



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS**

ESROM ELIAQUIM BARBOSA GAMA

**UMA ANÁLISE DA CONSTRUÇÃO DO LETRAMENTO ESTATÍSTICO NAS
PROVAS DO EXAME NACIONAL DE ACESSO AO MESTRADO PROFISSIONAL
DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)**

**SANTARÉM-PA
2020**

ESROM ELIAQUIM BARBOSA GAMA

**UMA ANÁLISE DA CONSTRUÇÃO DO LETRAMENTO ESTATÍSTICO NAS
PROVAS DO EXAME NACIONAL DE ACESSO AO MESTRADO PROFISSIONAL
DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)**

Trabalho de Conclusão de Curso ao Programa de Ciências Exatas, do Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática e licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Medeiros dos Santos

**SANTARÉM-PA
2020**

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas (SIBI) da UFOPA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFOPA
- Biblioteca Unidade Rondon

Gama, Esrom Eliaquim Barbosa.

Uma análise da construção do letramento estatístico nas provas do exame nacional de acesso ao Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) / Esrom Eliaquim Barbosa Gama. - Santarém, 2021.

81f.: il.

Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Instituto de Ciências da Educação, Programa de Ciências Exatas.

Orientador: Rodrigo Medeiros Dos Santos.

1. Letramento Estatístico. 2. PROFMAT. 3. ENA. I. Santos, Rodrigo Medeiros Dos. II. Título.

UFOPA Campus Rondon

CDD 23.ed. 510

ESROM ELIAQUIM BARBOSA GAMA

**UMA ANÁLISE DA CONSTRUÇÃO DO LETRAMENTO ESTATÍSTICO NAS
PROVAS DO EXAME NACIONAL DE ACESSO AO MESTRADO PROFISSIONAL
DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)**

Trabalho de Conclusão de Curso ao Programa de Ciências Exatas, do Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática e licenciado em Física.

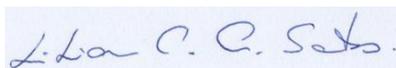
Conceito: 9,7

Data da aprovação: 09/08/2021

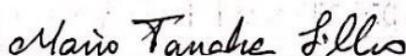
Banca Examinadora



Prof. Dr. Rodrigo Medeiros Dos Santos – Orientador
Universidade Federal Do Oeste do Pará



Profa. Dra. Lilian Cristiane Almeida Dos Santos
Universidade Federal do Oeste do Pará



Prof. Dr. Mario Tanaka Filho
Universidade Federal do Oeste do Pará

Aos meus familiares e amigos pelo incentivo,
carinho e apoio ao longo dos últimos meses.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me presentear com a vida e me oportunizar a seguir as escolhas que me fizeram chegar até aqui.

Aos meus pais, Raimundo e Lucimar, pela educação, pelo amor, pelos conselhos, que me proporcionaram a fazer cada escolha, também por todo estímulo e investimento que me conduziram até aqui.

Aos meus irmãos Kennedy e Thays pelo apoio, amor e torcida. Sem esquecer do João Victor, umas das minhas inspirações e forças para seguir sempre em frente.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rodrigo Medeiros pelas orientações, conversas, reuniões, contribuições ao trabalho, pela paciência em ensinar, corrigir. Foram meses de trabalho até chegar nesse momento.

À Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA, por ter me dado a chance de fazer o curso na Instituição. Também pela oportunidade de me fazer participar de monitorias, projetos de pesquisa e extensão, minicursos, voltados para a minha formação acadêmica.

Aos professores do curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, que através das suas disciplinas ministradas para a turma que fazia parte acrescentaram princípios morais e ética profissional a minha formação.

Aos meus colegas que fiz ao longo da graduação, que me ajudaram a avançar na trajetória acadêmica, nas aprovações das disciplinas através de grupos de estudos, reuniões para trabalhos, etc.

Aos meus amigos: Cleudson, Ramon, Cris, Irlan, Breno, Gerlan, Karol, Jeyse, Estefany, Leiliane, Wandria, que acompanharam o andamento do trabalho e me proporcionaram momentos que me ajudaram a me incentivar a fazer ele. Em especial, a Adria Diniz, que sempre me motivou nos momentos mais críticos e difíceis que passei com palavras e conversas de incentivo.

A todos que colaboraram direta ou indiretamente para a elaboração desta pesquisa.

RESUMO

O objetivo da pesquisa é investigar e discutir como os conteúdos de Estatística vêm sendo abordados dentro da perspectiva da construção do letramento estatístico nas provas do Exame Nacional de Acesso (ENA) ao Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), no período que vai de 2011 a 2019. Para tal, foi produzida uma pesquisa de caráter documental, na qual foi feita uma análise de todas as edições da prova do PROFMAT-ENA. As questões que envolviam o conteúdo de Estatística foram analisadas e classificadas segundo os níveis de letramento estatístico (WATSON e CALLINGHAM, 2003), e, nos casos em que se aplicava, analisadas e classificadas segundo os níveis de leitura e compreensão de tabelas e gráficos (WAINER, 1995; CURCIO, 1989). Os principais resultados apontam para a predominância de questões que demandam os níveis consistente não crítico (50,00%) e informal (30,00%) para letramento estatístico, do nível ler entre os dados (100,00%) para a compreensão gráfica e do nível intermediário (50,00%) e nível avançado (50,00%) para a leitura e compreensão de tabelas. Alguns aspectos associados à construção do raciocínio e pensamento estatísticos presentes nas provas são debatidos e algumas questões das provas são analisadas segundo as características de letramento estatístico que originam.

Palavras-Chave: PROFMAT. Gráficos. Letramento Estatístico. ENA.

ABSTRACT

The objective of the research is to investigate and discuss how the contents of Statistics have been approached within the perspective of the construction of statistical literacy in the tests of the National Examination of Access (ENA) to the professional Master in Mathematics in National Network (PROFMAT). For this, a research of documentary character, in which an analysis was made off all editions of the PROFMAT-ENA test. The questions involving the content of statistics were analyzed and classified according to the levels of statistical literacy (WATSON and CALLINGHAM, 2003), and, where applicable, they were analyzed and classified according to the levels of reading and understanding of tables and graphs (WAINER, 1995; CURCIO, 1989) levels of table comprehension (WAINER, 1995) for questions involving tables and levels of graphical understanding (CURCIO, 1989) for questions involving statistical graphs. The main results point to the predominance of questions that demand consistent non-critical (50.00%) and informal (30.00%) levels for statistical literacy, from the level reading between data (100.00%) for graphic comprehension and intermediate level (50.00%) and advanced level (50.00%) for reading and understanding table. Some aspects associated with the construction of the statistical reasoning and thinking present in the tests will be discussed and some questions of the tests will be analyzed according to the characteristics of statistical literacy that they originate.

Keywords: PROFMAT. Graphics. Statistical Literacy. ENA

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Quantitativo da produção de teses e dissertações da Educação Estatística em programas de pós-graduação brasileiros ao longo do tempo e os eventos que contribuíram para a sua disseminação.....	22
Figura 2: Questão de número 7 do ENA de 2011: nível informal.	39
Figura 3: Questão de número 11, do ENA de 2011: nível consistente não crítico.....	40
Figura 4: Questão de número 13, prova g, do ENA de 2018: nível inconsistente.	41
Figura 5: Questão de número 6, do ENA de 2013: nível consistente não crítico.	41
Figura 6: Questão de número quatro, do ENA de 2014: nível crítico.....	42
Figura 7: Questão de número 40, do ENA de 2015: nível consistente não crítico.	43
Figura 8: Questão de número 18, prova 1, do ENA de 2017: nível informal.	44
Figura 9: Questão de número 24, do ENA de 2014: nível consistente não crítico.	44
Figura 10: Questão de número 25, do ENA de 2019: nível inconsistente.	45
Figura 11: Questão de número 17, do ENA de 2016: nível consistente não crítico.	46
Figura 12: Questão de número seis, do ENA de 2013: nível ler entre os dados.	48
Figura 13: Questão de número seis, do ENA de 2012: nível ler entre os dados.....	49
Figura 14: Questão de número 17, do ENA de 2019, prova 1: nível ler entre os dados.....	50
Figura 15: Questão de número 13, prova g, do ENA de 2018: nível ler entre os dados.....	51
Figura 16: Questão de número 10, do ENA de 2019: ler entre os dados.	52
Figura 17: Questão de número 11, do ENA de 2015, nível intermediário.....	54
Figura 18: Questão de número 37, do ENA de 2016, nível avançado.	55
Figura 19: Questão de número 34, do ENA de 2015, nível intermediário.....	56
Figura 20: Questão de número 28, do ENA de 2017, prova 1: nível avançado.....	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Questões envolvendo conteúdos de Estatística nas provas do ENA (2011-2019) .	37
Tabela 2 – Níveis de Letramento Estatístico (WATSON; CALLINGHAN, 2003) identificados nas questões analisadas do ENA (2011-2019)	38
Tabela 3 – Questões envolvendo gráficos estatísticos nas provas do ENA (2011-2019).	47
Tabela 4 – Níveis de Compreensão Gráfica (CURCIO, 1989) identificadas nas questões do ENA (2011-2019).....	48
Tabela 5 – Níveis de Compreensão de Tabela (WAINER, 1995) identificadas nas questões do ENA (2011-2019).....	54

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Níveis de Compreensão Gráfica segundo Curcio (1989).	28
Quadro 2 – Níveis de Compreensão Tabular (WAINER, 1995).	29
Quadro 3 – Níveis de Letramento Estatístico na perspectiva de Watson e Callingham (2003).	30
Quadro 4 – Matriz curricular do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. .	35

LISTA DE SIGLAS

ANPMAT	Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ENA	Exame Nacional de Acesso
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
ISI	Instituto Internacional de Estatística
MEC	Ministério da Educação
MP	Mestrado Profissional
ONU	Organização das Nações Unidas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNE	Plano Nacional de Educação
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SBMAC	Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional
SIPEM	Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
UNESCO	Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
1.1. Ideias iniciais da pesquisa	14
2. METODOLOGIA DA PESQUISA	18
2.1. Justificativa e importância do trabalho.....	18
2.2. Objetivos.....	18
2.2.1. Objetivo Geral	18
2.2.2. Objetivos Específicos.....	18
2.3. Procedimentos metodológicos.....	19
3. REFERENCIAL TEÓRICO	20
3.1. A Educação Estatística no Brasil	20
3.1.1. Letramento Estatístico	24
3.2. Níveis de Compreensão Gráfica	27
3.3. Níveis de Compreensão de tabelas	28
3.4. Níveis de Letramento Estatístico.....	30
3.5. O PROFMAT, O ENA e a Estatística.....	32
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	37
4.1. Questões analisadas segundo o nível de letramento estatístico	37
4.2. Questões analisadas segundo o nível de compreensão gráfica	47
4.3 Questões analisadas segundo o nível de compreensão de tabela	53
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	58
REFERÊNCIAS	61

1. INTRODUÇÃO

1.1. Ideias iniciais da pesquisa

Há pelo menos duas décadas o ensino de Estatística em nosso país vem gradualmente ocupando um papel cada vez mais importante em todos os níveis da educação formal. Observando diferentes publicações, como Batanero (2002), Moore (1997) e Terán (2002), pode-se ver que o mesmo ocorreu na maioria dos países do mundo (GARFIELD, 2004).

A Estatística é muito utilizada em diversos campos da sociedade com o objetivo de realizar pesquisas visando a melhor compreensão dos fenômenos sociais e físicos. Segundo Cazorla *et al.* (2017), o significado científico da palavra Estatística “refere-se ao conjunto de ferramentas para obter, resumir e extrair informações relevantes de dados; encontrar e avaliar padrões mostrados pelos mesmos; planejar levantamento de dados ou delinear experimentos e comunicar resultados de pesquisas quantitativas” (p. 14). Além disso, ela auxilia nas investigações em que muitos dados estão presentes, buscando tratar, quantitativamente, os fenômenos para que informações sejam elaboradas e apresentadas de maneira planejada (GITIRANA, 2014). Nesse sentido, além de tratar de quantidades de dados e cálculos, a Estatística busca investigar e apresentar fenômenos.

De acordo com Cazorla (2017), a Educação Estatística se refere à compreensão de como as pessoas aprendem e ensinam a Estatística, relacionando aspectos cognitivos e afetivos ao desenvolvimento de didáticas e materiais de ensino. Trata-se de um conceito que não apenas envolve ensino das técnicas estatísticas, mas também sua relação com outras áreas.

A partir desta demanda social por compreender e interpretar as informações, e também de um grande movimento internacional sobre a introdução da Estatística no âmbito escolar, os documentos oficiais que norteiam a educação no país começam a abranger essa área do conhecimento. Entre eles, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que introduzem a Estatística desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997; 1998) até o Ensino Médio (BRASIL, 2002; 2006) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que prevê que a Estatística seja incluída desde a Educação Infantil (BRASIL, 2017).

Atualmente, no Brasil, a Base Nacional Comum Curricular é o documento oficial que orienta quais conteúdos devem ser ensinados na Educação básica que, a unidade temática Estatística e Probabilidade propõe para o Ensino Fundamental, especificamente relacionado

ao conteúdo Estatística, a necessidade da abordagem de conceitos, fenômenos e procedimentos presentes em situações-problema do cotidiano, das ciências e da tecnologia. Destacando que, “todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas” (BRASIL, 2017, p. 272). Nesse sentido, tanto a BNCC quanto os PCN, apontam para a importância da leitura, interpretação e construção de tabelas e gráficos para o desenvolvimento do senso crítico e de habilidades necessárias no dia-a-dia do aluno.

Um dos aspectos importantes no ensino de Estatística na Educação Básica consiste em possibilitar ao estudante um entendimento intuitivo e formal das principais ideias matemáticas que estão implícitas em representações estatísticas, procedimentos ou conceitos (LOPES, 2008). Quando o estudante adquire as habilidades de ler e usar a linguagem estatística para entender informações presentes na vida cotidiana ele alcança uma das três competências da Estatística, o letramento (GARFIELD e BEN-ZVI, 2008). O Letramento Estatístico também abarca a capacidade de avaliar e comunicar criticamente informações estatísticas e tirar conclusões a partir delas (GAL, 2002). Para tal, é necessário que os professores planejem atividades que possibilitem aos estudantes perceber a existência da variabilidade, incerteza, aleatoriedade, bem como reduzir e representar os dados coletados.

Para tal, se faz necessário que a formação inicial do professor que atuará na educação básica possibilite a este adquirir tanto o conhecimento dos conceitos estatísticos como o conhecimento pedagógico destes. Para Lopes (2008), a amplitude do conceito é mais importante do que o conceito formal. Segundo a autora, o processo de ensinar e aprender conceitos estatísticos com base na resolução de problemas, simulações e experimentos possibilita ao professor construir conhecimentos à medida que estabelece relações com informações adquiridas e com o domínio de diferentes linguagens e formas de expressão.

Arteaga *et al.* (2012) também defendem que para alcançar a melhoria do ensino de Estatística nas escolas é necessário aperfeiçoar a formação de professores. No entanto, pesquisadores da Educação Estatística no Brasil, como Viali (2008) e Cazorla (2006), salientam que nem todos os cursos de formação de professores de Matemática ofertam disciplinas de Estatística, e quando estas integram o currículo dos cursos, em geral, abordam conceitos básicos e raramente questões relacionadas ao ensino dos mesmos.

Dentro dessa perspectiva de formação continuada para professores que ensinam Matemática na educação básica está o Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT), que tem o objetivo atender professores de Matemática em exercício no ensino básico,

especialmente na escola pública, que buscam aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente, visando dar ao aluno participante qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática (BRASIL, 2013a). O PROFMAT forma os professores no conhecimento do conteúdo matemático, o qual se explicita claramente nos seus principais objetivos (BRASIL, 2013a; 2013b).

Este Mestrado Profissional parte do pressuposto que o professor de Matemática da Educação Básica possui formação deficiente, chegando à sala de aula despreparado e ignorando o conteúdo que deve ser ensinado, principalmente o conteúdo de Estatística. Nesse sentido, o programa visa promover a valorização profissional do professor por meio do aprimoramento de sua formação matemática.

Neste cenário, a proposta da pesquisa é caracterizar, investigar, descrever e analisar como os conteúdos de Estatística vêm sendo abordados na perspectiva da construção do letramento estatístico nas provas do ENA-PROFMAT, no período que vai de 2011 a 2019, analisando os principais aspectos em termos de raciocínio e pensamento nas questões, destacando os níveis de letramento estatístico presentes nela.

O presente Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) está organizado em cinco capítulos, dispostos da seguinte forma: Introdução, Metodologia da Pesquisa, Referencial Teórico, Resultados e Discussões e Considerações finais.

No primeiro capítulo será abordado algumas ideias iniciais sobre Estatística, Educação Estatística, no Brasil e no mundo, com relação ao Letramento Estatístico, a formação de professores e formação continuada através do PROFMAT.

No segundo capítulo abordaremos a importância da pesquisa, quais foram os objetivos que direcionaram a investigação e os procedimentos metodológicos adotados no trabalho.

No terceiro capítulo mostraremos quais foram os autores que ajudaram para o desenvolvimento da pesquisa. Curcio e seu níveis de compreensão gráfica, Wainer e seu trabalho sobre níveis de compreensão de tabelas, e as autoras Watson e Callingham com seu trabalho sobre níveis de Letramento Estatístico. Também nesse capítulo, falaremos sobre o PROFMAT, o ENA e a Estatística.

No quarto capítulo será mostrado os dados coletados bem como os resultados obtidos segundo a análise através dos níveis de compreensão gráfica de Curcio (1989), níveis de compreensão de tabela de Wainer (1995) e níveis de compreensão gráfica de Watson e Callingham (2003).

E o presente trabalho se encerra com o último capítulo, apresentando as considerações finais a respeito da pesquisa produzida.

2. METODOLOGIA DA PESQUISA

2.1. Justificativa e importância do trabalho

Esta pesquisa é justificada pela necessidade de registrar o processo de construção do letramento estatístico nas questões de Estatística do Exame Nacional de Acesso (ENA) ao PROFMAT. A pesquisa é importante por propiciar uma visão crítica acerca de como os conteúdos de Estatística estão sendo trabalhados nas provas, por meio do letramento estatístico proposto por Watson e Callingham (2003), níveis de compreensão de gráficos segundo Curcio (1989) e níveis de compreensão de tabelas de Wainer (1995), visto que, não foram encontrados estudos com a abordagem proposta no trabalho em questões do ENA.

Ela também fornece diagnósticos do ponto de vista da exploração das questões no que diz respeito aos aspectos de letramento estatístico, através da análise e soluções de cada questão observada. Sendo o ENA um meio de seleção de alunos para ingresso no PROFMAT, a realização do trabalho deve ainda contribuir para analisar e desvelar quais os critérios do programa, o que consideram desejável em termos de conhecimento estatístico que os candidatos necessitam possuir e a visão do PROFMAT sobre os conteúdos estatísticos que se faz presente nas questões.

2.2. Objetivos

2.2.1. Objetivo Geral

Caracterizar, investigar, descrever e analisar como os conteúdos de Estatística vêm sendo abordados na perspectiva da construção do letramento estatístico nas provas do ENA-PROFMAT, no período que vai de 2011 a 2019.

2.2.2. Objetivos Específicos

- Fazer uma pesquisa de análise documental para a criação de um banco de dados;
- Classificar os tipos de questões tabeladas de acordo com os níveis de leitura e interpretação de tabelas (WAINER, 1995), níveis de compreensão gráfica (CURCIO, 1989), e os níveis de letramento estatístico (WATSON E CALLINGHAM, 2003);

- Fazer um levantamento das ênfases e lacunas observadas a nível de conteúdo exigido, tanto quanto a nível de estratégias de resolução demandadas dos candidatos;
- Analisar e discutir os aspectos relacionados à construção do letramento estatístico em algumas questões selecionadas.

2.3. Procedimentos metodológicos

Esta pesquisa é de cunho qualitativo delineada de forma analítico-descritiva ao propor a análise da construção do Letramento Estatístico nas questões das provas do ENA - PROFMAT, no período que vai de 2011 a 2019.

Sobre a pesquisa qualitativa, Flick assevera que:

Os aspectos essenciais da pesquisa qualitativa [...] consistem na escolha correta de métodos e teorias oportunos, no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas, nas reflexões dos pesquisadores a respeito de sua pesquisa como parte do processo de produção de conhecimento, e na variedade de abordagens e métodos (FLICK, 2007, p. 20).

O estudo se caracterizou como qualitativo, de tipo estudo documental, nos termos de Fiorentini e Lorenzato (2009), segundo o processo de coleta dos dados. Esse tipo de estudo busca identificar, coletar e selecionar informações por meio da leitura de documentos, livros, revistas, gravações, filmes, jornais, bibliografias, a partir de questões ou hipóteses de interesse.

O corpus de análise foi obtido no banco de provas e soluções constantes no site da organização do PROFMAT¹ e as questões que englobavam o conteúdo de Estatística foram catalogadas e analisadas. Desta forma, foram analisadas 352 questões das quais apenas 20 se enquadravam nos nossos critérios de análise.

A partir da análise das questões e de suas respectivas soluções, é estabelecida a classificação de cada uma de acordo com os níveis de leitura e interpretação de Wainer (1995) para tabelas, os níveis de compreensão gráfica segundo Curcio (1989) e os níveis de letramento estatístico na perspectiva de Watson e Callingham (2003). Algumas questões são apresentadas e discutidas, destacando-se as suas principais características de letramento estatístico.

Vale destacar que a classificação das questões não leva em conta o grau de dificuldade das questões, mas sim das características conceituais que dela emergem.

¹ <https://www.profmatt-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>

3. REFERENCIAL TEÓRICO

3.1. A Educação Estatística no Brasil

O ensino de Estatística no Brasil possui relação direta com criação do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), no século XVII. Entretanto, apenas no final do século XVIII a Estatística passa a ser ensinada, inicialmente, no treinamento de engenheiros militares (CAZORLA, 2006).

Em todo caso, a Escola Militar e a Escola Politécnica foram fundamentais por consagrarem, ainda que de forma restrita, o ensino da Estatística e da Probabilidade no contexto brasileiro. Sendo as principais referências da Matemática superior no Brasil, estas instituições foram também fundamentais portas de entrada para as escolas superiores no país e para as ideias positivistas que invadiram o meio acadêmico na segunda metade do século XIX. (SANTOS, 2015, p. 67).

Segundo Araújo (2017), o primeiro curso de graduação em Estatística foi criado na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), em 1946. De acordo Ministério da Educação – MEC, até o ano de 2014, o Brasil registrava 49 cursos de graduação, 9 cursos de mestrado e 7 de doutorado voltados à Estatística ativos, reconhecidos oficialmente, distribuídos em 16 instituições de ensinos.

Em 1948, ocorreu a 1ª mesa redonda sobre o ensino de Estatística e desde então houve um constante crescimento no interesse dessa temática por parte de diversas comunidades científicas ao redor do mundo (BAYER *et al.*, 2009).

Em 1949, a Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e a Cultura (Unesco), em conjunto com outros órgãos da Organização das Nações Unidas (ONU), constituíram um comitê para a Educação no Instituto Internacional de Estatística (ISI). Inicialmente, o Comitê treinou e formou profissionais que auxiliaram na produção de estatísticas mais precisas sobre os países. A partir dos anos de 1980, o Comitê passou a se preocupar com a Educação Estatística nas escolas básicas, observando que, quanto mais cedo o acesso das crianças ao ensino de Estocástica², melhor seria para adquirir um Letramento Estatístico (GONÇALVES, 2008).

Para atingir os objetivos de implementar e consolidar a Educação Estatística nas escolas básicas, o ISI criou o International Association for Statistical Education (IASE) e, para divulgar os trabalhos desenvolvidos, passou a organizar a International Conference on Teaching Statistics (ICOTS), realizada na Inglaterra-

² O termo estocástica refere-se à interface entre os conceitos combinatório, probabilístico e estatístico, os quais possibilitam o desenvolvimento de formar particulares de pensamento, envolvendo fenômenos aleatórios, interpretação de amostras e elaboração de inferências (LOPES, 2012, p. 161).

1982, no Canadá-1986, na Nova Zelândia-1990, em Marrocos-1994, em Cingapura-1998, na Cidade do Cabo-2002, no Brasil-2006, na Eslovênia-2010, no Arizona-2014 e Japão-2018.

Os estudos em Educação Estatística envolvem investigações sobre currículos da escola básica e da universidade, formação de professores, erros e dificuldades dos estudantes e novas tecnologias. Essas pesquisas têm se apresentado na perspectiva da Psicologia e da Educação Matemática. Para Gonçalves (2008), os pesquisadores na perspectiva da Psicologia, “apresentam-se como observadores e descritores do que acontece quando os sujeitos se deparam com situações que exigem o raciocínio estocástico, revelando esquemas mentais no processo de conceitualização”. Já os pesquisadores na perspectiva da Educação Matemática, “apresentam-se como interventores da prática educativa, uma vez que objetivam melhorar o trabalho pedagógico com a Estocástica” (GONÇALVES, 2008, p. 8).

O primeiro documento no Brasil a ressaltar a importância do ensino de Estatística no ensino fundamental foram os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997; 1998). Esse documento destaca a importância de compreender a Matemática como um componente importante na construção da cidadania, ao passo que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos.

Os PCN de Matemática, assim como os de outras disciplinas, estão organizados em blocos de conteúdos. Na versão publicada em 1997, destinada às séries iniciais do ensino fundamental (1ª a 4ª séries), e em 1998 para as séries finais (5ª a 8ª), esses conteúdos estão organizados em quatro blocos de conteúdos: Números e operações, Espaço e forma, Grandezas e medidas e Tratamento da informação (BRASIL, 1997; 1998).

Segundo Santos (2015) e Lopes (1998), os PCN configuram um marco importante para o campo da Educação Estatística Brasil, pois, com o Bloco “Tratamento da Informação”, o trabalho com a Estatística, Probabilidade e Combinatória passa a ser destacado no currículo da Educação Básica.

A partir de 2000, são publicados os Parâmetros Curriculares do ensino Médio (PCNEM). Nele, os Conteúdos de Matemática também estão dispostos em três eixos ou temas estruturadores: Álgebra - Números e Funções, Geometria e medidas e Análise dos Dados. Neste PCN, os conteúdos de Estatística, Combinatória e Probabilidade estão inseridos no eixo “Análise de Dados” (BRASIL, 2002; 2006).

Com o eixo Análise de Dados, os conteúdos de Combinatória, Estatística e Probabilidade passam a ter um novo destaque dentro da disciplina de Matemática, se

articulando com temas transversais e, numa perspectiva interdisciplinar, interligada com quase todas as disciplinas, inclusive a Biologia, a Química e a Geografia.

A oficialização do ensino na Educação Básica, a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 1997, movimentou as pesquisas na área (Figura 2), pois a necessidade de dar respostas aos problemas enfrentados no ensino de conceitos e procedimentos estatísticos veio a aumentar, e, nos eventos nacionais e regionais ligados à Educação Matemática ou Estatística, tornou-se constante a procura por oficinas, minicursos e relatos de experiências de professores que ensinam matemática, em busca de materiais e abordagens que permitam trabalhar os conceitos que envolvem o ensino de estatística (CAZORLA, 2009).

Figura 1: Quantitativo da produção de teses e dissertações da Educação Estatística em programas de pós-graduação brasileiros ao longo do tempo e os eventos que contribuíram para a sua disseminação.



Fonte: Santos (2015, p. 228).

A Educação Estatística no Brasil tem seu marco histórico na Conferência Internacional "Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística - Desafios para o Século XXI",³ realizado na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC, 1999) e começa a tomar forma, enquanto área de pesquisa, com tendência crescente e perspectivas de consolidação (SANTOS, 2015), como podemos verificar na figura acima. A conferência foi realizada em decorrência de a Estatística passar a ser utilizada em diversas áreas, não sendo tratada somente como uma disciplina independente, mas como ferramenta fundamental na tomada de decisões e na interpretação de diversos fenômenos (ARAÚJO, 2017). Ao todo, participaram 180 pesquisadores assim distribuídos (Brasil 110, Argentina 35, Uruguai 10, Chile 8, Espanha 5, Peru 3, Portugal 2, Cuba 2, Bélgica 1, Colômbia 1, Itália 1, México 1 e Venezuela 1), o que demonstra a receptividade dos profissionais ligados à área de ensino e aprendizagem em Estatística.

Outro evento muito importante para o desenvolvimento da Educação Estatística enquanto campo de pesquisa foi a criação do Grupo de Trabalho GT-12 – Ensino de

³<http://www.inf.ufsc.br/cee/>

Probabilidade e Estatística. Tal acontecimento se deu durante a realização da primeira edição do Simpósio Internacional de Pesquisas em Educação Matemática (SIPEM) em 2000, na cidade de Serra Negra/SP, em consequência da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) desejar mapear as pesquisas em Educação Matemática (ODY, 2019; CARZOLA, 2006; ARAÚJO, 2017).

Segundo Araújo (2017), o evento se constituiu como um espaço de grande troca de experiências teórico-metodológicas e disseminação de pesquisas e também como um ambiente de interação entre os pesquisadores. Nele, foram propostos grupos de trabalho que foram formados por pesquisadores do Brasil e do mundo, entre eles o GT-12.

A importância dos conteúdos relativos à Probabilidade e à Estatística na Escola Básica vem sendo afirmada e reconhecida há muitos anos, e a Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM - tem sido um dos grandes suportes das reflexões nessa área, desde a criação do GT12- Ensino de Probabilidade e Estatística. Esse grupo reúne pesquisadores e colaboradores de todo o Brasil e mantém estreita relação também com grupos internacionais de pesquisa na área.

Considerando a publicação dos PCN, a Conferência Internacional ocorrida em Florianópolis e a criação do GT-12, “outro fato ocorrido no ano 2000 contribuiu substancialmente para a ampliação do quantitativo de pesquisas neste campo nos anos seguintes, a criação da *Área de Ensino de Ciências e Matemática* (área 46), na CAPES/MEC” (SANTOS, 2015, p. 229).

Considerando esse cenário, muitas pesquisas têm destacado a importância e relevância do ensino de Combinatória, da Probabilidade e da Estatística desde o início da escolaridade; isso tem ocorrido com grande ênfase nas últimas duas décadas (GAL; GARFIELD, 1997; LOPES, 1998; 2003; SHAUGHNESSY, 2006; WATSON, 2006).

Outro advento muito importante para o Campo da Educação Estatística foi a Criação da Base da Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2017. A BNCC (BRASIL, 2016; 2017) é um conjunto de normas que regulam a Educação Básica no Brasil (Pública e Privada), por meio de suas diretrizes são estabelecidas as aprendizagens essenciais de cada etapa no desenvolvimento escolar dos alunos, além de garantir o direito ao aprendizado e ao desenvolvimento a todos que compõem essa faixa educacional, sempre em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação – PNE (BRASIL, 2014).

Com a aprovação da BNCC (BRASIL, 2018), que fixou os conteúdos mínimos para a Educação Básica no Brasil, a Estatística e a Probabilidade ganharam mais espaço no currículo escolar, sendo uma das cinco unidades temáticas da área de Matemática.

O documento prevê que, ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. Competência é definida na BNCC como “a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2017, p. 8).

Ou seja, a BNCC enfatiza a necessidade de os alunos serem capazes de utilizar os conhecimentos escolares no seu cotidiano, sempre respeitando os princípios éticos, os direitos humanos, a justiça social e a sustentabilidade ambiental. O documento ainda assinala que as escolas devem promover não apenas o desenvolvimento intelectual, mas também o social, o físico, o emocional e o cultural, compreendidos como dimensões fundamentais para a perspectiva de uma educação integral. Isso as diferencia das habilidades, que são mais focadas no desenvolvimento cognitivo.

Na BNCC de Matemática do Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe uma abordagem dos conceitos da estatística e da probabilidade ligados a situações da vida cotidiana, acreditando que

todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos. (BRASIL, 2017, p.270)

Ao destacarmos a importância da Educação Estatística no currículo brasileiro, verificamos que a BNCC aborda conceitos de estatística e probabilidade desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, o que não acontecia nos PCN.

A proposta apresentada pela BNCC não é novidade quando se trata da Educação Estatística no mundo. De acordo com Lopes (1998), desde meados de 1980, diversos países têm repensado seus currículos. Estudos sobre essa temática vêm sendo discutidos de forma ampla e difundidos de forma sistemática em nível mundial em congressos internacionais como o International Association for Statistical Education (IASE) e o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

3.1.1. Letramento Estatístico

Compreendendo que interpretar dados em gráficos e tabelas faz parte do cotidiano de todo cidadão, consideramos a importância do Letramento Estatístico na vida de todos. Estudos do Letramento Estatístico (WATSON, 1997, 2006; GAL, 2002; WATSON e CALLINGHAM, 2003; CAZORLA; CASTRO, 2008; GUIMARÃES, OLIVEIRA, 2014; CALLINGHAM; WATSON, 2017) apontam para a necessidade de se desenvolver no aluno o raciocínio crítico e a capacidade de entender sua realidade. Esses autores consideram que ser letrado estatisticamente é possuir competências para compreender, discutir e formar opiniões a respeito de informações estatísticas apresentadas pelos meios de comunicação, destacando que o desenvolvimento do letramento estatístico deve acontecer desde a escola.

Para Gal (2002), os conhecimentos básicos de Estatística são essenciais para a vida das pessoas nas sociedades saturadas de informação. Segundo o autor, o letramento estatístico tem dois componentes: os elementos cognitivos e os de disposição. São considerados pelo autor como elementos cognitivos a capacidade de ler informações textuais, gráficos e tabela, os conhecimentos estatísticos, matemáticos e do contexto, e competência para a elaboração de questões críticas. De acordo o autor, os elementos cognitivos são responsáveis pela competência de compreender, interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas. E, são considerados por Gal, elementos de disposição: as crenças e atitudes e a posição crítica, responsáveis pela capacidade de discutir e questionar informações.

A partir do modelo de letramento estatístico de adultos proposto por Gal (2002), Watson (2006), propõe um modelo composto por seis componentes: conteúdo estatístico, habilidades de letramento, habilidades matemática e estatística, contexto, atividades e motivação. Além disso, segundo a autora, importantes aspectos no desenvolvimento do letramento Estatístico são o papel do professor e da escola, e o entendimento do contexto.

O termo "letramento" ou "literacia" surgiu para destacar o fato de que as estatísticas são consideradas como parte do patrimônio cultural necessário para o cidadão educado (BATANERO, 2002). O uso de duas terminologias, letramento ou literacia, deve-se principalmente à tradução literal em português do termo inglês "*literacy*". A maioria dos autores destaca a tradução literal do termo como "letramento", embora encontremos autores, como Batanero (2002), que traduzem o termo como "cultura". Uma das causas do uso do termo "cultura" pode ser devido à concepção pejorativa do termo "analfabeto" em espanhol. Outra razão seria, como salienta Rumsey (2002), que o uso da noção de "alfabetização estatística" é muito amplo.

Ao longo dos anos, definições ou modelos foram apresentados para representar o Letramento Estatístico. Abaixo, apresentamos classificados por data de publicação, alguns dos destaques.

A primeira definição de Letramento Estatístico, que podemos considerar relevante, é a descrita por Wallman (1993), que define o Letramento Estatístico como a capacidade de compreender e avaliar criticamente os resultados estatísticos que inundam nossas vidas cotidianas, juntamente com a capacidade de apreciar as contribuições que o raciocínio estatístico pode fazer em decisões públicas e privadas para decisões pessoais e profissionais.

Schild (1999) define o Letramento Estatístico como a capacidade de usar argumentos críticos no raciocínio usando estatísticas como evidência. O autor argumenta que, para não ser estatisticamente analfabeto, deve-se realizar um raciocínio estatístico crítico, tendo-o como mais uma competência, como falar, ler ou escrever. Para o autor, a alfabetização estatística envolve principalmente duas habilidades de leitura, compreensão e interpretação.

A literatura também destaca a descrição desenvolvida por Gal (2002), cujo modelo, baseado no de Watson (1997), inclui habilidades estatísticas e matemáticas, habilidades básicas de leitura, conhecimento de contexto, capacidade crítica de conhecimento estatístico, disposições para o uso de estatísticas, crenças e atitudes, que os cidadãos devem ter. Este modelo distingue dois componentes básicos inter-relacionados: (a) "capacidade de interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, argumentos apoiados por dados ou fenômenos estocásticos que as pessoas podem encontrar em vários contextos, incluindo os meios de comunicação, mas não se limitando somente a eles; e (b) a capacidade de discutir ou comunicar suas opiniões sobre tais informações estatísticas quando relevantes" (GAL, 2002).

Todas as definições acima enfatizam que o Letramento Estatístico é mais do que apenas capacidade de calcular e conhecer definições. Como aponta Batanero (2002), o principal objetivo não é tornar os futuros cidadãos "estatísticos amadores", uma vez que a aplicação razoável e eficiente das estatísticas de resolução de problemas requer amplo conhecimento sobre o assunto e é competência de estatísticos profissionais. Também não se trata de treiná-los em cálculo e representação gráfica, já que os computadores hoje resolvem esse problema. O objetivo é proporcionar uma cultura estatística para que o cidadão possa desempenhar seu papel na sociedade.

Outros autores, como Ben-Zvi e Garfield (2004), Watson (2006) ou Chick e Pierce (2011) enfatizam que ser estatisticamente educado requer compreensão e conhecimento de estatística, aritmética, alfabetização geral, representação gráfica e resumida, em um ambiente

pessoal. Além disso, inclui a capacidade de questionar a coleta de dados, avaliar suas interpretações, suas consequências e identificar suas limitações.

Garfield, DelMas e Chance (2003) consideram a alfabetização estatística como a capacidade de entender informações estatísticas presentes em contextos cotidianos. Portanto, requer a capacidade de organizar e representar os dados, juntamente com o manuseio de conceitos, vocabulário e símbolos estatísticos, bem como o reconhecimento da probabilidade como medida de incerteza.

Como vemos, a definição do que é ser letrado ou culto é uma tarefa árdua, embora, em geral, as diferentes definições publicadas na literatura sejam variações ou visões simples de definições anteriores, principalmente a de Wallman, (1993). Por exemplo, a definição de Sutherland e Ridgway (2017) atesta que a definição de Wallman (1993) é muito passiva, pois usa verbos como 'Entender', 'apreciar' e 'avaliar' que não refletem a participação ativa do consumidor de dados.

3.2. Níveis de Compreensão Gráfica

Diversos autores investigaram gráficos estatísticos, entendendo-os como objetos semióticos, já que o domínio dos elementos matemáticos é necessário para sua leitura e construção (ARTEAGA; BATANERO, 2010; BATANERO; ARTEAGA; RUIZ, 2010). Alguns deles indicam que para ler e construir gráficos estatísticos é preciso identificar e compreender cada um dos seguintes elementos que o constituem (CURCIO, 1987):

- **Palavras ou expressões:** são úteis para compreender as informações e o contexto que foi representado no gráfico (título, etiquetas nos eixos e escalas).
- **Conteúdo matemático subjacente:** relacionado ao conjunto numérico utilizado (e operações associadas), conceitos geométricos (tais como área no histograma, coordenadas cartesianas em um gráfico de dispersão, comprimento no gráfico de barras), proporcionalidade, etc.
- **Convenções específicas de construção:** Estes são específicos para cada tipo de gráfico, por exemplo, a proporcionalidade entre a frequência e o setor circular no gráfico da torta.

A necessidade de compreensão simultânea desses componentes torna a leitura de gráficos estatísticos uma atividade complexa. Curcio (1989) e Friel, Curcio e Bright (2001) estabeleceram os seguintes níveis de acordo com a dificuldade necessária para a leitura das informações no gráfico (Quadro 1).

Quadro 1 – Níveis de Compreensão Gráfica segundo Curcio (1989).

Nível de compreensão gráfica	Descrição
Ler os Dados	Necessita de uma leitura literal dos gráficos, o indivíduo tem contato com a informação presente no gráfico e, é, capaz apenas, de identificar por meio da leitura, os fatos explicitados no gráfico, mas não emite nenhuma argumentação ou opinião referente ao que é divulgado, e capaz de entender a escala e as unidades de medidas.
Ler entre os Dados	Necessita comparar quantidades, exerce uma interlocução com a informação, tem que apresentar dados apresentados nos gráficos, relacionar dados presentes em outras fontes, tais como tabelas e textos, deve usar conceitos matemáticos tais como adição, subtração, multiplicação e divisão. Portanto este nível exige que o indivíduo tenha uma leitura quase integral dos dados gráficos, relacionando intervalos, aumento e diminuição.
Além dos Dados	Deve exercer uma ação sobre a informação, necessita deduzir com base nos dados, inferir para além dos dados gráficos com base em conhecimentos prévios.

Fonte: Autor (2021). Adaptado de Curcio (1989)

No nível I (ler os dados), o leitor faz uma leitura literal do gráfico. Ele/ela reconhece os fatos explicitamente declarados no gráfico ou as informações encontradas no título do gráfico e nas etiquetas do eixo diretamente do gráfico. Não há interpretação neste nível. A leitura que requer este tipo de compreensão é uma tarefa cognitiva de muito baixo nível.

Já no nível II (Ler entre os dados), a interpretação e a integração dos dados no gráfico estão inclusas para este nível de compreensão. O leitor deve ter a capacidade de comparar quantidades (por exemplo, maiores que, menores que) e usar outros conceitos e habilidades matemáticas (por exemplo, adição, subtração, multiplicação, divisão) que permitam ao leitor combinar e integrar dados e identificar as relações matemáticas expressas no gráfico.

A característica chave deste nível de compreensão é que o leitor pode prever ou inferir dados de esquemas existentes, conhecimento de fundo e/ou conhecimento em memória, para obter informações que não estão explícitas ou implicitamente declaradas no gráfico. Enquanto a compreensão do Nível II pode exigir que o leitor faça uma inferência com base nos dados apresentados no gráfico, o Nível III exige que a inferência seja feita com base em uma "base de dados" na cabeça do leitor, não no gráfico.

Referente ao que foi exposto anteriormente, Batanero *et al.* (1994) enfatizam a necessidade de os estudantes adquirirem habilidades de leitura crítica de dados, uma vez que este é um componente básico para alcançar o letramento Estatístico e uma necessidade em nossa sociedade tecnológica.

3.3. Níveis de Compreensão de tabelas

Segundo Scherer (2004), um dos objetivos da Estatística é sintetizar os valores que uma ou mais variáveis podem assumir. Para que possamos ter essa visão global, podemos apresentar esses valores em tabelas ou gráficos. Tabela, para Scherer (2004), é um quadro que resume um conjunto de informações e observações.

Em relação à leitura, compreensão e interpretação de tabelas, como já acontece com a compreensão gráfica, as representações tabulares estão presentes constantemente em jornais, revistas e nas mais diversas formas de mídia impressas ou on-line.

Como foi dito anteriormente, é importante ter as informações de um estudo estatístico disponíveis de forma organizada para sua correta interpretação e assim fornecer respostas às perguntas inicialmente colocadas, ou formular novas perguntas uma vez que estas informações tenham sido analisadas. Para Koschat (2005), em uma tabela, a escolha das linhas e colunas que a compõem ou o tipo de número que está representado, entre outros fatores, são essenciais para sua construção e interpretação. Da mesma forma, eles constituem um apoio fundamental na resolução de tipos de problemas como, por exemplo, o estudo de uma variável estatística bidimensional (GEA, 2014).

Para analisarmos os níveis de compreensão e interpretação de tabelas (Quadro 2), utilizaremos os níveis elementar, intermediário e avançando propostos por Wainer (1995) e citados por Coutinho e Goullart (2015), como segue:

Quadro 2 – Níveis de Compreensão Tabular (WAINER, 1995).

Nível	Descrição
Elementar	Neste nível, o indivíduo tem a capacidade de extrair dos pontuais da tabela, sem exigir qualquer comparação ou análise dos mesmos.
Intermediário	Neste nível o indivíduo tem que descobrir quais são as relações existentes entre os dados que são apresentados na tabela.
Avançando	Há o envolvimento de uma compreensão mais ampla da estrutura dos dados apresentados na tabela, geralmente comparando tendências e analisando relações implícitas na tabela.

Fonte: Wainer (1995) apud Goullart e Coutinho (2015, p. 149).

A capacidade de interpretar as informações apresentadas em tabelas é um elemento-chave da cultura científica, e isto requer uma atenção explícita como parte da educação de todas as pessoas. Algumas pessoas não lidam adequadamente com informações quantitativas e podem tornar-se dependentes da interpretação de outras, tornando-as vulneráveis a enganos intencionais ou não intencionais (Dewdney, 1993), uma vez que não se deram conta de que os dados podem ser manipulados para apoiar certos pontos de vista.

A interpretação dos dados e a capacidade de construir gráficos e tabelas são fundamentais para o processo e produção da ciência. Para os cientistas, organizar os dados em

gráficos e tabelas é um método inestimável de representação de dados para encontrar relações entre as variáveis a fim de determinar padrões, propriedades e relações (Glazer, 2011).

As tabelas fazem parte do Letramento Estatístico, pois são uma das principais formas de apresentar dados aos leitores, portanto é necessário analisar como melhorar o formato da tabela para que ela seja compreensível para a maioria das pessoas. O estudo de Feinberg e Wainer (2011) afirma que as tabelas continuarão a ser o formato mais escolhido e continuarão a dominar na literatura científica.

3.4. Níveis de Letramento Estatístico

Watson (1997) define letramento estatístico como a habilidade de compreensão textual e das eventuais implicações das informações estatísticas contextualizadas, envolvendo entendimento básico de sua terminologia, de sua linguagem e de conceitos inseridos em situações sociais, bem como a evolução de atitudes investigativas críticas.

Watson e Callingham (2003) afirmam que somente após a introdução dos conteúdos estatísticos na disciplina de Matemática, por volta de 1990, na Austrália, foi possível dar início ao processo de letramento estatístico. O modelo de Letramento Estatístico proposto por Watson (2006), baseado no modelo de Gal (2002a), é composto por seis componentes: conteúdo estatístico, entendimento do contexto, habilidades de letramento, habilidades matemática e estatística, tarefas (atividades) e motivação para realização das tarefas.

As pesquisadoras Watson e Callingham (2003) desenvolveram um instrumento de avaliação do letramento estatístico de alunos que determina seis níveis de letramento estatístico: Idiossincrático, Informal, Inconsistente, Consistente não Crítico, Crítico e Matematicamente Crítico. O quadro abaixo (Quadro 3) descreve cada um dos níveis determinados pelas autoras.

Quadro 3 – Níveis de Letramento Estatístico na perspectiva de Watson e Callingham (2003).

Nível	Nome	Descrição
1	Idiossincrático	Possui alguma habilidade matemática básica associada com leitura e contagem de um a um dos valores da tabela, porém não usa terminologias como média mediana, moda, desvio-padrão.
2	Informal	Consegue usar algumas terminologias e faz cálculos básicos a partir de tabelas e gráficos, porém, com contexto refletindo crenças não estatísticas.
3	Inconsistente	Usa de maneira qualitativa as ideias estatísticas e consegue obter conclusões sem justificativa.
4	Consistente não crítico	Possui engajamento apropriado com o contexto, mas não é crítico, com habilidades estatísticas associadas com a média, probabilidade simples, variação e interpretação gráfica.

5	Crítico	É crítico e questionador em contextos familiares e não familiares, e faz uso apropriado da terminologia, interpretação qualitativa do acaso e apreciação da variação.
6	Matemática crítico	Possui habilidade matemática para realizar tarefas, tem postura crítica, fazendo interpretações e questionamentos em diversos contextos.

Fonte: Watson e Callingham (2003).

O sistema classificatório de níveis de letramento construído por Watson e Callingham (2003) se baseia em trabalho de Watson (1997) onde ela utiliza “Estrutura do Resultado do Aprendizado Observado” (*Structure of the Observed Learning Outcome - SOLO*) e a taxonomia de Biggs e Collis (1982) da psicologia do desenvolvimento para classificar a alfabetização estatística em uma hierarquia de três níveis com crescente sofisticação: uma compreensão básica da terminologia probabilística e estatística; uma compreensão da linguagem e dos conceitos estatísticos quando eles estão embutidos no contexto de uma discussão social mais ampla; e uma atitude questionadora para contradizer afirmações feitas sem fundamento estatístico adequado.

Os níveis da construção de Letramento Estatístico foram representados através de uma breve caracterização dos níveis de tarefas (WATSON; CALLINGHAM, 2003). A ideia básica de identificar os níveis de alfabetização estatística está resumida no Quadro 3. A estrutura de Watson e Callingham (2003) é baseada em uma hierarquia de seis níveis, começando no nível idiossincrático através de um pensamento cada vez mais sofisticado até o nível matemático crítico.

No nível idiossincrático (Nível 1), os conceitos estatísticos não aparecem, e isto indica uma falta de envolvimento com suas ideias e contextos associados. Os estudantes têm sérios problemas com o uso da terminologia, como a média. Além disso, as crenças e experiências pessoais dominam.

O envolvimento dos estudantes com contextos estatísticos aumenta no nível informal (Nível 2). O engajamento ainda é intuitivo, não estático e inclui aspectos irrelevantes do contexto da tarefa. As etapas da tarefa exigem apenas um engajamento coloquial com o contexto subjacente. No nível informal, o engajamento dos estudantes em etapas de tarefas reflete elementos individuais de terminologia complexa.

As etapas da tarefa no nível inconsistente (Nível 3) exigem um engajamento seletivo com o contexto subjacente. No nível Inconsistente, o engajamento seletivo com o contexto inclui o reconhecimento apropriado das conclusões, mas não tem justificativa, e as ideias estatísticas são utilizadas qualitativamente e não quantitativamente.

No nível consistente não crítico (Nível 4), os estudantes têm um sólido engajamento e compreensão com o contexto. Eles são capazes de dominar múltiplos aspectos da terminologia estatística. No entanto, o engajamento dos estudantes com o contexto não é crítico.

Finalmente, nos níveis crítico (Nível 5) e matemático crítico (Nível 6), as habilidades estatísticas críticas dos estudantes são sofisticadas. De acordo com Watson e Callingham (2003), nos dois últimos níveis da construção da alfabetização estatística, o engajamento dos estudantes em termos de criticidade e questionamento tanto em contextos familiares quanto desconhecidos, e seu uso da terminologia são desenvolvidos. A distinção entre os níveis críticos e matemáticos críticos é o nível de habilidade matemática necessária para se engajar em questionamentos críticos. No nível matemático crítico, o uso sofisticado do raciocínio proporcional é realizado. Além disso, de acordo com Watson e Callingham (2003, p. 3): "estes níveis poderiam ser usados por professores e desenvolvedores de currículo para incorporar aspectos apropriados do Letramento Estatístico no currículo existente". A construção do Letramento Estatístico pode ser usada para classificar os resultados educacionais dos estudantes em uma hierarquia de resultados menos complexos a mais complexos.

Uma verdadeira força do modelo proposto por Watson e Callingham (2003) é que os pesquisadores validaram sua escala de alfabetização estatística com respostas de um grande número de estudantes australianos. Isto lhes permitiu tentar determinar como e quando a instrução para a alfabetização estatística poderia ocorrer e como a instrução pode ser ensinada para ajudar os estudantes a progredir.

3.5. O PROFMAT, O ENA e a Estatística

A discussão sobre a implementação de Mestrado Profissional (MP) não é algo recente. Segundo Fischer (2005, p.25), a perspectiva de "cursos orientados à capacitação profissional está expressa no Parecer nº 977/65 do então Conselho Federal de Educação, que já propunha a criação de cursos de pós-graduação orientados à formação de profissionais". Com isso, os alunos de Pós-Graduação podem optar pelo domínio profissional, ou seja, por um curso de mestrado que enfatiza estudos e técnicas diretamente focados no desempenho de um alto nível de qualificação profissional.

Esta ênfase é a única diferença em relação ao mestrado acadêmico. O mestrado profissional confere o mesmo grau e prerrogativa, inclusive para a prática do ensino, e como

todo programa de pós-graduação (*stricto sensu*) tem validade nacional do diploma condicionado ao reconhecimento prévio do curso (FISCHER, 2005).

O mestrado profissional responde a uma necessidade socialmente definida de formação profissional de natureza diferente daquela promovida pelo mestrado acadêmico e não se opõe, em nenhuma circunstância, à oferta e expansão deste tipo de curso, nem constitui uma alternativa para a formação de professores segundo padrões de exigência mais simples ou mais rigorosos do que aqueles tradicionalmente adotados pelo programa de pós-graduação.

A proposta desses cursos deve contemplar estrutura curricular que enfatize a articulação entre conhecimento atualizado, domínio da metodologia pertinente e aplicação orientada para o campo de atuação profissional específico, como é o caso do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional (MENEZES, 2020).

Essas especificidades do Mestrado Profissional determinam que o acompanhamento e a avaliação sejam feitos com base em critérios diferenciados, definidos pelas áreas de avaliação, e realizados por subcomissão específica, mesmo se realizados concomitantemente aos Programas Acadêmicos, visando novos experimentos do ensino, da pesquisa e da extensão (MENEZES, 2020).

É consenso que um fator chave para a melhoria da educação escolar reside na formação dos professores das escolas. Vários educadores, tanto no Brasil como em outros lugares, têm apontado a existência de um corpo de conhecimentos matemáticos específico para o ensino como profissão, e que não pode ser considerado uma versão simplificada do conhecimento matemático em si.

Assim, tem havido apelos vigorosos para o desenvolvimento de modelos de formação de professores alicerçados nos conhecimentos necessários para a prática em sala de aula. Ao mesmo tempo, a alienação entre a formação inicial e contínua de professores, por um lado, e a prática em sala de aula, por outro, tem sido amplamente denunciada. Em resposta a este cenário, diversas instituições e organizações, entre as quais as sociedades científicas SBM, SBEM e SBMAC, têm promovido ativamente iniciativas que visam a melhoria da formação dos professores das escolas, tanto em formação como em exercício. Destaque para o programa de mestrado profissional PROFMAT de abrangência nacional (TAKAI, 2017).

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) é um programa de mestrado semipresencial inserido na área do ensino da Matemática, com abrangência nacional. O Mestrado é composto por uma rede de instituições de ensino superior no âmbito da Universidade Aberto do Brasil/Capes, coordenada pela Sociedade Brasileira de

Matemática (SBM), e apoiada pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) (TAKAI, 2017).

O PROFMAT é oferecido por uma rede de 71 instituições de ensino superior (universidades e institutos), em 100 campi localizados em todos os 26 estados brasileiros e no Distrito Federal. A SBM é responsável pela supervisão geral do programa de mestrado, definindo suas diretrizes, nomeando seus principais diretores e acompanhando sua execução em toda a rede. As instituições associadas oferecem os cursos, bem como a orientação de pesquisas e dissertações, além da concessão do grau final (CARNEIRO; SPINETI, 2017).

O PROFMAT oferece treinamento aprofundado em Matemática para professores do ensino fundamental ao médio e é financiado pela CAPES, órgão federal de ensino médio. Iniciado em 2011, já concedeu mestrado a mais de 3.200 professores de escolas que agora assumem um papel de liderança na mudança do cenário educacional no país.

Na verdade, o PROFMAT tornou-se um modelo para programas semelhantes em muitos outros campos acadêmicos: português, física, química, história, geografia, artes e muitos outros, com o objetivo proporcionar formação matemática aprofundada e relevante para a docência na Educação Básica, visando dar ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática.

Dessa forma, o programa também ajuda a aproximar universidade e escola para um diálogo que faltava há décadas e é fundamental para enfrentar os desafios da educação. Tal materializou-se, em particular, na criação da Associação Nacional dos Professores de Matemática (ANPMat) que é dirigida por ex-alunos do PROFMAT e tem como objetivo proporcionar novas oportunidades de formação de professores de matemática, em colaboração com as universidades e as sociedades científicas (TAKAI, 2017).

Dentre eles, destaque especial para os Simpósios da Formação do Professor de Matemática, ciclo de encontros organizado bianualmente pela ANPMat e pela SBM em todas as grandes regiões do Brasil, dedicado à discussão de todos os assuntos relevantes para o professor de matemática e que são realizados bianualmente em todas as principais regiões do Brasil.

A prática desse Mestrado Profissional em Matemática possui alguns objetivos a serem alcançados e está alicerçada nas seguintes diretrizes:

- a) executar um processo de formação complementar em matemática, baseado nos conteúdos curriculares do ensino básico, que promova o domínio dos conteúdos apropriados, da forma de pensar e das estratégias de resolução de problemas característicos da matemática;
- b) promover uma articulação eficaz entre conhecimentos e práticas das ciências matemáticas e do ensino básico, direcionada aos objetivos da educação básica;
- c) estimular e promover a independência do

professor cursista, fornecendo-lhe instrumentos para busca por conhecimento e desenvolvimento profissional de forma autônoma e permanente; d) incentivar a pesquisa e produção de materiais e práticas pedagógicas diferenciadas para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática na escola (textos, atividades, software, simulações, ambientes de aprendizagem, aulas inovadoras, etc.) (BRASIL, 2010, p. 9).

O Mestrado tem a duração de dois anos, estruturado em quatro semestres letivos regulares e dois períodos de verão. Segundo Carneiro e Spinetti (2017), também são realizadas atividades presenciais e a distância, organizadas em disciplinas obrigatórias, eletivas e finalização da dissertação de mestrado (Quadro 4). Os professores também podem realizar suas atividades à distância, por meio do ambiente virtual de aprendizagem, com o apoio dos recursos disponíveis na instituição associada e sob a supervisão do docente da disciplina.

Quadro 4 – Matriz curricular do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1º ano	
1º período	2º período
MA 11 - Números e Funções Reais	MA 13 – Geometria
MA 12 - Matemática Discreta	MA 14 – Aritmética
2º ano	
Verão	1º Período - 2º Período
MA 21 - Resolução de Problemas	MA 22 - Fundamentos de Cálculo
-	MA 23 - Geometria Analítica
-	Eletiva I
-	Eletiva II
3º Ano	
Período de Verão	
Finalização Dissertação de Mestrado	

Fonte: Carneiro e Spinetti (2017, p. 7).

Todas as disciplinas ofertadas pelo Profmat utilizam como livro-textos (referência) os livros da Coleção Profmat, publicada pela SBM especialmente para o Programa. A coleção é composta por dezessete livros, sobre todos os temas da Matemática relevantes para a formação do professor da Educação Básica, sua prática de ensino, história e aplicações (CARNEIRO; SPINETI, 2017).

O ingresso no Profmat acontece anualmente por meio do Exame Nacional de Acesso (ENA), publicado por meio de um edital, que contém as informações e orientações

necessárias, previamente definidas e dispostas no site do Profmat (<http://www.profmat-sbm.org.br>). A prova de seleção é coordenada pela Comissão Acadêmica Nacional e efetivada pela Coordenação Acadêmica Institucional (CARNEIRO; SPINETI, 2017).

Atualmente, o exame é composto de 30 questões de múltipla escolha, que tem como objetivo avaliar os conhecimentos numéricos, geométricos, de estatística e probabilidade, algébricos e algébricos/geométricos dos candidatos, de forma a aferir o conhecimento matemático necessário ao ingresso no Profmat de professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas. (PROFMAT,2021)

Levando em conta alguns pontos específicos elencados até aqui sobre o PROFMAT e sua possível sua contribuição para a formação continuada de professores de matemática da Educação Básica, decidimos analisar as questões referentes ao conteúdo de Estatística nas provas do ENA, tendo em vista a sua importância para a educação escolar, para a vida profissional, bem como para o exercício pleno da cidadania no século XXI.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Ao todo, foram analisadas 352 questões nas 9 edições do ENA-PROFMAT. Das questões analisadas, despontaram 20 trazendo conteúdos de Estatística. Dentre essas 20 questões, 4 envolviam tabelas e 8 envolviam gráficos. As questões catalogadas e utilizadas na pesquisa estão presentes no Anexo 1 ao final do trabalho, trazendo a questão e umas das possíveis soluções dela fornecida pela organização da prova.

A seguir, na Tabela 1, apresentamos a distribuição das 20 questões envolvendo os conteúdos de Estatística ao longo dos anos nas provas do Exame Nacional de Acesso (ENA).

Tabela 1 – Questões envolvendo conteúdos de Estatística nas provas do ENA (2011-2019)

Ano da Prova	Número de questões
2011	2
2012	1
2013	1
2014	4
2015	3
2016	2
2017	3
2018	1
2019	3

Fonte: Autor (2021)

Os resultados mostram que a quantidade de questões envolvendo conteúdos de Estatística por edição varia de uma a três questões, em uma prova que possui 30 questões por edição atualmente, mas, que em outros anos chegou a ter mais questões. O ano que teve mais questões foi de 2014.

A seguir, iremos classificar as questões segundo os níveis de compreensão estudados.

4.1. Questões Analisadas Segundo o Nível de Letramento Estatístico

As 20 questões envolvendo conteúdos de Estatística são classificadas de acordo com os níveis de letramento estatístico propostos por Watson e Callingham (2003). Essas questões possuem como características a análise de gráficos para o cálculo do crescimento e decréscimo de uma população em um determinado período, análise para saber as vendas de um determinado produto, o uso de gráfico para comparar as notas em duas disciplinas de uma turma, situações que o cálculo das medidas de tendência central, pequenas manipulações algébricas, entre outras.

A seguir, a Tabela 2, apresenta os níveis de letramento estatístico (WATSON e CALLINGHAN, 2003) presentes nas questões analisadas nas edições da prova do ENA, de 2011 a 2019, para a continuação da nossa análise.

Tabela 2 – Níveis de Letramento Estatístico (WATSON; CALLINGHAN, 2003) identificados nas questões analisadas do ENA (2011-2019)

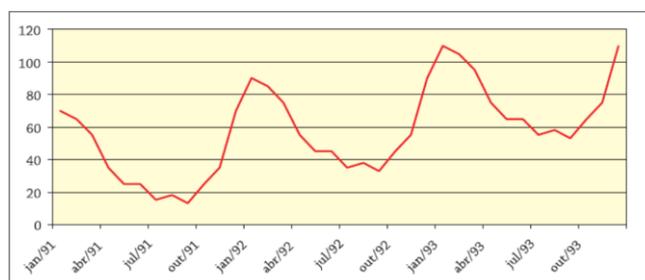
Níveis de Letramento Estatístico	Nº de questões	%
Idiossincrático	0	0,00
Informal	6	30,00
Inconsistente	2	10,00
Consistente não crítico	10	50,00
Crítico	2	10,00
Matematicamente crítico	0	0,00
Total	20	100,00

Fonte: Autor (2021)

Os resultados apontam para o fato de dois níveis de letramento aparecerem mais nas questões, o consistente não crítico e o informal, totalizando 80% das questões analisadas. As questões do nível consistente não crítico (10), exigem dentre outras coisas interpretar e descrever a média aritmética, interpretação de gráficos, cálculos básicos a partir de tabelas e gráficos, etc. As questões classificadas no nível inconsistente (duas), trazem situações que envolvem predomínio no uso qualitativo da Estatística, em oposição ao uso quantitativo. Também se obtêm conclusões corretas das tarefas, mas sem justificativa.

Não houve registro de nenhuma questão situada nos níveis idiossincrático e matematicamente crítico. O primeiro nível considera conhecimentos muito básicos, tais como a contagem uma a uma das células em uma tabela ou das colunas em um gráfico. Pra se ter uma ideia, esse nível envolve questões do tipo: observe o gráfico de colunas abaixo e determine em que mês a variável obteve maior ou menor valor. É a leitura básica de um gráfico, reconhecendo as escalas, as categorias e sabendo identificar os fenômenos que mais ocorreram e os que menos ocorreram. Portanto, não era mesmo de se esperar que o ENA pudesse trazer questões num nível tão básico de letramento estatístico. Já o nível matemático crítico exige uma matemática mais sofisticada, raciocínios quantitativos em contextos envolvendo média e outros assuntos, aspectos que não foram constatados nas questões.

A seguir, selecionamos e comentamos algumas dessas questões analisadas, ressaltando os principais aspectos relacionados às características de letramento estatístico nas suas respectivas soluções e uma possível forma de responder as questões. Iniciamos pela questão de número 7, de nível 2, da prova do ENA 2011, apresentada na figura 2.

Figura 2: Questão de número 7 do ENA de 2011: nível informal.**Questão 7 – (ENA 2011)**

O gráfico acima mostra a quantidade de aparelhos de ar condicionado vendidos por semana numa loja do Rio de Janeiro entre janeiro de 1991 e dezembro de 1993.

O gráfico indica que, nesse período:

- a) A venda de aparelhos de ar condicionado cresceu constantemente.
- b) A venda de aparelhos de ar condicionado permaneceu constante.
- c) A venda de aparelhos de ar condicionado foi maior em julho de 93 do que em julho de 91.
- d) A venda de aparelhos de ar condicionado foi maior em outubro de 92 do que em janeiro de 92.
- e) A venda de aparelhos de ar condicionado foi menor no verão de 93 do que no verão de 92.

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

Para a resolução da questão é necessário analisar os enunciados e o gráfico da questão para se ter a conclusão certa. Notemos que a venda de aparelhos de ar condicionado não cresceu constantemente, logo a alternativa “a” não é a correta; a venda de aparelhos cresceu e decresceu, por isso, não permaneceu constante, fazendo com que a alternativa “b” não seja a correta; a venda de aparelhos de ar condicionado foi maior de janeiro de 92 com mais de 80 vendas, do que outubro de 92, com menos de 40 vendas, fazendo com que a alternativa “d” fique incorreta; em julho de 93 a loja vendeu por semana, aproximadamente 60 aparelhos de ar condicionado, enquanto que em julho de 91, a loja vendeu pouco menos de 20 aparelhos por semana. Logo, venderam-se mais aparelhos nesse período, correspondendo à alternativa “c” a correta.

A nível de letramento estatístico a questão 7 do ENA 2011 foi classificada no nível informal. Segundo as autoras, são questões que incluem apenas o envolvimento informal com o contexto, tarefas intuitivas para o seu desenvolvimento, sem necessitar de um cálculo algébrico, precisando apenas de conceitos simples do assunto, saber quando um gráfico cresce ou decresce, fazendo intuitivamente o cálculo. Notemos que tais atividades estão presentes na

questão, a análise necessária para a conclusão da resposta não precisou de cálculos, apenas um olhar atento para o gráfico, fazendo a devida verificação se a linha está subindo ou descendo. Subindo a linha, intuitivamente pensamos em crescimento, e descendo, pensamos em decréscimo. Sendo essa umas das características do nível informal.

A Figura 3 apresenta a questão de número 11, da edição de 2011.

Figura 3: Questão de número 11, do ENA de 2011: nível consistente não crítico.

Questão 11 – (ENA 2011). Em um cofre há seis moedas: duas moedas de 1 real e quatro moedas de 50 centavos. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas moedas do cofre. Qual é a melhor aproximação do valor esperado da média aritmética dos valores das duas moedas retiradas do cofre?

- a) R\$ 0,50 b) R\$ 0,67 c) R\$ 0,75 d) R\$ 0,90 e) 1,00

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

A questão necessita do emprego de conceitos relacionados à média aritmética e probabilidade. Uma possível solução seria que intuitivamente o valor da média deve estar entre 0,50 e 0,75, pois há mais moedas de 50 centavos do que de 1 real. Esta intuição deve ser confirmada observando o raciocínio a seguir:

Moedas retiradas	Média	Probabilidade
(0,50; 0,50)	0,50	$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30}$
(0,50; 1,00)	0,75	$\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{30}$
(1,00; 0,50)	0,75	$\frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{30}$
(1,00; 1,00)	1,00	$\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30}$

Logo, a média é de $0,50 \times \frac{12}{30} + 0,75 \times \frac{8}{30} + 0,75 \times \frac{8}{30} + 1,00 \times \frac{2}{30}$; 0,67, tendo a

alternativa “b” como solução da questão.

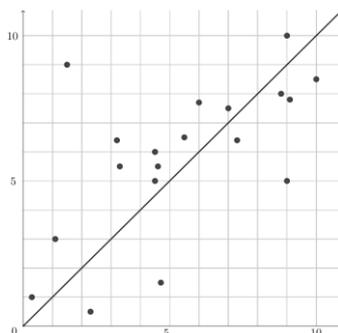
A nível de letramento estatístico, a questão 16 (ENA 2011) foi apontada como sendo de nível consistente não crítico. O candidato deve conseguir demonstrar habilidades estatísticas e probabilísticas básicas, tais como o cálculo da média e de probabilidades simples e a sua combinação, na retirada das moedas sem o envolvimento crítico.

A Figura 4 apresenta a questão de número 13, da prova g⁴, da edição de 2018.

⁴ Nas edições das provas de 2017 e 2018, houve mais de uma prova, com as mesmas questões, mudando apenas sua ordem. Optamos de forma arbitrária pela escolha da prova g.

Figura 4: Questão de número 13, prova g, do ENA de 2018: nível inconsistente.

Questão 13 – (ENA 2018 – Prova g). O gráfico abaixo mostra as notas de uma determinada turma nas disciplinas de Geografia e História. No eixo horizontal estão as notas de Geografia e no eixo vertical as notas de História. Ou seja, um par ordenado (g, h) representa as notas de um mesmo aluno que obteve nota g em Geografia e h em História.



Analisando o gráfico podemos afirmar que

- a) Quatro alunos tiveram nota menor que 4 nas duas disciplinas.
- b) Dentre os que tiveram nota maior que 6 nas duas disciplinas, mais alunos tiveram melhor nota em Geografia.
- c) Todos os alunos tiveram nota melhor em História do que em Geografia.
- d) A maioria dos alunos foram melhor em Geografia do que em História.
- e) Houve alunos que tiveram a mesma nota nas duas disciplinas.

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

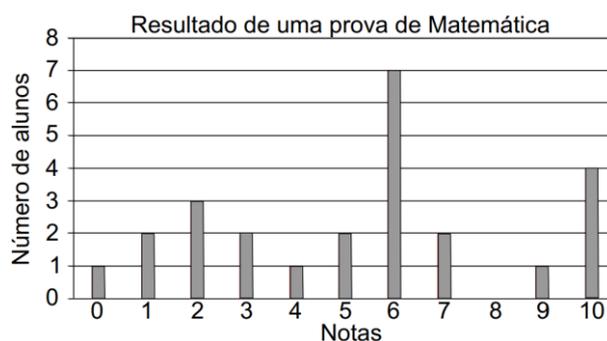
O problema relaciona as notas dos alunos em duas disciplinas, História e Geografia. A região abaixo da diagonal representa os alunos que tiveram melhor nota em Geografia. A região acima da diagonal representa os alunos que tiveram nota melhor em História, e, a diagonal representa os alunos que tiveram a mesma nota em ambas as disciplinas. Assim, fazendo uma análise a partir dessa percepção, concluímos que apenas três alunos tiveram nota menor que 4 nas duas disciplinas, seis alunos tiveram nota maior do que 6 nas duas disciplinas, dos quais 4 tiveram nota melhor em Geografia, por quatro pontos no gráfico estarem dispostos abaixo da diagonal. Portanto, a resposta correta corresponde à letra “b”.

A nível de letramento estatístico a questão foi classificada no nível inconsistente. Notemos que há um predomínio do uso qualitativo das ideias, para a obtenção da resposta, e não quantitativo. Analisamos os pares ordenados, para retirar nossas conclusões das alternativas, não precisando fazer uso de recursos algébricos. A questão demanda conclusões intuitivas e sem justificativa, características do nível informal de letramento.

A Figura 5 apresenta a questão de número 6, do ENA de 2013.

Figura 2: Questão de número 6, do ENA de 2013: nível consistente não crítico.

Questão 6 – (ENA 2013). O gráfico de barras exibe a distribuição de frequência das notas obtidas em prova de Matemática.



A média aritmética das notas dessa prova é igual a

- a) 2,50 b) 3,50 c) 5,00 d) 5,32 e) 6,00

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

A questão exige do candidato um conhecimento sobre média aritmética, sua definição e habilidade de usar os dados das variáveis para efetuar o processo de resolução. Para encontrar a média é preciso somar todas as notas e dividir pelo número total de alunos. O número total de alunos é dado pela soma das alturas das barras do gráfico, ou seja, $1+2+3+2+1+2+7+2+0+1+4=25$.

A soma das notas é a soma das alturas das barras vezes a nota correspondente, ou seja, $1\times 0+2\times 1+3\times 2+2\times 3+1\times 4+2\times 5+7\times 6+2\times 7+0\times 8+1\times 9+4\times 10=133$.

Então a média procurada é $\frac{133}{25}=5,32$, letra “d”.

A nível de letramento estatístico, a questão 6 (ENA 2013) foi considerada como sendo do nível consistente não crítico. A questão necessita de um engajamento apropriado com o contexto do problema, habilidades estatísticas associadas à média, na questão a nota das provas de matemática dos alunos e interpretação de gráficos, identificando cada eixo, seu rótulo, usando os dados expostos para encontrar a média das notas e posteriormente a alternativa correta, mas sem envolvimento crítico

A Figura 6 apresenta a questão de número 4, da prova do ano de 2014, e, classificada como sendo de nível crítico.

Figura 6: Questão de número quatro, do ENA de 2014: nível crítico.

Questão 4 – (ENA 2014). Numa empresa, os salários não são todos iguais e um novo funcionário foi contratado com um salário igual à média dos salários pagos pela empresa antes de sua contratação. Comparando a média dos salários e o desvio padrão calculados antes da contratação do novo funcionário com a média dos salários e o desvio padrão calculados levando em conta o novo funcionário, podemos afirmar que:

- a) a nova média é menor que a antiga e o desvio padrão permanece igual.
b) a nova média e o novo desvio padrão são ambos iguais aos antigos.

- c) a nova média e o novo desvio padrão são ambos maiores que os antigos.
- d) a nova média é igual a antiga e o novo desvio padrão é menor que o antigo.
- e) a nova média e o novo desvio padrão são ambos menores que os antigos.

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

Se o candidato dominar os conceitos de média e desvio padrão, é possível resolver a questão sem precisar fazer contas. A média não se altera se agregamos na amostra um elemento igual à própria média, no caso o salário do novo funcionário, e o desvio padrão diminui, já que é uma medida de dispersão em relação à média. De posse das informações, podemos concluir que a média permanece igual e o desvio padrão diminui. Portanto, temos como alternativa correta a letra “d”.

No que diz respeito a nível de letramento estatístico, o problema da questão 4 (ENA 2014) está classificado no nível crítico. Observamos que a questão demanda um envolvimento crítico e questionador das alternativas, se a média e o desvio padrão irão aumentar, diminuir, ou manter, com a chegada de um novo colaborador na empresa. Devemos também fazer uso da terminologia e interpretação e compreensão das medidas descritivas, para a análise das alternativas.

A Figura 7 apresenta a questão de número 40, do ENA de 2015: nível consistente não crítico

Figura 7: Questão de número 40, do ENA de 2015: nível consistente não crítico.

Questão 40 – (ENA 2015). Em uma turma de quatro alunos, o professor aplicou duas provas P_1 e P_2 , obtendo as seguintes notas: $P_1 = \{30; 40; 50; 60\}$ e $P_2 = \{15; 35; 55; 75\}$: Analisando os resultados, é possível afirmar que

- a) P_1 e P_2 possuem a mesma média aritmética e o mesmo desvio padrão.
- b) P_1 e P_2 possuem médias aritméticas diferentes e desvios padrões diferentes.
- c) P_1 e P_2 possuem a mesma média aritmética e desvios padrões diferentes.
- d) P_1 possui maior desvio padrão que P_2 .
- e) P_1 possui maior média aritmética que P_1 .

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

Para solucionar o problema da questão, o candidato precisa conhecer as definições de média aritmética e desvio padrão e aplica-las nos dados. Após o cálculo, temos que: Na prova P_1 a média é de 45 e o desvio padrão $5\sqrt{5}$. Na prova P_2 a média é 45 e o desvio padrão $10\sqrt{5}$. Portanto, a alternativa “c” é a correta.

A nível de letramento estatístico, a questão 40 (ENA 2015) está classificada no nível consistente não crítico. É uma questão que envolve a comparação entre duas amostras, a análise das notas nos dois blocos de provas, P1 e P2, apropriado com o contexto. Deve-se mostrar habilidades estatísticas, no caso da questão, mostrar o conhecimento sobre média e desvio padrão.

A Figura 8 apresenta a questão de número 18, prova 1⁵, da edição do ano de 2017, classificada de nível informal, segundo os níveis de letramento estatístico.

Figura 8: Questão de número 18, prova 1, do ENA de 2017: nível informal.

Questão 18 – (ENA 2017 – Prova 1). Dois números reais são tais que a média aritmética entre eles é 25 e a média geométrica é 20. Quais são esses números?

- a) 10 e 30 b) 20 e 30 c) 10 e 40 d) 15 e 35 e) 5 e 45

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

Para resolver a questão, é preciso conhecer as definições de média aritmética e média geométrica. Chamando de x e y os números procurados, temos que: $x + y = 50$ e $xy = 400$. Isolando y na primeira e substituindo na segunda igualdade obtém-se a equação de segundo grau $-x^2 + 50x - 400 = 0$ cujas as raízes são $x' = 10$ e $x'' = 40$. Substituindo $x = 10$ em uma das equações obtém-se $y = 40$, e para $x = 40$ obtém-se $y = 10$. Logo, a alternativa correta é a “c”.

A nível de letramento estatístico a questão 18 (ENA 2017) foi classificada como sendo de nível informal, pois ela necessita apenas de um envolvimento informal com o contexto. Também é preciso realizar cálculos básicos a partir dos dados fornecidos, para se encontrar os respectivos números, demonstrando conhecimento de elementos simples da terminologia para a resolução da questão.

A Figura 9 apresenta a questão de número 24, do ENA de 2014, classificada no nível consistente não crítico.

Figura 9: Questão de número 24, do ENA de 2014: nível consistente não crítico.

Questão 24 – (ENA 2014). Em um conjunto de dez números inteiros, a média dos dois menores é 102, dos três menores é 103, dos quatro menores é 104, e assim por diante, até a média de todos os dez é 110. Qual é o maior desses inteiros?

- a) 140 b) 132 c) 125 d) 119 e) 117

⁵ Nas edições das provas de 2017 e 2018, houve mais de uma prova, com as mesmas questões, mudando apenas a ordem de questões. Optamos de forma arbitrária a escolha da prova 1, mas poderíamos escolher uma das demais provas de 1 a 5 para a análise.

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

A partir dos dados do problema, sabemos que a soma dos números considerados é tal que:

$$M_{10} = \frac{S_{10}}{10}; 110 = \frac{S_{10}}{10}, \text{ logo } S_{10} = 1100, \text{ onde } M_{10} \text{ é a média aritmética de todos os 10}$$

números do conjunto, e S_{10} é a soma de todos os 10 números.

$$M_9 = \frac{S_9}{9}; 109 = \frac{S_9}{9}, \text{ logo } S_9 = 981, \text{ onde } M_9 \text{ é a média aritmética dos 9 menores}$$

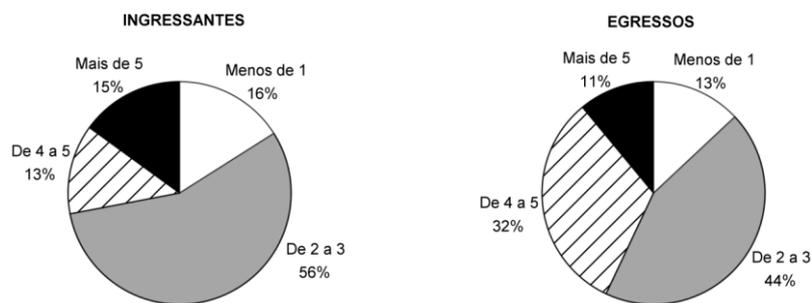
números do conjunto, e S_9 é a soma dos 9 menores números do conjunto. Portanto, o maior dos números é $1100 - 981 = 119$, o que resulta na alternativa “d” como correta.

A nível de letramento estatístico a questão 24 (ENA 2014) está classificada no nível consistente não crítico. Ela exige habilidades e conhecimentos sobre média aritmética, o uso apropriado da definição, comparar os dados disponibilizados no comando da questão e interpretação de cada assertiva disponível.

A Figura 10 apresenta a questão de número 25, da edição 2019, classificada no nível inconsistente.

Figura 10: Questão de número 25, do ENA de 2019: nível inconsistente.

Questões 25 – (ENA 2019). Uma pesquisa sobre renda familiar foi realizada com os alunos ingressantes de um curso e mais tarde com aqueles que conseguiram concluí-lo.



Sabendo que houve evasão durante o curso e que, ao longo deste, alguns alunos mudaram sua faixa de renda, podemos afirmar, com base nos gráficos e no fato de que novos alunos não mais adentraram no curso desde então, que:

- (I) certamente houve diminuição no número de alunos que recebiam mais de 5 salários mínimos do início para o final do curso.
- (II) 12% dos alunos que recebiam de 2 a 3 salários mínimos não concluíram o curso.
- (III) é possível que a quantidade de alunos que recebiam de 4 a 5 salários mínimos quando concluíram o curso seja menor do que a quantidade de alunos que, quando ingressaram, pertenciam a esta faixa de renda.

É correto o que se afirmar em:

- a) I, apenas.
- b) II, apenas.
- c) I e III, apenas.
- d) II e III, apenas.
- e) I, II e III.

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

Analisando os dois gráficos da questão podemos concluir que como o total de alunos do curso diminui em valor absoluto com a evasão, e também o percentual de alunos que recebem mais de 5 salários mínimos diminui, então, certamente houve diminuição do número de alunos nesta faixa de renda, logo a afirmativa “I” é verdadeira.

Já a afirmativa “II” é falsa, pois mesmo que não houvesse evasão entre aqueles que recebiam de 2 a 3 salários mínimos, o fato de alguns alunos mudarem sua faixa de renda seria suficiente para justificar uma redução no percentual de alunos nessa faixa de renda.

A afirmativa “III” é verdadeira, porque se, por exemplo, tivessem ingressado 300 alunos no curso e evadido 200, teríamos inicialmente 39 alunos (13% de 300) recebendo de 4 a 5 salários e teriam concluído o curso apenas 32 alunos (32% de 100) nesta faixa de renda. Portanto a alternativa correta, é a “c”.

A nível de letramento estatístico, a questão 25 (ENA 2019) está classificada como sendo de nível inconsistente. Notemos que há um predomínio do uso qualitativo das ideias estatísticas. A análise dos gráficos não envolve cálculos e manipulações algébricas, característica marcante desse nível de letramento estatístico.

A Figura 11 apresenta a questão de número 17, do ENA de 2016, sendo classificada nível consistente não crítico.

Figura 11: Questão de número 17, do ENA de 2016: nível consistente não crítico.

Questão 17 – (ENA 2016). A turma A tem 48 alunos e a turma B tem 32. As duas turmas fizeram uma prova e a média aritmética das notas dos alunos da turma A foi de 5,7 e dos alunos da turma B foi de 6,5. Qual é a média aritmética das notas de todos os 80 alunos?

- a) 6,02
- b) 6,06
- c) 6,1
- d) 6,14
- e) 6,18

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

A questão exige que o candidato tenha habilidade algébrica, saiba manipular os dados e conhecimentos sobre média aritmética. Chamando de M_a e M_b as médias aritméticas das notas dos alunos das turmas A e B, respectivamente, temos que:

Como $M_a = \frac{S_a}{48} = 5,7$, logo, $S_a = 273,6$.

Como $M_b = \frac{S_b}{32} = 6,5$, logo, $S_b = 208$.

Assim, a média dos 80 alunos das turmas A e B é dada por: $M = S_a + \frac{S_b}{80}$, logo a média de todos os alunos é igual a 6,02, sendo a alternativa “c” a correta.

A nível de letramento estatístico, a questão 17 (ENA 2016) foi considerada como sendo do nível consistente não crítico. A questão necessita de um engajamento apropriado com o contexto do problema, habilidades estatísticas associadas à média, na questão a nota das provas de matemática usando também a informação da quantidade de alunos das duas turmas, usando muitos aspectos da terminologia, mas sem envolvimento crítico.

4.2. Questões Analisadas Segundo o Nível de Compreensão Gráfica

Após a análise das questões da prova do ENA, identificamos oito questões envolvendo gráficos estatísticos. Na Tabela 3, apresentamos a distribuição dessas questões ao longo dos anos.

Tabela 3 – Questões envolvendo gráficos estatísticos nas provas do ENA (2011-2019).

Ano da Prova	Número de questões
2011	2
2012	1
2013	1
2014	0
2015	0
2016	1
2017	1
2018	0
2019	2

Fonte: Autor (2021).

As questões têm como característica a análise de duas variáveis presentes no gráfico, como o número de atendimentos de pacientes a cada mês, número de alunos e suas notas em determinada disciplina, tempo e distância percorrida em uma caminhada, etc. São problemas hipotéticos, mas que poderiam muito bem acontecer em uma situação real, pela sua natureza. O predomínio foi para o uso do gráfico de colunas, mas gráficos de pizza e de linhas estão presentes também.

As operações mais solicitadas nas questões são as de observação de crescimento e decréscimo no comportamento gráfico, o cálculo da média aritmética dos dados de uma determinada turma, cálculo das porcentagens das variáveis expostas, análise dos diversos

defeitos nas peças não aprovadas segundo critérios de qualidade durante um certo período em uma fábrica, o progresso de um corredor, em uma corrida e o cálculo do ritmo que ele faz o trajeto.

As questões são analisadas e classificadas segundo os níveis de compreensão gráfica de Curcio (1989), conforme é apresentado na Tabela 4.

Tabela 4 – Níveis de Compreensão Gráfica (CURCIO, 1989) identificadas nas questões do ENA (2011-2019).

Níveis de Compreensão Gráfica	Número de Questões	%
Ler os dados	0	0.00
Ler entre os dados	8	100.00
Ler além dos dados	0	0.00
Total	8	100.00

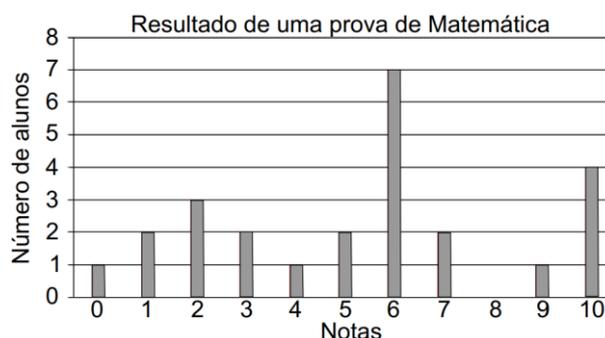
Fonte: Autor (2021).

Os resultados indicam uma totalidade na classificação do nível “ler entre os dados”, o que, corrobora as ideias de Curcio (1989) ao afirmar que o nível de compreensão “ler entre os dados” é o nível mais frequentemente usado em testes padronizados. O destaque observado esteve em questões que exigiam uma comparação de valores no gráfico, como maior ou menor, acréscimo e decréscimo percentual, cálculo de médias aritméticas, moda, mediana, etc., possibilitando identificar certas tendências e associar ideias.

Em seguida, apresentamos e comentamos algumas dessas questões analisadas, salientando os principais aspectos relacionados ao nível de compreensão gráfica “ler entre os dados”, envolvidas nas soluções das respectivas questões. Começamos pela questão de número seis, da prova do ENA do ano de 2013, apresentada na Figura 12

Figura 13: Questão de número seis, do ENA de 2013: nível ler entre os dados.

Questão 6 – (ENA 2013). O gráfico de barras exibe a distribuição de frequência das notas obtidas em prova de Matemática.



A média aritmética das notas dessa prova é igual a

- a) 2,50 b) 3,50 c) 5,00 d) 5,32 e) 6,00

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

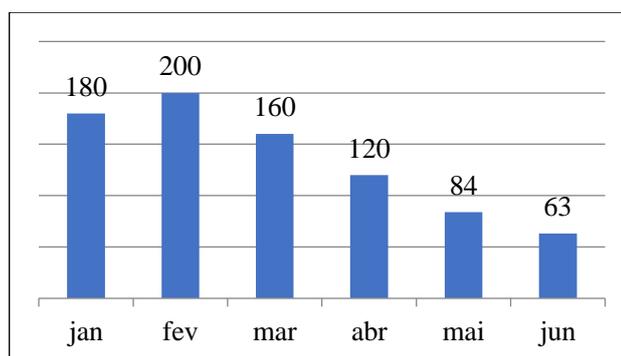
Conforme já descrevemos anteriormente na seção 4.1, a alternativa correta é a letra “d”.

A classificação da questão no nível “ler entre os dados” se deu porque a questão demanda a interpretação e a integração dos dados que estão presentes no gráfico, saber quais foram as notas e para quantos alunos a nota foi atribuída, requerendo a capacidade de comparar quantidades. Nesse caso, são as notas dos alunos, e, o uso de conceitos e habilidades matemáticas, tais como a média aritmética, para a resolução. Para isso devemos combinar e integrar os dados com o assunto mostrado, sabendo identificar a tendência no gráfico e posteriormente fazer os devidos cálculos.

A Figura 13 apresenta a questão de número seis, do ENA de 2012.

Figura 13: Questão de número seis, do ENA de 2012: nível ler entre os dados.

Questão 6 – (ENA 2012). O gráfico ao lado mostra o número de atendimentos de pacientes com uma certa doença num ambulatório no primeiro semestre de 2010. Quando houve o maior decréscimo percentual no número de atendimentos?



- a) Entre janeiro e fevereiro.
- b) Entre fevereiro e março.
- c) Entre março e abril.
- d) Entre abril e maio.
- e) Entre maio e junho

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

O gráfico da questão relaciona o número de atendimentos de pacientes com uma determinada doença a cada mês. A questão pede para mostrar em qual período ocorreu o maior decréscimo de casos. Observando o gráfico temos que: de janeiro a fevereiro houve um acréscimo, logo a letra “a” está incorreta. Para se achar o decréscimo das outras opções devemos efetuar sempre a mesma operação. Subtrair o número de casos do mês anterior pelo número de casos do mês seguinte, dividir o resultado pelo total do mês anterior, e, em seguida

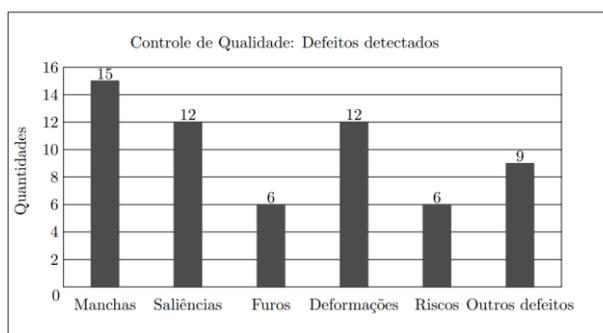
multiplicar por 100 o valor encontrado. Efetuando a operação, nota-se que de fevereiro a março, ocorreu um decréscimo de 20% de números de atendimentos de um mês para o outro, de março a abril um decréscimo de 25%, de abril a maio um decréscimo de 30% e de maio a junho um decréscimo de 25%. Portanto, o maior decréscimo ocorreu entre abril e maio, sendo a alternativa “d” a correta.

A escolha do nível “ler entre os dados” para a questão se justifica pelo fato dela presumir a integração e interpretação dos dados no gráfico, saber relacionar o número de atendimentos de um mês com o outro, para encontrar o decréscimo percentual de atendimentos. Exige a habilidade de comparar quantidades, menor decréscimo percentual no gráfico, combinado com o uso de outras habilidades e conceitos matemáticos, como porcentagem, taxa de variação, razão e proporção, que possibilitem que o candidato combine e integre os dados, além de identificar as relações matemáticas expressas no gráfico. Também o nível espera que o candidato identifique tendências no gráfico e o relacionamento de ideias, fato que podemos observar no decorrer da resolução da questão.

A seguir, a Figura 14 irá mostrar a questão de número cinco, do ENA 2019, prova 5⁶ para continuação de nossa análise.

Figura 14: Questão de número 17, do ENA de 2019, prova 1: nível ler entre os dados.

Questão 17 – (ENA 2017 – Prova 1). O administrador responsável pelo controle de qualidade de uma fábrica de artigos plásticos registrou, em um gráfico, os diversos defeitos nas peças não aprovadas segundo critérios de qualidade durante um certo período, conforme abaixo.



É correto afirmar que

- a) Os defeitos referentes as manchas superam em 15% as deformações.
- b) As deformações consistem em 30% dos defeitos detectados.
- c) 35% dos defeitos detectados correspondem a riscos ou manchas.
- d) 45% dos defeitos detectados são de manchas, saliências ou furos.
- e) Os problemas de deformação superam em 15% os problemas de furos nos produtos.

⁶ Nas edições das provas de 2017 e 2018, houve mais de uma prova, com as mesmas questões, mudando apenas a ordem de questões. Optamos de forma arbitrária a escolha da prova 1, mas poderíamos escolher uma das demais provas de 1 a 5 para a análise

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

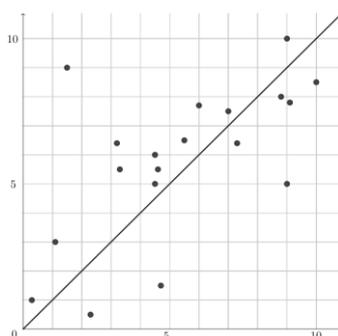
Para sua solução, a questão requer conhecimentos sobre porcentagem, depois fazer uma comparação, análise e combinação dos resultados obtidos e mostrados no gráfico. Vamos observar que a alternativa “a” possui uma afirmativa falsa, pois os defeitos referentes as manchas superam em 5% as deformações, e não em 15%. Na alternativa “b”, as deformações consistem em 12% dos defeitos detectados, e não 30%. A soma de dois resultados, defeitos de riscos e defeitos de manchas correspondem a 35% dos defeitos detectados, que é a resposta correta, sendo, portanto, a alternativa “c” a opção certa.

A questão foi classificada como sendo de nível “ler entre os dados” porque ela precisa da integração e interpretação dos dados no gráfico, no caso os defeitos nas peças não aprovadas em uma fábrica de artigos plásticos. Exige a habilidade de comparar quantidades, como qual defeito foi maior ou menor em relação ao outro, se combinarmos dois defeitos ou mais, vai ser maior em relação a outro. Também devemos combinar o uso de outras habilidades e conceitos matemáticos, como a de ideia de proporção, porcentagem que possibilitem que o candidato combine e integre os dados, além de identificar as relações matemáticas expressas no gráfico, o uso da porcentagem para a analisar os variados tipos de defeito encontrado nas peças. Espera-se ainda que o candidato identifique tendências no gráfico e o relacionamento de ideias, para solucionar qual afirmação é a correta para os defeitos encontrados.

A Figura 15 apresenta a questão de número 13, da prova g⁷, da edição de 2018.

Figura 15: Questão de número 13, prova g, do ENA de 2018: nível ler entre os dados.

Questão 13 – (ENA 2018 – Prova g). O gráfico abaixo mostra as notas de uma determinada turma nas disciplinas de Geografia e História. No eixo horizontal estão as notas de Geografia e no eixo vertical as notas de História. Ou seja, um par ordenado (g, h) representa as notas de um mesmo aluno que obteve nota g em Geografia e h em História.



⁷ Nas edições das provas de 2017 e 2018, houve mais de uma prova, com as mesmas questões, mudando apenas sua ordem. Optamos de forma arbitrária a escolha da prova g, mas poderíamos ter escolhido uma das demais provas, g h, k, r para a análise.

Analisando o gráfico podemos afirmar que

- a) Quatro alunos tiveram nota menor que 4 nas duas disciplinas.
- b) Dentre os que tiveram nota maior que 6 nas duas disciplinas, mais alunos tiveram melhor nota em Geografia.
- c) Todos os alunos tiveram nota melhor em História do que em Geografia.
- d) A maioria dos alunos foram melhor em Geografia do que em História.
- e) Houve alunos que tiveram a mesma nota nas duas disciplinas.

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

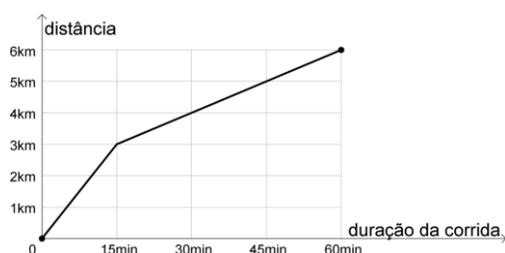
Conforme já descrevemos anteriormente na seção 4.1, a alternativa correta é a letra “b”.

A classificação da questão foi de “ler entre os dados” porque a questão necessita da integração e interpretação dos dados no gráfico, nesse caso as notas nas disciplinas de Geografia e História dos alunos. Exige a habilidade de comparar quantidades, ou seja, quantos alunos tiverem maiores notas em Geografia, menores em ambas, melhor nota em História que Geografia, combinado com o uso de outras habilidades e conceitos matemáticos, como habilidade de interpretar a diagonal do gráfico e saber que acima dela estão as notas melhores em História, abaixo da diagonal as notas melhores em Geografia e a diagonal representa os alunos que tiveram a mesma nota em ambas as disciplinas, que possibilitem que o candidato combine e integre os dados, além de identificar as relações matemáticas expressas no gráfico. A questão também necessita a identificação de tendências no gráfico e o relacionamento de ideias, sendo características do nível classificado.

A Figura 16 apresenta a questão de número 10, da edição 2019

Figura 16: Questão de número 10, do ENA de 2019: nível ler entre os dados.

Questão 10 – (ENA 2019). O gráfico abaixo mostra o progresso de um corredor, em uma corrida de 6 km de extensão.



Costuma-se chamar de *pace* a razão $\frac{t}{d}$, onde t é o tempo, em minutos, que um corredor leva para percorrer uma distância d , em quilômetros. Desta forma, considerando a corrida representada pelo gráfico acima, é correto afirmar que

- a) o *pace* do corredor foi maior nos 15 primeiros minutos do que na corrida inteira.
- b) o *pace* do corredor foi menor nos 15 últimos minutos do que na corrida inteira.

- c) o *pace* do corredor foi menor nos 30 últimos minutos do que na corrida inteira.
 d) o *pace* do corredor foi menor nos 3 primeiros quilômetros do que na corrida inteira.
 e) o *pace* do corredor foi menor nos 3 últimos quilômetros do que na corrida inteira.

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

Analisando o gráfico e as alternativas das questões, devemos calcular o *pace* em alguns intervalos de tempo. Os dados do tempo se encontram no eixo horizontal e os dados da distância no eixo vertical.

Assim, obtemos:

$$\textit{pace} \text{ na corrida inteira: } \frac{60\text{min}}{60\text{km}} = 10\text{min} / \text{km}$$

$$\textit{pace} \text{ nos primeiros 15 min: } \frac{15\text{min}}{3\text{km}} = 5\text{min} / \text{km}$$

$$\textit{pace} \text{ nos últimos 15 min: } \frac{15\text{min}}{1\text{km}} = 15\text{min} / \text{km}$$

$$\textit{pace} \text{ nos últimos 30 min: } \frac{30\text{min}}{2\text{km}} = 15\text{min} / \text{km}$$

$$\textit{pace} \text{ nos 3 primeiros km: } \frac{15\text{min}}{3\text{km}} = 5\text{min} / \text{km}$$

$$\textit{pace} \text{ nos 3 últimos km: } \frac{45\text{min}}{3\text{km}} = 10\text{min} / \text{km}$$

Portanto, após analisar cada item, o único que se aplica é a alternativa “d”.

Foi escolhida o nível “ler entre os dados” pois a questão tem a integração e interpretação dos dados no gráfico, no caso o progresso do corredor em uma distância de 6 km. Exige a habilidade de comparar quantidades, como o *pace* do corredor foi maior nos 15 primeiros minutos do que na corrida inteira. o *pace* do corredor foi menor nos 15 últimos minutos do que na corrida inteira, nos últimos 30 minutos, nos primeiros 3 km, nos últimos 3 km, combinado com o uso de outras habilidades e conceitos matemáticos, como a razão de grandezas, que possibilitem que o candidato combine e integre os dados, além de identificar as relações matemáticas expressas no gráfico. Relações essas notadas para se encontrar o “*pace*”, usados os dados do eixo vertical e horizontal do gráfico. Espera-se ainda que o leitor identifique tendências no gráfico e o relacionamento de ideias.

4.3 Questões analisadas segundo o nível de compreensão de tabela

Ao todo, foram encontradas quatro questões envolvendo tabelas estatísticas. São problemas de caráter hipotético, mas que poderiam ser tratados como situação real.

Em sua resolução, os problemas pedem a competência do candidato sobre os assuntos de mediana, média aritmética, moda, assuntos esses que estão previstos no edital do ENA.

Logo adiante, a Tabela 5 apresenta os níveis de compreensão de tabelas propostos por Wainer (1995) presentes nas questões analisadas nas edições da prova do ENA, de 2011 a 2019.

Tabela 5 – Níveis de Compreensão de Tabela (WAINER, 1995) identificadas nas questões do ENA (2011-2019).

Níveis de Compreensão de tabelas	Número de Questões	%
Nível Elementar	0	0
Nível Intermediário	2	50
Nível Avançado	2	50
Total	4	100

Fonte: Autor (2021).

Os resultados apontam para duas questões de nível intermediário e duas de nível avançado. Onde, para Wainer (1995) as tabelas de nível intermediário são perguntas que são observadas tendências em partes dos dados e, para o nível avançado, são tabelas onde se necessita um conhecimento mais profundo dos dados, em sua totalidade.

A seguir, apresentamos e comentamos as questões, ressaltando as características dos níveis de compreensão de tabelas. Iniciamos pela questão número 11, da prova do ENA no ano de 2015, apresentada na Figura 17

Figura 17: Questão de número 11, do ENA de 2015, nível intermediário.

Questão 11 – (ENA 2015). O Tungstênio é um elemento químico de símbolo W e número atômico 74. Na forma pura é um metal de cor branco-cinza cujo ponto de fusão é igual a 3422 °C. Por causa do seu alto ponto de fusão, o Tungstênio é largamente usado na indústria na produção de filamentos para lâmpadas elétricas incandescentes. Sabendo que pontos de fusão e ebulição da água em graus Celsius (°C) e em graus Fahrenheit (°F) são dados pela tabela abaixo

	°C	°F
Fusão	0	32
Ebulição	100	212

e que as temperaturas nas duas escalas, graus Celsius e graus Fahrenheit, se relacionam por meio de uma função afim, qual é o ponto de fusão do Tungstênio em graus Fahrenheit?

- a) 6159,6 b) 6175,6 c) 6191,6 d) 6232,6 e) 6254,6

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

Utilizando a conversão de medidas de graus Celsius e Fahrenheit e os dados presentes na tabela, temos:

$$\frac{212 - 32}{100} = \frac{TF - 32}{3422}$$

Portanto, $TF = 32 + \frac{180}{100} \times 3422 = 6,191^\circ\text{F}$

. Em questão de característica e classificação segundo Wainer (1995), a questão se enquadra no nível intermediário, pois envolve uma modelagem matemática, na transposição do gráfico em uma tabela para melhor análise, e, a relação entre as variáveis para chegar ao resultado, além da construção da resposta a partir dos dados tabelados, não apenas sua extração, sem análise ou comparação.

A Figura 18 apresenta a questão 37 da edição 2016 do ENA.

Figura 18: Questão de número 37, do ENA de 2016, nível avançado.

Questão 37 – (ENA 2016). Um médico solicita ao seu assistente que meça a pressão arterial de 8 pacientes. Ao finalizar a tarefa, o assistente calcula a pressão arterial média (aritmética) e encontra o valor de 13, 875.

Paciente	A	B	C	D	E	F	G	H
Pressão Arterial	11,5	16,0	14,0	15,2	14,0	12,1	?	13,2

Quando o médico vai consultar a tabela encontra um valor ilegível. Sobre o número ilegível é correto afirmar que este valor, em relação aos dados, é:

- a) é igual à moda.
- b) inferior ao primeiro quartil
- c) inferior à média aritmética das observações.
- d) inferior à média aritmética das observações.
- e) superior à mediana.

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

A questão demanda uma certa habilidade estatística, conhecimento sobre a definição de média, primeiro quartil, moda e mediana. Inicialmente define-se o valor ilegível do paciente G, através do cálculo da média aritmética. Deve-se fazer o somatório de todas medições das pressões tiradas, dividido pela quantidade de pacientes, tendo como resultado final 15. A moda é o valor que mais se repete na amostra, ou seja, 14. Além disso, o primeiro quartil é $Q_1 = a_2 + a_3 / 2$; $Q_1 = 12,65$. Colocando os dados em ordem crescente obtemos os seguintes conjuntos de valores: (11,5; 12,1; 13,2; 14,0; 14,0; 15,0; 15,2; 16,0). Como a quantidade valores é par, segue que a mediana é igual a: $Q_2 = a_4 + a_5 / 2 = 14$

Após todos os cálculos deve-se analisar os valores obtidos com as opções mostradas, chegando então à solução que o valor encontrado, $g = 15$, é maior que a mediana. Portanto, a alternativa correta é a letra “e”.

Acerca do nível de compreensão de tabela, ela se encaixa no nível avançado, pois exige uma compreensão mais ampla dos dados apresentados na tabela, uma habilidade algébrica boa, para se extrair da tabela a média, a moda e o primeiro quartil. Também temos que ter um olhar apurado para tabela, fazer uso dos dados e conteúdos abordados presentes nela.

A figura 19 apresenta a questão de número 34, da edição 2015 do Exame Nacional de Acesso.

Figura 19: Questão de número 34, do ENA de 2015, nível intermediário.

Questão 34 – (ENA 2015). Em um determinado concurso público um corretor de redações avaliou 10 alunos com notas de 0 a 10. As notas aplicadas por este avaliador estão apresentadas na tabela a seguir:

Aluno	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Nota	8	5,5	4	6	8	9	7,5	7,5	8	6,5

A partir dos dados apresentados na tabela, é correto afirmar, sobre as estatísticas da variável que indica as notas, que

- a) média < moda < mediana
- b) moda < média < mediana
- c) mediana < média < moda
- d) média < mediana < moda
- e) mediana < moda < média

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

Para o desenvolvimento e resolução da questão 34, precisa-se do conhecimento das medidas de tendência central, como são, seus comportamentos, aplicação, etc. Observando-se a tabela, a moda, valor que possui a maior frequência dos dados, é 8. Para encontrar a mediana, é necessário organizar os dados em ordem crescente e calcular a média aritmética entre os dois termos centrais. O valor encontrado é 7,5. E, por último, para achar a média aritmética, somam-se todas as notas dividindo o resultado pela quantidade de notas como média temos o resultado a nota 7. Assim sendo, a alternativa correta é a letra D.

No que tange a classificação segundo os níveis de compreensão de tabela propostos por Wainer (1995), a questão encontra-se no nível intermediário, pois o candidato tem que descobrir quais são as relações existentes entre os dados que são apresentados na tabela. A partir das notas lançadas pelo corretor de redações aos 10 candidatos que ele avaliou, devemos calcular as

medidas de tendências central, que estão em cada alternativa. Devemos comparar cada resultado encontrado.

A Figura 20 apresenta a questão 28, do ENA de 2017, prova 1⁸, classificada no nível avançado.

Figura 20: Questão de número 28, do ENA de 2017, prova 1: nível avançado

Questão 28 – (ENA 2017 – Prova 1). Considere a seguinte distribuição de frequências das alturas, em metros, dos alunos de uma determinada turma:

Classe	Frequência
1,50 — 1,60	3
1,60 — 1,70	9
1,70 — 1,80	12
1,80 — 1,90	2

Lembre-se que a notação $2 | - 3$ e comumente usada em Estatística para representar o intervalo $[2, 3)$.

Sobre a distribuição é correto afirmar que:

- a) a média aritmética é inferior a 1,60 m
- b) a média aritmética pertence ao último quartil.
- c) a mediana é igual à média aritmética.
- d) a mediana pertence a terceira classe.
- e) a pessoa mais alta da turma tem 1,90 m.

Fonte: Catálogo de provas e soluções do ENA (<https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/>)

Somando as frequências, obtemos um total de 26 alunos na turma. O que significa que a mediana pode ser calculada a partir da média aritmética entre as alturas que ocupam as posições 13 e 14 na distribuição. Como as duas primeiras classes somam 12 alunos, podemos concluir que a mediana está na terceira classe. Logo a resposta correta é a letra D.

É uma questão classificada como sendo de nível avançado, segundo a classificação de Wainer (1995). Tem um envolvimento de uma compreensão mais ampla da estrutura dos dados, solicita o uso medidas de tendência central e quartil para dados agrupados com intervalos de classe. O cálculo realizado nessa questão envolve a obtenção da frequência acumulada.

⁸ Nas edições das provas de 2017 e 2018, houve mais de uma prova, com as mesmas questões, mudando apenas a ordem de questões. Optamos de forma arbitrária a escolha da prova 1, mas poderíamos escolher uma das demais provas de 1 a 5 para a análise

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo dessa pesquisa foi caracterizar, investigar, descrever e analisar como os conteúdos de Estatística vêm sendo abordados na perspectiva da construção do letramento estatístico nas provas do ENA-PROFMAT, no período que vai de 2011 a 2019.

Para tanto, foi levada a cabo uma análise documental para a criação de um banco de dados com o intuito de, dentre outras coisas: *i*) classificar os tipos de questões de acordo com os níveis de leitura e interpretação de tabelas (WAINER, 1995), níveis de compreensão gráfica (CURCIO, 1989), e os níveis de letramento estatístico (WATSON E CALLINGHAM, 2003); *ii*) fazer um levantamento das ênfases e lacunas observadas a nível de conteúdo exigido, tanto quanto a nível de estratégias de resolução demandadas dos candidatos; *iii*) analisar e discutir os aspectos relacionados à construção do letramento estatístico em algumas questões selecionadas.

Ao todo, 352 questões de nove edições da prova (2011-2019) foram analisadas, despontando um total de 20 questões que abordavam especificamente conteúdos de Estatística. Essas questões foram alvo de nossa análise.

Os principais resultados apontam para a predominância de dois níveis de letramento estatístico, o consistente não crítico e o informal, totalizando 80% das questões analisadas. Na análise dos níveis de compreensão gráfica, observamos o predomínio de questões situadas no nível “ler entre os dados”, o que, corrobora as ideias de Curcio (1989) ao afirmar que θ este nível de compreensão é o que aparece com mais frequência em testes padronizados. Já na análise dos níveis de compreensão de tabelas, houve o predomínio de questões situadas nos níveis intermediário (50%) e avançado (50%).

Com relação às questões analisadas, classificamo-las em duas principais categorias: “medidas de posição ou dispersão de um conjunto de dados” e “resolução de problemas com dados apresentados em gráficos ou tabelas”.

A primeira categoria, engloba questões que possuem como características a tendência, o envolvimento, o cálculo, a análise e a comparação da média aritmética, da mediana, da moda, dos quartis e do desvio padrão de um conjunto de dados. Já a segunda categoria envolve questões que utilizam gráficos, sejam eles de dispersão, barras, linhas, setores e tabelas, para o seu entendimento e posterior resolução.

Os assuntos mais recorrentes encontrados nas questões da prova foram média aritmética, (13); mediana, moda e quartil (3); acréscimo e decréscimo percentual (3); noções

de estatística através de análise de gráficos e tabelas (3); desvio padrão (2); razão (1); média geométrica (1), podendo uma única questão ter mais de um assunto sendo abordado.

As habilidades principais encontradas nas questões analisadas, segundo a classificação dos PCN, foram a de calcular medidas de tendência central ou dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequência de dados agrupados ou em gráficos; resolver situações-problema que envolvam conhecimentos de estatística; resolver as questões com dados apresentados em tabelas ou gráficos; utilizar informações expressas em gráficos e tabelas para fazer inferências; com destaque para a primeira habilidade mencionada, pelo quantitativo de questões falando sobre média aritmética observado ao longo dos anos na prova do ENA.

Podemos observar uma predominância de questões contendo gráficos de barras ou em forma de tabelas, pois é um recurso muito utilizado para comparar as variáveis envolvidas de uma forma destacada, com dados quantitativos discretos e contínuos. Notemos que o objetivo da prova é unicamente saber se o candidato compreende o assunto, a mecânica de resolução, com uma abordagem totalmente direta, uma forma tradicional de ensino, sem uma modelagem matemática, uma contextualização por trás das questões. Interlocuções entre os assuntos não foram observadas nas questões, e os temas são tratados sem.

Em nossa visão, a contextualização das questões não foi devidamente explorada, fazendo com que não seja observado o aspecto primordial da Estatística, que é de subsidiar métodos inferenciais, fornecendo meios de tirarmos conclusões que ultrapassem os dados obtidos para intervenções futuras. As questões não apresentam a possibilidade de um olhar mais aprofundado, ou seja, somente com os tipos de questões fornecidas pelo ENA não se tem uma perspectiva geral do que seria Estatística, ficando com a ideia, por meio das questões, que a Estatística é somente essa parte de organização de dados e descrição de dados, da matemática pela matemática, que não tem aplicabilidade em nossas vidas.

Outra observação é que os organizadores se limitaram a fazer questões em sua maioria sobre média aritmética (65%), deixando uma enorme lacuna de conteúdo de Estatística nas edições do Exame. Não foram encontradas questões sobre índices, coeficiente de variação, amplitude total, medidas de assimetria, medidas de curtose, separatrizes, como percentis, decis, etc.

Uma característica que desponta da análise das questões é o fato de que elas são baseadas estritamente em dados hipotéticos, são problemas que não possuem relação com o mundo real, o que, por sua vez, dificulta o “envolvimento crítico com o contexto” descrito por Watson e Callingham (2003). Essa, aliás, é uma fragilidade percebida das provas do ENA,

contextos acríticos, sem nexos definidos com problemas e questões econômicas, políticas ou sociais do mundo real. As questões abordam, em geral, contextos hipotéticos triviais predominando uma visão da Matemática pela Matemática, ponto também notado por Costa (2020), que observa, que o ENA, enquanto avaliação, pauta-se em um processo estático, com o objetivo de verificar a aprendizagem dos sujeitos e classificá-los, havendo pouca ou nenhuma discussão desses importantes resultados sobre professores de Matemática de todo o país.

Em paralelo com outras provas de larga escala, o ENA deixa a desejar no aspecto de contextualizar suas questões. Em provas oficiais brasileiras, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) este parece ser um problema superado. Jaloto e Martins (2014) observaram que as questões do ENEM que envolvem uma abordagem contextualizada com o conhecimento científico principalmente a partir da dimensão epistemológica. Isso demonstra a valorização da dimensão conceitual da aprendizagem, por meio da referência direta a conceitos científicos e a aspectos da natureza da ciência no processo de contextualização das questões.

Observamos também a preocupação de outras provas com a contextualização de suas questões. Silva *et al.* (2020) ao falarem sobre as questões da Prova Brasil, relatam que as questões possuem o envolvimento de temáticas reais e presentes no cotidiano do aluno, isto é, as situações propostas vão além do conteúdo da disciplina e assim relacionando-os com o ensino da Matemática, trabalhando com dados informativos, a interpretação e análise de situações cotidianas.

Dentre as limitações desta pesquisa, elencamos o fato de que algumas questões possuíam características presentes em mais de um nível de Letramento Estatístico. Este fato dificultou o processo de categorização, apesar de poder ser considerado em processos classificatórios compostos por categorias estanques e pretensamente disjuntas. A forma de contornar o problema foi buscar elencar aquilo que prevalecia como ênfase em termos de características dos níveis presentes nas questões analisadas.

Para trabalhos futuros, nossa sugestão é a de uma investigação de como está sendo abordada a construção do Letramento Estatístico dentro dos programas de Mestrado da rede PROFMAT, tanto a partir da análise da sua grade curricular, como a partir da análise das questões presentes no Exame Nacional de Qualificação (ENQ), que tem como objetivo avaliar o conhecimento adquirido nas disciplinas básicas e cuja aprovação constitui componente obrigatório para a conclusão do curso.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, E. L. **Concepções de educação estatística:** narrativas de professores membros do GT-12 da SBEM. 2017. 348f. Dissertação (Mestrado em Ciências e em Matemática). Curitiba: Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

Arteaga, P.; Batanero, C. **Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos.** MORENO. M. M.; ESTRADA, A.; CARRILLO, J.; SIERRA, T. A. (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV. Lleida: SEIEM, 2010, p. 211-221.

ARTEAGA, P.; BATANERO, C.; CAÑADAS, G. R.; GEA, M. M. Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 14, n. 2, p. 279-297, 2012.

Batanero, C.; Arteaga, P.; Ruiz, B. Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. **Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas**, v. 28, n. 1, p. 141-154, 2010.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; VALLECILLOS, A., GREEN, D. E.; HOLMES, P. Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 25, n. 4, p. 527-547, 1994.

BATANERO, Carmen et al. Assessing pre-service teachers conceptions of randomness through project work. In: **Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics. Lubjana: International Association for Statistical Education.** 2010.

BATANERO. C. **Los Retos de la Estadística. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística.** Conferencia Inaugural, Buenos Aires, Argentina, 2002. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/batanero>. Acessado: 01 de jan. 2021.

BAYER, A.; BITTENCOURT, H.; ROCHA, J.; ECHEVESTE S. **A Estatística e sua história.** 2009. Disponível em: <https://notasdeaula.files.wordpress.com/2009/08/estatistica-e-sua-historia.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2021.

BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. B. (Eds.). **The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking.** Dordrecht, The Netherlands: Kluwer academic publishers, 2004.

BIVAR, D. ; SELVA, A.C.V. . Analisando atividades envolvendo gráficos e tabelas nos livros didáticos de matemática. In: **Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM**, Recife, 2011.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC 2ª versão.** *Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2017.*

BRASIL. 2013a. **Uma análise quali-quantitativa de perfis de candidatos ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)**. Relatório final do procedimento de análise quali-quantitativa de perfis de candidatos e aprovados no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), SBM, 2013a. Disponível em: http://www.profmatsbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/Relatorio/SBM_PROFMAT_Quem_e_o_proffesor_DIGITAL_como_como_anexos.pdf. Acesso em 19 de jan. 2021.

BRASIL. 2013b. **Avaliação suplementar externa do programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional (PROFMAT), CAPES, 2013b**. http://www.profmatsbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/Relatorio/PROFMAT_Av_Suplementar.pdf. Acesso em 19 jan. 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: BNCC. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2018.**

BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum – BNCC 3ª versão. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2017.**

BRASIL. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). **Ofício N° 031_06/2010/CTC/CAAI/CGAA/DAV/CAPES**. Brasília, DF, 2010. Disponível em: https://www.profmatsbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/Oficio_Aprovacao.pdf. Acesso: 3 de jan. 2021.

BRASIL. **Orientações curriculares nacionais para o ensino médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2006.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BRASIL. PCN Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

BRASIL. **Planejando a Próxima Década. Conhecendo as 20 Metas do Plano Nacional de Educação**. Ministério da Educação/Secretaria de Articulação com os Sistemas de Ensino (MEC/Sase): Brasília, **Brasília: 2014.**

CALLINGHAM, A. R.; WATSON, J. The development of Statistical literacy at school. Statistics Education Research Journal (SERJ), 16(1), 181-201, 2017.

CAMPOS, C. R.; WODEWOTZKI, M. L. L.; JACOBINI, O. R. **Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

CARNEIRO, F.; SPINETI, C. **Profmat: uma reflexão e alguns resultados**. 2017. Disponível em: https://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2017/07/PROFMAT-relatorio_DIGITAL.pdf. Acesso em: 21 jan. 2021.

CAZORLA, I. M. **Educação Estatística: as dimensões da Estatística na formação do professor de Matemática**. Mesa Redonda do VIII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2006, disponível em <http://www.pucsp.br/pensamentomatematico/epem.html>. Acesso em 02/01/2021.

CAZORLA, I. M.; CASTRO, F. C. O papel da estatística na leitura do mundo: o letramento estatístico. **Publicatio UEPG. Ciências humanas, ciencias sociais aplicadas, linguística, letras e artes**, v. 16, n. 1, p. 45-53, 2008.

CAZORLA, I. **O ensino de Estatística no Brasil**. 2009. Disponível em: http://www.sbem.com.br/gt_12/arquivos/cazorla.htm. Acesso em: 14 jan. 2021.

CAZORLA, I.; MAGINA, S., GITIRANA, V., GUIMARÃES, G. *Estatística para os anos iniciais do ensino fundamental*. 1. ed. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, 2017.

COSTA, M. S. J. **Análise pedagógica do exame de acesso ao PROFMAT: reflexões sobre avaliação e formação de professores de matemática**. 2020. 212f. Tese (Mestrado em Matemática). Santarém: Universidade Federal do Oeste do Pará, 2020.

CURCIO, F. R. **Developing Graph Comprehension**. Reston: NCTM, 1989. 85 p.

DÍAZ-LEVICOY, D; MORALES, R; LÓPEZ-MARTÍN, M. Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de 1º y 2º año de Educación Primaria. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 4, n. 7, 2015.

ESTRELLA, S. El formato tabular: una revisión de literatura. **Actualidades investigativas en educación**, v. 14, n. 2, p. 449-478, 2014.

ESTRELLA, S; OLFOS, R; MENA-LORCA, A. El conocimiento pedagógico del contenido de estadística en profesores de primaria. **Educação e Pesquisa**, v. 41, n. 2, p. 477-493, 2015.

FLICK, U. **Qualidade na pesquisa qualitativa: coleção pesquisa qualitativa**. Bookman Editora, 2009.

FRIEL, S. N.; CURCIO, F. R.; BRIGHT, G. W. Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. **Journal for Research in mathematics Education**, v. 32, n. 2, p. 124-158, 2001.

FUENTES, S.; ARTEAGA, P; BATANERO, C. **Gráficos estadísticos y tablas: una actividad exploratoria en Educación Infantil**. In: F. ESPAÑA (Ed.), Actas del XV Congreso

de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Baeza: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, 201, p. 385-393.

GAL, I. Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. **International statistical review**, v. 70, n. 1, p. 1-25, 2002.

GAL, I. Statistical literacy. In: **The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking**. Springer, Dordrecht, p. 47-78, 2004.

GAL, I; GARFIELD, J. Curricular goals and assessment challenges in statistics education. **The assessment challenge in statistics education**, p. 1-13, 1997.

GARFIELD, J.; GAL, I. Teaching and assessing statistical reasoning. In: **Developing mathematical reasoning in grades K-12**. National Council of Teachers of Mathematics. Reston: Ed. L. Staff, 1999. p. 207-219.

GARFIELD, J; BEN-ZVI, D. **Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice**. Springer Science & Business Media, 2008.

GARFIELD, J; DELMAS, R; CHANCE, B. The Web-based ARTIST: Assessment resource tools for improving statistical thinking. In: **annual meeting of the American Educational Research Association**, Chicago, 2003. Disponível em: [\(17\) The Web-based ARTIST: Assessment Resource Tools for Improving Statistical Thinking | Request PDF \(researchgate.net\)](#). Acesso em: 01 de jan. 2021.

GEA, M. M. **La correlación y regresión en bachillerato: análisis de libros de texto y del conocimiento de los futuros profesores**. 2014. 384f. Tese (Doutorado em Ciência de la Educación) - Universidad de Granada, Granada, 2014.

GEA, M. M.; BATANERO, C.; ARTEAGA, P.; CAÑADAS, G. R.; CONTRERAS, J. M. Análisis del lenguaje sobre la correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. **Suma**, v. 76, p. 37-45, 2014.

GITIRANA, V. A pesquisa como eixo estruturador da educação estatística. **BRASIL, Ministério da educação. Pacto Nacional pela alfabetização na idade certa: educação estatística**. Brasília: MEC, 2014.

GÓMEZ, E.; ORTIZ, J. J.; BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M.. El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. **UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 35, p. 75-91, 2013.

GONÇALVES, H. **Educação Estatística: apontamentos sobre a Estatística nos cursos de pedagogia – magistério para séries iniciais do Ensino Fundamental**. Seminário IASI de Estatística Aplicada, 9. Anais... Brasília: ABE/IBGE, 2003.

GOULART, Amari e COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Letramento Estatístico e o Exame Nacional de Ensino Médio. In: SAMÁ, Suzi; SILVA, Mauren Porciúncula Moreira da (Org.). **Educação Estatística: ações e estratégias pedagógicas no Ensino Básico e Superior**. Curitiba: Editora CRV, 2015.

GUIMARÃES, G.; OLIVEIRA, I. *Construção e interpretação de gráficos e tabelas. Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Educação Estatística. Caderno 7. 2014.*

JALOTO, A; MARTINS, I. **Sentidos de Contextualização no ENEM: uma análise de questões a partir da relação com a noção de contexto.** *Revista SBEnBIO, São Paulo 5 (7), 1-12, 2014.*

KOSCHAT, M. A. A case for simple tables. **The American Statistician**, v. 59, n. 1, p. 31-40, 2005.

LI, KAM-YUK; SHEN, SHIR-MING. Students' weaknesses in statistical projects. **Teaching Statistics**, v. 14, n. 1, p. 2-8, 1992.

LOPES, A. E. C. O. **A Estatística e sua história: uma contribuição para o ensino da estatística.** 1988. 198 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

LOPES, A. E. C. O. **A Estatística e sua história: Uma contribuição para o ensino da Estatística aplicada a educação.** 1988. 198 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de pós-graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

LOPES, C. A. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil.** 2003. 281 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campina, 2003.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cadernos Cedex**, v. 28, n. 74, p. 57-73, 2008.

MENEZES, J. A. S. **Mestres que criam: a produção do conhecimento no Mestrado Profissional em Artes no Estado Pará.** Orientador: Joel Cardoso da Silva. 2020. 192 f. Tese (Doutorado em Artes) - Programa de Pós-Graduação em Artes, Instituto de Ciências da Arte, Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

MOORE D. Probability and statistics in the core curriculum. In: Dossey J (Ed) **Confronting the core curriculum, Washington:** Mathematical Association of America, p. 93-98, 1997.

MORAIS, P. C.; FERNANDES, J. A. **Realização** de duas tarefas sobre construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos por **alunos do 9º ano.** In Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática (XXII SIEM). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2011.

ODY, M. C. **Desenvolvimento e Perspectivas da Educação Estatística:** narrativas de educadores estatísticos no contexto Ibero-Americano. 2019. 311f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática), Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, PUCRS, Porto Alegre, 2019.

PEREIRA, E. L.; CONTI, K. C. Interpretando tabelas e construindo gráficos com alunos do 3º ano do Ensino Fundamental. In: TOMASIELLO, M. G. C. et al. (Org.). *Didática e práticas de ensino na realidade escolar contemporânea:*

constatações, análises e proposições. Araraquara: Junqueira & Marin, 2012. p. 5294-5302. (*e-book*).

PFANNKUCH, M.; WILD, C. Towards an understanding on statistical thinking. *In: The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 17-46.

RUMSEY, D. Alfabetização estatística como objetivo para cursos introdutórios. **Jornal de Estatísticas da Educação**, v. 10, n. 3, nov. 2002.

SANTOS, R. M. **Estado da arte e história da pesquisa em educação estatística em programas brasileiros de pós-graduação**. 2015. 348f. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2015.

SCHERER, Suely. **Estatística aplicada à educação**. Centro Universitário de Jaraguá do Sul – Jaraguá do Sul: UNERJ, 2004.

SCHIELD, Milo. Statistical literacy: Thinking critically about statistics. **Of Significance**, v. 1, n. 1, p. 15-20, 1999.

SHAUGHNESSY, J. M. **Research on Students' Understanding of Some Big Concepts in Statistics**. In: BURRIL, Gail F. Thinking and reasoning with data and chance. Reston/VA: NCTM, 2006. p.77-98.

SILVA, S. J.; SILVA, N. J.; COUTINHO, G. J. D. Prova Brasil: **Uma análise dos descritores de matemática e das práticas avaliativas em larga escala no 9º ano do ensino fundamental dos anos finais em duas escolas do município de Cumaru-PE**. VII Congresso Nacional de Educação. p. 1-12 , 2020.

SILVA, I. A. **Probabilidades: a visão Laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito**. 2002. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de pós-graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SUTHERLAND, Sinclair; RIDGWAY, Jim. Interactive visualisations and statistical literacy. **Statistics education research journal.**, v. 16, n. 1, p. 26-30, 2017.

TAKAI, A. M. Perspectivas do Profmat: política pública em construção. 2017. 175p. Tese (Doutorado em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

TERÁN, T. The development of statistics in the structure of the Argentine national educational system. In: **Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics**. Ciudad del Cabo: IASE. CD ROM. 2002.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 8, n. 16, p. 143-153, 2008.

WAINER, H. A study of Display Methods for NAEP Results: I. Tables. **Program Statistics Research**. Technical: Report, nº 95. Educacional Testing Service. Princeton: 1995.

Disponível em: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/j.2333-8504.1995.tb01645.x/pdf>.
Acesso em: 12 de set. 2020.

WALLMAN, Katherine K. Enhancing statistical literacy: Enriching our society. **Journal of the American Statistical Association**, v. 88, n. 421, p. 1-8, 1993.

WATSON, J. Assessing statistical thinking using the media. In: GARFIELD, J.; GAL, I. (Org.). **The assessment challenge in statistics education**. Amsterdam: IOS, 1997.

WATSON, J. **Statistical literacy at school: growth and goals**. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 2006.

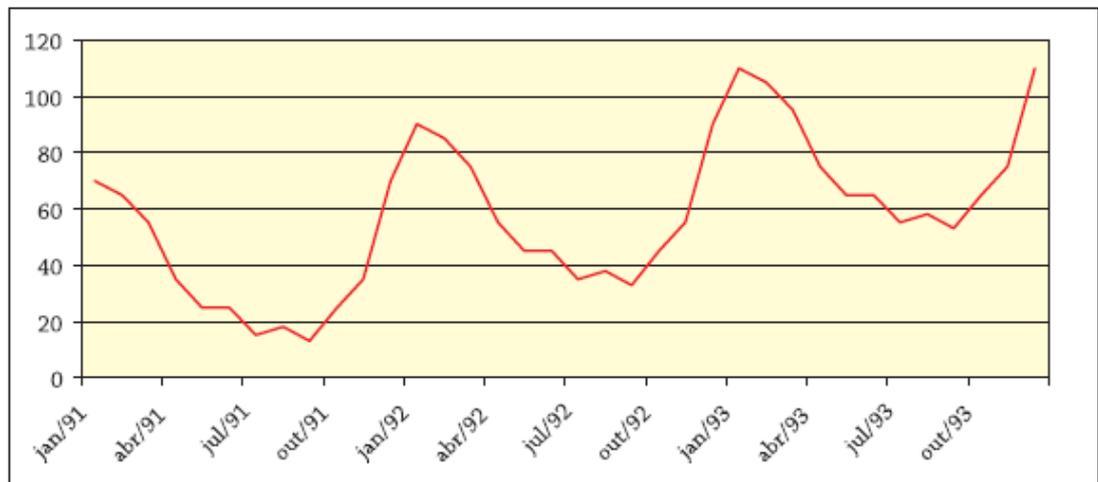
WATSON, J.; CALLINGHAM, A. R. Statistical literacy: a complex hierarchical construct. **Statistical Education Research Journal**, New Zeland, v. 2, n. 2, p. 3-46 2003.

ANEXO 1

Questões coletadas para a pesquisa das provas do ENA de todas as edições.

ENA 2011

7.



O gráfico acima mostra a quantidade de aparelhos de ar condicionado vendidos por semana numa loja do Rio de Janeiro entre janeiro de 1991 e dezembro de 1993.

O gráfico indica que, nesse período:

- (A) A venda de aparelhos de ar condicionado cresceu constantemente.
- (B) A venda de aparelhos de ar condicionado permaneceu constante.
- (C) A venda de aparelhos de ar condicionado foi maior em julho de 93 do que em julho de 91.
- (D) A venda de aparelhos de ar condicionado foi maior em outubro de 92 do que em janeiro de 92.
- (E) A venda de aparelhos de ar condicionado foi menor no verão de 93 do que no verão de 92.

Resolução:

Analisando o gráfico da questão, observamos que:

a) A venda de aparelhos de ar condicionado não cresceu constantemente, logo a alternativa A não é a correta.

b) A venda de aparelhos cresceu e decresceu, por isso, não permaneceu constante e a alternativa

B não é a correta.

c) Em julho/ a loja vendeu por semana, aproximadamente aparelhos de ar condicionado, enquanto, que em julho/ foram vendidos, aproximadamente destes aparelhos. Logo, venderam-se mais aparelhos neste período, correspondendo está à afirmativa correta.

Com isso, não analisaremos as demais alternativas.
Resposta correta: **alternativa C.**

15. Segundo informações do último censo do IBGE, a população brasileira cresceu cerca de 12% , entre os anos de 2000 a 2010. No mesmo período, a população urbana passou de cerca de 81% para cerca de 84% da população total. A partir dessas informações, podemos concluir que a população não urbana no período:

- (A) decresceu aproximadamente 8%
- (B) decresceu aproximadamente 6%
- (C) permaneceu aproximadamente a mesma
- (D) cresceu aproximadamente 9%
- (E) cresceu aproximadamente 12%

 Resolução

Seja x o número de habitantes do Brasil. Do enunciado, podemos construir a seguinte tabela:

	2000	2010
Total de habitantes	x	$1,12x$
População urbana	$0,81x$	$0,84 \cdot 1,12x = 0,9408x$
População rural	$0,19x$	$0,16 \cdot 1,12x = 0,1792x$

Logo, a população não urbana decresceu $(0,19x - 0,1792x) = 0,0108x$. Calculemos esse valor em porcentagem:

$$\begin{aligned} 0,19x &\rightarrow 100\% \\ 0,0108x &\rightarrow y \end{aligned}$$

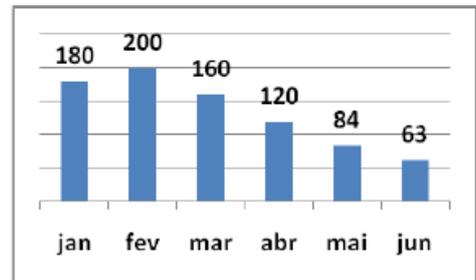
Assim, $y = 5,68\% \Rightarrow y \cong 6\%$.

Resposta correta: **alternativa B.**

6

O gráfico ao lado mostra o número de atendimentos de pacientes com uma certa doença num ambulatório no primeiro semestre de 2010. Quando houve o maior decréscimo percentual no número de atendimentos?

- A) Entre janeiro e fevereiro.
- B) Entre fevereiro e março.
- C) Entre março e abril.
- D) Entre abril e maio. *
- E) Entre maio e junho.



Q6. De janeiro a fevereiro não houve decréscimo, então não é preciso considerar esse caso. Fevereiro a março: $(200 - 160)/200 = 1/5$, decréscimo de 20%. Março a abril: $(160 - 120)/160 = 1/4$, decréscimo de 25%. Abril a maio: $(120 - 84)/120 = 3/10$, decréscimo de 30%. Maio a junho: $(84 - 63)/84 = 1/4$, decréscimo de 25%. Portanto o maior decréscimo ocorreu entre abril e maio.]

Resposta: D.

ENA 2013

Numa empresa, os salários não são todos iguais e um novo funcionário foi contratado com um salário igual à média dos salários pagos pela empresa antes de sua contratação. Comparando a média dos salários e o desvio padrão calculados antes da contratação do novo funcionário com a média dos salários e o desvio padrão calculados levando em conta o novo funcionário, podemos afirmar que:

- (A) a nova média é menor que a antiga e o desvio padrão permanece igual.
- (B) a nova média e o novo desvio padrão são ambos iguais aos antigos.
- (C) a nova média e o novo desvio padrão são ambos maiores que os antigos.
- (D) a nova média é igual a antiga e o novo desvio padrão é menor que o antigo.
- (E) a nova média e o novo desvio padrão são ambos menores que os antigos.

Resposta: D

Uma solução:

É possível resolver a questão sem fazer contas se os conceitos estão claros. A média não se altera se agregamos um elemento igual a própria média e o desvio padrão deve diminuir (já que é uma medida da dispersão em relação à média).

Fazendo os cálculos, podemos solucionar o problema da forma que segue. Suponha que a empresa tenha n empregados com salários s_1, s_2, \dots, s_n . Então a média dos salários é

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i$$

e o desvio padrão é

$$d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (s_i - m)^2}{n}}$$

O novo empregado terá um salário de m . Portanto a nova média e o novo desvio padrão serão:

$$m_{nova} = \frac{1}{n+1} \left(\left(\sum_{i=1}^n s_i \right) + m \right) = \frac{mn + m}{n+1} = m$$

$$d_{novo} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (s_i - m)^2 + (m - m)^2}{n+1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (s_i - m)^2}{n+1}} = d \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} < d,$$

pois o desvio padrão é positivo. Portanto, a média permanece igual e o desvio padrão diminui.

Questão 11

Em um cofre há seis moedas: duas moedas de 1 real e quatro moedas de 50 centavos. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas moedas do cofre. Qual é a melhor aproximação do valor esperado da média aritmética dos valores das duas moedas retiradas do cofre?

- (A) R\$ 0,50
- (B) R\$ 0,67
- (C) R\$ 0,75
- (D) R\$ 0,90
- (E) R\$ 1,00

Resposta: B

Uma solução:

Intuitivamente o valor da média de estar entre 0,50 e 0,75, pois há mais moedas de 50 centavos do que de 1 real. Esta intuição pode ser confirmada observando-se a tabela

Moedas retiradas	Média	Probabilidade
(0, 50; 0, 50)	0, 50	$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30}$
(0, 50; 1, 00)	0, 75	$\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{30}$
(1, 00; 0, 50)	0, 75	$\frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{30}$
(1, 00; 1, 00)	1, 00	$\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30}$

O valor esperado da média é $0,50 \cdot \frac{12}{30} + 0,75 \cdot 2 \cdot \frac{8}{30} + 1 \cdot \frac{2}{30} = \frac{20}{30} \approx 0,67$.

Questão 24. (*Noções de Estatística*)

Em um conjunto de dez números inteiros, a média dos dois menores é 102, dos três menores é 103, dos quatro menores é 104, e assim por diante, até a média de todos os dez é 110. Qual é o maior desses inteiros?

- (A) 140 (B) 132 (C) 125
(D) 119 (E) 117

Resposta: D

Uma solução:

A partir dos dados do problema, sabemos que as somas dos números considerados são tais que: $S_{10} = 1100$, $S_9 = 981$; portanto, o maior dos números é $1100 - 981 = 119$.

Questão 29. (*Noções de estatística*)

Em ciências atuariais, uma tábua da vida é uma tabela, construída a partir de censos populacionais, que mostra a probabilidade de morte de um indivíduo em uma determinada faixa etária. Por exemplo, a tábua da vida abaixo indica que um indivíduo que completou 21 anos tem 0,10% de chance de morrer antes de completar 22 anos.

Faixa etária $[x, x + 1)$	[20, 21)	[21, 22)	[22, 23)	[23, 24)	[25, 26)
Probabilidade de morrer	0,09%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%

(Fonte: *National Vital Statistics Reports, Vol. 54, No. 14, 2006.*)

Considere um grupo de 1 000 000 pessoas que acabaram de completar 21 anos. Segundo esta tabela, qual é o número de pessoas deste grupo, em média, que se espera que faça aniversário de 23 anos?

- (A) 998 001 (B) 990 000 (C) 999 900
(D) 900 001 (E) 810 000

Resposta: A

Uma solução:

Seja q_x é a probabilidade de um indivíduo na faixa etária $[x, x + 1)$ morrer. Logo $p_x = 1 - q_x$ é a probabilidade de um indivíduo na faixa etária $[x, x + 1)$ fazer $x + 1$ anos. Se l_x representa o número de indivíduos que fizeram aniversário de x anos, então $l_{x+1} = l_x \times p_x$. No problema temos:

$$l_{21} = 1000000, q_{21} = q_{22} = 0,10\% \text{ e, portanto, } p_{21} = p_{22} = 99,9\%.$$

$$\text{Logo, } l_{23} = l_{21} \times p_{21} \times p_{22} = 1000000 \times 99,9\% \times 99,9\% = 998001 \text{ pessoas.}$$

ENA 2015

11. O Tungstênio é um elemento químico de símbolo W e número atômico 74. Na forma pura é um metal de cor branco-cinza cujo ponto de fusão é igual a 3422 °C. Por causa do seu alto ponto de fusão, o Tungstênio é largamente usado na indústria na produção de filamentos para lâmpadas elétricas incandescentes. Sabendo que pontos de fusão e ebulição da água em graus Celsius (°C) e em graus Fahrenheit (°F) são dados pela tabela abaixo

	°C	°F
Fusão	0	32
Ebulição	100	212

e que as temperaturas nas duas escalas, graus Celsius e graus Fahrenheit, se relacionam por meio de uma função afim, qual é o ponto de fusão do Tungstênio em graus Fahrenheit?

Resposta: D)

Uma solução:

A moda, valor que possui maior frequência nos dados, é 8. Organizando os dados em ordem crescente e denominando o i -ésimo valor observado - já ordenado - por a_i , para $i \in \{1, \dots, 10\}$, calculamos a mediana de um conjunto de dez observações como sendo $\frac{a_5 + a_6}{2} = \frac{7,5 + 7,5}{2} = 7,5$. Por fim, a média é dada por

$$\frac{4 + 5,5 + 6 + 6,5 + 7,5 + 7,5 + 8 + 8 + 8 + 9}{10} = 7.$$

40. Em uma turma de quatro alunos, o professor aplicou duas provas P_1 e P_2 , obtendo as seguintes notas:

$$P_1 = \{30, 40, 50, 60\} \quad \text{e} \quad P_2 = \{15, 35, 55, 75\}.$$

Analisando os resultados, é possível afirmar que

- (A) P_1 e P_2 possuem a mesma média aritmética e o mesmo desvio padrão.
- (B) P_1 e P_2 possuem médias aritméticas diferentes e desvios padrões diferentes.
- (C) P_1 e P_2 possuem a mesma média aritmética e desvios padrões diferentes.
- (D) P_1 possui maior desvio padrão que P_2 .
- (E) P_2 possui maior média aritmética que P_1 .

Resposta: C)

Uma solução:

A média aritmética da prova P_1 é dada por $\bar{x}_1 = \frac{30 + 40 + 50 + 60}{4} = \frac{180}{4} = 45$ e o desvio padrão é dado por

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(30 - 45)^2 + (40 - 45)^2 + (50 - 45)^2 + (60 - 45)^2}{4}} = \sqrt{\frac{500}{4}} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

A média aritmética da prova P_2 é dada por $\bar{x}_2 = \frac{15 + 35 + 55 + 75}{4} = \frac{180}{4} = 45$ e o desvio padrão é dado por

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{(15 - 45)^2 + (35 - 45)^2 + (55 - 45)^2 + (75 - 45)^2}{4}} = \sqrt{\frac{2000}{4}} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}.$$

ENA 2016

17. A turma A tem 48 alunos e a turma B tem 32. As duas turmas fizeram uma prova e a média aritmética das notas dos alunos da turma A foi de 5,7 e dos alunos da turma B foi de 6,5.

Qual é a média aritmética das notas de todos os 80 alunos?

- (A) 6,02
- (B) 6,06
- (C) 6,1
- (D) 6,14
- (E) 6,18

Resposta: A

Uma solução:

Se M_A e M_B são as médias aritméticas das notas dos alunos das turmas A e B , respectivamente,

$$\text{temos que } M_A = \frac{n_1 + \dots + n_{48}}{48} = 5,7 \text{ e } M_B = \frac{m_1 + \dots + m_{32}}{32} = 6,5.$$

A média aritmética M de todos os alunos é dada por $M = \frac{n_1 + \dots + n_{48} + m_1 + \dots + m_{32}}{80}$.

$$\text{Portanto, } M = \frac{5,7 \cdot 48 + 6,5 \cdot 32}{80} = \frac{5,7 \cdot 6 + 6,5 \cdot 4}{10} = \frac{34,2 + 26,0}{10} = 6,02.$$

37. Um médico solicita ao seu assistente que meça a pressão arterial de 8 pacientes. Ao finalizar a tarefa, o assistente calcula a pressão arterial média (aritmética) e encontra o valor de 13,875.

Paciente	A	B	C	D	E	F	G	H
Pressão Arterial	11,5	16,0	14,0	15,2	14,0	12,1	?	13,2

Quando o médico vai consultar a tabela encontra um valor ilegível. Sobre o número ilegível é correto afirmar que este valor, em relação aos dados, é:

- (A) igual à moda.
- (B) inferior ao primeiro quartil.
- (C) inferior à média aritmética das observações.
- (D) igual ao valor máximo das observações.
- (E) superior à mediana.

Resposta: E

Uma solução:

Inicialmente, determina-se o valor ilegível através da expressão da média aritmética:

$$\frac{11,5 + 16,0 + 14,0 + 15,2 + 14,0 + 12,1 + x + 13,2}{8} = 13,875.$$

Logo $x + 96 = 111$, ou seja, $x = 15$. Analisando os dados, temos que a moda é igual a 14.

Colocando os dados em ordem crescente, obtemos o seguinte conjunto de valores:

{11,5; 12,1; 13,2; 14,0; 14,0; 15,0; 15,2; 16,0}.

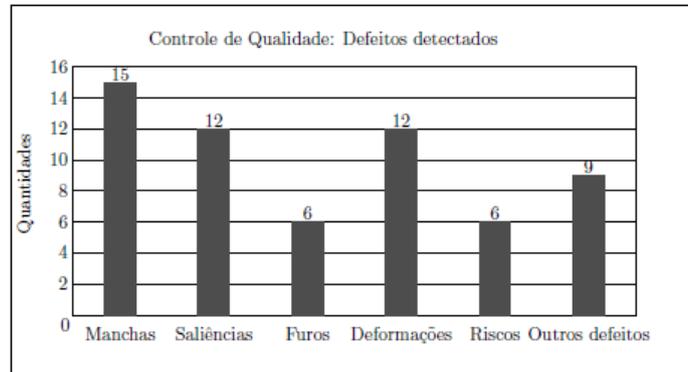
Como a quantidade de valores é par, segue que a mediana é igual a $Q_2 = \frac{a_4 + a_5}{2} = \frac{14 + 14}{2} = 14$.

Além disso, o primeiro quartil é $Q_1 = \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{12,1 + 13,2}{2} = 12,65$.

Portanto, como $Q_2 < 15$, temos que este valor é superior à mediana.

ENA 2017 prova 1

[17] O administrador responsável pelo controle de qualidade de uma fábrica de artigos plásticos registrou, em um gráfico, os diversos defeitos nas peças não aprovadas segundo critérios de qualidade durante um certo período, conforme abaixo.



É correto afirmar que

- (A) Os defeitos referentes às manchas superam em 15% as deformações.
- (B) As deformações consistem em 30% dos defeitos detectados.
- (C) 35% dos defeitos detectados correspondem a riscos ou manchas.
- (D) 45% dos defeitos detectados são de manchas, saliências ou furos.
- (E) Os problemas de deformação superam em 15% os problemas de furos nos produtos.

Solução

Resposta: C

Foi detectado um total de $15 + 12 + 6 + 12 + 6 + 9 = 60$ defeitos através do controle de qualidade. Inicialmente calculemos o valor percentual referente a cada tipo de defeito:

- Manchas: $\frac{15}{60} \times 100 = 25\%$;
- Saliências: $\frac{12}{60} \times 100 = 20\%$;
- Furos: $\frac{6}{60} \times 100 = 10\%$;
- Deformações: $\frac{12}{60} \times 100 = 20\%$;
- Riscos: $\frac{6}{60} \times 100 = 10\%$;
- Outros: $\frac{9}{60} \times 100 = 15\%$.

Analisando as alternativas, concluímos que 35% dos defeitos detectados (10% + 25%) correspondem a riscos ou manchas.

[18] Dois números reais são tais que a *média aritmética* entre eles é 25 e a *média geométrica* é 20. Quais são esses números?

- (A) 10 e 30
- (B) 20 e 30
- (C) 10 e 40
- (D) 15 e 35
- (E) 5 e 45

Solução

Resposta: C

Chamando de x e de y os números procurados, temos que $\frac{x+y}{2} = 25$ e $\sqrt{xy} = 20$, onde se usou a definição de média aritmética e geométrica entre dois números, respectivamente. Assim, $x + y = 50$ e $xy = 400$. Isolando y na primeira e substituindo na segunda igualdade obtém-se a equação de segundo grau $-x^2 + 50x - 400 = 0$ cujas raízes são $x = 10$ e $x = 40$ e substituindo $x = 10$ em uma das equações obtém-se $y = 40$. Se $x = 40$ obtém-se $y = 10$.

[28] Considere a seguinte distribuição de frequências das alturas, em metros, dos alunos de uma determinada turma:

Classe	Frequência
1,50 — 1,60	3
1,60 — 1,70	9
1,70 — 1,80	12
1,80 — 1,90	2

Lembre que a notação $2|— 3$ é comumente usada em Estatística para representar o intervalo $[2, 3)$.

Sobre a distribuição é correto afirmar que:

- (A) a média aritmética é inferior a 1,60 m.
- (B) a média aritmética pertence ao último quartil.
- (C) a mediana é igual à média aritmética.
- (D) a mediana pertence à terceira classe.
- (E) a pessoa mais alta da turma tem 1,90 m.

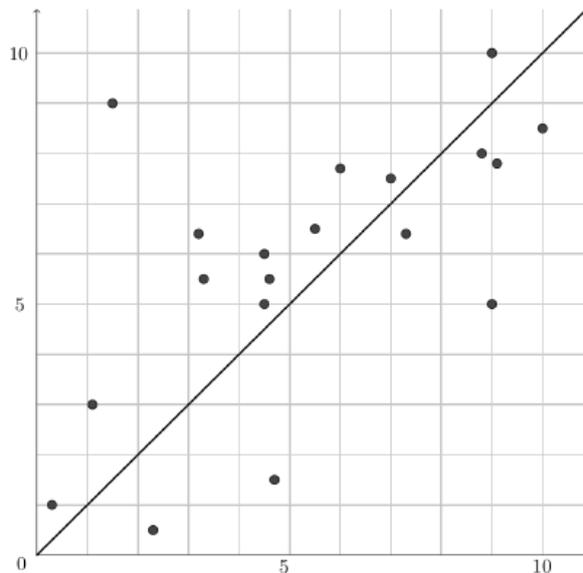
Solução

Resposta: D

Somando as frequências, obtemos um total de 26 alunos na turma. O que significa que a mediana é a média aritmética entre as alturas que ocupam as posições de número 13 e 14 na distribuição. Como as duas primeiras classes somam 12 alunos, podemos concluir que a mediana está na terceira classe. Logo a resposta correta é a (D).

ENA 2018 PROVA G

[13] O gráfico abaixo mostra as notas de uma determinada turma nas disciplinas de Geografia e História. No eixo horizontal estão as notas de Geografia e no eixo vertical as notas de História. Ou seja, um par ordenado (g, h) representa as notas de um mesmo aluno que obteve nota g em Geografia e h em História.



Analisando o gráfico podemos afirmar que

- (A) Quatro alunos tiveram nota menor que 4 nas duas disciplinas.
- (B) Dentre os que tiveram nota maior que 6 nas duas disciplinas, mais alunos tiveram melhor nota em Geografia.
- (C) Todos os alunos tiveram nota melhor em História do que em Geografia.
- (D) A maioria dos alunos foram melhor em Geografia do que em História.
- (E) Houve alunos que tiveram a mesma nota nas duas disciplinas.

Solução

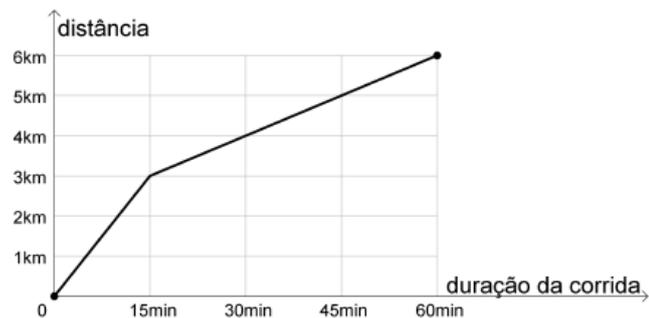
Resposta: B

A região abaixo da diagonal representa os alunos que tiveram nota melhor em Geografia, isto é, $\{(g, h) \mid g > h\}$, a região acima da diagonal representa os alunos que tiveram nota melhor em História, isto é, $\{(g, h) \mid g < h\}$ e a diagonal são os alunos que tiveram a mesma nota nas duas disciplinas.

Assim, apenas três alunos tiveram nota menor que 4 nas duas disciplinas. Seis alunos tiveram nota maior do que 6 nas duas disciplinas, dos quais 4 tiveram nota melhor em Geografia.

ENA 2019

[10] O gráfico abaixo mostra o progresso de um corredor, em uma corrida de 6km de extensão.



Costuma-se chamar de *pace* a razão $\frac{t}{d}$, onde t é o tempo, em minutos, que um corredor leva para percorrer uma distância d , em quilômetros. Desta forma, considerando a corrida representada pelo gráfico acima, é correto afirmar que

- (A) o *pace* do corredor foi maior nos 15 primeiros minutos do que na corrida inteira.
- (B) o *pace* do corredor foi menor nos 15 últimos minutos do que na corrida inteira.
- (C) o *pace* do corredor foi menor nos 30 últimos minutos do que na corrida inteira.
- (D) o *pace* do corredor foi menor nos 3 primeiros quilômetros do que na corrida inteira.
- (E) o *pace* do corredor foi menor nos 3 últimos quilômetros do que na corrida inteira.

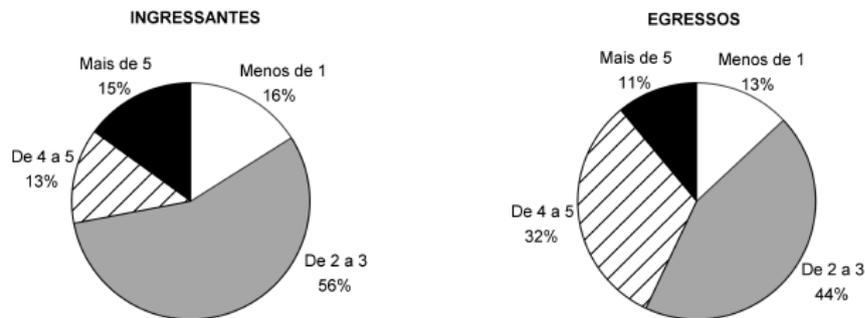
Solução**Resposta: D**

Calculando o *pace* em cada um dos intervalos de tempo ou distância citados, a partir das informações do gráfico, temos

- *pace* na corrida inteira: $\frac{60\text{min}}{6\text{km}} = 10\text{min/km}$
- *pace* nos 15 primeiros minutos: $\frac{15\text{min}}{3\text{km}} = 5\text{min/km}$
- *pace* nos 15 últimos minutos: $\frac{15\text{min}}{1\text{km}} = 15\text{min/km}$
- *pace* nos 30 últimos minutos: $\frac{30\text{min}}{2\text{km}} = 15\text{min/km}$
- *pace* nos 3 primeiros quilômetros: $\frac{15\text{min}}{3\text{km}} = 5\text{min/km}$
- *pace* nos 3 últimos quilômetros: $\frac{45\text{min}}{3\text{km}} = 15\text{min/km}$

Assim, de todos os itens, o único que se aplica é o D.

[25] Uma pesquisa sobre renda familiar foi realizada com os alunos ingressantes de um curso e mais tarde com aqueles que conseguiram concluí-lo.



Sabendo que houve evasão durante o curso e que, ao longo deste, alguns alunos mudaram sua faixa de renda, podemos afirmar, com base nos gráficos e no fato de que novos alunos não mais adentraram no curso desde então, que:

- certamente houve diminuição no número de alunos que recebiam mais de 5 salários mínimos do início para o final do curso.
- 12% dos alunos que recebiam de 2 a 3 salários mínimos não concluíram o curso.
- é possível que a quantidade de alunos que recebiam de 4 a 5 salários mínimos quando concluíram o curso seja menor do que a quantidade de alunos que, quando ingressaram, pertenciam a esta faixa de renda.

É correto o que se afirma em:

- I, apenas.
- II, apenas.
- I e III, apenas.
- II e III, apenas.
- I, II e III.

Solução**Resposta: C**

Como o total de alunos do curso diminuiu, em valor absoluto, com a evasão, e também o percentual de alunos que recebem mais de 5 salários mínimos diminuiu, então, certamente houve diminuição do número de alunos nesta faixa de renda, logo (I) é verdadeira.

Já a afirmação (II) é falsa, pois mesmo que não houvesse evasão entre aqueles que recebiam de 2 a 3 salários mínimos, o fato de que alguns alunos mudarem sua faixa de renda seria suficiente para justificar uma redução no percentual de alunos nesta faixa de renda.

Agora a assertiva (III) é verdadeira, porque se, por exemplo, tivessem ingressado 300 alunos no curso e evadido 200, teríamos inicialmente 39 alunos (13% de 300) recebendo de 4 a 5 salários e teriam concluído o curso apenas 32 alunos (32% de 100) nesta faixa de renda.

[29] As médias aritméticas das notas das turmas A e B são, respectivamente, iguais a 6 e 5. Sabendo que a turma A tem 30 alunos e a turma B tem 45 alunos, a média aritmética das notas dos 75 alunos das duas turmas é igual a

- (A) 5,30 (B) 5,35 (C) 5,40 (D) 5,42 (E) 5,50

Solução**Resposta: C**

A média aritmética da turma A é dada por $M_A = \frac{S_A}{30}$, onde S_A é a soma das notas dos 30 alunos.

A média aritmética da turma B é dada por $M_B = \frac{S_B}{45}$, onde S_B é a soma das notas dos 45 alunos.

A média dos 75 alunos das turmas A e B é igual a

$$M = \frac{S_A + S_B}{75} = \frac{30}{75} \cdot \frac{S_A}{30} + \frac{45}{75} \cdot \frac{S_B}{45}$$

Como $M_A = 6$ e $M_B = 5$, obtemos $M = \frac{30}{75} \cdot 6 + \frac{45}{75} \cdot 5 = \frac{405}{75} = 5,40$.