UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS
LICENCIATURA INTEGRADA EM FÍSICA E MATEMÁTICA

FABRÍCIA PINHO ARAGÃO

POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT: Explorando poliedros regulares não convexos com o Geogebra

SANTARÉM-PA
2022

FABRÍCIA PINHO ARAGÃO

POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT: Explorando poliedros regulares não convexos com o Geogebra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, do Programa de Ciências Exatas, do Instituto de Ciências da Educação, da Universidade Federal do Oeste do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado.
Orientador: Prof. Me. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

SANTARÉM-PA
2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/UFOPA

A659p Aragão, Fabricia Pinho

Poliedros de Kepler-Poinsot: explorando poliedros regulares não convexos com o Geogebra./ Fabricia Pinho Aragão. – Santarém, 2022.

50 p.: il.

Inclui bibliografias.

Orientador: Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Curso de Licenciatura Integrada de Matemática e Física.

1. Poliedros regulares. 2. Poliedros Kepler-Poinsot. 3. Geogebra . I. Rodrigues, Aroldo Eduardo Athias, *orient*. II. Título.

CDD: 23 ed. 516.156

Bibliotecária - Documentalista: Renata Ferreira – CRB/2 1440

FABRÍCIA PINHO ARAGÃO

POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT: Explorando poliedros regulares não convexos com o Geogebra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, do Programa de Ciências Exatas, do Instituto de Ciências da Educação, da Universidade Federal do Oeste do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado.

Aprovado em 1º de fevereiro de 2022
Banca Examinadora:

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues
____
Prof. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues
Orientador-Ufopa

____
Prof. José Ricardo e Souza Mafra
Ufopa

HUGO ALEX CARNEIRO
DINIZ:03768098761
2022.02.03
17:02:17 -03:00

____
Prof. Hugo Alex Carneiro Diniz
Ufopa

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos que estiveram comigo no decorrer da minha jornada acadêmica: aos colegas de aulas que me ajudaram em inúmeras situações, ao meu orientador pela paciência e atenção na construção junto a mim deste trabalho, ao meu namorado pelo companheirismo e compreensão, e principalmente aos meus pais e irmãos por acreditarem na minha capacidade como ser humano de alcançar meu sonho, serem minha base e sempre me apoiarem.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de concluir mais uma fase da minha vida acadêmica, pela força e determinação em alcançar meus objetivos, e pela oportunidade em meio as diversidades em conseguir concluir este trabalho.

Ao meu orientador Aroldo Eduardo Athias Rodrigues pela paciência e atenção nas orientações, e pelo seu auxílio na construção deste trabalho, que foi de suma importância.

Aos professores e colegas da turma LIMF 2012, que me ajudaram em inúmeras diversidades durante a graduação, e pelas alegrias e amizades durante a nossa convivência.

Aos meus irmãos Fabrine e Francisco, por estarem sempre comigo e serem minha base de apoio longe de casa. E por fim aos meus pais, que mesmo com a distância e com as diversidades, estiveram presentes com seu apoio e amor.

Muito Obrigado!

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.”

Bertrand Russell

RESUMO

Este trabalho trata dos poliedros regulares não convexos, conhecidos como poliedros de Kepler-Poinsot. Seu objetivo geral é utilizar os recursos da geometria dinâmica para ampliar a compreensão sobre as seguintes perguntas: por que os poliedros de Kepler-Poinsot são considerados poliedros regulares? Quais são efetivamente os elementos os vértices, as arestas e as faces destes poliedros? Embora estas perguntas possam parecer óbvias, respondê-las exige mergulhar dentro de uma outra questão: o que é, de fato um poliedro? Durante o desenvolvimento do trabalho mostramos que há mais de uma maneira de definir o que é um poliedro e buscamos, com o auxílio do *software* Geogebra, deixar claro quais polígonos devem ser entendidos como faces dos poliedros de Kepler-Poinsot para que estes possam ser interpretados como poliedros regulares. Considerando as diferentes possibilidades na escolha de uma definição de poliedro adequada a nossos propósitos, optamos por aquela proposta por Branko Grünbaum (2003), que diferencia a estrutura combinatória de um poliedro de sua interpretação geométrica, permitindo uma compreensão mais geral das estruturas que chamamos de poliedros. Segundo a definição pela qual optamos uma face passa a ser compreendida como um circuito composto por vértices e arestas, de tal modo que as faces que constituem os poliedros de Kepler-Poinsot podem ser interpretadas como polígonos regulares que se intersectam. Responder a todas essas questões exige bastante pensamento abstrato, o que justifica o uso da geometria dinâmica como suporte visual no sentido de facilitar o caminho que conduz até tais abstrações. Assim, a exposição feita ao longo deste trabalho faz uso de construções produzidas pela autora e disponibilizadas na plataforma on-line do Geogebra para tornar estas ideias mais claras, atingindo assim os objetivos propostos.

Palavras-chave: Poliedros regulares. Poliedros de Kepler-Poinsot. Geogebra.

ABSTRACT

This work deals with regular non-convex polyhedra, known as Kepler-Poinsot polyhedra. Its general objective is to use dynamic geometry resources to expand the understanding about the following questions: why are Kepler-Poinsot polyhedra considered regular polyhedra? What are the vertices, edges and faces of these polyhedra? Although these questions may seem obvious, answering them requires diving into another question: what, in fact, is a polyhedra? During the development of the work, we showed that there is more than one way to define what a polyhedron is and we sought, with the help of the Geogebra software, to make it clear which polygons should be understood as faces of Kepler-Poinsot polyhedra so that they can be interpreted as regular polyhedra. Considering the different possibilities in choosing a definition of a polyhedron suitable for our purposes, we opted for the one proposed by Branko Grünbaum (2003), which differentiates the combinatorial structure of a polyhedron from its geometric interpretation, allowing a more general understanding of the structures we call a polyhedra. According to the definition we chose, a face is understood as a circuit composed of vertices and edges, in such a way that the faces that constitute the Kepler-Poinsot polyhedra can be interpreted as intersecting regular polygons. Answering all these questions requires a lot of abstract thinking, which justifies the use of dynamic geometry as a visual support in order to facilitate the path that leads to such abstractions. Thus, the exposition made throughout this work makes use of constructions produced by the author and made available on the Geogebra online platform to make these ideas clearer, thus achieving the proposed objectives.

Key-words: Regular Polyhedra. Kepler-Poinsot Polyhedra. Geogebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

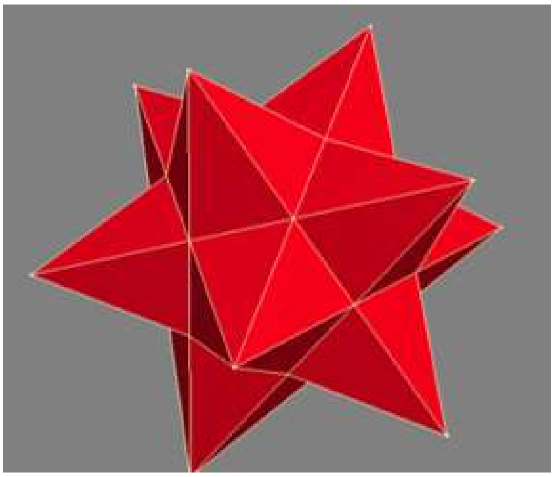
LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho trata dos poliedros regulares não convexos, conhecidos como poliedros de Kepler-Poinsot. Nossa motivação inicial era tratar do uso do Geogebra no ensino de geometria de uma maneira geral. Mas optamos por delimitar esse tema e focar nossa atenção em algo mais específico. Assim, direcionamos nossos esforços para o processo de construção destes poliedros, servindo-nos do dinamismo que a geometria dinâmica proporciona. Mas o verdadeiro potencial deste tema se revelou para nós quando, durante a manipulação de outro *software*, denominado Greatstella, percebemos o que nos parecia uma incongruência entre o que estávamos vendo e as informações que o programa nos dava sobre a quantidade de vértices, arestas e faces dos poliedros de Kepler-Poinsot. Para o leitor possa compreender melhor a que incongruência nos referimos, tente responder a seguinte pergunta: quantas faces possui o poliedro representado na Figura 1?

Figura 1: Faces do poliedro



Fonte: Autora (2021)

Se o leitor respondeu 60 faces está de parabéns, pois contabilizou corretamente a quantidade de faces triangulares. Entretanto, o *software* antes mencionado apresentava, também corretamente, 12 faces como resposta. Porque a resposta do programa não é 60 é algo vamos responder ao longo deste trabalho.

A situação acima nos conduziu a outros questionamentos: como podem os poliedros de Kepler-Poinsot ser considerados regulares se alguns deles aparentam ter faces diferentes entre si ou se estas faces não são polígonos regulares? Já que os números não correspondiam a nossas expectativas, será que o que estávamos olhando como faces, eram realmente as faces desses poliedros? Percebemos então que, ao invés de simplesmente construir estes poliedros com o Geogebra, poderíamos utilizar o dinamismo do mesmo para elucidar tais questões.

Assim, passou a ser nosso objetivo utilizar os recursos da geometria dinâmica para ampliar a compreensão sobre a seguinte pergunta: por que os poliedros de Kepler-Poinsot são considerados poliedros regulares?

Para atingir este objetivo geral, traçamos como objetivos específicos discutir as ambiguidades presentes na definição de poliedro e utilizar o Geogebra para explicitar quais são efetivamente os elementos que constituem os vértices, as arestas e as faces dos poliedros de Kepler-Poinsot.

Pensamos que as questões antes colocadas não são óbvias e exigem uma boa dose de pensamento abstrato para serem compreendidas, o que justifica o uso da geometria dinâmica como suporte visual no sentido de facilitar o caminho que conduz até tais abstrações.

Com o intuito de concretizar nossos planos produzimos e disponibilizamos na plataforma on-line do Geogebra algumas construções, direcionando o leitor deste trabalho para elas por meio de diversos hiperlinks presentes ao longo do texto. Pensamos que o texto produzido por nós para este trabalho de conclusão de curso, acrescido destes recursos da geometria dinâmica, constitui a resposta aos objetivos que queríamos atingir. Passemos então para a descrição dos capítulos que constituem este trabalho.

No capítulo inicial apresentamos as biografias sobre os matemáticos: Johannes Kepler e Louis Poinsot, os mesmos foram os primeiros matemáticos que demonstraram interesse, na realização da caracterização dos poliedros estrelados regulares. No capítulo 2, faz-se uma abordagem sobre a compreensão do que seriam os ambientes de geometria dinâmica e, em especial, o *software* Geogebra. O capítulo 3 tem a proposta, de apresentar uma descrição sobre polígono e as suas classificações, com a intenção de revisar esse tema para facilitar a introdução do leitor à ideia de poliedro. O capítulo 4 fornece uma discussão, sobre as possibilidades de definições que podem ser usadas para poliedro, e tem a proposta de exemplificar a definição escolhida neste trabalho, através de figuras. O capítulo 5 apresenta as classificações de poliedro, com o intuito de melhorar o embasamento do leitor sobre o tema e principalmente ajudá-lo na compreensão dos elementos geométricos apresentados a partir das animações. E para finalizar são apresentadas no capítulo 6, as animações dos poliedros de Kepler-Poinsot, construídas no Geogebra, junto com algumas considerações sobre esses poliedros. Assim como é feita a disponibilização do material de forma educativa na plataforma do Geogebra por meio de *links*.

Esperamos que o leitor possa concluir a leitura deste trabalho convencido de que os poliedros de Kepler-Poinsot podem realmente ser interpretados como poliedros regulares.

1 A HISTÓRIA DO NOME

Os poliedros de Kepler-Poinsot são o tema principal deste trabalho, mas por que estes são nomeados assim? Esses sólidos são figuras encontradas muitas vezes nas arquiteturas e pinturas espalhadas pelo mundo, mas, apesar de há muito tempo estes serem apresentados aos olhos de curiosos, foi somente a partir do interesse dos matemáticos Kepler e Poinsot, que eles passaram a ter uma maior visibilidade nos estudos de geometria espacial. A seguir, descreve-se um pouco das histórias pessoais e acadêmicas de Johannes Kepler e Louis Poinsot, bem como suas contribuições no campo da matemática, assim como em outras áreas.

Johannes Kepler foi um matemático e astrônomo, cuja atuação mais conhecida e famosa está no campo da astronomia. No entanto o mesmo possui atuações na área da matemática que contribuíram para grandes descobertas na geometria.

Figura 2: Johannes Kepler

Fonte: Biografia de Johannes Kepler na Internet[1]

Segundo Baraldi (2018), o astrônomo, matemático e físico alemão Johannes Kepler, nasceu no dia 27 de dezembro de 1571, na cidade de Weil der Stadt e faleceu no dia 15 de novembro de 1630, na Baviera, Alemanha. Quando ainda criança foi acometido de varíola, o que resultou em sequelas na visão e em suas mãos. No entanto, isso não o impediu de progredir com sua educação. Depois que concluiu seu ensino básico ingressou no seminário para estudar teologia, tendo seus planos mudado quando ganhou uma bolsa de estudos para astronomia na

---

[1]Disponível em: https://i1.wp.com/history-biography.com/wp-content/uploads/2018/06/Kepler.jpg?w=1100&ssl=1. Acesso em 05 set. 2021

universidade de Tubinga. Aos 23 anos, lecionou na universidade de Graz, na Itália. O currículo de trabalhos apresentado por Kepler, influencia na trajetória histórica de inúmeras áreas nas quais o mesmo teve contribuição. Este foi o responsável pela elaboração das leis do Movimento planetário, a partir do acesso que teve dos textos de Copérnico sobre a teoria do sol no centro do universo e dos experimentos feitos por Galileu, deixando como legado trabalhos que foram responsáveis por influenciar as teorias de Newton sobre gravitação. Sua biografia conta com inúmeros feitos até a sua morte, muitos dos seus trabalhos registrados sobre ótica foram usados como embasamento em teses acadêmicas sobre a ideia de refração da luz.

Figura 3: Pavimento de São Marcos

Fonte: Pagina disponível na internet [2]

Na matemática contribuiu com o estudo dos poliedros, principalmente ao evidenciar a existência de dois poliedros que não eram convexos, porém eram regulares, em uma época na qual admitia-se a existência somente dos poliedros de Platão como regulares: o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro estrelado. No entanto, muitos registros históricos apontam que esses poliedros já eram conhecidos muito antes de Kepler os evidenciar. Por exemplo, o pequeno dodecaedro estrelado, que compõe a lista dos poliedros regulares não convexos, está representado no pavimento de São Marcos (Figura 3), em Veneza, que data o ano de 1420, muito antes do nascimento de Kepler.

Louis Poinsot foi um matemático cuja principal contribuição matemática é encontrada no campo da geometria. O mesmo nasceu em Paris, França, em 3 de janeiro de 1777, e faleceu nesta mesma cidade em 5 de dezembro de 1859.

[2]Disponível em: http://bp0.blogger.com/_gRpqPlEIMKo/SHKVe97REOI/AAAAAAAAAgM/aZGhjhPepq4/s1600-h/uccello.jpg Acesso em 05 set. 2021

Figura 4: Louis Poinsot

Fonte: Biografia de Louis Poinsot na Internet[3]

Sua vida acadêmica teve início na escola francesa, na Ecole Polytechnique. Após um período, passou a frequentar a Ecole dês Ponts et Chausée, com o objetivo de ser um engenheiro. Quando este percebeu que tinha vocação para o ensino, o mesmo abandou sua ideia inicial de ser engenheiro e investiu na sua carreira como professor. Como possuía um interesse pessoal pela geometria, durante sua carreira profissional buscou aperfeiçoar o seu estudo nessa área. Entre os anos de 1803 e 1809 publicou alguns trabalhos no campo da geometria, mecânica e estatística, mas seu interesse pessoal estava na geometria.

Foi dispensado da Ecole Polytechnique em 1816, no entanto, por ser um grande matemático foi admitido na Academie des Science, para substituir o matemático Joseph Louis Lagrange. Poinsot estudou muitas áreas e apresentou trabalhos importantes em outras vertentes do conhecimento. Seu estudo sobre os sistemas de forças e a atuação em corpos rígidos o levou a criação da mecânica geométrica.

Sobre os poliedros estrelados regulares, Poinsot apresenta em seu artigo publicado em 1809, os quatro poliedros regulares, completando a classe destes poliedros. Seu artigo trata dos dois poliedros já anteriormente apresentados por Kepler e mais dois: o grande dodecaedro e o icosaedro estrelado.

[3]Disponível em: https://xavier.hubaut.info/coursmath/bio/photo/poinsot.jpg. Acesso em 05 set. 2021

2 AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Uma parte do interesse deste trabalho está voltado para o uso dos *softwares* que caracterizam os ambientes de geometria dinâmica. Nesse tipo de ambiente, a partir de uma estrutura disponibilizada pelo próprio programa, o aluno é inserido em um espaço de aprendizagem rico em conjecturas, formas e caracterizações geométricas. Especificamente nesses ambientes é possível construir e manipular ferramentas a partir de fundamentos e conceitos construídos a priori.

Observa-se que é necessário para um entendimento mais amplo deste trabalho compreender o que são e como se caracterizam os ambientes de geometria dinâmica. Assim, um ambiente de geometria dinâmica deve ser construído a partir das ideias fundamentais da geometria, e precisa permitir que quem o manipule possa realizar construções e animações de objetos geométricos com suas ferramentas, fazendo uso das propriedades geométricas que estão disponíveis para esboçá-los e caracterizá-los. De acordo com Gravina (1996, p.6) os ambientes de geometria dinâmica são programas que possuem ferramentas de construção por meio das quais desenhos de objetos e configurações geométricas são obtidos a partir das propriedades que os definem. Uma das vantagens de trabalhar com um ambiente de geometria dinâmica é a possibilidade de esclarecer conceitos geométricos complexos, que precisam muitas vezes de exemplificação. Tomaremos por exemplo dois conceitos importantes para a geometria: a ideia de figura e de desenho. Para compreender a diferença entre os termos desenho e figura comentados acima, Giraldo, Caetano e Matos (2012) comentam que na condição de desenho um objeto matemático é representado sem o propósito de compreensão de suas propriedades e características, ou seja, ele exemplifica de forma estática o objeto matemático. Em contrapartida na condição de figura, o objeto matemático preserva todos os fundamentos da classe à qual ele pertence.

A seguir, é possível ter acesso a uma animação[4] cujo objetivo é exemplificar as ideias de desenho e figura, vamos analisá-las: na construção em questão, observa-se duas representações de losango e ambas foram criadas no ambiente de geometria dinâmica do Geogebra. O losango (a) foi criado tomando-se duas circunferências de mesmo raio, dispostas no plano de forma que os seus raios formaram os lados do losango e os vértices A e B são pontos que se encontram nos centros dessas circunferências. Ao manipularmos esses vértices a figura se altera, mas a mesma ainda permanece um losango, com todas as características da sua classe (desde que a distância entre os pontos A e B não exceda o comprimento do diâmetro das

[4] https://www.geogebra.org/m/nvwrfs8h

circunferências, garantido a existência dos pontos de interseção que formam dois dos vértices do losango). Assim, para a construção desse losango foi necessária uma série de passos que garantem que as propriedades matemáticas de um losango são preservadas. Já o losango (b) apresenta uma construção que ao ser manipulada não garante que a mesma permaneça losango, pois os seus pontos estão livres e sua construção não foi baseada em uma série de passos com propriedades bem estruturadas.

Assim, Giraldo, Caetano e Matos (2012), mostram que a percepção de figura na geometria, corresponde a compreensão de um objeto geométrico, construído a partir de um conjunto de noções fundamentais que incorporam a ele propriedades matemáticas.

Uma outra discussão acerca dos ambientes de geometria dinâmica, tem ganhado proporção em trabalhos acadêmicos. Tal discussão opina sobre a possibilidade do uso desses ambientes de forma mais corriqueira nas salas de aula, uma vez que se tem observado que há pontos positivos na utilização dos ambientes de geometria dinâmica no ensino. Segundo Gravina (2001, p. 88):

> Preliminarmente pode-se afirmar que a base de conhecimento dos ambientes de geometria dinâmica e a interface de trabalho por eles disponibilizada propiciam, com manipulação de *objetos concretos-abstratos* na tela do computador, a ascensão de patamar de conhecimento, de empírico para inserido em modelo teórico.

A utilização dos ambientes de geometria dinâmica pelos alunos, permite que estes possam questionar os resultados das suas ações e atribuir validações às teorias que eles encontrarão durante o processo de aprendizagem. Mas, se por um lado a utilização desses ambientes pode trazer benefícios a aprendizagem, por outro lado se a ferramenta for interpretada e utilizada de forma equivocada pelos alunos, o professor terá um problema. Giraldo, Caetano e Matos (2012) refletem sobre um efeito que pode ter impacto negativo na aprendizagem, este faz referência ao falso entendimento que o aluno pode ter de que as propriedades demonstradas com teoremas matemáticos sobre objetos geométricos não são necessárias, já que parece ser mais fácil evidenciar e interpretar tais propriedades a partir do uso das ferramentas disponíveis no programa. Este problema pode ser contornado fazendo uso das próprias ferramentas do ambiente, por meio de contraexemplos, ou articulando diferentes representações de registros, inclusive a forma tradicional de ensinar.

Agora que o conceito sobre os ambientes de geometria dinâmica foi discutido, vamos comentar especificamente sobre o Geogebra. Esse ambiente foi escolhido para dar suporte ao trabalho, porque apresenta as características necessárias para exemplificar e facilitar o entendimento sobre o conceito de poliedro. Assim, é interessante saber quais são os tipos de ferramentas que esse programa oferece e quais conteúdos geométricos podem ser estudados a partir delas.

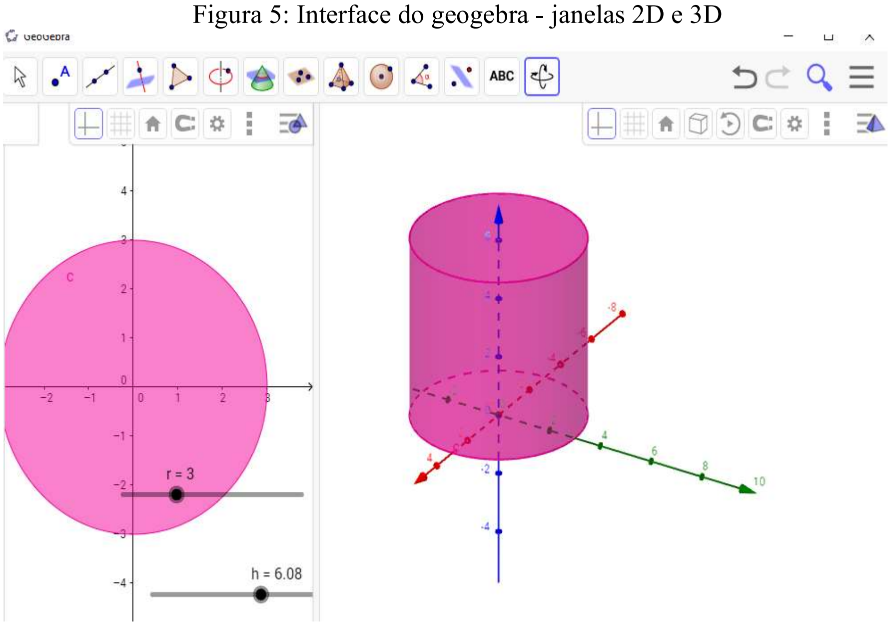
O ambiente de geometria dinâmica utilizado neste trabalho é o Geogebra, um *software* cuja utilização no ensino vem se tornando cada vez mais popular entre os educadores. Já é possível encontrar diversos trabalhos acadêmicos sobre o uso dessa ferramenta na educação básica e na formação superior. De acordo com Nascimento (2012, p.128):

> Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para criar ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS.

O *software* Geogebra como ferramenta dinâmica, oferece condições para os alunos aprenderem conteúdos matemáticos de diversos tipos, por exemplo: álgebra, estatística e cálculo. Vê-se que esse *software*, oferece uma oportunidade de experimentação em diversos campos matemáticos, indo além da geometria, podemos então considerar que esse software é multifuncional.

Além das suas versões para computador, o *software* possui também aplicativos para *smartphone*. O que é bem útil uma vez que o Geogebra também possui uma plataforma digital e interativa, que fornece inúmeros trabalhos sobre conteúdos de matemática.

Figura 5: Interface do geogebra - janelas 2D e 3D



Fonte: Autora (2021)

O Geogebra possui uma janela 3D, na qual é possível aprofundar a aprendizagem sobre os sólidos geométricos e suas características, permitindo a partir da manipulação das ferramentas construir os elementos que constituem um sólido. Esse *software* possui a vantagem de poder ser encontrado de forma gratuita na internet, ou seja, o acesso a uma ferramenta de grande suporte educacional e gratuita. No entanto, recentemente uma empresa de tecnológica indiana, Byju's, comprou o Geogebra[5], mas, até o momento, o mesmo ainda permanece com a possibilidade de acesso gratuito.

As qualidades do Geogebra como ferramenta para interpretação dos sólidos, serão percebidas a partir da análise do capítulo 2 e 3 deste trabalho. As construções referentes aos poliedros de Kepler Poinsot, visam apresentar um conceito matemático e visual menos complexo desses sólidos, no entanto, para compreende-los é necessário estar ciente do conteúdo matemático, que facilitará a compreensão de suas características

[5] Disponível em: https://techcrunch.com/2021/12/08/byjus-geogebra-austria. Acesso em: 12 Jan 2022

3 POLÍGONOS: UMA INTRODUÇÃO PARA OS POLIEDROS

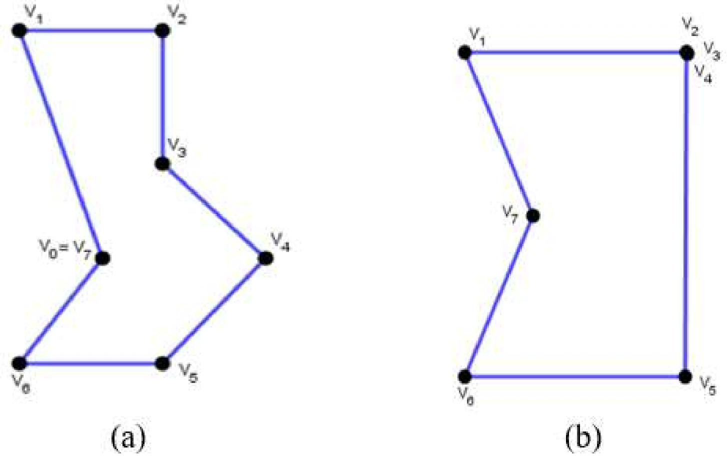
A proposta desse capítulo é fazer uma revisão sobre os conceitos iniciais, que são necessários para caracterizar os poliedros de Kepler-Poinsot como regulares. Assim, um conceito importante para ser entendido neste trabalho é o de polígono. Por isso deve-se analisar, qual a melhor definição para ser adotada neste trabalho. De acordo com Branko Grünbaum (2003) há várias formas diferentes de definir polígono, cabe então a quem está desenvolvendo a teoria escolher aquela que melhor se adequa a seus propósitos. Por exemplo, quando o conceito de polígono é apresentado pelo professor na sala de aula, a definição é descrita de forma superficial e com uma linguagem simples, essa definição normalmente descreve, que polígono se resume a uma figura plana fechada, formada por segmentos de reta que não se cruzam, a não ser nas suas extremidades, e que, sendo consecutivos, não são colineares. Porém, para este trabalho, a definição anterior não seria suficiente para garantir que as construções apresentadas nos demais capítulos, estivessem bem embasadas. Foi preciso buscar uma definição diferente, que nos permitisse descrever um polígono a partir de outro aspecto. As ideias discutidas a seguir, estão embasadas no artigo de Branko Grünbaum (2003), que foi o principal material literário usado para dar subsídios na construção deste capítulo e do próximo.

3.1 Definição de Polígono

Definição: Para essa definição de polígono, vamos considerar uma sequência V_i de pontos com n+1 termos, tais que $V_0 = V_n$. Um *polígono* é o conjunto formado pela união dos segmentos V_iV_{i+1}, onde esses segmentos são chamados de *lados* do polígono e os pontos da sequencia V_i são chamados de *vértices* do polígono.

De acordo com a definição acima, é possível que em um polígono existam vértices, que são distintos, mas que são representados pelo mesmo ponto. Dentro dessa possibilidade, pode acontecer por exemplo que uma aresta possua comprimento nulo, ou que lados de um polígono sejam colineares. Observe que a Figura 6, apresenta polígonos que atendem a definição usada neste trabalho, vamos dar atenção especial para a Figura 6b, onde vemos que existem vértices do polígono que coincidem. Na ilustração, três vértices diferentes se sobrepõem, podemos então considerar que os segmentos V_2V_3 e V_3V_4 são nulos. Assim, apesar dessa figura ter seu aspecto visual igualado ao de um pentágono, a sua construção define que a mesma é um heptágono.

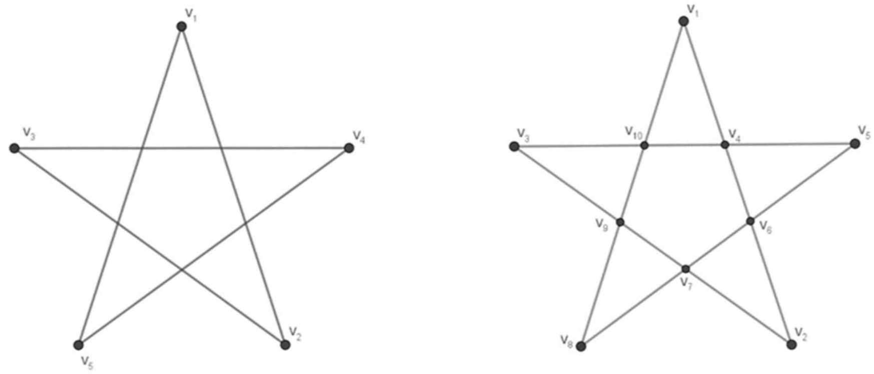
Figura 6: Polígonos



Fonte: Autora (2022)

A Figura 7 apresenta outras duas figuras planas, que pela definição são polígonos. Ambas apresentam seus aspectos visuais iguais, no entanto, apesar de apresentarem a mesma constituição de pontos, são diferentes porque seus números de vértices e lados também são diferentes.

Figura 7: Figuras Poligonais

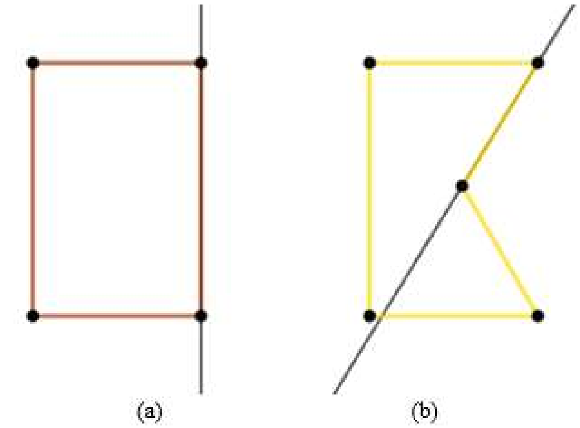


(a) (b)

Fonte: Autora (2022)

É possível classificar os polígonos como convexos ou não convexos. Observe a Figura 8, a partir dela vamos entender o princípio para fazer essas considerações.

Figura 8: Polígonos convexos e não convexos



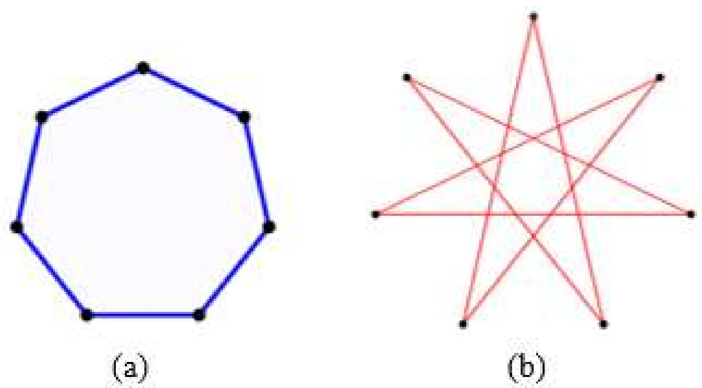
Fonte: Autora (2022)

Se tomarmos um polígono qualquer, e nesse polígono traçarmos uma reta suporte em qualquer um dos seus lados, se todos os lados do polígono ficarem em apenas um dos semiplanos criados pela reta suporte, então o polígono e chamado convexo. Caso contrário, será chamado não convexo.

3.2 Polígonos Regulares

Um polígono regular, é um polígono onde todos os seus lados são iguais e todos os seus ângulos internos são congruentes. Como já está definido o que é um polígono, e já sabemos o que caracteriza um polígono regular, pode-se dizer, sem erro, que devem existir polígonos regulares que são convexos e não convexos. Observe a Figura 9, na qual as imagens são representações de polígonos regulares do tipo convexos (Figura 9a) e não convexos (Figura 9b).

Figura 9: Polígonos Regulares



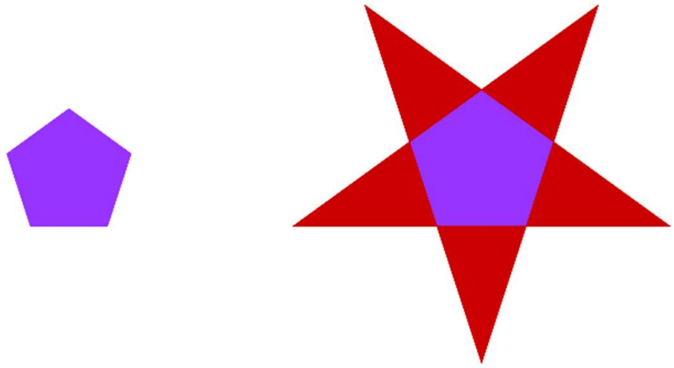
Fonte: Autora (2021)

3.3 Polígonos Estrelados

Para caracterizar o que é um polígono estrelado, é necessário compreender o significado de obter esse polígono, por meio de um processo chamado estrelação.

De acordo com esse processo para se obter um polígono estrelado, deve-se primeiro prolongar todos os lados de um polígono qualquer, a partir do uso das retas suportes desses lados. Se em determinado momento essas retas se intersectarem, essas intersecções formarão novos pontos, que serão os novos vértices da nova figura e os segmentos de reta limitados por esses vértices serão os novos lados. A Figura 10 é um exemplo desse tipo de polígono. Com base nas discussões anteriores, é possível afirmar que para um polígono ser estrelado regular, ele precisa ser ao mesmo tempo regular e formado através do processo e estrelação.

Figura 10: Pentagrama Regular



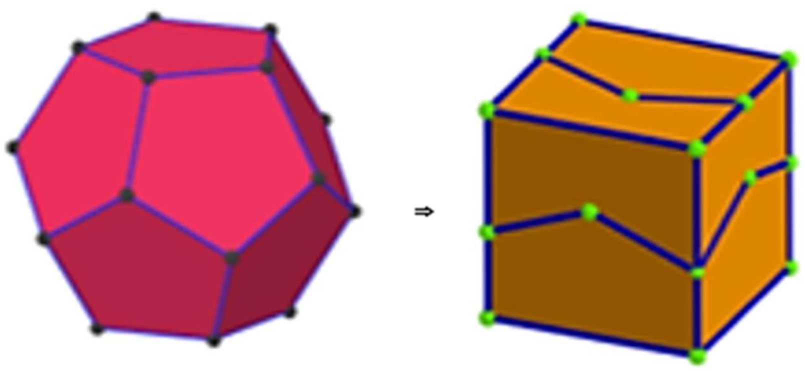
Fonte: Autora (2021)

4 A DEFINIÇÃO DE POLIEDRO

Neste capítulo, nos embasamos em um artigo de Branko Grünbaum (2003) para comentar sobre a definição de poliedro. De acordo com o autor, qualquer definição de poliedro está correta quando se leva em consideração, qual é o propósito da definição. Isso porque as definições mudam conforme a necessidade da aplicação do conceito. Veja que no decorrer da história da geometria, a cada época novos sólidos são descobertos, o que resulta na necessidade de admitir novas formas de caracterizar esses sólidos. Quando se fala sobre poliedros nesse sentido, percebe-se que essas novas formas de caracterização, são na verdade reinterpretações do conceito que já existe, feitas para abranger uma quantidade maior de sólidos. Assim, é possível dizer que todas as definições existentes sobre poliedro são válidas, pois suas aplicações dependem do que queremos considerar como poliedro.

No artigo, Branko Grünbaum (2003) faz um comentário interessante sobre a distinção entre a estrutura combinatória de um poliedro e a interpretação geométrica dessa estrutura. Por exemplo, na Figura 11, vemos à esquerda um dodecaedro e à direita um poliedro que poderíamos interpretar geometricamente como sendo um cubo. Entretanto, se admitirmos que faces adjacentes de um poliedro podem ser coplanares ou que arestas adjacentes podem ser colineares, podemos interpretar o "cubo" da direita como tendo faces pentagonais e, considerando a combinação de vértices, arestas e faces de nosso "cubo", podemos afirmar que sua estrutura combinatória é a mesma do dodecaedro que aparece à esquerda, ou ainda, que este "cubo" é, na verdade, segundo sua estrutura combinatória, um dodecaedro. Para considerar uma situação desse tipo, é necessário abstrair a ideia de poliedro, ou seja, os poliedros que estamos considerando estão no campo da abstração.

Figura 111: Estrutura combinatória do dodecaedro.

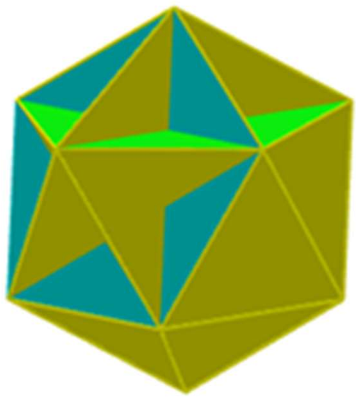


Fonte: Autora (2022)

Antes de analisarmos a definição que será usada para poliedro neste capítulo, vamos fazer uma observação sobre outra definição de poliedro. O propósito disso é mostrar que é preciso fazer uma escolha adequada daquilo que estamos entendendo como sendo um poliedro se queremos que os poliedros de Kepler-Poinsot, quando interpretados como regulares, possam ser ainda considerados como poliedros. A definição proposta por Lima et. al (2006) considera poliedro a reunião de uma quantidade finita de polígonos planos, chamados faces. Ainda segundo essa definição, o lado de um desses polígonos é lado de apenas um outro polígono e a interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum ou é um vértice ou é vazia. Os lados desses polígonos são chamados arestas do poliedro e os vértices desses polígonos são chamados vértices do poliedro.

Veja que essa definição limita a quantidade de poliedros que serão englobados por ela, em especial os poliedros de Kepler-Poinsot, quando encarados como poliedros regulares. Isso porque suas faces se intersectam, quando as interpretamos como sendo pentagonais. Observe a Figura 12, na qual temos a representação do grande dodecaedro, nesse poliedro as faces são evidenciadas pelos polígonos de cor azul e verde, as faces desse poliedro são todas pentágonos. Veja que a interseção entre as faces azul e verde, não pode ser considerada um vértice, ou uma aresta ou ser vazia. Logo pela definição anterior, essa construção não seria poliedro.

Figura 122: Faces pentagonais se intersectando.



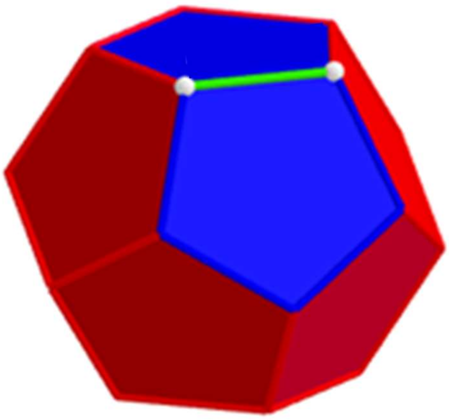
Fonte: Autora (2022)

Agora analisaremos a definição de Branko Grünbaum (2003) para poliedro. A definição descrita a seguir, consiste em admitir condições que permitam que um conjunto de vértices, faces e arestas sejam considerados poliedro abstrato. Logo, esse conjunto de elementos será chamada de poliedro abstrato se considerarmos que:

I. Uma aresta qualquer deve incidir necessariamente em dois vértices distintos, e essa aresta deve ser comum a duas faces distintas.

Veja que de acordo com a condição I, as duas faces distintas do poliedro abstrato devem incidir nos dois vértices distintos, a partir da aresta que é comum as faces. Observe a condição I, a partir da Figura 13.

Figura 13: Representação da condição I



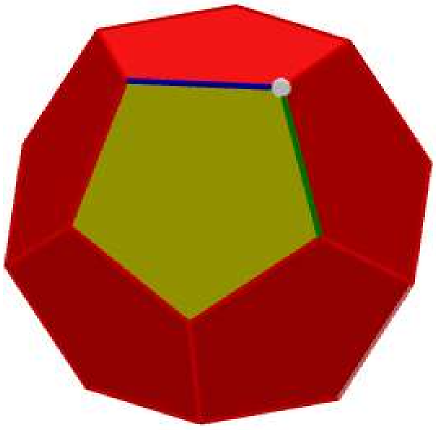
Fonte: Autora (2022)

Se considerarmos a aresta verde que está incidindo nos vértices brancos do poliedro, abaixo, teremos duas faces azuis distintas, que estão incidindo nos vértices brancos, através da aresta verde.

II. Para cada aresta, dados um vértice e uma face incidentes com ela, há precisamente uma outra aresta incidente com o mesmo vértice e face. Esta outra aresta é dita adjacente à primeira.

A condição II está exemplificada pela Figura 14, onde vemos que uma aresta (azul) está incidindo em um vértice (branco), e que uma face (amarela) incide nesse vértice através da aresta. Logo, existe uma outra aresta (verde), que incide no mesmo vértice, e que pertence a mesma face. Então as arestas (azul e verde) são adjacentes.

Figura 14: Representação da condição II

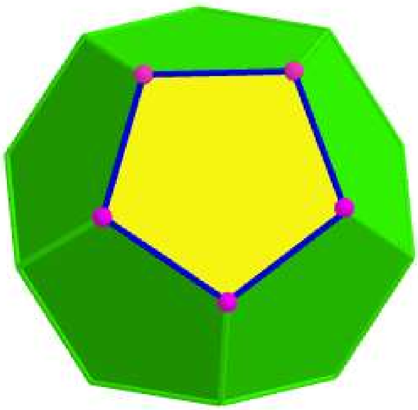


Fonte: Autora (2021)

III. Para cada face, deve existir um número inteiro *k,* tal que as arestas incidentes com as faces, e os vértices incidentes com elas por meio das arestas, formam um circuito no sentido de que elas podem ser legendadas como $V_1A_1V_2A_2V_3A_3 \dots V_{k-1}A_{k-1}V_kA_kV_1$, em que cada aresta A_i incide nos vértices V_i e V_{i+1}, e é adjacente às arestas A_{i-1} e A_{i+1}. Todas as arestas e todos os vértices do circuito são distintos, todos os índices são tomados $mod\ k$, e $k \geq 3$.

Pode-se dizer, que a condição acima define que uma face será determinada, a partir de um circuito definido por uma sequência ordenada de vértices e arestas, onde: arestas e vértices devem ser distintos, o percurso descrito deve ter início e final no mesmo vértice e para que o circuito configure uma face, é preciso haver pelo menos três vértices. A Figura 15 exemplifica o que descrevemos acima, nela vemos uma face (amarelo), limitada por uma sequência determinada por vértices(rosa) e arestas (azul).

Figura 15: Representação da condição III

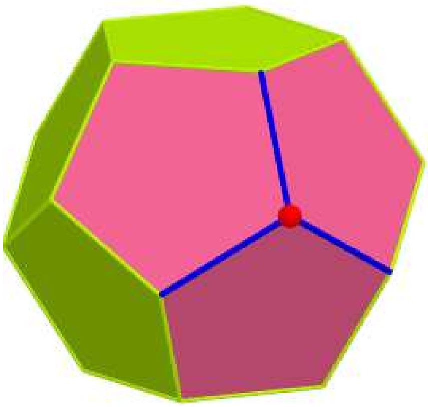


Fonte: Autora (2022)

IV. Para cada vértice, deve existir um número inteiro j, tal que as arestas incidentes com os vértices, e as faces incidentes com elas por meio das arestas, formam um circuito no sentido de que elas podem ser legendadas como $F_1A_1F_2A_2F_3A_3 \ldots F_{j-1}A_{j-1}F_jA_jF_1$, em que cada aresta A_i incide nas faces F_i e F_{i+1}, e é adjacente às arestas A_{i-1} e A_{i+1}. Todas as arestas e todas as faces do circuito são distintas, todos os índices são tomados $mod\ j$, e $j \geq 3$.

A condição acima descreve a existência de um circuito, definido por uma sequência ordenada de faces e arestas em torno de um vértice. Perceba que ao olharmos para essa configuração, podemos dizer que esse circuito define o que chamamos de ângulo poliédrico, onde: arestas e faces devem ser distintas, o percurso em torno do vértice deve ter início e final na mesma face e para que o ângulo poliédrico seja admitido, é necessário no mínimo 3 faces em torno de um vértice. Veja a Figura 16, na qual pode-se ver um circuito em torno de um vértice (vermelho), formado de forma consecutiva por arestas (azul) e faces (rosa).

Figura 16: Representação da condição IV

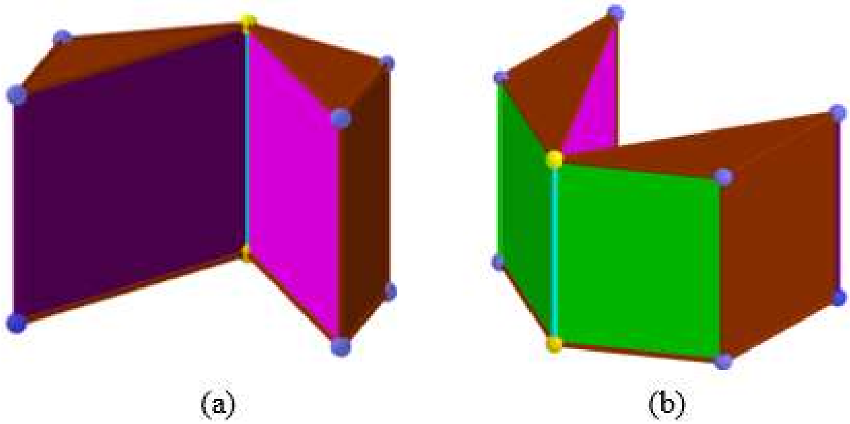


Fonte: Autora (2022)

V. Se duas arestas são incidentes com os mesmos dois vértices (faces), então as quatro faces (vértices) incidentes com as duas arestas são todas distintas.

Quando pensamos na definição de polígono, temos a possibilidade por exemplo, de que dois vértices distintos sejam representados pelo mesmo ponto, e uma consequência disso seria pensar que em um poliedro abstrato é possível sobrepor duas arestas distintas e consequentemente dois pares de vértice distintos, então, as quatros faces desse poliedro ainda seriam distintas. Observe que a Figura 17 exemplifica a condição acima, pois temos um poliedro que possui duas arestas (azul) distintas que se sobrepõem e um par de vértice (amarelo). É possível ver que cada par de face em evidência, pertence a uma das duas arestas, que incidem no mesmo par de vértice.

Figura 17: Representação da condição V

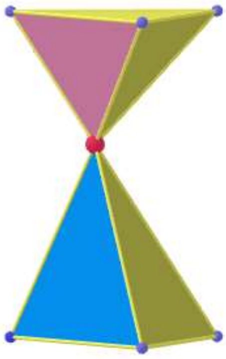


Fonte: Autora (2022)

VI. Existe um número inteiro j, tal que cada par F, F^* de faces pode ser conectado através de uma cadeia finita $F_1A_1F_2A_2F_3A_3 \dots F_{j-1}A_{j-1}F_j$ de arestas e faces incidentes, com $F_1 = F$ e $F_j = F^*$.

A condição VI mostra que no poliedro abstrato, as faces podem ser percorridas, partindo sempre de uma face, passando por uma aresta e chegando em outra face. Isso garante, que um poliedro não será obtido a partir da combinação de outros poliedros. Observe a Figura 18, onde temos uma construção com duas pirâmides que compartilham um único vértice, não é possível sair de uma face (azul), passar por uma aresta e chegar em outra face (rosa).

Figura 18: Contraexemplo da condição VI

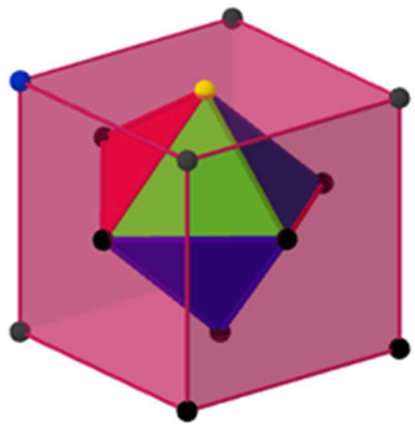


Fonte: Autora (2012)

VII. Existe um número inteiro k, tal que cada par V, V^* de vértices é conectado através de uma cadeia finita $V_1A_1V_2A_2V_3A_3 \dots V_{k-1}A_{k-1}V_k$ de arestas e vértices incidentes, com $V_1 = V$ e $V_k = V^*$.

Pela condição VII, a construção da Figura 19 não será considerada um poliedro. Pois, de acordo com a condição, para ser um poliedro abstrato deve ser possível percorrer o sólido partindo sempre de um vértice, passando por uma aresta, e chegando em outro vértice. Uma composição entre dois poliedros, como na ilustração, não satisfaz a condição. Veja que na imagem, nem sempre é possível sair de um vértice (amarelo), passar por uma aresta e chegar em outro vértice (azul).

Figura 19: Contraexemplo da condição VII



Fonte: Autora (2022)

Considerando que uma construção satisfaça todas essas condições, então a mesma será um poliedro abstrato. Percebe-se que a obtenção do dual de um poliedro é garantida pelas condições acima simplesmente trocando o termo face pelo termo vértice e vice-versa em cada uma delas. A seção seguinte tem a intenção de apresentar algumas classificações feitas para os poliedros.

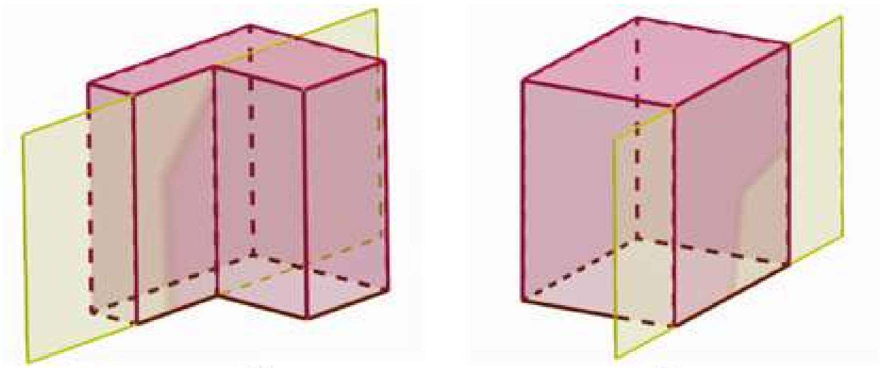
5 CLASSIFICAÇÕES DOS POLIEDROS

Neste capítulo trataremos de algumas classificações e classes específicas de poliedros: poliedros convexos e não convexos, poliedros de Platão, poliedros estrelados e poliedros regulares.

5.1 Poliedros Convexos e Não Convexos

Um poliedro é descrito *convexo* de modo análogo a forma como se descreve que um polígono é convexo. Se tomarmos o plano que passa em qualquer uma das faces do poliedro, e acontecer de todas as faces desse poliedro estarem contidas no mesmo semiespaço criado pelo plano, então o poliedro é convexo, caso ocorra o contrário ele é chamado não convexo. Observe na Figura 20a a ilustração de um poliedro não convexo e na 20b um poliedro convexo.

Figura 20: Poliedro não convexo e convexo



(a) (b)

Fonte: Autora (2021)

5.2 Poliedros de Platão

Antes de caracterizar o que é um poliedro regular, é preciso fazer uma distinção entre poliedros de Platão e poliedros regulares. Apesar de algumas fontes indicarem ambos sendo os mesmos, neste trabalho será considerado que todo poliedro regular é um poliedro de Platão, porém nem todo poliedro de Platão é um poliedro regular. Para um poliedro ser considerado de Platão ele deve satisfizer algumas condições: todas as faces do poliedro devem possuir o mesmo número (n) de arestas; em todos os seus vértices devem concorrem o mesmo número (m) de arestas; e por último, a relação de Euler $(V - A + F = 2)$ deve ser satisfeita. A Tabela 1, apresenta algumas das características dos poliedros de Platão.

Tabela 1: Características dos Poliedros de Platão

Poliedro	Tipo de Faces	Nº faces	Nº vértices	Nº arestas
Tetraedro	Triangular	4	4	6
Hexaedro	Quadrangular	6	8	12
Octaedro	Triangular	8	6	12
Dodecaedro	Pentagonal	12	20	30
Icosaedro	Triangular	20	12	30

Fonte: (Autora 2021)

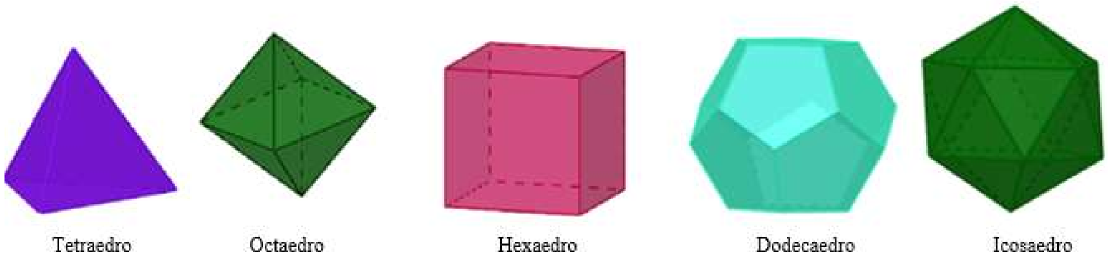
Platão foi um dos primeiros matemáticos a apresentar interesse no estudo desses sólidos, e através de provas formais, conseguiu concluir de forma assertiva que existem somente cinco classes de poliedros convexos que podem ser regulares, e estes poliedros são justamente os poliedros da tabela acima, por isso é comum trabalhos que associam poliedros convexos regulares com Poliedros de Platão. Porém é possível encontrar sólidos que satisfaçam as condições citada acima para serem de Platão, mas que não são regulares. Surge então a necessidade de compreender quais as condições necessárias para ser um poliedro regular.

5.3 Poliedros Regulares

A compreensão sobre o que é um poliedro regular será importantíssima para entender a caracterização dos poliedros de Kepler-Poinsot como poliedros deste tipo. Sendo assim, definimos um poliedro regular como sendo um poliedro cujas faces são todas polígonos regulares iguais, e cujos ângulos poliédricos são todos congruentes entre si.

Em geral, quando se discute na escola a respeito de poliedros regulares, somente os poliedros convexos costumam ser apresentados. Mas, nos capítulos seguintes, vai ficar claro que existem mais poliedros que podem ser considerados regulares. A Figura 21, apresenta a representação dos cinco poliedros convexos regulares existentes.

Figura 21: Poliedros convexos regulares



Fonte: Autora (2021)

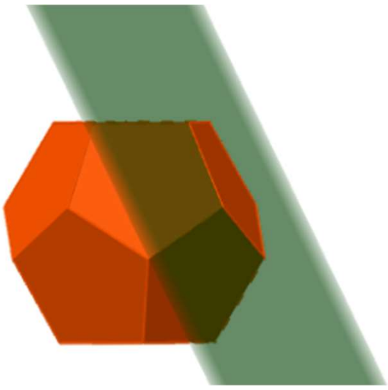
Existem outros poliedros que também são chamados de regulares, sendo eles os quatro poliedros de Kepler-Poinsot. No capítulo 6, será explicado porque os mesmos são considerados regulares.

De acordo com Sartor (2013), os primeiros registros matemáticos sobre os poliedros de Kepler-Poinsot, foram datados a partir de estudos feitos pelo matemático alemão Johannes Kepler, o mesmo deu visibilidade aos poliedros que hoje são chamados de pequeno dodecaedro estrelado e grande dodecaedro. Porém Kepler não foi o primeiro a descobrir a existência destes sólidos, visto que há representações dos mesmos que datam de muito antes de Kepler. Louis Poinsot foi outro matemático que apresentou interesse nos estudos dos sólidos estrelados, com suas pesquisas conseguiu se aprofundar nos estudos sobre os poliedros já citados e mostrar que existiam mais dois poliedros que se caracterizavam por serem não convexos e regulares (o grande dodecaedro estrelado e o grande icosaedro), mais adiante esses quatro poliedros são definidos como poliedros não convexos regulares. Ficou a cargo de Cauchy mostrar que existem somente nove poliedros regulares: cinco poliedros convexos e quatro não convexos. Para saber mais a respeito da prova de Cauchy recomenda-se que o leitor consulte Pereira (2019), que aparece entre as referências deste trabalho.

5.4 Poliedros Estrelados

Um poliedro estrelado é descrito a partir do modo como é obtido. Sendo assim, para obter-se um poliedro estrelado, realiza-se um processo chamado de estrelação, que consiste na ideia de prolongar as faces de um poliedro nos planos que as contém, até que estas se encontrem. A intersecção dessas faces irá formar novas arestas, assim como novos vértices e novos tipos de faces. Com o auxílio das ferramentas do Geogebra, vamos tornar esta ideia mais clara. A Figura 22 representa um dodecaedro regular e o plano que contém uma de suas faces.

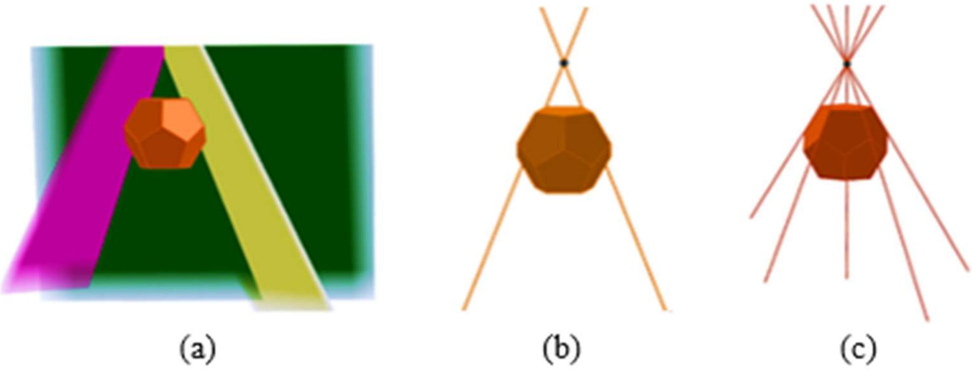
Figura 22: Plano que contém uma das faces do dodecaedro



Fonte: Autora (2021)

Já na Figura 23a abaixo vemos três planos se encontrando a partir do prolongamento das faces do dodecaedro. Na Figura 23b as retas que são visualizadas representam as intersecções duas a duas dos planos que contem três das faces de um dodecaedro e o ponto de intersecção entre essas retas, que formará o vértice do poliedro estrelado obtido. A Figura 23c mostra todas as retas que poderiam ser produzidas a partir de interseções dos planos que contém faces do dodecaedro e que passam pelo vértice que aparece na Figura 23b.

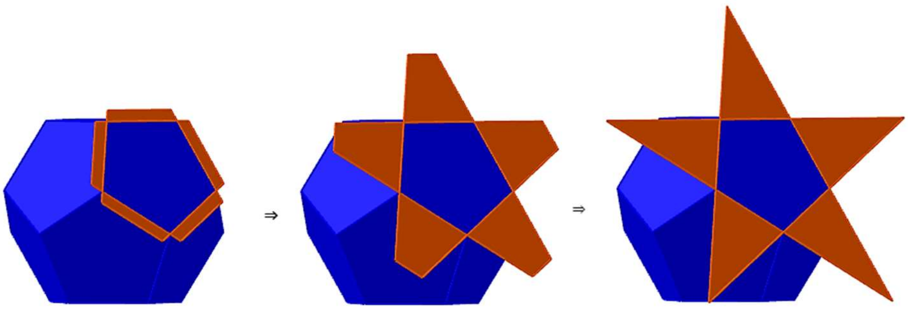
Figura 23: Estrelação de uma das faces do dodecaedro



Fonte: Autora (2021)

A Figura 24, exemplifica o processo de estrelação do polígono que representa uma das faces do dodecaedro. Quando esse processo é aplicado nas outras faces, o poliedro obtido será um sólido estrelado. Se este processo for realizado em outros poliedros e os planos se intersectarem, então novos poliedros serão formados.

Figura 24: Prolongamento do plano de uma das faces do dodecaedro

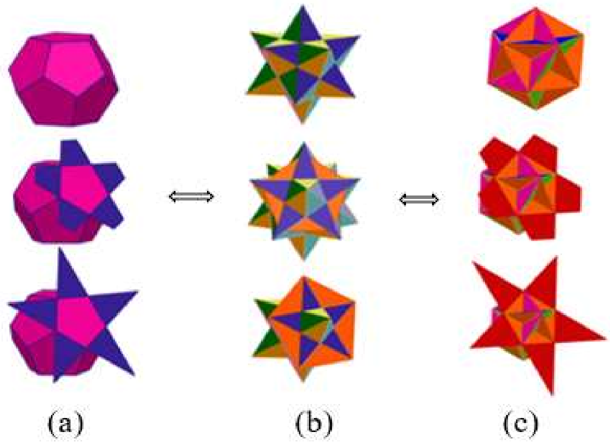


Fonte: Autora (2021)

O Geogebra permite criar animações que exemplificam o significado de algumas definições, e essas animações facilitam a interpretação visual que algumas figuras precisam ter, permitindo adicionar a elas maior significado. Assim, a animação[6] que exemplifica o processo de estrelação de uma das faces do decaedro foi disponibilizada no site do Geogebra, e sua manipulação permite uma melhor compreensão da ideia de estrelação.

Uma curiosidade sobre estrelar poliedros é que, assim como no caso dos polígonos, alguns sólidos, como o cubo, por exemplo, não podem dar origem a um poliedro estrelado. No entanto alguns outros permitem mais de uma estrelação, que é o caso do dodecaedro e do icosaedro regulares. O dodecaedro regular permite até três estrelações, e as três estrelações obtidas resultam em sólidos estrelados regulares. Essas três estrelações completam, junto com a 16ª estrelação do icosaedro, a existência única dos quatros poliedros não convexos regulares ou poliedros de Kepler-Poinsot. A Figura 25, busca exemplificar as três estrelações do dodecaedro, sendo que cada estrelação gera uma face diferente.

Figura 25: Primeira, segunda e terceira estrelação do dodecaedro



Fonte: Autora (2022)

Na Figura 25a observa-se a primeira estrelação do dodecaedro regular, que produzirá o poliedro cujas faces são pentagramas regulares. Na segunda estrelação as faces são pentágonos regulares, e na terceira (Figura 25c) novamente pentagramas regulares.

O applet[7] desenvolvido para exemplificar as três estrelações de uma das faces do dodecaedro, permite que tenhamos uma noção mais clara sobre como o processo de obter as faces do poliedro funciona.

Deve-se agora aplicar os conceitos revisados aos poliedros de Kepler-Poinsot. As informações anteriores junto com as animações produzidas no Geogebra, irão facilitar a compreensão das características desses poliedros.

[6] https://www.geogebra.org/m/rkdeufng
[7] https://www.geogebra.org/m/nhtkr68e

6. OS POLIEDROS REGULARES NÃO CONVEXOS

Neste capítulo trataremos dos poliedros de Kepler-Poinsot, buscando, com o auxílio de applets desenvolvidos especialmente para essa finalidade, conhecer as características destes poliedros e compreender porque os mesmos são considerados poliedros regulares. Além disso, os nomes atribuídos a cada um dos quatro poliedros passam a fazer mais sentido quando observamos o processo de construção dos mesmos a partir do dodecaedro e do icosaedro. Recomenda-se fazer o acesso dos *links* disponíveis no decorrer do trabalho para uma melhor compreensão das explicações e análises descritas.

6.1 Elementos Constituintes

Os poliedros de Kepler-Poinsot são poliedros regulares não convexos, onde todas as faces desses poliedros são polígonos regulares congruentes (convexos ou não convexos) e, assim como nos poliedros de Platão, em todos os seus vértices concorrem o mesmo número de arestas. São eles apenas quatro: o pequeno dodecaedro estrelado, o grande dodecaedro, o grande dodecaedro estrelado e o grande icosaedro.

A principal diferença entre os poliedros de Kepler-Poinsot e os poliedros de Platão reside em sua convexidade, e um ponto a se considerar em relação ao estudo dos sólidos estrelados regulares está na dificuldade de conseguir identificar claramente quais são os elementos que estruturam esses poliedros, pois, ao contrário do que ocorre com os poliedros convexos regulares, neles reconhecer quem são as faces, os vértices e as arestas pode ser uma tarefa não tão trivial.

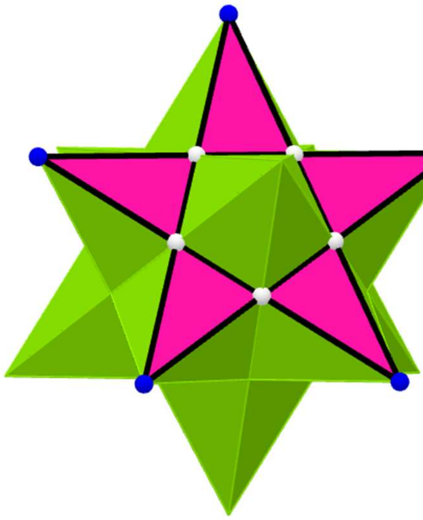
Por isso, para interpretar os sólidos de Kepler-Poinsot como poliedros regulares é necessário identificar de maneira adequada quais são os elementos que compõem o poliedro, ou seja, quais os polígonos que constituem suas faces, os segmentos que correspondem às suas arestas e quais os pontos que são efetivamente seus vértices. A animação[8] desses elementos foi criada para dar maior clareza dos mesmos durante a manipulação dos sólidos, uma vez que, é muito fácil nos poliedros estrelados regulares confundir os seus elementos e descaracterizar o sólido enquanto poliedro regular.

Visualizada a animação anterior, faz-se uma análise da Figura 26. Nela vê-se a representação de um sólido de Kepler-Poinsot chamado pequeno dodecaedro estrelado, no qual foram destacados os elementos que o constituem. Destacada na cor rosa está visível uma das

[8] https://www.geogebra.org/m/bhtw9gdm

12 faces do poliedro. Logo, percebe-se que cada face desse poliedro deve ser encarada um único pentagrama regular e não como cinco faces triangulares, as quais nem mesmo seriam triângulos equiláteros, mas apenas triângulos isósceles.

Figura 26: Vértices, faces e arestas do pequeno dodecaedro estrelado



Fonte: Autora (2021)

Ainda na Figura 26, as arestas do pentagrama são os segmentos pretos que ligam os vértices indicados de azul. Ressalta-se que os pontos brancos não são vértices do pentagrama (nem do poliedro), feita essa caracterização, então este sólido realmente é um poliedro regular.

6.2 Poliedros de Kepler-Poinsot

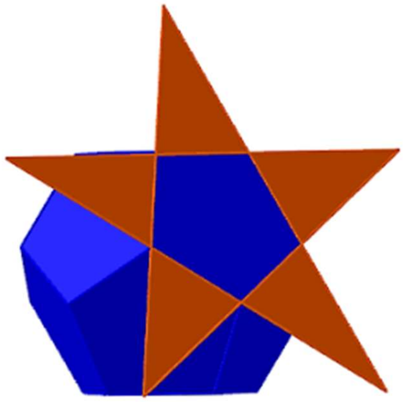
Nesta seção nos dedicaremos a cada um dos poliedros de Kepler-Poinsot, caracterizando-os e utilizando animações produzidas por nós e disponibilizadas na plataforma on-line do Geogebra para complementar as explicações dadas.

6.2.1 Pequeno Dodecaedro Estrelado

O pequeno dodecaedro estrelado configura a primeira estrelação do dodecaedro e foi o primeiro poliedro a ser evidenciado por Kepler. Tem como característica o fato de que as suas faces são formadas por um polígono regular chamado pentagrama. Pode-se observar que diferente da construção do dodecaedro no qual concorrem três arestas em cada vértice, no pequeno dodecaedro estrelado concorrem em cada vértice cinco arestas. Assim, o mesmo é constituído por 12 vértices, 12 faces e 30 arestas.

Na Figura 27, a face obtida a partir da primeira estrelação do dodecaedro é um pentagrama regular, nessa imagem o pentagrama está no mesmo plano que uma das faces pentagonais do dodecaedro. Logo, uma forma inteligente de visualizar o conjunto de faces do pequeno dodecaedro estrelado, seria pensar em doze pentagramas inseridos sobre cada uma das faces do dodecaedro.

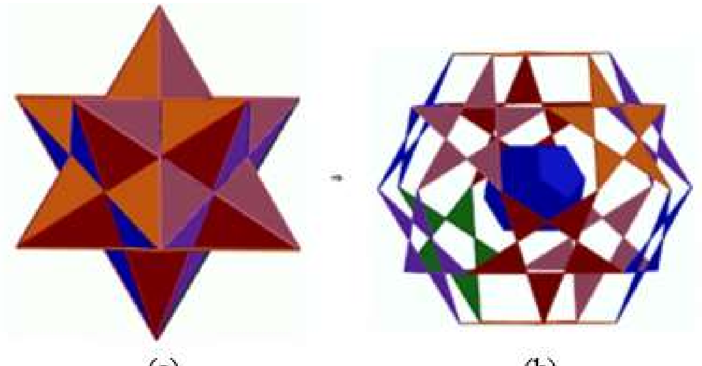
Figura 27: Face do pequeno dodecaedro estrelado



Fonte: Autora (2021)

Observe as Figuras 28a e 28b, que representam, respectivamente, a animação[9] que exemplifica a etapa final do pequeno dodecaedro estrelado e o afastamento das faces do mesmo poliedro.

Figura 28: Pequeno dodecaedro estrelado e afastamento das faces



(a) (b)

Fonte: Autora (2021)

Uma caraterística interessante desse poliedro é que, para o pequeno dodecaedro estrelado, entendido como um poliedro regular, a relação de Euler não vale, pois o mesmo, nessa circunstância, não é homeomorfo a esfera, mas observa-se que se considerarmos as faces

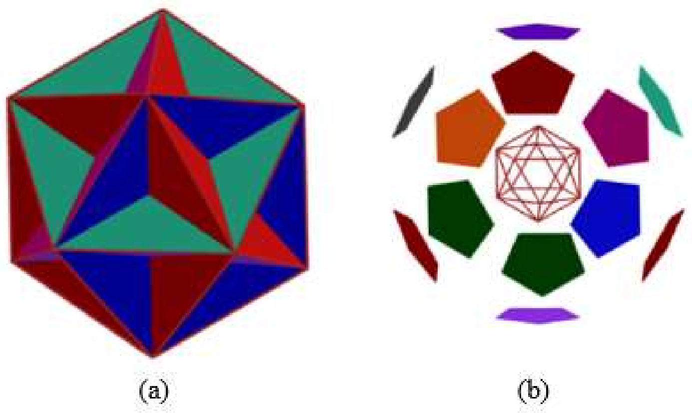
[9] https://www.geogebra.org/m/x4tycuhb

os vértices e as arestas de forma diferentes teríamos que a fórmula de Euler seria satisfeita. Para isso consideraríamos a faces do poliedro como triângulos isósceles (60 faces), seus lados com (90 arestas) e seus vértices com (32 vértices). Uma curiosidade interessante sobre os poliedros de Kepler-Poinsot, é a de que estes só podem ser obtidos a partir da estrelação de poliedros regulares, especificamente do dodecaedro e do icosaedro.

6.2.2 Grande Dodecaedro

O grande dodecaedro é obtido a partir da segunda estrelação do dodecaedro, ou seja, por meio do prolongamento das faces do pequeno dodecaedro estrelado. O mesmo tem como característica o fato de que as suas faces são pentagonais e possui, assim como o pequeno dodecaedro estrelado, 12 vértices, 12 faces e 30 arestas.

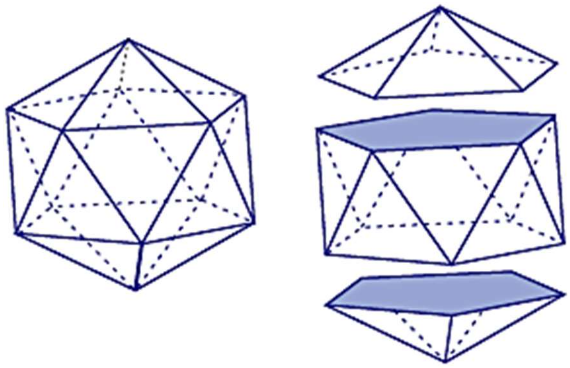
Figura 29: Estágio Inicial e final da animação do grande dodecaedro.



Fonte: Autora (2021)

Pode-se interpretar o sólido representado pela Figura 29a de uma forma diferente. Para isso vamos considerar algumas relações entre o dodecaedro e o icosaedro. Observe a Figura 30, veja que ao analisarmos o icosaedro regular, podemos dividi-lo em três partes: duas pirâmides de base pentagonal e um antiprisma com base pentagonal.

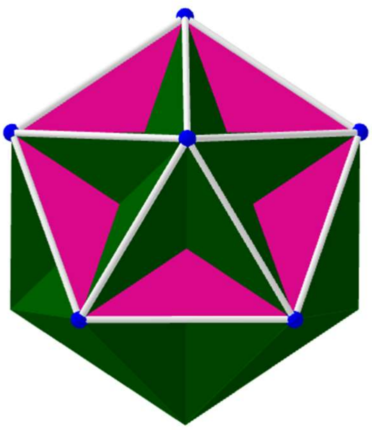
Figura 30: Icosaedro



Fonte: Imagem retirada da internet[10]

Pode-se dizer então observando a imagem, que é possível inscrever pentágonos nas bases que são descritas quando o icosaedro é dividido. Encontrando todos esses pentágonos no interior do dodecaedro, ao retirarmos as faces triangulares, o poliedro resultante será o Grande Dodecaedro. Isso mostra que há relações próximas entre os dois poliedros: dodecaedro e icosaedro. Nesta animação[11], é possível identificar todos os pentágonos aos quais nos referimos. Como o Geogebra permite construir um mesmo sólido de diversas formas, a animação anterior foi construída a partir do icosaedro, mas observa-se que para obter esse sólido por meio de estrelação, deve-se estrelar o dodecaedro regular duas vezes.

Figura 31: Vértices, faces e arestas do grande dodecaedro



Fonte: Autora (2021)

Compreendendo agora quais são as faces do grande dodecaedro, pode-se notar que estas se cruzam e que em cada vértice concorrem cinco arestas. A Figura 31, ilustra os elementos que compõem este poliedro. Nela, a parte em destaque, na cor rosa, representa uma das faces

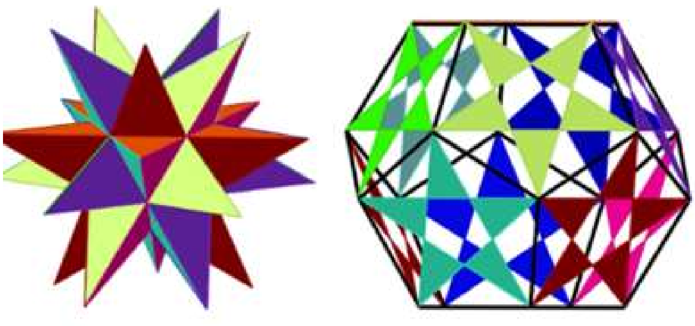
[10]Disponível em: https:// www.rpm.org.br/cdrpm/74/10.html. Acesso em: 18 jan. 2022
[11] https://www.geogebra.org/m/xwfqrenq

pentagonais do grande dodecaedro, os pontos azuis são alguns dos vértices que devem ser considerados para que o sólido seja regular e, de branco, algumas das arestas (note que estes são os únicos vértices e arestas do poliedro regular que estão contidos neste semiespaço determinado pela face rosa, mesmo quando incluímos seu plano suporte). Assim como no poliedro anterior a relação de Euler não vale para o grande dodecaedro quando encarado como um poliedro regular, porém se identificássemos essas faces como triângulos isósceles a relação de Euler seria satisfeita.

6.2.3 Grande Dodecaedro Estrelado

O Grande Dodecaedro Estrelado configura a terceira estrelação do dodecaedro, o mesmo tem como característica o fato de que as suas faces são pentagramas. Possui 12 faces, 30 arestas e 20 vértices, concorrendo três arestas em cada um deles. Note que, para esse poliedro, vale a relação de Euler.

Figura 32: Etapa inicial e final da animação do grande dodecaedro estrelado



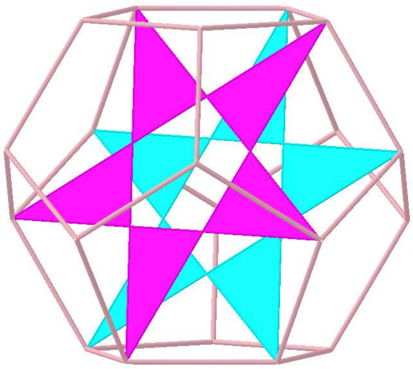
(a) (b)

Fonte: Autora (2021)

Na Figura 32a temos a estrutura geral do grande dodecaedro estrelado, e na 32b temos sua estrutura quando suas faces se afastam. A Figura 33 busca exemplificar como foi feita a disposição de cada pentagrama no interior do dodecaedro regular, para que a animação[12] fosse criada.

[12] https://www.geogebra.org/m/mgwnqjwv

Figura 33: Pentagramas no interior do dodecaedro regular

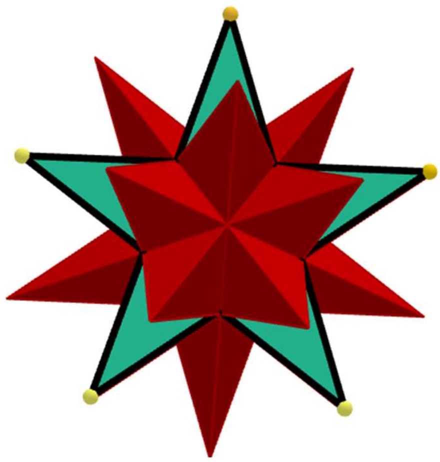


Fonte: Autora (2021)

Seria natural encarar o grande dodecaedro estrelado como um icosaedro em cujas faces foram construídas pirâmides de base triangular. No entanto, embora esta seja uma construção válida, não nos ajuda a compreender quais são as faces deste poliedro se pretendemos encará-lo como regular.

Na Figura 34 visualiza-se uma das faces desse poliedro destacada em verde. Os pontos amarelos são alguns dos vértices que devem ser considerados para que o sólido seja regular e, em preto, algumas das arestas.

Figura 34: Elementos do grande dodecaedro regular



Fonte: Autora (2021)

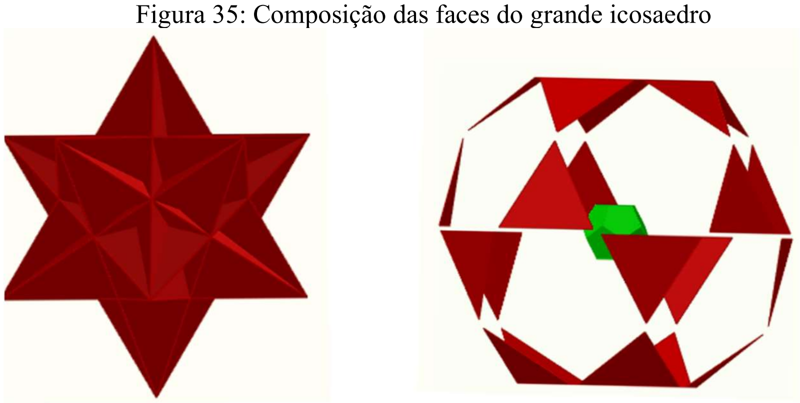
Acessando a animação[13] produzida por nós pode-se ter maior clareza sobre como encarar os elementos que compõem o grande dodecaedro estrelado de modo que este possa ser considerado um poliedro regular.

[13] https://www.geogebra.org/m/uzzjpztb

6.2.4 Grande Icosaedro

O Grande Icosaedro é a estrelação que falta para completar a lista dos poliedros de Kepler-Poinsot. O mesmo tem origem a partir da estrelação do icosaedro. Segundo Veloso (1998), Coxeter provou a existência de 59 estrelações para o icosaedro, este mesmo autor informa que a 16ª estrelação é a que produz o Grande Icosaedro, o qual caracteriza-se pelo fato de que suas faces são formadas por triângulos equiláteros, esse sólido possui no total: 20 faces, 12 vértices e 30 arestas.

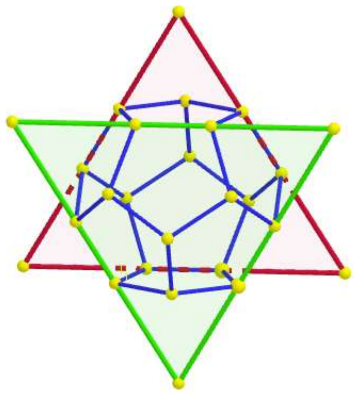
Figura 35: Composição das faces do grande icosaedro



Fonte: Autora (2021)

A animação[14] do grande icosaedro disponibilizada por nós na plataforma on-line do Geogebra, foi construída a partir do dodecaedro regular. Como regra geral para obter este sólido, deve-se estrelar o icosaedro 16 vezes. Mas tendo em vista as relações entre o dodecaedro e o icosaedro é possível construir uma animação desse sólido a partir do dodecaedro, no Geogebra. Assim, para construí-la é preciso inserir 20 faces triangulares no dodecaedro, posicionadas em pontos que são vértices do mesmo, como na Figura 36.

Figura 36: Triângulos equiláteros no dodecaedro

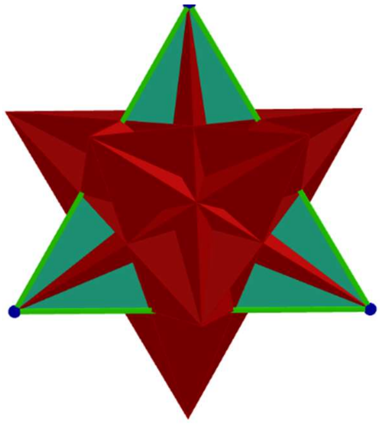


Fonte: Autora (2021)

[14] https://www.geogebra.org/m/rwxr7mgq

Agora, observando a Figura 37 é possível identificar os elementos que caracterizam o grande icosaedro: na cor verde escuro destaca-se uma das faces triangular do poliedro, de azul alguns dos vértices que devem ser considerados para que este sólido seja regular e, de verde claro, algumas de suas arestas.

Figura 37: Vértices, faces, e arestas do grande icosaedro



Fonte: Autora (2021)

Esse poliedro é um exemplo de sólido estrelado que possui inúmeros pontos e segmentos que não devem ser interpretados como vértices ou arestas se quisermos que o sólido seja admitido como poliedro regular.

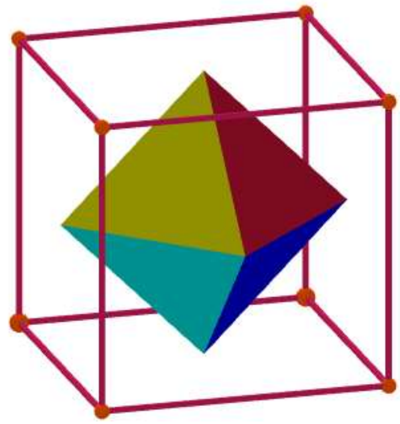
6.3 Duais dos poliedros de Kepler-Poinsot

Esta seção comenta brevemente sobre os duais dos poliedros estrelados regulares, mas primeiramente deve-se esclarecer o que é o dual de um poliedro regular. Segundo Sartor (2013, p. 56):

> Nesse novo sólido, o número de vértices será igual ao número de faces do poliedro original, já que os vértices do novo poliedro equivalem aos pontos centrais das faces do primeiro poliedro, e as faces serão os polígonos formados pela reunião dos segmentos obtidos com a ligação dos pontos centrais das faces consecutivas que circundam cada vértice.

Para exemplificar a descrição acima, deve-se observar a Figura 38, que nos mostra o hexaedro regular (cubo) e seu dual, que é o octaedro. Veja que, o dual do cubo terá seis vértices, pois este é o número de faces do cubo. Além disso, as faces do octaedro serão triangulares, pois em cada vértice do cubo concorrem três arestas.

Figura 38: Dual do hexaedro

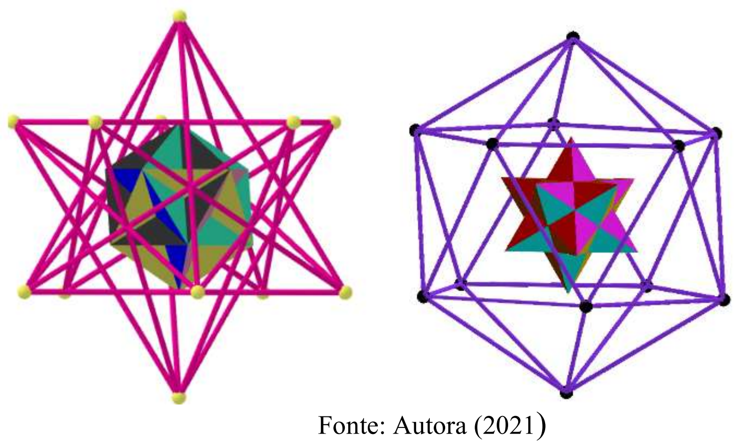


Fonte: Autora (2021)

Para os poliedros convexos regulares, os seus duais também serão poliedros convexos regulares. Veja que o dual do cubo é o octaedro e, em contrapartida, o dual do octaedro é o cubo. A análise acima pode ser feita para os cincos poliedros convexos regulares, e a conclusão mostrará que o dual do dodecaedro é o icosaedro, e o dual do icosaedro é o próprio dodecaedro, sendo o dual do tetraedro o próprio tetraedro.

No caso dos poliedros de Kepler-Poinsot, por serem sólidos mais complexos, é mais difícil enxergar a relação de dualidade, mas veja que pela definição de poliedro que usamos, a dualidade já está bem definida. As construções no Geogebra proporcionam uma melhor visualização dos duais dos poliedros estrelados regulares. Para exemplificar as relações de dualidade entre esses poliedros, foram escolhidos o pequeno dodecaedro e o grande dodecaedro para a elaboração de uma animação[15].

Figura 39: Relação de dualidade.



Fonte: Autora (2021)

[15] https://www.geogebra.org/m/dcfcw2uj

Assim como ocorre com os poliedros de Platão, cujos duais são também poliedros de Platão, os duais dos poliedros estrelados regulares também serão poliedros estrelados regulares. Mas especificamente, o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro são duais um do outro (Figura 39), assim como o grande dodecaedro estrelado e o grande icosaedro. Veja que quando olhamos para a estrutura do grande dodecaedro, podemos confundi-la com a do icosaedro regular, assim que esses dois sólidos se diferenciam apenas por suas faces, já que seus vértices e arestas coincidem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a produção deste trabalho foi possível caracterizar com clareza as estruturas dos poliedros de Kepler -Poinsot, além de dar uma visibilidade para esses sólidos que não são usuais nas salas de aulas, mas que apresentam inúmeras características instigantes e surpreendentes. Consideramos que nossos objetivos foram alcançados, uma vez que as construções que foram disponibilizadas no site do Geogebra, exemplificam conceitos importantes, para o entendimento dos Poliedros de Kepler Poinsot como regulares. As considerações sobre as definições de poliedro, foram necessárias para mostrar que essa definição é muita abrangente, e que é preciso entendê-la como uma reinterpretação do que se define como poliedro. Este trabalho tem potencial para ser desenvolvido com um olhar voltado para o ensino, a partir de atividades que podem ser criadas com o propósito didático de realizar junto com os alunos, as construções e as animações disponibilizadas no trabalho. Ou até mesmo a possibilidade de inserir novos poliedros para serem trabalhados, assim como exercícios para ajudar no entendimento acerca dessas construções.

Este trabalho despertou em nós, uma grande curiosidade com relação a possibilidade da existência de outras figuras espaciais, que permitiriam discussões mais profundas sobre o que entendemos por poliedro. Por isso a ideia para dar continuidade ao mesmo, pensando na pós graduação, é a de produzir um livro dinâmico no Geogebra, acerca dos conteúdos discutidos anteriormente, e acrescentar novos tipos de poliedros. E desenvolver também, trabalhos para serem aplicados na sala de aula, pensando no ensino de geometria. Por fim esperamos ter proporcionado uma apresentação de ideias interessantes, para promover discussões que permitam instigar o interesse dos leitores sobre o tema poliedro.

REFERÊNCIAS

BARALDI, M. L**. Poliedros de Kepler-Poinsot**: Uma verificação da relação de Euler com jujubas, canudos e varetas.2018.89f. Dissertação (Mestrado Profissional) - PROFMAT, Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Bauru-2018.

GRAVINA. M. A. **A Geometria Dinâmica:** Uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. Anais do VII Simpósio Brasileiro de Matemática na Educação, p.1-13. Belo Horizonte, 1996.

GRAVINA. M. A. **Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo**. 2001.78f. Tese de Doutorado-Universidade Federal do Rio Grande do Sul- Porto Alegre, 2001.

GRÜENBAUM B *R.* **Are you Polyhedrs The same as My Polyhedra.** Em Aronov, B.; Basu, S.; Pach. J.; Sharir, M. (editores). Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift.Springer-Verlag, pp461588,2003.

GIRALDO, V; CAETANO, P; MATOS, F. **Recursos computacionais no Ensino de Matemática.** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, -2012.

LIMA, E.L, CARVALHO, P. C. P, WAGNER. E, & MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática. Volume 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

NASCIMENTO, E.G.A. **Avaliação do uso do software Geogebra no ensino de geometria:** Reflexão da prática na escola. Em: XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da UNIFOR, e XII Encontro de iniciação à docência da UNIFOR, Fortaleza- 2012.

PEREIRA, E. A. G. **Regularidades em Poliedros:** Platão, Arquimedes e Kepler-Poinsot 2019,64f. Dissertação de mestrado (PROFMAT)-Universidade Estadual de Maringá. Maringá-PR

SARTOR, Nayara. L. **O Universo dos Poliedros Regulares** 2013.78f. Dissertação (Mestrado Profissional) -Universidade Federal de Mato Grosso- Cuiabá,2013.

VELOSO, E. **Histórias da geometria:** Os poliedros. Instituto de inovação Educacional, 1998, p.231-249.