UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
ICED - INSTITUTO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS
LICENCIATURA INTEGRADA EM MATEMÁTICA E FÍSICA

DOUGLAS SAWAKI OLIVEIRA

DEMONSTRAR É PRECISO?!
O ENIGMA DOS CAVALOS DESVENDADO PELO MÉTODO DE INDUÇÃO

SANTARÉM
2023

DOUGLAS SAWAKI OLIVEIRA

DEMONSTRAR É PRECISO?!
O ENIGMA DOS CAVALOS DESVENDADO PELO MÉTODO DE INDUÇÃO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Ciências Exatas (PCE) do Instituto de Ciências da Educação (ICED) da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA) como requisito parcial para a obtenção do título de graduação na Licenciatura Integrada em Matemática e Física.
Orientador: Prof. Dr. Hamilton Cunha de Carvalho

SANTARÉM
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/UFOPA

O48d Oliveira, Douglas Sawaki
Demonstrar é preciso?!: o enigma dos cavalos desvendado pelo método de indução./ Douglas Sawaki Oliveira. – Santarém, 2023.
27 p. : il.
Inclui bibliografias.

Orientador: Hamilton Cunha de Carvalho.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Ciências Exatas, Licenciatura Integrada em Matemática e Física.

1. Demonstrações. 2. Método de indução. 3. Enigma dos cavalos. I. Carvalho, Hamilton Cunha de, *orient*. II. Título.

CDD: 23 ed. 512

Bibliotecária - Documentalista: Renata Ferreira – CRB/2 1440

Aos familiares e amigos
que me apoiaram nessa jornada.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a minha mãe que me incentivou nos momentos difíceis e que sempre me ensinou pelo exemplo o quanto a educação pode transformar a vida das pessoas.

Também a gradeço à UFOPA e aos seus docentes que me incentivaram a percorrer o caminho da pesquisa científica.

Aos meus colegas do curso da LIMF, com quem convivi intensamente durante os últimos anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer não só como pessoa, mas também como formando.

Ao Laboratório de Aplicações Matemáticas (LAPMAT) pela cessão do espaço físico e dos materiais que foram fundamentais para o desenvolvimento do minicurso que resultou na presente pesquisa.

Enfim, a todos que participaram direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

“Quem diz que não pode ser feito, nunca deve interromper aquele que está fazendo”.

Monkey D. Luffy

RESUMO

A presente pesquisa traz um relato de experiência de um minicurso desenvolvido por bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e Física (LIMF) da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA) intitulado “Introdução ao método de indução matemática”. O minicurso tinha o objetivo de introduzir o método de demonstração por indução partindo de uma atividade contextualizada denominada “Enigma dos Cavalos” e, a partir daí, formalizar algebricamente o método. Contando com a participação de 12 estudantes do curso da LIMF, o minicurso pode proporcionar uma visão mais holística de uma demonstração por indução e que também propiciou o resgate de outros conceitos matemáticos, tais como funções e progressões aritméticas.

Palavras-chave: Demonstrações. Método de Indução. Enigma dos Cavalos.

ABSTRACT

The present research brings an experience report of a minicourse developed by scholarship students of the Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) from the Degree Course in Mathematics and Physics (LIMF) of the Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA) entitled "Introdução ao método de indução matemática”. The minicourse had the objective of introducing the method of demonstration by induction based on a contextualized activity called "Enigma dos Cavalos" and, from there, to formalize the method algebraically. With the participation of 12 students from the LIMF course, the minicourse could provide a more holistic view of a demonstration by induction and that also provided the rescue of other mathematical concepts, such as functions and arithmetic progressions.

Keywords: Demonstrations. Mathematical induction. Enigma dos Cavalos.

.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Relações métricas no triângulo retângulo 15
Figura 2: Polígono simples em uma malha quadriculada 17
Figura 3: Retângulo qualquer em uma malhar reticulada 17
Figura 4: Disposições de tabuleiro da atividade Enigma do Cavalo 20
Figura 5: Gráfico discreto de quantidade de peças para total de movimentos 22

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Contagem do número de movimentos em função da quantidade de cavalos de mesma cor 21
Quadro 2: Taxa de Variação do número de movimentos 24

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11

2 DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA 12

2.1 Método da Demonstração Direta 14

2.2 Método da Demonstração Indireta 15

2.3 Método da Demonstração por Absurdo 15

2.4 Demonstração por Exaustão 16

2.5 Método da Demonstração por Indução 18

3 O ENIGMA DOS CAVALOS 19

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 25

REFERÊNCIAS 27

1 INTRODUÇÃO

É muito provável que uma pessoa que passou os 12 anos de escola na educação básica brasileira tenha topado com algumas “verdades” matemáticas que foram passadas de forma tão eloquente pelo professor que parecem não carecer de qualquer forma de contestação. O enunciado de que a ordem dos fatores não altera o resultado em uma multiplicação ou que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta são exemplos dessas “verdades” absolutas. Entretanto, se estivermos lidando com matrizes, a ordem dos fatores vai importar na multiplicação, se sairmos da segurança axiomática de Euclides e enveredarmos por outras geometrias como a esférica ou a hiperbólica, uma linha reta pode não ser a menor distância entre dois pontos.

Um dos artifícios mais contundentes em Matemática que nos dá condições de contestar, abalizar, comprovar ou refutar uma afirmação é a demonstração. É ela que permite que verdades cristalizadas sejam analisadas a ponto de estabelecer o grau de abrangência dessa verdade (como o caso da multiplicação ou da distância entre dois pontos) ou até mesmo se estamos lidando com uma verdade de fato ou não.

Não pretendemos determinar de forma definitiva o que é uma demonstração dada a polissemia do termo e os múltiplos sentidos que diversos autores impõem ao seu entendimento formalizado [DAVIS; HERSH (1985), FOSSA (2009), STEWART; TALL, (2015)]. As demonstrações aqui serão tomadas como argumentos poderosos que provam a veracidade (ou não) das sentenças matemáticas que, além de ser um ponto de convergência entre os autores, também parece estabelecer um consenso na área da Matemática do que vem a ser uma demonstração. Para, além disso, acreditamos que as demonstrações podem ser exploradas como uma ferramenta importante para se ensinar Matemática, pois com a compreensão de como as demonstrações dão estrutura ao pensamento matemático existe a possiblidade de se estabelecer conexões entre suas ideias e seus conceitos.

No presente texto, falaremos um pouco sobre o uso das demonstrações dentro do ensino da Matemática e exploraremos alguns de seus principais métodos. Em seguida, relataremos uma atividade vivenciada por nós enquanto participantes do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID): o Enigma do Cavalo. Trata-se de uma situação contextualizada que elaboramos usando o tabuleiro de xadrez e algumas de suas peças (especialmente o cavalo) para imergir o estudante em um ambiente de aprendizagem potencializador da aprendizagem do método da indução finita, um dos principais procedimentos demonstrativos em Matemática. Nossa atividade não só trata do método da indução finita como, a reboque, perpassa por outros tópicos da Matemática tais como o plano cartesiano, resolução de equações do 2º grau e lógica matemática.

2 DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA

O físico e divulgador científico Marcelo Gleiser afirma que o progresso da Ciência se deve basicamente a dois fatores: a miopia e a curiosidade (GLEISER, 2019). O fato de não termos instrumentos suficientemente poderosos para testar ou comprovar nossas hipóteses faz com que não consigamos enxergar o que ainda é desconhecido. Já a curiosidade é o fator que nos move em direção a ele. Não obstante, os matemáticos também são curiosos e atraídos pela busca incessante do conhecimento, porém, os instrumentos poderosos que os ajudam a enxergar e comprovar suas verdades não são dependentes de aparelhos caros ou ultra tecnológicos, são as demonstrações. Elas são tão importantes para um matemático que a incorporação delas em seu meio, às vezes, pode se dar não pela possível utilidade em alguma área específica ou aplicação direta para uma contribuição social, mas pelo simples prazer de provar que uma proposição é verdadeira ou não.

Nesse sentido, Fossa (2009) diz que conhecer:

> (...) é saber o porquê. E o porquê de um teorema matemático é a sua demonstração. Portanto, o matemático sempre quer demonstrar os seus teoremas porque ele quer conhecê-los, e conhecê-los a fundo. Desta maneira, a matemática não é meramente uma atividade interessante com algumas aplicações práticas, mas faz parte daquela busca da verdade que é o grande empreendimento do homem (p. 46).

É possível notar que para os matemáticos o ato de demonstrar ou compreender demonstrações pode ser por si só atraente. Porém, nossa experiência atuando como bolsistas nas escolas e estágios supervisionados mostrou que para estudantes do ensino básico e até mesmo estudantes do ensino superior existe certa resistência em cultivar esse interesse. Se para os matemáticos as demonstrações são ferramentas essenciais em sua área e até fonte de satisfação, por que não conseguimos desenvolver nos estudantes uma percepção que permita a eles vislumbrarem um pouco desse contentamento nas aulas de matemática?

Santos (2015, p. 21) sugere que o professor realize o papel de intermediário entre o conhecimento matemático e os alunos. Para que isso ocorra, a autora diz que é crucial que o professor desenvolva atividades que proporcionem "momentos de indagações e do pensar sobre suas respostas, comparando-as, analisando-as e verificando se as respostas são plausíveis com as perguntas dos problemas". É com essa intencionalidade que achamos ser necessário (re)pensar e (re)elaborar alternativas, estratégias ou situações para se abordar o uso das demonstrações em sala de aula. Mas afinal, como fazer isso?

Sousa (2010, p. 21) afirma que para se estudar as demonstrações matemáticas é preciso que se esclareçam duas coisas: “a importância das demonstrações para a Matemática e o que significa demonstrar, no âmbito da Matemática”. O primeiro esclarecimento se deve ao fato de acreditar que é fundamental conhecer a importância das demonstrações matemáticas para a Matemática, dando-lhe o devido valor e relevância, não somente como uma repetição ou mera utilização implícita que acaba sendo adotada no ensino, e que frequentemente é realizada de forma repetida e sem compreensão. O segundo esclarecimento consiste no fato de que o entendimento de demonstrar é confundido com o de verificar ou argumentar (convencer), embora sejam essenciais para a compreensão no ensino de demonstrações, essas premissas não são suficientes para validar uma proposição, isso requer a formalização matemática por meio das demonstrações para validação dos teoremas.

A compreensão da necessidade das demonstrações no ensino de Matemática também é entendida pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), descrito em sua competência específica de nº 5, referente ao tópico Matemática e suas tecnologias:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma **demonstração** cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais formais, incluindo a **demonstração** de algumas proposições (BRASIL, 2018, p. 540). [Grifos nossos]

As demonstrações são ferramentas fundamentais para a Matemática, diferente de outros campos do conhecimento que utilizam a observação e a experimentação para validar suas verdades, na Matemática consideramos algo como verdadeiro quando ele pode ser demonstrado, ou adotado de forma axiomática. Elas assumem um papel de suma importância quando se deseja provar que suas afirmações expressam a verdade. Na demonstração os axiomas ou postulados são proposições assumidas como verdadeiras, isto é, são tomadas como verdades e julgadas como já estabelecidas. Os teoremas, por sua vez, são proposições que se pode demonstrar a partir das deduções lógicas e consistentes baseadas nos axiomas. Já uma conjectura é uma proposição possivelmente verdadeira, mas sem uma demonstração conhecida. Quando uma demonstração válida é encontrada a conjectura se torna um teorema.

Teoremas também são conhecidos por proposições, corolários ou lemas. Em geral, na organização de um conteúdo matemático a maioria dos teoremas é indicada como proposição e o termo teorema é reservado para os principais resultados que se destacam das demais proposições. Um corolário é um teorema consequente de algum outro teorema já demonstrado. Demonstrações longas e complexas podem ser simplificadas quando são estabelecidos teoremas auxiliares durante a argumentação chamados de lemas.

De posse dessas definições, observamos de imediato que os corolários e lemas não deixam de ser teoremas. Fossa (2009, p. 49) enfatiza que "do ponto de vista formal, não há diferença entre teoremas, corolários e lemas, pois todos os três são proposições demonstradas". Para uma rápida distinção dentre as demonstrações existentes, citaremos algumas das principais técnicas de demonstrações que são frequentemente utilizadas para demonstrar proposições na Matemática.

2.1 Método da Demonstração Direta

Em uma demonstração direta assumimos que a hipótese é verdadeira. E por meio de axiomas, definições, teoremas ou regras de inferência, obtemos a conclusão de que a tese também é verdadeira. Para exemplificar esse tipo de demonstração podemos enunciar um dos teoremas mais conhecidos: o teorema de Pitágoras.

Se o triângulo é retângulo, então o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

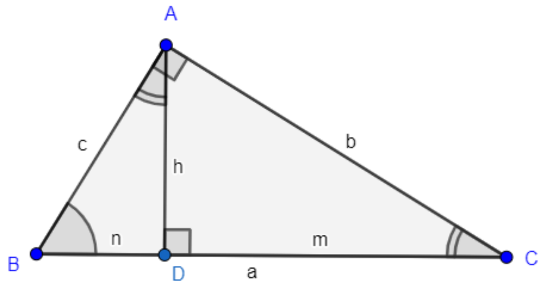
Dentre as diversas possibilidades de se demonstrar esse teorema[1], Iezzi (2004) propõe:

<u>Demonstração</u>

Dado um triângulo ABC, retângulo em A (Figura 1), a altura AD (perpendicular a BC) relativa à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos ($B\hat{A}D = \hat{C}$, complemento de $\hat{B}$, $C\hat{A}D = \hat{B}$, complemento de $\hat{C}$). Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial ou total:

[1] Encontramos mais de 90 formas de se demonstrar esse teorema ao digitarmos o descritor "demonstração teorema Pitágoras" em um dos buscadores mais utilizados da Internet.

Figura 1: Relações métricas no triângulo retângulo



$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \text{ e } \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

Fonte: Elaboração própria baseada em Iezzi (2004)

A expressão acima fornece $c^2 = an$ e $b^2 = am$, conhecidas como relações métricas de Euclides. Adicionando-as obtemos:

$$b^2 + c^2 = am + na = a(m + n) = a \cdot a = a^2.$$

2.2 Método da Demonstração Indireta

Também conhecida como demonstração pela Contrapositiva, nesse método nega-se a tese, isto é, assumimos que a tese é falsa e, chegando à conclusão de que a premissa também será falsa, concluímos a negação da premissa. Tal método é útil quando é conveniente demonstrar a contrapositiva do que a implicação original, isto é, quando o determinado valor lógico de uma afirmação for sempre equivalente ao de sua contrapositiva. Como veremos no exemplo a seguir:

Seja x um número inteiro. Se x^2 é par, então x também é par.

Demonstração

Supomos que x não é par, logo, existe um número k pertencente ao conjunto dos números inteiros tal que $x = 2k + 1$ (inteiro ímpar). Logo, temos $x^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, onde $2k^2 + 2k$ é um inteiro. Portanto, x^2 é ímpar.

2.3 Método da Demonstração por Absurdo

Também conhecida por redução ao absurdo, negamos que a implicação seja verdadeira (isto ocorre se afirmamos a premissa e ao mesmo tempo negamos a tese) e chegamos a uma contradição (ou seja, no discurso demonstrativo haverá duas proposições contraditórias – uma sendo a negação da outra) como estamos assumindo que a argumentação é válida, devemos concluir que a hipótese da negação da implicação será falsa e, portanto, que a implicação será verdadeira. Pode-se também chegar a uma afirmação sabidamente falsa que não seja necessariamente a negação de uma afirmação feita anteriormente durante a demonstração.

Um exemplo que se beneficia da demonstração por absurdo é a prova para irracionalidade de $\sqrt{2}$ trazida por Livio (2011, p. 52).

Se $\sqrt{2}$ existe, então é um número irracional.

<u>Demonstração</u>

Supomos que $\sqrt{2}$ é racional. Isso implica que existem dois números inteiros distintos e primos entre sí p e q de tal forma que:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ (fração irredutível.)}$$

Elevando ao quadrado, temos:

$$p^2 = 2q^2$$

Note que p^2 é par, pois é um certo número inteiro multiplicado por 2. Concluímos que p também é par (como vimos no exemplo da demonstração indireta), logo da forma $p = 2r$, com r sendo um inteiro. Substituindo $p = 2r$ na equação $p^2 = 2q^2$, obtemos:

$$4r^2 = 2q^2,$$

Logo,

$$q^2 = 2r^2$$

Portanto, q^2 é par e consequentemente q é par, então múltiplos de 2. Aqui chegamos a uma contradição (Absurdo), por hipótese, pois p e q necessariamente são primos entre si. Isso prova que $\sqrt{2}$ é irracional.

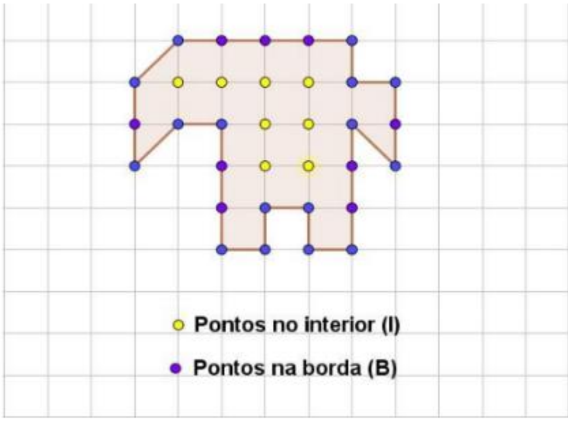
2.4 Demonstração por Exaustão

Usada quando temos uma conjectura sobre uma coleção finita, a demonstração por exaustão consiste em verificar a validade de uma proposição para cada elemento da coleção. Uma demonstração por exaustão significa que foram exauridos todos os casos possíveis.

Para exemplificar, trazemos a demonstração do Teorema de Pick proposta por Santos (2021):

A área de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma malha quadriculada é dada pela fórmula $A = I + \frac{B}{2} - 1$. Onde B é o número de pontos na borda e I é o número de pontos no interior do polígono.

Figura 2: Polígono simples em uma malha quadriculada



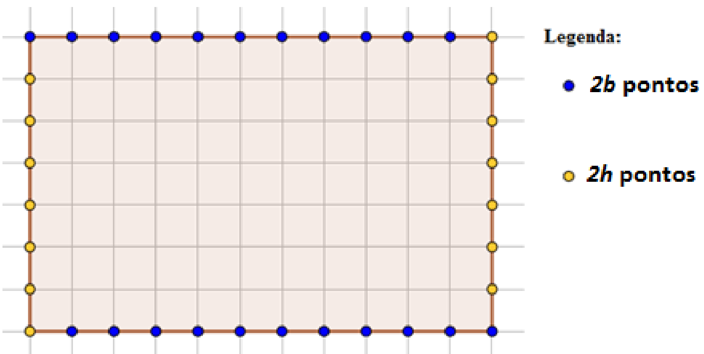
Fonte: Reproduzido de Santos (2021, p.14)

Observando a malha reticulada da Figura 2, podemos observar que I é a quantidade total de pontos internos e B é o total de pontos nas bordas. Se convencionarmos que cada quadrado da malha possui lado igual a 1 u. e substituirmos na fórmula os pontos do interior $I = 8$ e os pontos da borda $B = 25$, vamos obter 19,5, o que corresponde à área do polígono em destaque. Santos (2021) dividiu esta demonstração em 4 partes e a primeira delas é para retângulos cujos lados estão sobre a malha e que expomos a seguir:

<u>Demonstração</u>

Seja um retângulo qualquer em uma malha reticulada. Os comprimentos da base (b) e da altura (h) do retângulo estão associados a quantidade de pontos da malha que pertencem a borda do retângulo (B_R), como mostra a Figura 3.

Figura 3: Retângulo qualquer em uma malhar reticulada



Reproduzido de Santos (2021, p.16)

Assim, b e h passam a corresponder exatamente à quantidade de pontos da malha que pertencem a base e a altura do retângulo fornecido. A quantidade de pontos da borda (B_R) desse retângulo pode ser obtida por meio da fórmula:

$$B_R = 2b + 2h$$

Os pontos interiores do retângulo (I_R) podem ser contados a partir de b e de h multiplicando esses valores um pelo outro depois de ser diminuída uma unidade de cada um deles:

$$I_R = (b-1).(h-1)$$

Substituindo as equações acima na fórmula de Pick, temos que a área do retângulo (A_R) é:

$$\frac{B_R}{2} + I_R - 1 = \frac{2b+2h}{2} + (b-1).(h-1) - 1 = \frac{2b}{2} + \frac{2h}{2} + bh - b - h + 1 - 1$$
$$= b + h + bh - b - h = bh = A_R \text{ C. Q. D.}$$

A demonstração proposta é dividida em mais outras três etapas: para o caso de triângulos retângulos cujos catetos estão sobre a malha, para o caso de triângulos quaisquer e, finalmente, para o caso de polígonos em geral exaurindo, portanto, todos os casos possíveis. Assim, demonstramos que o Teorema de Pick é válido para quaisquer tipos de polígonos simples dentro de uma malha reticulada, já que eles sempre podem se decompostos em triângulos cujos vértices são também vértices do polígono dado. Como os artifícios para se demonstrar as outras etapas são mais extensas, omitiremos as demais demonstrações e deixamos a cargo do(a) leitor(a) a sugestão de consultá-las em Santos (2021).

2.5 Método da Demonstração por Indução

Antes de mais nada, cremos que há a necessidade em se fazer uma distinção entre dedução e indução, e indução empírica e indução finita.

Segundo Silva e Savioli (2010) A dedução é o pensamento logico que consiste em chegar numa conclusão por meio de uma hipótese generalizada, conhecida e verdadeira em que se aplicam a todos os casos particulares. Ou em poucas palavras, “a dedução vai do geral ao particular” ou “do universal ao individual”.

Na indução empírica o raciocínio ou o método que nos leva a passagem logica consiste na hipótese de um evento particular a uma tese geral, por meio de observações de fenômenos ou experiências. O método de indução empírica é amplamente utilizado no campo das ciências experimentais.

Diferentemente do que ocorre nas ciências experimentais, em Matemática não se pode afirmar que uma proposição é verdadeira ou falsa a partir de certo número de observações. No entanto, o termo *indução* na indução finita, está relacionado a uma associação em que se faz ao seu método que analisa alguns casos (como veremos nesse tópico) para uma afirmação mais abrangente.

Ademais, a origem do termo *indução finita* surge com a axiomatização do conjunto dos números naturais escrito pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932) divulgados na obra de 1889, denominada *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*. Onde apresenta seus axiomas e enuncia a base de um dos processos demonstrativo designado como indução finita.

Por tanto, indução finita é um método de demonstração de teoremas aritméticos, isto é, que se trata de um instrumento universal para demonstrar as propriedades do conjunto dos números naturais. Por fim, é necessário tomar cuidado para não evitar confusão entre à indução finita e à indução empírica, pois a indução finita é um método dedutivo, enquanto a indução empírica, como já dito, trata-se de um estudo de casos particulares, iguais ou semelhantes e busca uma lei geral que explica e subordina tais casos.

A indução matemática sendo um argumento dedutivo que, quando é demonstrada uma proposição, a conclusão é seguida das premissas com todo o rigor lógico. Para formular esse método devemos acompanhar a seguinte estrutura, na qual $P(x)$ indica uma proposição sobre x, sendo um número natural.

(i) Demonstrar $P(1)$ (ou o primeiro elemento dependendo do caso);

(ii) Supor $P(n)$;

(iii) Demonstrar para $P(n+1)$.

Cumprindo essas etapas obtemos nossa prova. Fossa (2009) afirma que, quando se tem eventos sobre os números naturais, esta técnica de demonstração é a mais usada dentre todas as outras da Matemática, pelo seu princípio básico ser o mais simples.

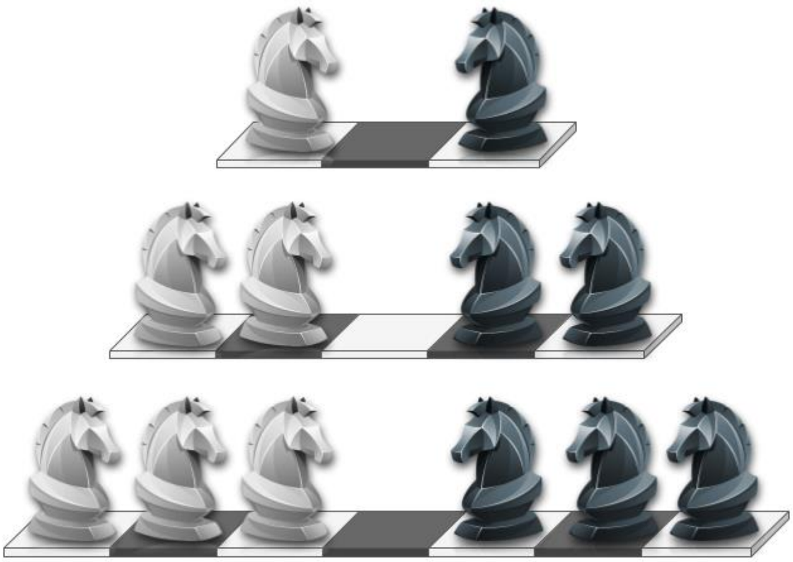
O método do princípio de indução finita será abordado mais adiante a partir de uma análise feita por nós de um minicurso desenvolvido por bolsistas do PIBID que participavam à época das ações do Laboratório de Aplicações Matemáticas (LAPMAT) da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA).

3 O ENIGMA DOS CAVALOS

Em 2013, dois bolsistas do PIBID (um deles é o autor deste texto) e estudantes da Licenciatura Integrada em Matemática e Física (LIMF) elaboraram e ministraram um minicurso com duração de 4 horas para I Feira do PIBID, realizada no Instituto de Ciências da Educação (ICED) da UFOPA intitulado “Introdução ao Método de Indução Matemática”. O minicurso tinha como objetivo apresentar aos participantes (a maioria estudantes da LIMF) uma forma de se abordar o método da indução finita com uma atividade que teria uma primeira parte que se partia gradativamente do concreto (Enigma dos Cavalos) para o formal (Principio de Indução Finita).

Iniciamos o minicurso apresentando uma atividade que chamamos de “O Enigma dos Cavalos” cuja elaboração foi baseada em um puzzle online de domínio público[2]. Ela consiste na utilização de tabuleiros 1 x 3, 1 x 5 e 1 x 7 feitos em cartolina e as peças de cavalo do jogo de xadrez que ficam dispostas conforme mostra a Figura 4 e que podem, dependendo da disponibilidade, ser substituídas por outras peças do xadrez (como o peão por exemplo) ou outros marcadores disponíveis quaisquer[3].

Figura 4: Disposições de tabuleiro da atividade Enigma do Cavalo



Fonte: Elaboração própria

O jogo é destinado para apenas um jogador e tem como objetivo passar o(s) cavalo(s) branco(s) que está(ão) no lado esquerdo para o lado direito e o(s) cavalo(s) preto(s) que está(ão) no lado direito para o lado esquerdo movimentado as peças com as seguintes condições:

- Os cavalos só podem andar uma casa de cada vez;
- Os cavalos brancos só andam para a esquerda e os pretos para a direita;
- Se a casa pretendida estiver ocupada, o cavalo pode “saltar” sobre o cavalo da casa ocupada, desde que a outra imediatamente posterior esteja desocupada;
- Só é possível “saltar” um único cavalo.

Oferecemos aos 12 participantes do minicurso as peças do cavalo e os tabuleiros que havíamos confeccionados previamente e pedimos para que eles tentassem resolver o “enigma”

[2] A página original não está mais disponível, porém uma alternativa semelhante pode ser encontrada em https://genioquiz.com.br/jogue-o-jogo-dos-sapos/

[3] Os materiais utilizados na confecção de todos os objetos de aprendizagem foram gentilmente fornecidos pelo Laboratório de Aplicações Matemáticas (LAPMAT) ligado à LIMF e que, quando a atividade foi desenvolvida, funcionava na sala 230 do Campus Amazônia da UFOPA. Atualmente, o LAPMAT funciona na sala 335-A do Campus Tapajós da UFOPA.

no menor número de movimentos possíveis com o tabuleiro 1 x 3. Após todos chegarem ao consenso de que 3 era o menor número de movimentos possíveis, pedimos que eles tentassem com o tabuleiro 1 x 5 e depois com o 1 x 7. Com o grau de complexidade aumentado, o tempo destinado para a resolução foi naturalmente maior, mas todos conseguiram reconhecer que 8 e 15, respectivamente, satisfaziam o número de movimentos e que a quantidade de movimentos é única para cada desafio, pois para cada lance há apenas dois movimentos possíveis, sendo que um deles sempre “trava” o jogo e o outro permite sua continuidade.

A partir daí, fornecemos aos participantes a Tabela 1 impressa em papel A4, lápis e borracha, indicando que as três primeiras linhas da tabela já poderiam ser preenchidas com os resultados a que acabáramos de chegar.

Quadro 1: Contagem do número de movimentos em função da quantidade de cavalos de mesma cor

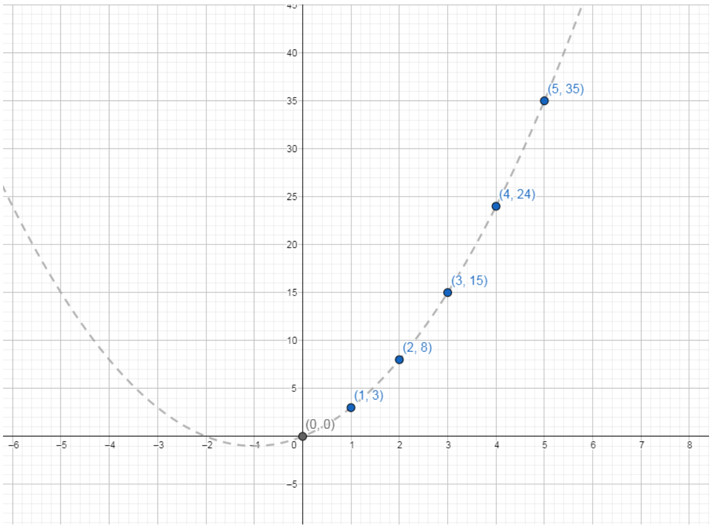
Cavalos de mesma cor	Movimentos
1	...
2	...
3	...
4	...
5	...
...	...
n	...

Fonte: Elaboração própria

Indagamos a respeito do preenchimento do restante da tabela: será possível que saibamos quais são os valores correspondentes a 4 e 5 sem precisar de um tabuleiro 1 x 9 e 1 x 11? Existe um padrão para obtenção desses valores? Em caso afirmativo, qual seria a expressão que forneceria a quantidade de movimento em função do número de cavalos da mesma cor? Foi com essas indagações que iniciamos a segunda parte do nosso minicurso que abandona por ora os tabuleiros e começa a tornar a atividade mais algébrica.

De posse da tabela parcialmente preenchida, pudemos construir com eles no quadro branco que havia na sala o gráfico da Figura 4:

Figura 5: Gráfico discreto da quantidade de peças para o total de movimentos



Fonte: Elaboração própria

Fizemos os seguintes questionamentos a respeito do gráfico: Qual função poderia ter originado esse gráfico? Seria uma função afim? Uma função linear? Uma função logarítmica? Uma função exponencial? Esse gráfico é uma reta, uma parábola?

Antes de irmos adiante, relembramos aos participantes o que caracterizava cada uma dessas funções.

Uma função afim é toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais e x é a variável em estudo. O gráfico de qualquer função afim é representado no plano cartesiano como uma reta. Portanto, a função que representa as grandezas do problema não é uma função afim. A função linear, por sua vez, é toda função afim onde o termo independente b é igual à zero. Ou seja, é toda função definida pela lei $f(x) = ax$. Como ainda é uma função afim, seu gráfico também é uma reta, descartando-as de nossas hipóteses.

Também recordamos que uma função exponencial é qualquer função expressa pela lei $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}_+$ e $a \neq 1$ Indicamos que algumas particularidades dessa função precisam ser analisadas: para qualquer função expressa dessa forma, se $x = 0$, então $f(x) = 1$. Mas se a uma função for definida pela lei $f(x) = ab^x$, com a e b reais onde $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então se $x = 0$, $f(x) = a$, o gráfico "passa" pelo ponto (0, a). O nosso gráfico, porém, não passa pelo ponto (0,1), como no primeiro caso e, como "passa" pelo ponto (0,0) não se enquadra na segunda colocação. O pensamento é recíproco para a função logarítmica, que é a inversa da função exponencial. De todos os tipos de funções levantadas em hipótese, restou apenas a função da função cuja abordagem está exposta a seguir.

Chamamos função polinomial do segundo grau ou função quadrática toda função expressa pela lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ e $a \neq 0$. O gráfico dessa função é uma parábola e tem as seguintes propriedades: os zeros da função são os pares ordenados (x', 0) e (x'', 0), onde $x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, que corresponde à fórmula de Bháskara. Esses zeros representam os pontos em que $f(x) = 0$, isto é, onde o gráfico intercepta o eixo das abscissas. Se o nosso gráfico for uma parábola, então x' ou x'' tem que ser igual a zero.

Assim, podemos relacionar o que já acumulamos da seguinte maneira: o coeficiente $a > 0$, pois a concavidade da parábola está voltada para cima, $b > 0$, pois o ponto que tangencia a função no eixo y é crescente, e $c = 0$ cuja função $f(0) = 0$ como dito anteriormente.

Nesse ponto da discussão buscamos identificar os coeficientes a e b substituindo os pontos (0, 0), (1, 3) e (2, 8) na equação $f(x) = ax^2 + bx + c$ e obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 8 \end{cases}$$

A solução desse sistema existe e é única, fornecendo os coeficientes $a = 1$, $b = 2$. Portanto, a lei que buscamos é $f(x) = x^2 + 2x$, onde x é o número de cavalos de cada cor e $f(x)$ é o número de movimentos que o jogador precisa fazer para resolver o enigma. Pedimos para que eles testassem a expressão nos resultados que já havíamos conseguido em nossa tabela e todos foram confirmados.

Da primeira jogada até agora conseguimos perceber que o número de movimentos que um jogador deve realizar para finalizar o enigma pode ser expresso em função do número de cavalos de uma mesma cor no tabuleiro, conforme a lei $f(x) = x^2 + 2x$, que encontramos anteriormente.

Ter confiança de que essa lei é válida para todos os casos observados é simples, pois apenas requer um cálculo básico e verificar manualmente se o número corresponde. Mas, como ter certeza de que a lei é válida, também, para os casos não observados? Ou seja, como saber, sem dúvidas, que a lei funciona para os infinitos valores de x? É nesse ponto que os questionamos: Como podemos demonstrar essa lei? E foi aí que começamos a introduzir o método de indução finita.

Primeiro, a lei deve valer para o menor valor que x pode adquirir que é 1, já que com zero cavalos não há jogo. Assim, o valor que corresponde a 1 em nossa tabela deve ser igual à

$f(1)$. Matematicamente, $f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$, verificando que a lei é válida para a base do processo, já que realmente são necessários três movimentos para este caso.

O método de indução afirma que quando uma lei é válida para algum número natural ela também deve valer para o sucessor desse número. Antes, porém, precisamos encontrar uma ***Lei de Recorrência*** que é, na verdade, uma relação, entre dois termos consecutivos da imagem da função. As leis de recorrência demonstram como a sequência é intrinsecamente relacionável, e isso nos auxilia na demonstração das leis de indução.

Para identificar essa lei em nosso problema devemos analisar com cautela a tabela que construímos para cada quantidade de cavalos. Para isso, adicionamos a coluna de Taxa de Variação que é a diferença do número de movimentos com outro imediatamente anterior, conforme vemos na Tabela 2 a seguir:

Quadro 2: Taxa de Variação do número de movimentos

Cavalos de mesma cor	Movimentos	Taxa de Variação
0	0	-
1	3	3
2	8	5
3	15	7
4	24	9
5	35	11

Fonte: Elaboração própria

Analisamos juntos a relação entre os números da coluna “Taxa de variação”. O quanto eles são parecidos? São primos? Ímpares? Ou obedecem a uma lei específica? O certo é que são números ímpares.

Explicamos que uma Progressão Aritmética de primeira ordem é toda sequência de termos onde a diferença entre dois valores sucessivos é a própria razão da PA. Por exemplo, na sequência 1, 3, 5, 7, 9. ..., que é a dos números ímpares, a diferença entre quaisquer dois consecutivos termos é igual a 2, que é a razão da progressão. Quando, porém, a razão de uma PA for outra progressão, então temos uma Progressão Aritmética de segunda ordem. Generalizando, se a diferença entre os termos de uma progressão der origem a sucessivas progressões, até uma enésima progressão que nos dará a razão da PA, estamos lidando com uma Progressão Aritmética de enésima ordem.

Observe que classificando os lances em dois tipos, movimentos e saltos, os lances sempre depois de um movimento, o número de saltos consecutivos é acrescido de uma unidade até que o número de saltos consecutivos se torne igual ao número de cavalos pretos (ou brancos). A partir daí, o número de saltos consecutivos começa a decrescer de uma em uma unidade.

Após fazermos essas considerações, vimos que a sequência dos movimentos é uma progressão de segunda ordem. Essa nova ***PA*** é a sequência dos números ímpares, que pode ser escrita como $2x + 1$, sempre que tivermos x cavalos de determinada cor. Assim, cada novo termo $f(x + 1)$ é a soma do seu antecessor $f(x)$ a esse valor $2x + 1$. Escrevendo $f(x + 1) = f(x) + 2x + 1$, que é a nossa lei de recorrência.

Agora completaremos a demonstração provando o passo indutivo, isto é, mostrando que $f(x) \Longrightarrow f(x + 1)$. Temos em hipótese que se:

$$f(k) = k^2 + 2k \ e \ f(k) = f(k - 1) + 2k + 1,$$

Então,

$$f(k + 1) = (k + 1)^2 + 2(k + 1) \text{ e } f(k + 1) = f(k) + 2(k + 1) + 1.$$

É preciso que ambos $f(k + 1)$ sejam iguais.

Unindo as duas leis, $f(k + 1) = f(k) + 2k + 3 \Longrightarrow f(k + 1) = (k^2 + 2k) + 2k + 3 \Longrightarrow f(k + 1) = k^2 + 4k + 3$.

Desenvolvendo $f(k + 1) = (k + 1)^2 + 2(k + 1)$ encontramos $k^2 + 2k + 1 + 2k + 2 \Longrightarrow f(k + 1) = k^2 + 4k + 3$, mostrando que ambos $f(k + 1)$ são iguais, que é o que queríamos provar.

Logo, utilizando o método de indução, pudemos afirmar que, para qualquer número x de cavalos de mesma cor, a lei que determina o número de movimentos mínimos é $x^2 + 2x$ e que cada termo que se sucede é a soma do termo anterior com o número de casas do tabuleiro.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente texto tratamos da importância das demonstrações dentro do ensino da Matemática e exploramos alguns de seus principais métodos. E a partir de uma situação contextualizada (Enigma dos Cavalos) desenvolvemos um minicurso que, além de perpassar também por outros tópicos da Matemática, possibilitou criarmos uma dinâmica que permitisse a abordagem formalizada do método da indução finita.

Ademais, os materiais de baixo custo (cartolinas, lápis, papel A4 etc.) e o acesso às peças de xadrez fornecidas pelo LAPMAT possibilitaram a concretização do minicurso nos moldes que havíamos previsto. Mas caso o professor queira reproduzir o que sugerimos nessa pesquisa em sua sala de aula, outros materiais podem ser utilizados e facilmente adaptados, como a substituição dos cavalos por outros marcadores quaisquer (pinos ou tampas de garrafas, por exemplo) ou colocar no quadro as tabelas e os gráficos ao invés de imprimi-los previamente. O mais importante, em nosso entendimento, é fazer emergir da atividade condicionantes importantes que sirvam de ponto de apoio à aprendizagem da demonstração pelo método de indução. Afinal, como diz Lorenzato (2012), ter o recurso didático mais caro, mais atual ou mais tecnológico não dá a certeza do aprendizado, o que pode nos colocar nesse caminho é a boa utilização que os professores fazem desses recursos.

Por fim, achamos crucial salientar que a efetivação dessa pesquisa só foi possível devido ao apoio do subprojeto do PIBID de Matemática da UFOPA que à época garantiu o suporte financeiro necessário à realização do minicurso. Por se tratar de um programa tão importante de incentivo à docência, vemos com grande preocupação os seguidos ataques que essa iniciativa vem sofrendo nos últimos anos. Seja pelo contingenciamento de recursos financeiros e consequente diminuição da oferta de bolsas, seja pela descaracterização do seu caráter formativo ou pela descontinuidade de sua implementação nas universidades públicas. Ele ainda funciona dentro da UFOPA, mas tememos que esteja chegando ao ponto de já estar respirando por aparelhos...

Finalmente, queremos deixar claro que as demonstrações são ferramentas importantes demais dentro do campo da Matemática para serem tratadas como algo que gera olhares tortos de estudantes ou até mesmo de professores. Se no título provocamos o(a) leitor(a) perguntando se demonstrar era preciso, agora temos condições de dizer que de além de ser preciso é também necessário que o façamos, desde que elas possam dar ao estudante a percepção do quanto elas são essenciais para a validação dos enunciados em Matemática.

REFERÊNCIAS

ANJOS, J; LIMA, W; SILVA, M. Minicurso: **Introdução ao método de Indução matemática**. UFOPA: Santarém, Pará, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DAVIS, F. J. e HERSH, R. **A experiência matemática**. Trad. João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Editora Francisco Alves, 1985.

FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de demonstração na matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GLEISER, M. **O caldeirão azul:** o universo, o homem e seu espírito. 1ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2019.

LIVIO, M. **Razão áurea:** a história de Fi, um número surpreendente. Trad: Marcos Shinobu Matsumura. 6ª ed. Rio de Janeiro, Record. 2011.

LORENZATO, S. (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** 3ª Ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

SOUSA, E. K. V. **Um estudo sobre o ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas**. Dissertação (Mestrado) - Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

SANTOS, B. L. R. **Batalha dos Polígonos e Teorema de Pick:** uma proposta de atividade para o ensino de Geometria. Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura Integrada em Matemática e Física. Instituto de Ciências da Educação. UFOPA: Santarém, 2021.

SANTOS, M. C. **Investigando Provas e Demonstrações Matemáticas por Alunos do Ensino Médio:** Realidades e Necessidades. Dissertação (Mestrado) Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática Universidade Estadual da Paraíba, CAMPINA GRANDE, 2015.

SILVA, E; SAVIOLI, A. Indução? Finita ou Empírica? **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, MS, v. 3, n. 6, p. 67-80, jul. /dez. / 2010.

STEWART, I.; D. TALL. **The Foundation of Mathematics**. 2ª Ed. London: Oxford U.P., 2015.