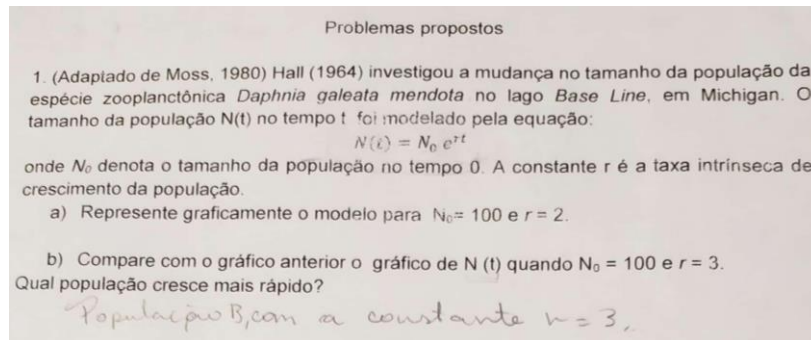
**Resposta de Renata:**



**Figura 10:** Registro da questão 6: representação gráfica (fonte: autor)

Apesar de Renata apresentar o estado final e inferir a partir das comparações, a representação gráfica apresentada por ela não corresponde ao modelo proposto. Enquanto faz uma

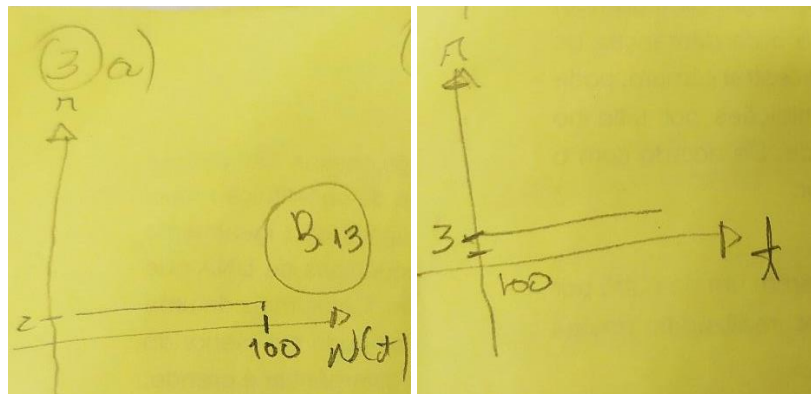
comparação de comportamento linear, ela não se dá conta que o modelo retrata um crescimento exponencial.



**Figura 11:** Registro da questão 6: considerações (fonte: autor)

Denis, por sua vez, apresenta um esquema instável ao comparar os elementos contidos nos dois gráficos. Ele estabelece o eixo vertical como sendo o eixo que comporta o parâmetro  $r$ , e no eixo horizontal do primeiro gráfico determina a população no instante  $t$ , e neste mesmo eixo representa a população inicial  $100$ . Ao final faz uma relação do parâmetro com a população inicial. Por outro lado, no segundo gráfico, o eixo horizontal representa o tempo associado ao parâmetro. Percebe-se que o aluno desconhece a forma de representação solicitada (gráfico), mas isso também não quer dizer que o aluno não compreenda o conceito de função.

**Resposta estudante Denis:**



**Figura 12:** Registro da questão 6: representação gráfica (fonte: autor)

A questão Q7 é outra questão que faz referência indireta ao conceito de função. É outro exemplo interessante para discutir a conceitualização dos estudantes. Construímos interpretações sobre obstáculos a partir das resoluções de Emanuelle, Dennis e Fernanda.

**Q7.** A função de crescimento de Monod  $r(N)$  descreve o crescimento de um organismo em função da concentração de nutrientes  $N$ . Suponha que:

$$r(N) = 5 \frac{N}{1 + N}$$

Encontre o aumento percentual quando a concentração de nutrientes duplicou de  $N = 0,1$  para  $N = 0,2$ . Compare este resultado com o que você encontra quando dobra a concentração de nutrientes de  $N = 10$  para  $N = 20$ .

• **Exemplo: Q7**

- **Conceitos-em-ação:** relação; função; aumento percentual
- **Teoremas-em-ação:** o modelo apresenta comportamento de uma função racional.

**Resposta de Emanuelle:**

$$r(0,1) = \frac{5 \times 0,1}{1 + 0,1} = \frac{5 \times 0,1}{1,1} = 5 \times 0,090 = 0,45$$

$$r(0,2) = \frac{5 \times 0,2}{1 + 0,2} = \frac{5 \times 0,2}{1,2} = 5 \times 0,16 = 0,8$$

**Figura 13:** Registro da questão 7 (fonte: autor)

Apesar de realizar os cálculos adequadamente, Emanuelle não estabelece uma relação dos percentuais de crescimento encontrados com o aumento percentual, além disso, ela não os compara com os outros intervalos para perceber o comportamento da taxa de aumento percentual do modelo para em seguida inferir. Ainda que ela saiba operacionalizar essas informações, há possibilidade desses resultados não apresentarem significado algum para ela. Do mesmo modo, pode acontecer com Denis.

**Resposta de Denis:**

$$r(N) = \frac{5 \times N}{1 + N}$$

$$r(0,2) = \frac{5 \times 0,2}{1 + 0,2} = \frac{1}{1,2} = 0,83$$

$$r(N) = \frac{5 \times 20}{1 + 20} = \frac{100}{21}$$

$$r(N) = 4,2$$

**Figura 14:** Registro da questão 7. (fonte: autor)

No caso de Fernanda, ela apresenta erros sistemáticos relacionados ao uso da calculadora, quanto a ordem das operações e os parênteses, o que fez gerar conclusões destoadas do que seria o real. Embora tenha cometido este equívoco, não há um indicativo de questionamento ou reanálise de sua resposta, logo pressupõe-se que a análise do comportamento da função neste caso não é levada em consideração. Aqui percebe-se que o sentido do conceito é negligenciado.

## Resposta de Fernanda:

Handwritten mathematical work on a yellow background. The work shows several functions and calculations:

- $n(N) = \frac{5 \cdot N}{1+N}$
- $n(N) = \frac{5 \cdot 0,2}{1+0,2}$
- $n(N) = \frac{5 \cdot 0,1}{1+0,1}$
- $n(N) = 1,2$
- $n(N) = 0,6$  with "aumentou 50%" and "0,75 = 35%"
- $n(N) = \frac{5 \cdot 10}{1+10}$
- $n(N) = \frac{5 \cdot 20}{1+20}$
- $n(N) = 60$
- $n(N) = 120$  with "aumentou 50%"

Figura 15: Registro da questão 7. (fonte: autor)

Outra situação que não faz referência direta ao conceito de função é a questão Q8, que versa sobre biologia molecular.

**Q8.** As sequências de DNA evoluem ao longo do tempo por vários processos. Um desses processos é a substituição de um nucleotídeo por outro. O esquema de substituição mais simples é o de Jukes e Cantor (1969), que assume que as substituições são igualmente prováveis entre os quatro tipos de nucleotídeos. Ao comparar duas sequências de DNA que têm origem comum, é possível estimar o número de substituições por sítio. Como mais de uma substituição pode ocorrer por sítio, o número de substituições observadas pode ser menor do que o número real de substituições, particularmente quando o tempo de divergência é grande. Modelos matemáticos são usados para corrigir essa diferença. A razão  $p$  de diferenças de nucleotídeos observadas entre duas sequências que compartilham um ancestral comum, pode ser usada para encontrar uma estimativa do número real  $K$  de substituições por sítio no momento da divergência, desde que o  $p$  fornecido não seja muito grande. De acordo com o esquema de substituição de Jukes e Cantor,  $K$  e  $p$  estão relacionados por:

$$K = -\frac{3}{4} \ln \left( 1 - \frac{4}{3} p \right)$$

Suponha que duas sequências de comprimento de 150 nucleotídeos diferem um do outro por 23 nucleotídeos. Estime quantas substituições por sítio podem ser realizadas nestas condições?

- **Exemplo: Q8**

- **Conceitos-em-ação:** diferenças de nucleotídeos, substituição por sítio.
- **Teoremas-em-ação:**  $p$  é a razão entre o número de nucleotídeos que diverge nas duas sequências, e número total de nucleotídeos observados. Esta razão relaciona-se numa escala logarítmica com o número de substituições por sítio.

Abaixo encontram-se possíveis esquemas de duas estudantes. No primeiro caso, de Renata, observa-se a identificação e o destaque dos elementos pertinentes à resolução do problema no texto da questão. No entanto, ao descrever  $p$ , não associa a condição a ser considerada pelo modelo expresso. Esta dificuldade pode ter origem inicialmente na compreensão do processo de evolução

de sequenciamento de DNA, caracterizando-se como um conhecimento ausente, ou alternativamente pode surgir da dificuldade de entender o conceito matemático *razão* para esta situação. O mesmo acontece com Emanuelle, porém, a diferença é que esta não destaca no texto os elementos pertinentes do problema e apresenta somente a resolução.

**Resposta de Renata:**

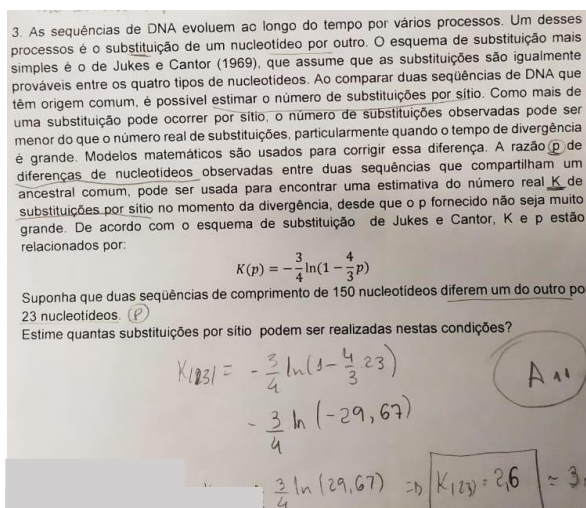


Figura 17: Registro da questão 8. (fonte: autor)

**Resposta de Emanuelle:**

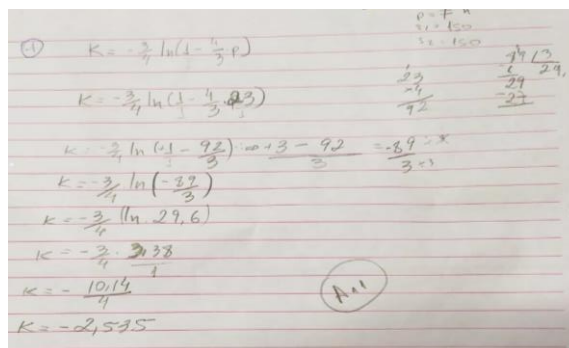


Figura 17: Registro da questão 8 (fonte: autor)

Na fase em que operacionalizam as informações, em ambos os casos se percebe que há uma violação associada ao domínio da função, pois  $p$  é um número que varia  $0 < p < 3/4$ , uma vez que  $K(p)$  é uma estimativa, portanto um número real positivo. Dadas duas sequências de DNA e feita a comparação entre elas,  $p$  representa a razão entre o número de nucleotídeos observados que difere de uma sequência para outra, e o número total de nucleotídeos da sequência. Este tipo de operação de pensamento apresentada por Renata e Emanuelle, do ponto de vista matemático, não representa adequadamente a razão explicitada na situação, e resumem a solução em um cálculo frio, acabado, contendo operações forçadas, desprovido de análise do domínio da função e consequentemente na compreensão do resultado.

## 6. CONCLUSÃO/DISCUSSÃO

A realização deste trabalho possibilitou analisar as operações de pensamento evidenciadas nos registros dos estudantes participantes frente a uma situação envolvendo o conceito de função. Como este estudo objetivou mapear os obstáculos enfrentados na compreensão do conceito supracitado, destacamos a seguir os principais resultados encontrados:

- Ausência de conhecimentos matemáticos pertinentes para resolver uma dada situação;
- Dificuldade na explicitação de elementos e propriedades matemáticas, e como se relacionam;
- Dificuldade no estabelecimento de relação entre os elementos que compõem uma situação com o próprio conceito *função*;
- Redução da resolução de uma situação a um algoritmo;
- Dificuldades no estabelecimento de relação entre diferentes formas de representação de uma situação envolvendo o conceito.

O mapeamento acima não só amplia o conteúdo acerca das dificuldades destacadas por outros estudos, mas também fornece um parâmetro mais especificamente sobre a compreensão do conceito *função*, por ser um assunto visto principalmente da perspectiva cognitivista.

Este estudo não reflete um panorama geral das dificuldades de todos os estudantes da UFOPA, no entanto, apresenta indicativos locais, com um caso específico de estudantes de cursos de ciências biológicas que cursaram disciplinas de matemática e que em algum momento do currículo tiveram contato com o conceito *função*.

Os entraves dos estudantes não podem ser analisados somente do ponto de vista cognitivo, pois fatores socioculturais também têm importância central nesta questão. Elementos como a realidade escolar brasileira e as experiências vivenciadas pelos estudantes em seu meio social também podem contribuir positivamente ou negativamente para a construção de sentido para os conceitos em diferentes áreas do conhecimento, em especial, no caso da matemática. Durante o estudo, alunos queixavam-se de não terem estudado funções na educação básica, ou que tinham aversão ao estudo de trigonometria, logaritmos, notação científica etc.

O estudo apresentado pontuou algumas das principais estruturas cognitivas que parecem impedir os estudantes de executarem adequadamente uma tarefa. Pode-se constatar que para as classes de situações expostas aos estudantes, é comum eles não disporem de competências e conhecimentos matemáticos importantes para análise e solução da situação.

## 7. REFERÊNCIAS

Andrade, J. M. & Saraiva, M. J. (2012). Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de Função. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa*. 15(2), 137-169.

Daher, Wajeeh M. & Anabousy, A (2015). Students' Recognition of Function Transformations' Themes Associated with the Algebraic Representation. *Journal of Research in Mathematics Education*.

Moraes, R. (1999). Análise de conteúdo. *Revista Educação*. 22 (37), 7-32.

Neves, D & Resende, M (2016). O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(2), 599-625.

Nunes, C.B. & Santana, E.R.S. (2017). Concepções Errôneas de Alunos de Licenciatura em Matemática Sobre o Conceito de Função. *Jornal internacional em estudos em educação matemática.*, 10(2), 65-71.

Palis, G (2013). Atividades que podem propiciar o desenvolvimento do raciocínio funcional no alunado do ensino médio e universitário inicial. *Professor de Matemática Online*, 1(1).

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos Campos Conceituais. *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática*. 1-26.



## 8. APÊNDICES

### APÊNDICE A- Problemas propostos para o grupo B.

#### Problemas propostos

1. As seqüências de DNA evoluem ao longo do tempo por vários processos. Um desses processos é o de substituição de um nucleotídeo por outro. O esquema de substituição mais simples é o de Jukes e Cantor (1969), que assume que as substituições são igualmente prováveis entre os quatro tipos de nucleotídeos. Ao comparar duas seqüências de DNA que têm origem comum, é possível estimar o número de substituições por sítio. Como mais de uma substituição pode ocorrer por sítio, o número de substituições observadas pode ser menor do que o número real de substituições, particularmente quando o tempo de divergência é grande. Modelos matemáticos são usados para corrigir essa diferença. A razão  $p$  de diferenças de nucleotídeos observadas entre duas seqüências que compartilham um ancestral comum, pode ser usada para encontrar uma estimativa do número real  $K$  de substituições por sítio no momento da divergência, desde que o  $p$  fornecido não seja muito grande. De acordo com o esquema de substituição de Jukes e Cantor,  $K$  e  $p$  estão relacionados por:

$$K = -\frac{3}{4} \ln\left(1 - \frac{4}{3}p\right)$$

Suponha que duas seqüências de comprimento de 150 nucleotídeos diferem um do outro por 23 nucleotídeos. Estime quantas substituições por sítio podem ser realizadas nestas condições?

2. A função de crescimento de Monod  $r(N)$  descreve o crescimento de um organismo em função da concentração de nutrientes  $N$ . Suponha que:

$$r(N) = 5 * \frac{N}{1 + N}$$

Encontre o aumento percentual quando a concentração de nutrientes duplicou de  $N = 0,1$  para  $N = 0,2$ . Compare este resultado com o que você encontra quando dobra a concentração de nutrientes de  $N = 10$  para  $N = 20$ .

3. (Adaptado de Moss, 1980) Hall (1964) investigou a mudança no tamanho da população da espécie zooplânctônica *Daphnia galeata mendota* no lago *Base Line*, em Michigan. O tamanho da população  $N(t)$  no tempo  $t$ , foi modelado pela equação: onde  $N$  denota o tamanho da população no tempo 0. A constante  $r$  é a taxa intrínseca de crescimento da população.

$$N(t) = N * e^{rt}$$

- Represente graficamente o modelo para  $N = 100$  e  $r = 2$ .
- Compare com o gráfico anterior o gráfico de  $N(t)$  quando  $N_0 = 100$  e  $r = 3$ . Qual população cresce mais rápido?