UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

Ubiraelson de Lima Ruela

ESCOAMENTO DE ÁGUA COMO ATIVIDADE MATEMÁTICA NA ABORDAGEM LCP

Santarém - PA

2013

Ubiraelson de Lima Ruela

ESCOAMENTO DE ÁGUA COMO ATIVIDADE MATEMÁTICA NA ABORDAGEM LCP

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA, Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz

Santarém – PA

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Gestão da Informação – SIGI/UFOPA

R921e Ruela, Ubiraelson de Lima
Escoamento de água como atividade matemática na abordagem LCP / Ubiraelson de Lima Ruela. – Santarém, 2013.
89 f.; il.

Orientador Hugo Alex Carneiro Diniz.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática. Santarém, 2013.

1. Matemática – método de ensino. 2. Matemática – experimentos. 3. Água – escoamento – Abordagem LCP. I. Diniz, Hugo Alex Carneiro, *orient*. II. Título.

CDD: 23 ed. 510.78

Bibliotecário - Documentalista: Mayco Ferreira Chaves – CRB/2 1357

Ubiraelson de Lima Ruela

ESCOAMENTO DE ÁGUA COMO ATIVIDADE MATEMÁTICA

NA ABORDAGEM LCP

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA, Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz
Orientador – UFOPA

Prof. Dr. Mário Tanaka Filho
Examinador – UFOPA

Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento.
Examinador – UFPA

Santarém - PA

2013

À Évelin, Luciane e Benedita.

AGRADECIMENTOS

À minha família, especialmente minha mãe e minha irmã Aldenize.

À minha amada noiva, Luciane Alfaia.

Ao professor Hugo Diniz, pela orientação, dedicação, paciência, competência, apoio... Muito obrigado por tudo.

Aos meus colegas de curso, especialmente ao Rudinei.

Aos alunos da escola Pedro Álvares Cabral que participaram da atividade.

Aos Professores do PROFMAT/UFOPA.

À SBM e CAPES.

RESUMO

Este trabalho aborda o problema da evolução do nível da superfície de líquido, em um tanque, em função do tempo de escoamento por um orifício. Tal problema é utilizado como objeto central de uma atividade. Essa atividade envolve experimentos e é destinada a estudantes do ensino médio. A metodologia da atividade é uma adaptação da abordagem LCP (Large Context Problems), desenvolvida por Stinner. O Teorema de Torricelli, um resultado de Mecânica dos Fluídos a respeito da velocidade de escoamento de líquido por orifício, é demonstrado. Para isso, foram utilizadas apenas algumas noções de Física, estudadas no ensino médio. Outra demonstração via Princípio de Bernoulli, também é apresentada. O Teorema de Torricelli é utilizado para obtenção do modelo matemático do problema, via equação diferencial ordinária. O conceito de Coeficiente de Descarga, da Mecânica dos Fluídos, foi introduzido para maior precisão do modelo. Além disso, é feita uma verificação experimental desse modelo. Os procedimentos são descritos e ilustrados com fotos. Os dados dessa verificação são também testados a respeito das propriedades características das funções quadráticas e exponenciais. Os teoremas de caracterização dessas funções são demonstrados. Por fim, é apresentada a atividade desenvolvida com alunos do ensino médio, assim como análise de questionários respondidos pelos alunos.

Palavras – chave:
experimento – escoamento – abordagem LCP

ABSTRACT

This paper addresses the problem of evolution of the level of the liquid surface in a tank, as a function of flow time through a hole. This problem is used as-formed central object of an activity. This activity involves experiments and is aimed at high school students. The methodology of the activity is an adaptation of the approach LCP (Large Context Problems), developed by Stinner. Torricelli's theorem, a result of Fluid Mechanics about the velocity of liquid flow orifice, is shown. For this, we used only a few notions in physics, studied in high school. Another demonstration via Bernoulli's Principle, is also presented. Torricelli's theorem is used to obtain the mathematical model of the problem, via ordinary differential equation. The concept of Discharge Coefficient of Fluid Mechanics, was introduced to more accurately model. Additionally, a check is made this experimental model. The procedures are described and illustrated with photos. The data from this scan are also tested with respect to the characteristic properties of quadratic and exponential functions. The theorems characterize these functions are demonstrated. Finally, we present the activity developed with high school students, as well as analysis of questionnaires completed by the students.

Key – words:
experiment – runoff - LCP approach

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muito se tem falado e escrito sobre o baixo rendimento dos alunos da educação básica em Matemática. O anuário brasileiro da educação básica-2013 mostra que o nível de aprendizagem entre estudantes brasileiros ainda é muito baixo, especialmente de Matemática. Em 2012, apenas 10,3% dos alunos brasileiros mostram proficiência esperada na disciplina ao chegar ao 3° ano do ensino médio. Resultados do programa de avaliação internacional de alunos (PISA[1]-2009) apontaram que o Brasil ocupa a 53ª posição no ranking mundial de desempenho da Matemática, entre os 65 países que participam do exame.

Uma atitude pedagógica, no sentido de tornar a aula de Matemática mais interessante, é a ação de atividades nas quais os alunos não sejam meros expectadores. Atividades que os propiciem a experiência da curiosidade, o prazer da descoberta e a satisfação de aprender com autonomia. O canadense Arthur Stinner, enquanto professor de Física no que seria correspondente ao nosso ensino médio, passou a utilizar um atrativo central para inserir os alunos em um contexto de investigação motivado por fatos históricos, aspectos do cotidiano ou dramatização envolvendo personagens, tanto fictícios quanto estudiosos, em vista de ter maior autonomia em relação ao livro didático convencional. Isso o levou ao desenvolvimento da abordagem LCP publicada em seu trabalho “The Large Context Problem (LCP) approach An example of contextual teaching in physic” (2004). Esta abordagem baseia-

[1] Programme for International Student Assessment (PISA) – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – é uma iniciativa internacional de avaliação comparada, aplicada a estudante na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países.

se na constatação de que a aprendizagem pode ser bem motivada por um contexto com uma ideia central unificadora capaz de capturar a imaginação dos alunos.

De acordo com Lima *et all* (2001), os livros didáticos brasileiros para Matemática apresentam contextos históricos, aspectos da vida de estudiosos e aplicação da Matemática de maneira tímida e geralmente como anexos no final de cada capítulo. Isto é, desvinculados do texto, como se fosse elemento opcional de pouca importância. Sem destaque à interdisciplinaridade, além da exigência que o aluno já tenha domínio sobre o conteúdo do capítulo. Esses elementos poderiam ser utilizados para despertar o interesse do estudante.

Este trabalho aborda o problema da evolução do nível da superfície de líquido, em função do tempo de escoamento. Durante a drenagem de um tanque, através de um orifício. Apresenta uma atividade para o ensino médio via adaptação, para o ensino de Matemática, da abordagem LCP. O capítulo 1 apresenta a abordagem LCP. O capítulo 2 apresenta o modelo matemático do problema. Esse modelo é obtido com resolução de uma equação diferencial ordinária. Essa equação, por sua vez, decorre de alguns conhecimentos de Física Fundamental, tais como Equação de Torricelli e Teorema de Stevin, além de alguns conceitos de Mecânica dos Fluídos. No capítulo 3, é feita uma verificação experimental do modelo obtido no capítulo anterior. Este capítulo apresenta um gráfico comparativo entre a previsão teórica e valores obtidos experimentalmente. No capítulo 4, são demonstrados teoremas de caracterização das funções quadráticas e exponenciais. O capítulo 5 é o produto final do trabalho, no qual se apresenta uma atividade desenvolvida com alunos do ensino médio.

CAPÍTULO 1

ABORDAGEM LCP

O envolvimento dos alunos nas disciplinas curriculares parece variar em função de diversos fatores, individuais e de contexto, ligados à motivação. As atuais teorias cognitivas da motivação consideram que algumas alternativas para conseguir o envolvimento dos estudantes são representadas pela motivação intrínseca e pelas formas de auto-regulação da motivação extrínseca (Souza, 2012).

Uma das alternativas, que podem ser usadas para chamar o aluno a participar do processo de ensino aprendizagem, é a contextualização de problemas com fenômenos, experimentos e história da ciência. Um avanço nesse sentido é a abordagem LCP, cujo principal objetivo é humanizar o ensino de ciência, colocando-o em contextos ricos, interessantes e acessíveis, que levem em conta a história e natureza da ciência. Convencionalmente ao ensinar ciências dentro de uma abordagem tradicional, usam-se problemas dos finais de capítulo dos livros didáticos para enfatizar o conteúdo. Geralmente, os pontos mais interessantes são abordados pelo professor, não pelo aluno. Assim, uma grande oportunidade de envolvimento e iniciativa está perdida no início da atividade.

A abordagem LCP propõe que sejam definidos contextos que gerem problemas e questões, de forma que atraiam os alunos a adquirir conhecimento do conteúdo. Claro, nós podemos não ser capazes de apresentar todo o conhecimento do conteúdo, para os alunos, de uma forma motivacional. O ideal seria fornecer o contexto motivacional e, em seguida, usar relevantemente livros didáticos como referências, para responder as perguntas e resolver os problemas que o contexto gera.

Um problema geral, no entanto, surge quando os professores tentam escapar do livro convencional para motivar os alunos a adquirir conhecimento do conteúdo, por meio de contextos que os alunos achem atraente. Essa dificuldade é a necessidade de os alunos já terem dominado uma parte significativa do conteúdo. Segundo Stinner (2004), os alunos muitas vezes não conseguem lidar com as questões e os problemas que o contexto gera.

Na abordagem LCP, deve-se garantir que o aluno tenha conhecimento do conteúdo suficiente para enfrentar com êxito, pelo menos, alguns dos problemas. Se o aluno não for capaz de fazer isso ele irá perde o interesse. O papel do educador é o de assegurar que os alunos sejam motivados a adquirir mais conhecimento do conteúdo "naturalmente", ao lidar com os problemas e questões geradas pelo contexto (Stinner, 2004). Além desse aparente paradoxo “conteúdo-contexto”, Stinner chama atenção para o seguinte fato

> [...] confrontar os alunos com os produtos acabados da ciência formal, muito cedo e muito de repente, produz uma descontinuidade que pode afastar os alunos.

A maneira tradicional de sair deste dilema é adiar a apresentação de conceitos científicos mais sofisticados como conteúdo organizado para os alunos. Segundo Stinner, esta alienação produz dois pontos de vista distintos e incomensuráveis da ciência nas mentes dos alunos, ou seja, a ciência do senso comum e a ciência escolar. Para Stinner,

> Nosso mandato como professores de ciências, então, é tentar facilitar a passagem dos estudantes do inicial "senso comum" para a compreensão do conhecimento científico organizado.

Com a abordagem contextual o papel do professor é orientar, discutir, criar um ambiente, perguntar, ouvir e esclarecer. O papel de um estudante é o de explorar, investigar, validar, tratar, representar e realizar. O objetivo final é que os alunos digam que, quando eles finalmente encontram o conteúdo descrito formalmente: "Claro, como poderia ser de outra forma?" Stinner (2004).

1.1. Breve História da Abordagem LCP

A abordagem LCP foi desenvolvida por Arthur Stinner (2004) em seu trabalho The Large Context Problem (LCP) Approach: An example of contextual teaching in physic, trata-se de uma abordagem contextual para o ensino de ciência. Esta abordagem baseia – se na constatação de que a aprendizagem pode ser bem motivada por um contexto com uma “ideia central unificadora capaz de capturar a imaginação dos alunos”, Stinner (2004).

Stinner baseou sua primeira tentativa de projetar um LCP em um relatório detalhado pela revista Time magazine, sobre a construção do que era então o maior forno solar do mundo, ainda hoje operante no Pyrenees, Southern France. O artigo descrevia o forno solar em detalhes, os quais permitiram a definição de uma investigação que envolveu uma grande quantidade de conhecimento dos estudantes de física. Guiados pelo contexto, os alunos geraram questões e problemas que eram inerentemente mais interessantes do que problemas semelhantes apresentados nos livros didáticos (Stinner, 2004). Convencido da superioridade da abordagem contextual, Arthur Stinner passou a desenvolver outras atividades,

> Encorajado pelo sucesso deste LCP, desenvolvi outros: “Física na Lua”, e “Lançar um Foguete para a Estratosfera” (1973). Estes foram seguidos pela “Física e o Homem Biônico” (1980), a “Física de Jornada nas Estrelas” (1981), “Física e o Dambusters” (1989) e a “História de força” (1994).

Além destes, foram publicados os seguintes LCP's: "o pêndulo onipresente" (2003), cálculo da idade da terra e do sol (2002), "o impacto súbito: a física de colisões de asteroides" (2003) e "Viagem a Marte, a física de viajar para o planeta vermelho" (2005).

1.2. Experiências de Pensamento

Em Stinner and Williams (1998) e Stinner (2004), experiências de pensamento (thought experiments - TE) são consideradas um aspecto importante do ensino da ciência e compõem a abordagem LCP. TE é entendido como um dispositivo mental que ajuda a explicar conceitos e princípios, e desvendar paradoxos. Argumenta-se que o pensamento científico em Física envolve o esclarecimento progressivo da relação entre a Matemática e Física, bem como o esclarecimento de indução e dedução científica, e a elaboração de teorias e suas consequências envolvem o exercício da imaginação, ou melhor, exercício da imaginação científica. Além disso, que devemos ensinar em termos de contextos de investigação. Esses contextos se relacionam com questões, métodos, problemas, experiências, história, e a própria LCP.

1.3. Guia para desenvolver um LCP

Em Stinner (2004) são elencadas diretrizes para escrever um LCP, das quais destacamos:

- Traçar um quadro com uma questão central unificadora capaz de promover o engajamento dos alunos no processo de ensino aprendizagem;

- Proporcionar ao aluno experiências que podem ser relacionadas com o seu cotidiano, bem como possíveis de ser explicadas a um nível que "faça sentido" para o aluno;
- Inventar uma "linha da história" (pode ser histórico), que irá dramatizar e destacar a ideia principal, identificar um importante evento associado com uma ou mais pessoas e encontrar opostos binários, ou personagens conflitantes ou eventos (Egan, 1986) que podem ser adequados para incluir na história;
- Certifique-se de que as grandes ideias, conceitos e problemas sobre o tema são gerados pelo contexto naturalmente, que irão incluir aquelas que o aluno aprenderia em um livro de abordagem convencional;
- Mapear e projetar o contexto, de preferência em cooperação com os alunos, onde você como o professor assume o papel do pesquisador líder e que o aluno torna-se parte de um programa de investigação em curso.

1.4. Adaptação Para o Ensino de Matemática

A metodologia da atividade para o ensino médio, proposta neste trabalho, é uma adaptação para o ensino de matemática da abordagem LCP. Essa abordagem foi originalmente desenvolvida para o ensino de Física. Outra atividade direcionada ao ensino de matemática foi proposta no trabalho “Estudo da Lei de Resfriamento de Newton na Abordagem LCP” (Diniz H A e Pimentel P A, 2012).

A ideia principal da atividade é a utilização de um experimento de escoamento com o objetivo de inserir os estudantes em um contexto de investigação, em busca do modelo matemático do problema proposto. Com o auxílio de dados obtidos pelos próprios alunos. O desenvolvimento de experimentos torna-se um motivador para o aprendizado. Esse contexto de investigação envolve conhecimentos de funções matemáticas elementares, física fundamental, além da experiência de coleta, tabulação e análise de dados, bem como a oportunidade de situar, tanto historicamente alguns resultados, quanto em teorias que estão além do alcance para esse nível de ensino.

A realização de experimentos, além de funcionar como atrativo para despertar o interesse do estudante, incentiva a disseminação da ciência na educação básica. No ensino médio, procedimentos e atitudes científicas para resolver problemas e investigar aspectos do nosso cotidiano constituem uma estratégia de ensino e de aprendizagem para o desenvolvimento gradativo de habilidades inerentes ao processo de produção de conhecimentos científicos. Essa experiência de coleta e análise de dados em um fenômeno físico visa cumprir com esse objetivo. Além disso, permitem a integração entre componentes curriculares na construção do conhecimento, uma vez que viabiliza a utilização de conceitos de diferentes disciplinas na resolução de um problema.

CAPÍTULO 2

ESCOAMENTO DE LÍQUIDO POR ORIFÍCIO

Este capítulo destina-se, principalmente, ao professor que deseja aplicar a atividade para o ensino médio proposta neste trabalho, e deseja conhecer algo além do que irá ensinar. Na seção 2.1, são apresentados alguns conceitos físicos. Na seção 2.2, os conceitos da seção anterior serão utilizados para demonstrar o Teorema de Torricelli. Este teorema é um resultado de Mecânica dos Fluídos, a respeito da velocidade de escoamento de líquido por orifício. A demonstração apresentada pode ser feita no ensino médio. Será apresentada, ainda na seção 2.2, outra demonstração via Princípio de Bernoulli. A seção 2.3 contém alguns conceitos de Mecânica dos Fluídos (vena contracta, coeficiente de contração e coeficiente de velocidade). Na seção 2.4, os conceitos da seção anterior serão utilizados para equacionar e resolver o problema da evolução da altura de líquido, em função do tempo de escoamento.

2.1. Recordando Alguns Conceitos Físicos

Segunda Lei de Newton: A força resultante que age sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela sua aceleração.

$$Força = massa \times aceleração$$

Densidade: Dá uma medida de como a matéria está compactada, ou de quanta massa ocupa um certo espaço. É a quantidade de massa por unidade de volume.

$$densidade = \frac{massa}{Volume}$$

Pressão: É definida como a força por unidade de área e é obtida dividindo-se a força pela área sobre a qual ela atua.

$$pressão = \frac{Força}{Área}$$

Princípio de Pascal: A pressão aplicada a um fluido em repouso, confinado a um recipiente, é transmitida integralmente através do fluido.

Teorema de Stevin: A diferença entre as pressões de dois pontos de um fluido em equilíbrio é igual ao produto entre a densidade do fluido, a aceleração da gravidade e a diferença entre as profundidades dos pontos.

Tensão superficial: É a tendência da superfície de um líquido de contrair sua área e, portanto, de comportar-se como se fosse uma membrana elástica.

Movimento uniformemente variado (MUV): É aquele em que o corpo sofre aceleração constante, mudando de velocidade num dado incremento conhecido. A aceleração deve ter a mesma direção da velocidade. A queda livre dos corpos, sendo desprezada a resistência do ar, é um exemplo de movimento uniformemente variado. No caso retilíneo, tem-se um ponto que se desloca sobre um eixo. No instante t sua posição é dada pela abcissa $f(t)$.

A função quadrática é o modelo matemático que descreve o movimento uniformemente variado. Fazendo $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$, a constante $c = f(0)$ chama-se posição inicial do ponto. Pode-se definir a velocidade média v_m, no intervalo de extremos t e $t+h$, por $v_m = \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = at+b+\frac{ah}{2}$. Se tomarmos h cada vez menor, este valor se aproxima de $at+b$. Portanto, a velocidade do ponto no instante t é $v(t)=at+b$. Como $v(0)=b$, b se chama a velocidade inicial. Além disso, $a=\frac{v(t+h)-v(t)}{h}$. Isto é, a é a aceleração.

Equação de Torricelli: Substituindo a equação $v(t)=at+b$ em $f(t)=\frac{1}{2}at^2+bt+c$, para eliminar a variável t, é possível encontrar a velocidade em função do deslocamento, sendo conhecidas a aceleração e a velocidade inicial. A fórmula obtida é chamada de Equação de Torricelli: $v^2=b^2+2a(f(t)-c)$. O termo $f(t)-c$ pode ser chamado de variação de espaço no intervalo de extremos 0 e t.

Velocidade de queda livre: Se não houvesse a resistência do ar, todos os corpos, de qualquer peso ou forma, abandonados da mesma altura, nas proximidades da superfície da Terra, levariam o mesmo tempo para atingir o solo. O movimento de queda livre é retilíneo uniformemente variado. A aceleração é a da gravidade, vertical no sentido do movimento. A velocidade de um corpo em queda livre após ser abandonado com velocidade zero e após ter sofrido variação de espaço S é, pela Equação de Torricelli, $v=\sqrt{2aS}$.

2.2. Teorema de Torricelli e Princípio de Bernoulli

2.2.1. Teorema de Torricelli: A velocidade v de um líquido fluindo de um furo num tanque cheio de líquido até uma altura h, como mostrado na figura 1, é igual à velocidade de uma partícula em queda livre, sem atrito, do nível da superfície do líquido ao nível do furo.

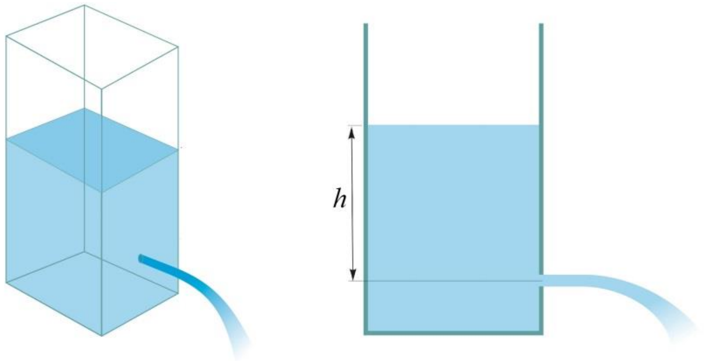


Figura 1 – Altura da superfície

Demonstração: Considere uma pequena pílula cilíndrica de água, com altura dx, expelida com aceleração α através do furo (supomos o orifício circular apenas para fixar as ideias), durante um curtíssimo intervalo de tempo dt.

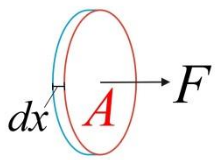


Figura 2 – Pílula de água

Pela Equação de Torricelli

$$v^2 = 2 \cdot \alpha \cdot dx$$

Sendo F e m, respectivamente, a força resultante sobre o cilindro de água e a massa deste. Pela Segunda Lei de Newton, obtém-se:

$$v^2 = 2 \cdot \frac{F}{m} \cdot dx \qquad (2.1)$$

Sendo A a área do orifício e V o volume do cilindro, sabe-se que

$$F = p \cdot A \text{ e } m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot dx \quad (2.2)$$

p : Pressão e ρ : Densidade do líquido;

Sendo h o nível da superfície do líquido e g a aceleração da gravidade, obtém-se

$$p = \rho \cdot g \cdot h \quad (2.3)$$

Substituindo (2.2) e (2.3) em (2.1), obtém-se

$$v^2 = 2 \cdot \frac{\rho \cdot g \cdot h \cdot A}{\rho \cdot A \cdot dx} \cdot dx$$

Simplificando, tem - se:

$$v = \sqrt{2gh} \quad (2.4)$$

Essa fórmula, descoberta por Evangelista Torricelli em 1644, pode ser deduzida pelo Princípio de Bernoulli. O princípio de Bernoulli é uma consequência da conservação de energia. Embora, surpreendentemente, ele tenha sido desenvolvido, mesmo que vagamente, em 1738, em palavras em um livro-texto, por Daniel Bernoulli[2], muito antes da formulação do conceito de conservação da energia. Uma dedução completa foi dada em 1755, por Leonard Euler. A seguir, será apresentado o Princípio de Bernoulli. Antes disso, será apresentado o conceito de linha de corrente.

Linhas de corrente são os caminhos suaves, ou trajetórias, de pequenas porções de fluido. Uma pequena porção de fluido segue ao longo da mesma linha de corrente que uma pequena porção de fluido em frente dela. Elas se aproximam nas regiões em que o fluxo se estreita, onde a velocidade do fluido torna-se maior.

[2] Daniel Bernoulli (1700-1782) foi um matemático e físico suíço que fez importantes descobertas não só na dinâmica dos fluídos, como também na Astronomia, na Fisiologia e na Geologia. Seu pai e seu tio foram também famosos por suas contribuições à matemática.

2.2.2. Princípio de Bernoulli

Considerando um fluxo contínuo de líquido através de uma tubulação, o volume que atravessa qualquer seção transversal da tubulação, durante certo intervalo de tempo, é o mesmo que atravessa qualquer outra seção da tubulação, mesmo se ela se estreitar ou se alargar ao longo do caminho. Para fluxos contínuos, o fluido se tornará mais rápido quando passa de uma região mais larga da tubulação para uma mais estreita. Onde a velocidade do fluido cresce, a pressão interna do mesmo decresce. Onde as linhas de corrente tornam-se mais próximas entre si, a velocidade do movimento do fluido aumenta e a pressão interna diminui.

O panorama energético completo para um fluido em movimento inclui a energia associada com variações de temperatura e de densidade, bem como a energia dissipada pelo atrito. Mas se a temperatura e a densidade permanecem aproximadamente constantes e o atrito for pequeno, apenas três termos de energia precisam ser levados em conta: a energia cinética devido ao movimento; a energia potencial gravitacional devido a possíveis elevações; e o trabalho feito pelas forças de pressão. No fluxo estacionário de um fluido sem atrito, a soma desses três termos em qualquer ponto de uma linha de corrente tem o mesmo valor que em qualquer outro ponto da mesma linha de corrente. Isto é,

$$\frac{mv^2}{2} + mgy + pV = \text{constante}$$

Nesta equação, m é a massa de algum volume V de fluido, v é a sua velocidade, g é a aceleração da gravidade, y é a sua elevação e p é a sua pressão interna. Para obter a equação em termos da densidade ρ do fluido, basta dividir cada termo por V .

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gy + p = \text{constante}$$

Se a elevação do fluido em movimento não é alterada, então a energia potencial é constante e apenas os termos da energia cinética e do trabalho realizado pelas forças de pressão permanecem. Quando um desses termos diminui de valor, o outro tem que crescer. De modo que maior velocidade e energia cinética significa menor pressão, e pressão maior implica velocidade e energia cinética menores.

2.2.3. Teorema de Torricelli via Princípio de Bernoulli

A seguir será dada outra demonstração para o Teorema de Torricelli.

A elevação e a pressão são conhecidas no ponto de passagem do líquido pelo furo, tomando um ponto na superfície do líquido, cuja pressão e elevação são conhecidas, poderemos aplicar o Princípio de Bernoulli. Ambos os pontos estão expostos à pressão atmosférica p_a. As duas incógnitas são a velocidade do ponto escolhido e a velocidade de saída do líquido. Sendo a a seção transversal do tanque e A a área do furo. Esse escoamento é aproximadamente incompressível[3]. O volume que atravessa a seção transversal do tanque, durante certo intervalo de tempo, é o mesmo que atravessa a seção do furo.

$$av_s = Av \qquad (2.5)$$

Pelo Princípio de Bernoulli, obtém-se

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g \cdot 0 + p_a = \frac{\rho {v_S}^2}{2} + \rho g h + p_a$$

daí

$$v^2 - {v_S}^2 = 2gh. \qquad (2.6)$$

Isolando v_s em (2.5), e substituindo em (2.6), obtém-se:

[3] Se a densidade de um fluido for constante, seu escoamento é chamado de escoamento incompressível.

$$v^2 - \left(\frac{Av}{a}\right)^2 = 2gh$$

$$v^2 = \frac{2gh}{1 - \frac{A^2}{a^2}}$$

Como a área do orifício é muito menor do que a área do tanque, de forma que a razão $\frac{A^2}{a^2}$ é desprezível e uma aproximação precisa para a velocidade na saída é

$$v \approx \sqrt{2gh}$$

2.3. Vena Contracta e Coeficientes de Correção

O estudo sobre o escoamento de um líquido através de um furo num tanque pode considerar desprezíveis o atrito e a viscosidade do líquido. Para equacionar o problema de determinar a evolução da altura em função do tempo, será considerada uma, digamos, vazão instantânea $(v \cdot dt)A$, sendo A a área do furo e a velocidade v dada pelo Teorema de Torricelli.

Além do atrito e da viscosidade, expansões ou contrações bruscas podem causar perdas de vazão adicionais. Em geral, essas perdas são medidas experimentalmente. Segundo Torricelli, no escoamento de líquido através de um furo, ocorre uma contração repentina no jato de água, localizada próxima ao furo, e a área de fluxo efetivo de líquido é menor que o furo na parede do tanque. Essa contração varia, em especial, com a forma geométrica do furo e com a espessura da parede. Existem estudos experimentais a esse respeito.

Outro fato a ser considerado é que o escoamento na saída tende a ser não uniforme, não unidimensional, tal que a velocidade média apenas se aproxima do resultado de Torricelli (White, 1979). Na engenharia a fórmula é ajustada com a inclusão de um coeficiente de velocidade adimensional.

2.3.1. Vena contracta

Linhas de corrente convergem de todos os lados em direção ao furo, as partículas não podem mudar abruptamente a sua direção do fluxo na saída do furo, de modo que o jato continua a convergir por um tempo depois de sair.

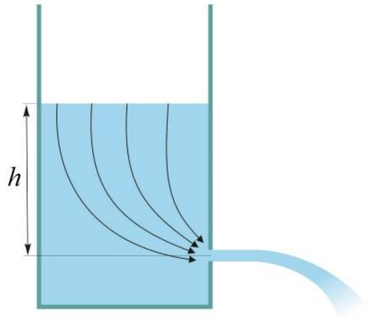


Figura 3 – Linhas de Corrente.

Devido à convergência das linhas de corrente próximas do orifício, o corte transversal do jato diminui ligeiramente.

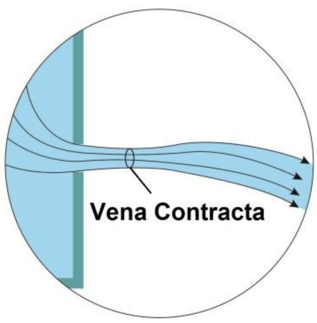


Figura 4 – Vena Contracta.

A contração máxima do jato tem lugar a uma secção ligeiramente próxima ao orifício, na qual o jato é mais ou menos horizontal. Esta região, chamada de vena contracta, é o local de fluxo do fluido em que o diâmetro da secção é o mínimo, e a velocidade do fluido está no seu máximo. Além da vena contracta, o atrito com o fluido fora do jato (ar) retarda e força o aumento da seção transversal. Esta divergência é normalmente bastante pequena, e o jato é aproximadamente cilíndrico com uma velocidade constante. O jato é mantido unido por tensão superficial, é claro, que tem um efeito mais forte quanto menor for o diâmetro do jato.

2.3.2. Coeficiente de Velocidade

A média de velocidade $\bar{v}$ é definida de modo que dá a taxa correta de descarga, quando é assumida constante ao longo da secção de fluxo efetivo. Em seguida, pode-se escrever $\bar{v} = C_v \cdot v$, onde C_v é chamado de coeficiente de velocidade.

Com o ajuste na equação (2.4), fazendo $v = \frac{dx}{dt}$, obtém-se a seguinte equação

$$\frac{dx}{dt} = C_v \sqrt{2gh} \tag{2.7}$$

Para a determinação experimental do coeficiente de velocidade, na seção 3.3, será encontrado o valor de $\bar{v}$. Para isso, será feita a seguinte analogia com o problema de lançamento de projétil: considere uma pílula de água cilíndrica lançada através do orifício por uma força instantânea e, a partir daí, sujeita apenas à ação da gravidade, e cuja trajetória seja a descrita pelo jato de água, sendo desprezada a resistência do ar. Estamos interessados em determinar a velocidade da pílula ao passar pelo orifício.

Seja X o alcance do jato em um determinado nível a uma distância Y do nível que contém o centro do furo. No plano em que se dá o movimento, vamos tomar um sistema de coordenadas cuja origem seja o ponto O na figura, e que $(X, 0)$ sejam as coordenadas do ponto P.

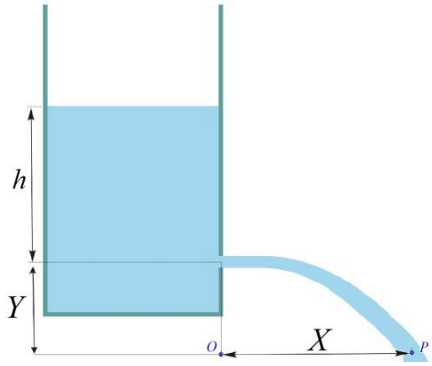


Figura 5 – Alcance do Jato.

A velocidade inicial da pílula é o vetor $v_i = (\bar{v}, 0)$, cuja primeira coordenada fornece a componente horizontal do movimento. Como a única força atuando sobre a pílula é a gravidade, nenhuma força está atuando nesse movimento horizontal. Logo, se trata de um movimento uniforme. Já a componente vertical é um movimento uniformemente variado (aceleração $-g$, vertical para baixo) sobre o eixo y. Assim, se $L = (x, y)$ é a posição da pílula no instante t, temos

$$x = \bar{v} \cdot t \ \text{, e}$$

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + Y \ ,$$

Escreve-se, agora, $t = \frac{x}{\bar{v}}$ (perceba que $\bar{v} \neq 0$). Em seguida, substitui-se na igualdade $y = -\frac{g}{2}t^2 + Y$, obtém-se:

$$y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{\bar{v}}\right)^2 + Y \ .$$

Finalmente, utilizando a posição $(X, 0)$. Encontra-se o valor de $\bar{v}$

$$\bar{v} = X\sqrt{\frac{g}{2Y}} \qquad (2.8)$$

2.3.3. Coeficiente de Descarga

Pela regra da cadeia e substituindo a equação (2.7). Obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot C_v \sqrt{2gh} \quad (2.9)$$

Coeficiente de contração C_c é, por definição, a razão entre a área de fluxo efetivo de líquido e a área do orifício. Fazendo $\frac{dV}{dx} = C_c A$, na equação (2.9), tem-se:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = C_c A \cdot C_v \sqrt{2gh}$$

Por simplicidade faremos $C = C_c C_v$, e diremos que C é o coeficiente de descarga do sistema. Assim,

$$\frac{dV}{dt} = C \cdot A\sqrt{2gh} \quad (2.10)$$

Chama-se taxa de descarga, na altura h, a razão entre o volume de água escoado e o tempo. Considerando um intervalo de tempo de escoamento no qual a altura do nível de água permaneça inalterada. Isso é possível com uma concomitante reposição do volume de água escoado. Esse experimento será descrito no capítulo 3.

2.4. Evolução da Altura em Função do Tempo de Escoamento

Estamos interessados em obter o modelo matemático que descreve a evolução do nível da superfície de um líquido num tanque. O qual possui certa forma geométrica, e mesma área seccional a em todos os níveis. Inicialmente cheio até uma altura h_0. Em função do tempo t de escoamento, a contar da abertura de um orifício na parede lateral próximo ao fundo.

Fazendo a substituição $dV = -a \cdot dh$, na equação (2.10), obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{C \cdot A}{a}\sqrt{2g \cdot h(t)} \tag{2.11}$$

A equação (2.11) é uma equação diferencial ordinária de variáveis separáveis. Podemos escrevê-la na forma

$$\frac{1}{\sqrt{h(t)}}\frac{dh}{dt} = -\frac{C \cdot A}{a}\sqrt{2g}$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}(2\sqrt{h(t)}) = -\frac{C \cdot A}{a}\sqrt{2g} \tag{2.12}$$

Integrando (2.12) de 0 a t, obtém-se:

$$2\left(\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0}\right) = -\frac{C \cdot A}{a}\sqrt{2g} \cdot t$$

Com uma simples manipulação algébrica, para isolar $h(t)$, chega-se ao modelo matemático do problema:

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{C \cdot A\sqrt{2g}}{2a}t\right)^2. \tag{2.13}$$

2.4.1. Área Seccional Não Necessariamente Constante

Neste caso, representa-se por $a\left(h(t)\right)$ a área da secção transversal à altura h. A equação (2.10) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = -C \cdot A\sqrt{2g \cdot h(t)}$$

Substituindo $\frac{dV}{dh} = a\left(h\left(t\right)\right)$ nesta última equação. Tem-se:

$$\frac{a\left(h(t)\right)}{\sqrt{h(t)}}\cdot\frac{dh}{dt}=-C\cdot A\sqrt{2g}$$

Esta última equação diferencial é de variáveis separáveis. Na forma que está inscrita, basta integrar de 0 a t

$$\int_0^t \frac{a\left(h(u)\right)}{\sqrt{h(u)}}\cdot h'du=-CA\sqrt{2g}\cdot t$$

Fazendo a substituição $v=h(u)$ e $dv=h'(u)du$, obtém-se:

$$\int_{h_0}^{h(t)} \frac{a(v)}{\sqrt{v}}dv=-CA\sqrt{2g}\cdot t \tag{2.14}$$

A equação (2.13) é um caso particular da equação (2.14). Para encontrar a altura em função do tempo de escoamento, num recipiente de área seccional não constante, deve-se obter a função $a(h)$ (área da superfície em função da altura em relação ao furo). Em seguida, substitui-la na equação (2.14) e obter a primitiva indicada. A última etapa consiste em inverter essa primitiva. Nesta etapa, pode-se esbarrar na seguinte dificuldade: nem sempre a inversão pode ser feita em termos de funções elementares.

Exemplo 1: Cone Circular Reto (vértice na parte de baixo)

Considere o recipiente para escoamento em forma de um cone circular reto. Sendo r_0 o raio do círculo formado pela seção transversal no nível de altura h_0, em relação ao furo.

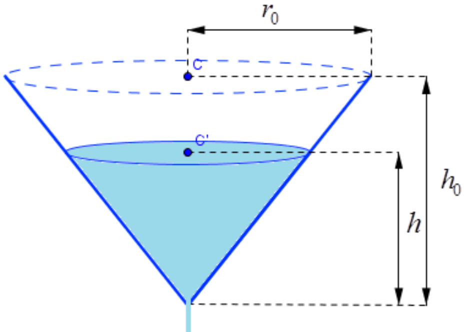


Figura 6 – Recipiente Cônico

Cada secção transversal é um círculo. Logo, $a(h)=\pi(r(h))^2$. Utilizando semelhança de triângulo. Tem-se, a área da secção, em função da altura, dada por:

$$a(h)=\frac{\pi r_0^{\ 2}}{h_0^{\ 2}}h^2 \tag{2.15}$$

Substituindo (2.15) em (2.14), obtém-se:

$$\int_{h_0}^{h(t)}\frac{\pi r_0^{\ 2}}{h_0^{\ 2}}\frac{v^2}{\sqrt{v}}\,dv=-CA\sqrt{2g}\cdot t$$

Obtendo a primitiva, tem-se:

$$\frac{\pi r_0^{\ 2}}{h_0^{\ 2}}\frac{2}{5}v^{\frac{5}{2}}\Bigg|_{h_0}^{h(t)}=-CA\sqrt{2g}\cdot t$$

$$\frac{\pi r_0^{\ 2}}{h_0^{\ 2}}\frac{2}{5}\left(h(t)^{\frac{5}{2}}-h_0^{\ \frac{5}{2}}\right)=-CA\sqrt{2g}\cdot t$$

Isolando $h(t)$, chega-se à resposta do problema

$$h(t)=\left(h_0^{\ \frac{5}{2}}-\frac{5h_0^{\ 2}CA\sqrt{2g}}{2\pi r_0^{\ 2}}t\right)^{\frac{2}{5}}$$

Exemplo 2: Cilindro Disposto Horizontalmente

Um cilindro reto, disposto verticalmente, recairia no caso de área seccional constante. Considere um cilindro circular reto de raio R e altura H, disposto na horizontal.

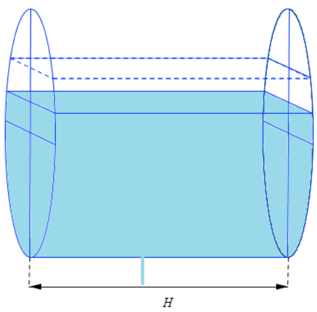


Figura 7 – Recipiente cilíndrico na horizontal

Cada secção transversal é um retângulo de comprimento H. A largura depende do nível da secção. Considere o sistema de eixos ortogonais mostrado na figura 8, sendo x a metade da largura da seção transversal no nível h (altura da superfície de água, em relação ao furo).

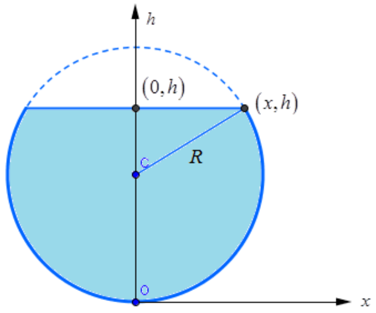


Figura 8 – Visão lateral do recipiente cilíndrico.

Pelo Teorema de Pitágoras, obtém-se $x^2 + |h-R|^2 = R^2$. Daí $x(h) = \sqrt{2Rh-h^2}$

Portanto,

$$a(h) = 2H\sqrt{2Rh-h^2}$$

Substituindo esta equação em (2.14), obtém-se:

$$\int_{h_0}^{h(t)} 2H\sqrt{2R-v}\,dv = -CA\sqrt{2g}\cdot t$$

Obtendo a primitiva, tem-se:

$$-\frac{4H}{3}(2R-v)^{\frac{3}{2}}\Big|_{h_0}^{h(t)} = -CA\sqrt{2g}\cdot t$$

$$-\frac{4H}{3}\left(\left(2R-h(t)\right)^{\frac{3}{2}} - \left(2R-h_0\right)^{\frac{3}{2}}\right) = -CA\sqrt{2g}\cdot t$$

Isolando $h(t)$, obtém-se:

$$h(t) = 2R - \left(\left(2R-h_0\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3CA\sqrt{2g}}{4H}t\right)^{\frac{2}{3}}$$

Exemplo 3: Semiesfera

Considere um recipiente com o formato de uma semiesfera de raio R. Com a abertura voltada para cima.

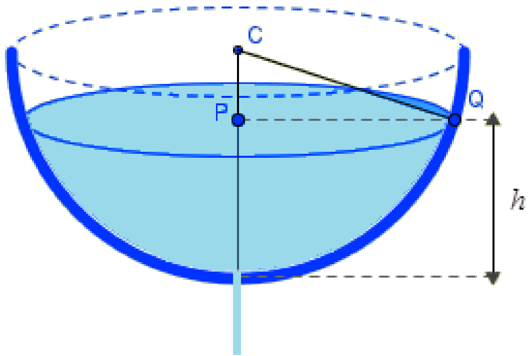


Figura 9 – Recipiente Esférico

A área de cada seção horizontal é dada por $a(h) = \pi(r(h))^2$, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se a seguinte relação: $r^2 + (R-h)^2 = R^2$. Daí, $r^2 = 2Rh - h^2$. Portanto,

$$a(h) = \pi(2Rh - h^2)$$

Substituindo esta equação em (2.14), obtém-se:

$$\int_{h_0}^{h(t)} \frac{\pi(2Rv - v^2)}{\sqrt{v}}\, dv = -CA\sqrt{2g} \cdot t$$

$$\int_{h_0}^{h(t)} \left(2R\sqrt{v} - v^{\frac{3}{2}}\right) dv = -\frac{CA\sqrt{2g} \cdot}{\pi} t$$

Obtendo a primitiva, chega-se:

$$\frac{4R}{3} v^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{h_0}^{h(t)} - \frac{2}{5} v^{\frac{5}{2}}\Bigg|_{h_0}^{h(t)} = -CA\sqrt{2g} \cdot t$$

$$\frac{4R}{3}\left(h(t)^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{2}{3}\left(h(t)^{\frac{5}{2}} - h_0^{\frac{5}{2}}\right) = -CA\sqrt{2g} \cdot t$$

$$\frac{4R}{3}h(t)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}h(t)^{\frac{5}{2}}-\frac{4R}{3}h_0^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}h_0^{\frac{5}{2}}=-CA\sqrt{2g}\cdot t \qquad (2.16)$$

Fazendo $x=\sqrt{h}$, $A=-\frac{2}{3}$, $B=\frac{4R}{3}$ e $C=-\frac{4R}{3}h_0^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}h_0^{\frac{5}{2}}+CA\sqrt{2g}\cdot t$, pode-se reescrever a expressão (2.16) na seguinte forma:

$$Ax^5+Bx^3+C=0 \qquad (2.17)$$

A equação (2.17) é uma equação do quinto grau. Nem sempre é possível obter uma fórmula para x em função dos coeficientes da equação, de acordo com a Teoria de Galois. Uma possível solução é usar um método numérico para resolver a equação. Na expressão (2.16) t está em função de h. Isto é, pode-se obter o gráfico para $h(t)$.

CAPÍTULO 3

EXPERIMENTOS

Neste capítulo, será feita uma verificação experimental do modelo (2.13). Na seção 3.1, será descrito um experimento, denominado taxa de descarga. Este experimento é usado para construção do gráfico da função $h(t)$, a partir da lei de associação (2.13). Na seção 3.2, o gráfico da seção anterior será confrontado com um gráfico discreto. Construído com dados obtidos com experimento (experimento escoamento de água). Para isso, será construída uma tabela, ainda na seção 3.2. Essa tabela relaciona as alturas do nível de água, em relação ao furo, com os respectivos intervalos de tempo, decorridos após a abertura do furo. Na seção 3.3, serão obtidos os coeficientes de velocidade e de contração.

3.1. Modelo da Evolução da Altura em Função do Tempo

Vamos, então, ao gráfico da função $h:[0,b]\to\mathbb{R}$. Sendo b, em segundos, o tempo necessário para esvaziar o tanque (o que realmente interessa para nós é o gráfico para um valor um pouco menor do que b). Dada por:

$$h(t)=\left(\sqrt{h_0}-\frac{C\cdot A\sqrt{2g}}{2a}t\right)^2$$

A : Área do orifício;
h_0 : Altura inicial;
a : Área da seção plana horizontal do tanque;
g : Aceleração gravitacional na terra;
C : Coeficiente de descarga.

A priori, para obtermos os valores acima, precisamos apenas de um recipiente sem tampa, um instrumento para medir o diâmetro do furo (paquímetro) e de uma régua graduada. A aceleração gravitacional não é a mesma em toda superfície terrestre. Contudo, o valor $9{,}8\ m/s^2$ é uma boa aproximação para as coordenadas da cidade de Santarém-PA, cidade de realização dos experimentos. Por sua vez, o coeficiente de descarga não pode ser medido assim de forma tão direta. Este valor depende do sistema tanque-líquido.

Uma maneira de encontrar o coeficiente de descarga é medir a taxa de descarga, para uma determinada altura. Em seguida, substituir os valores na equação (2.10). A taxa de descarga será medida na seção 3.1.1, enquanto que o coeficiente de descarga será obtido na seção 3.1.2.

3.1.1. Experimento Taxa de Descarga

O experimento consiste em repor a água ao tanque, concomitantemente à drenagem. Para que a altura do nível permaneça a mesma. O tanque, utilizado no experimento, tem a forma de um paralelepípedo reto. Base quadrada (19,3 x 19,3 cm^2) e 40 cm de altura. Com um furo circular de $4mm$ de diâmetro. O líquido utilizado foi água, a uma altura inicial de $360mm$.

Fotografia 1 – Reposição de água ao tanque.

Para isso, foram usados um tanque auxiliar, uma bomba submersa e uma mangueira com um dispositivo para regular a saída de água. Como ilustra a fotografia 2.

Fotografia 2 – Estrutura para o experimento.

O método para obter altura constante, consistiu em fazer ajustes na reposição e na altura da superfície de água, de maneira a conseguir o equilíbrio entre volume escoado e volume reposto. Uma vez encontrado o equilíbrio, foi feita a medida da altura em relação ao furo.

Fotografias 3 – Distância do orifício ao nível de água.

Com o auxilio de um relógio e de um recipiente com uma escala graduada rigorosa em cm^3 (mL), figura 4, foi encontrado o volume de água drenado, durante um intervalo de tempo conhecido, figura 5.

Fotografia 4 – Bureta e relógio.


Fotografias 5 – Volume escoado em um intervalo de tempo.

Os valores obtidos estão na tabela abaixo:

Tabela 1 – Dados do experimento Taxa de Descarga.

ΔV	Δt	h	$\frac{\Delta V}{\Delta t}$
710.000 mm^3	30 s	$199mm$	$23666,667\, mm^3/s$

3.1.1.1. Alcance do Jato

O coeficiente de velocidade pode ser calculado com o auxílio da fórmula (2.10), da seção 2.3.2. Para isso, será necessário medir o alcance X do jato, em um nível a uma distância Y do nível que contém o centro do furo. Por conveniência, será usado o nível zero da régua vertical. Como destacado na fotografia 19. Deve-se medir, também, a altura da superfície de água, exatamente no momento no qual é feita a medida do alcance X. O experimento taxa de descarga é uma excelente oportunidade para fazer essas medidas. Uma vez que essas distâncias não sofrem variação, durante o equilíbrio entre escoamento e reposição.

Fotografia 6 – Distâncias.

Com o auxilio de um esquadro, foram feitas as medidas de X e Y. Como mostra a fotografia 20.

Fotografias 7 – Alcance do jato.

Esses valores, estão na seguinte tabela:

Tabela 2 – Alcance do Jato.

X	Y	h
452 mm	286 mm	199 mm

3.1.2. Representação Gráfica do Modelo

Substituindo em (2.10), o valor obtido na tabela 1, tem-se:

$$\frac{23666,667}{\sqrt{199}} = C \cdot A\sqrt{2g}$$

$$C \cdot A\sqrt{2g} = 1677,686\,. \tag{3.1}$$

Para a construção do gráfico, será utilizada a seguinte constante:

$$\frac{C \cdot A\sqrt{2g}}{2a} = 0,023 \tag{3.2}$$

Da igualdade (3.1), pode-se obter, também, o coeficiente de descarga do sistema:

$$C = \frac{1677,686}{\pi 2^2 \sqrt{2 \cdot 9800}} = 0,95\,.$$

Substituindo (3.2) e $\sqrt{h_0} = 3\sqrt{10}$ no modelo (2.13). Obtém-se:

$$h(t) = \left(6\sqrt{10} - 0,023t\right)^2 \tag{3.3}$$

Em seguida, pode-se construir o gráfico-modelo:

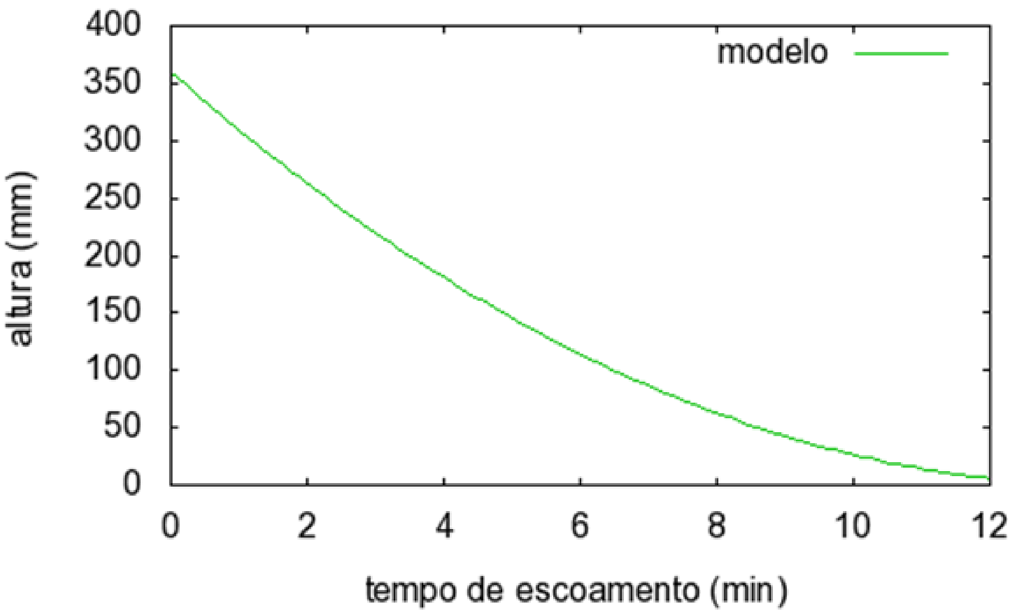


Gráfico 1 – Previsão teórica.

3.2. Comparação Entre Modelo Teórico e Experimento

Nesta seção, será descrito um experimento, denominado por escoamento de água. Neste experimento, será medida a altura do nível de água, em relação ao furo. Para diferentes valores do tempo de escoamento. Além disso, será apresentado um gráfico comparativo, entre o gráfico 1 e um gráfico discreto. Este último será construído com valores do experimento escoamento de água.

3.2.1. Experimento Escoamento de Água

O experimento consiste em tampar o orifício e encher o tanque até a altura 360 mm, em relação ao furo. Em seguida, marcar o nível observado, a cada intervalo de tempo de 60 segundos. A contar do momento no qual é destampado o orifício.

As imagens, a seguir, são de uma repetição do experimento. Isto é, as marcações já estão feitas. O orifício foi destampado na posição 12 do ponteiro vermelho.

Fotografias 8 – Momento antes e depois da liberação do orifício.

Fotografia 9 – Um minuto de escoamento.

Fotografia 10 – Dois minutos de escoamento

.

Fotografia 11 – Três minutos de escoamento.

Fotografia 12 – Quatro minutos de escoamento.

Fotografia 13 – Cinco minutos de escoamento.

Fotografia 14 – Seis minutos de escoamento.

Fotografia 15 – Sete minutos de escoamento

Fotografia 16 – Oito minutos de escoamento.

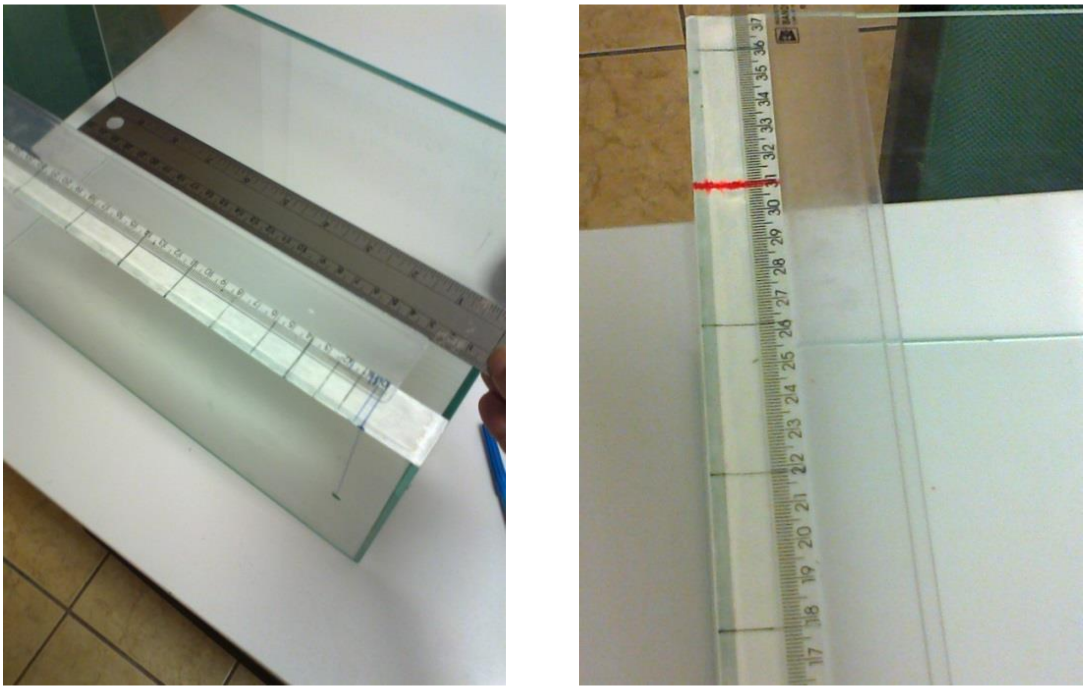
Fotografia 17 – Nove minutos de escoamento.

Fotografia 18 – Dez minutos de escoamento.

Fotografia 19 – Onze minutos de escoamento

Para uma altura menor que cinco milímetros, o jato de água apresentou um comportamento singular. Caracterizado pela presença de ar e pelo contato com a parede externa do recipiente. Por isso, o modelo não será capaz de ser muito preciso para o que ocorre nessas alturas, muito próximas ao furo. Uma que vez que essa situação não foi considerada, durante a modelagem.

Em seguida. Foram feitas as medições das alturas. Veja fotografias 20.



Fotografias 20 – Tanque na horizontal para medições

Com esses valores, foi construída a tabela a seguir:

Tabela 3 – Dados do experimento escoamento de água.

Tempo (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10,5	11	11,5	12
Altura (mm)	360	309	262	218	178	142	110	82	58	39	24	18	12	7,5	4

3.2.2. Representações Gráficas do Experimento e Modelo

Com os dados da tabela 3, pode-se construir o seguinte gráfico:

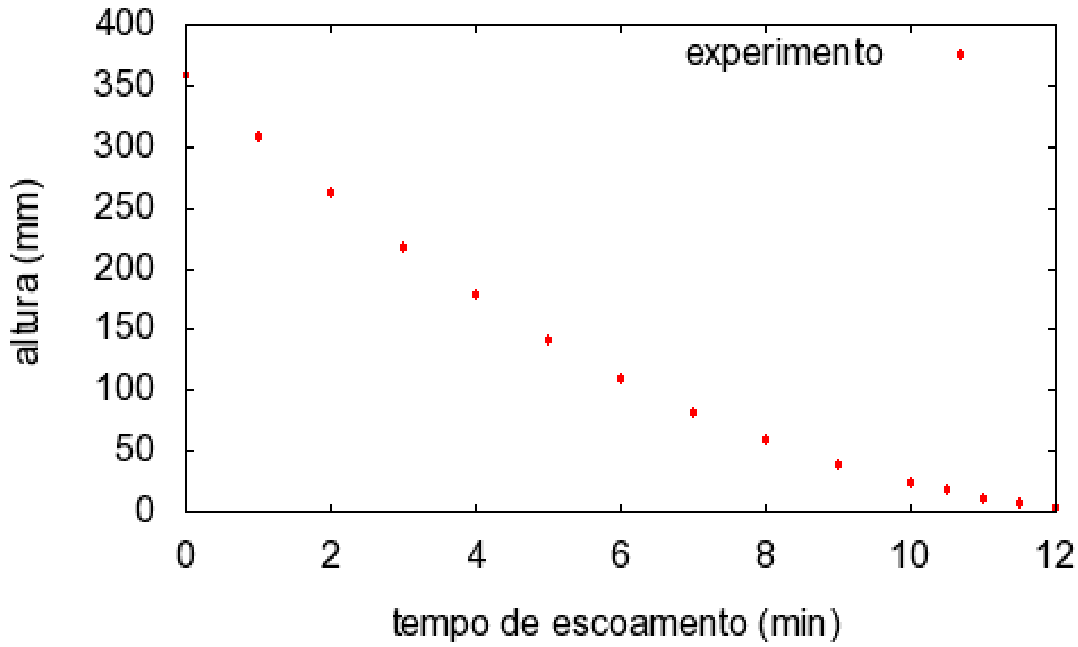


Gráfico 2 – Representação de dados do experimento escoamento de água.

O próximo gráfico compara os resultados obtidos experimentalmente com os dados previstos teoricamente.

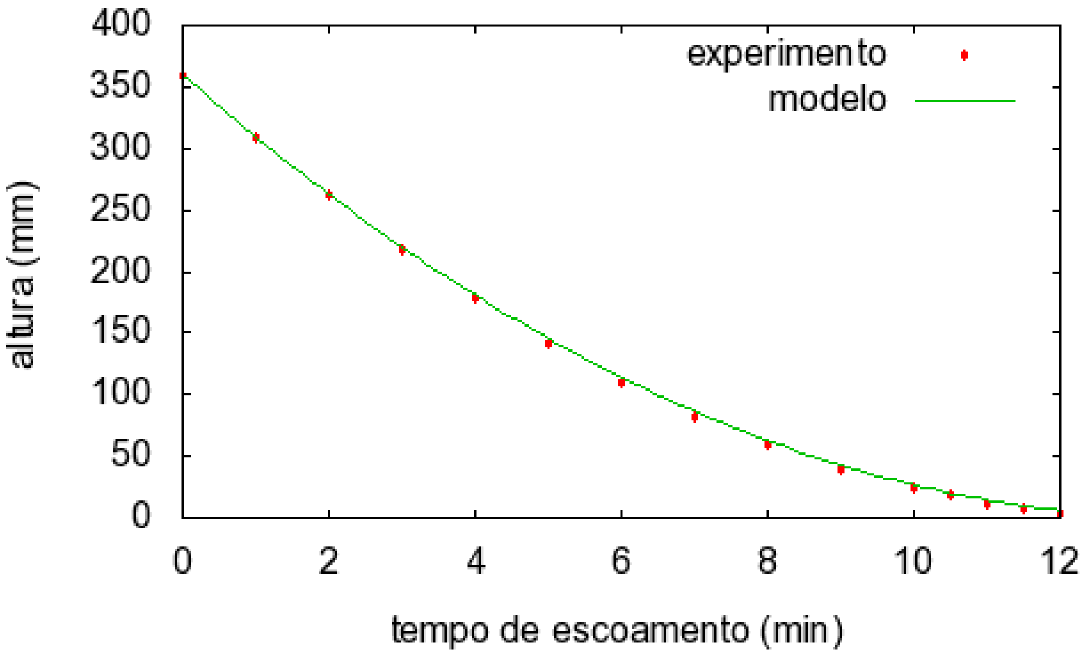


Gráfico 3 – Confronto do modelo com os dados experimentais.

3.3. Coeficiente de Velocidade e Coeficiente de Contração

Com dados obtidos com o experimento escoamento de água, veja a tabela 2, pode-se encontrar o coeficiente de velocidade do sistema. Utilizando a equação (2.6).

Substituindo os valores da tabela 2 em $\bar{v} = X\sqrt{\frac{g}{2Y}}$. Obtém-se:

$$\bar{v} = 452\sqrt{\frac{9800}{2 \cdot 286}} = 1870,91$$

Pela equação (2.5) e $\bar{v} = C_v \cdot v$

$$\bar{v} = C_v \cdot \sqrt{2 \cdot 9800 \cdot 199} = C_v \cdot 1974,94$$

Daí, obtém-se o coeficiente de velocidade do sistema:

$$C_v = \frac{1870,91}{1974,94} = 0,95$$

Pode-se, agora, calcular o coeficiente de contração.

$$C = C_c C_v$$

$$0,95 = C_c \cdot 0,95$$

$$C_c = 1$$

A situação ideal para evitar contrações é a de um recipiente com um tubo curto (bocal) soldado ao orifício. Em contrapartida, para obtermos uma contração significativa, sem uso de bocal, basta que a espessura da parede do recipiente seja pequena em relação ao diâmetro do furo, mais precisamente menor que a metade do diâmetro do orifício (Daugherty, 1985). O recipiente do experimento tem $4mm$ de espessura, isto é, igual ao diâmetro do orifício, isso explica o valor alto para o coeficiente de contração. O fato de obtermos coeficiente de contração igual a 1 não significa necessariamente que não houve contração, pois temos os problemas de precisão dos instrumentos e erros de aproximação. Contudo, podemos afirmar que a contração foi desprezível para o fenômeno.

CAPÍTULO 4

PROGRESSÕES E CARACTERIZAÇÃO DE FUNÇÕES ELEMENTARES

Uma atividade para o ensino médio que propõe a investigação em busca de uma função-modelo para um fenômeno, a partir de dados experimentais, é uma excelente oportunidade para o professor apresentar a caracterização de algumas funções elementares, este estudo é incentivado por Lima (2006)

> A fim de saber que espécie de função se deve empregar para resolver um determinado problema, é necessário conhecer as propriedades características de cada função, pois as situações da vida real, quer no cotidiano, quer na Tecnologia, quer na Ciência, não surgem acompanhadas de fórmulas explícitas. Este é um ponto de fundamental importância, frequentemente ignorado no ensino formal tradicional, onde os conceitos matemáticos são introduzidos para resolver problemas que se referem a eles mesmos.

Este capítulo apresenta teoremas de caracterização das funções Quadráticas e Exponenciais, tais teoremas estão relacionados com progressões aritméticas e geométricas. Além disso, os dados do experimento escoamento de água são testados em relação a essas propriedades típicas dessas duas funções.

4.1. Função Quadrática e Progressões

Nesta seção, serão definidas funções quadráticas e progressões aritméticas (ordinária e de segunda ordem). Resultados elementares, relacionados a essas noções, serão demonstrados. Alguns destes, utilizados para demonstrar o seguinte resultado: Toda função contínua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que transforma progressões aritméticas em progressões aritméticas de segunda ordem é da forma $f(x)=ax^2+bx+c$.

4.1.1. Funções Quadráticas

Definição: Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b e c, com $a\neq 0$, tais que $f(x)=ax^2+bx+c$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

As proposições 1 e 2 a seguir não são necessárias para a demonstração do resultado principal desta seção (teorema de caracterização da função quadrática). Os resultados dessas proposições serão utilizados na atividade apresentada no capítulo 5.

Proposição 1: Sejam x_1, x_2, x_3 três números reais distintos e y_1, y_2, y_3 números tais que os pontos $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ e $C(x_3,y_3)$ são não colineares em $\mathbb{R}^2$. Existe uma função quadrática f, tal que $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $f(x_3)=y_3$.

Demonstração: A função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}x+\dfrac{x_3y_1-x_1y_3}{x_3-x_1}$, cumpre $g(x_1)=y_1$ e $g(x_3)=y_3$. Considere, agora, a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_3)+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}x+\frac{x_3y_1-x_1y_3}{x_3-x_1}.$$

Tem-se $f(x_1)=y_1$ e $f(x_3)=y_3$, qualquer que seja $a\in\mathbb{R}$. Para que $f(x_2)=y_2$, deve-se ter

$$y_2=a(x_2-x_1)(x_2-x_3)+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}x+\frac{x_3y_1-x_1y_3}{x_3-x_1}$$

$$a(x_2-x_1)(x_2-x_3)=\frac{y_2(x_3-x_1)-x_2(y_3-y_1)-x_3y_1+x_1y_3}{x_3-x_1}$$

$$a=\frac{y_2\left(x_3-x_1\right)-x_2\left(y_3-y_1\right)-x_3y_1+x_1y_3}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-x_3\right)\left(x_3-x_1\right)}$$

$$a=\frac{x_3y_2-x_1y_2-x_2y_3+x_2y_1-x_3y_1+x_1y_3}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-x_3\right)\left(x_3-x_1\right)}$$

Daí,

$$a\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3y_2-x_1y_2+x_2y_1-x_3y_1+x_1y_3\neq 0$$

A função f é quadrática se, e somente se, $a\neq 0$. Como

$$x_3y_2-x_1y_2+x_2y_1-x_3y_1+x_1y_3\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3y_2-x_1y_2-x_3y_1+x_1y_1=x_2y_3-x_1y_3-x_2y_1+x_1y_1.$$

Tem-se

f é quadrática $\Leftrightarrow$ $x_3y_2-x_1y_2-x_3y_1+x_1y_1\neq x_2y_3-x_1y_3-x_2y_1+x_1y_1$

f é quadrática $\Leftrightarrow$ $\left(y_2-y_1\right)\left(x_3-x_1\right)\neq\left(y_3-y_1\right)\left(x_2-x_1\right)$

f é quadrática $\Leftrightarrow$ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\neq\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$.

Então, considerando os pontos $A\left(x_1,y_1\right)$, $B\left(x_2,y_2\right)$ e $C\left(x_3,y_3\right)$, f é quadrática se, e somente se, as retas AB e AC não tem a mesma inclinação, isto é, os pontos A, B e C são não colineares.

Proposição 2: Se duas funções quadráticas possuem três pontos distintos em comum, então essas funções assumem o mesmo valor para qualquer real x.

Demonstração: Dadas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definidas por $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ e $g\left(x\right)=dx^2+ex+f$, tais que $f\left(x_1\right)=g\left(x_1\right)$, $f\left(x_2\right)=g\left(x_2\right)$ e $f\left(x_3\right)=g\left(x_3\right)$, tem-se

(A)
$$\begin{cases}\left(a-d\right)x_1^{\,2}+\left(b-e\right)x_1+\left(c-f\right)=0\\ \left(a-d\right)x_2^{\,2}+\left(b-e\right)x_2+\left(c-f\right)=0\\ \left(a-d\right)x_2^{\,2}+\left(b-e\right)x_2+\left(c-f\right)=0\end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação de cada uma das outras, obtém-se:

(B) $$\begin{cases}(a-d)\left(x_1^2-x_2^2\right)+(b-e)(x_1-x_2)=0\\(a-d)\left(x_3^2-x_2^2\right)+(b-e)(x_3-x_2)=0\end{cases}$$

Por hipótese $(x_1-x_2)\neq 0$ e $(x_3-x_2)\neq 0$, assim é possível dividir a primeira equação por x_1-x_2 e a segunda por x_3-x_2, isso simplifica o sistema para,

(C) $$\begin{cases}(a-d)(x_1+x_2)+(b-e)=0\\(a-d)(x_3+x_2)+(b-e)=0\end{cases}$$

Ao subtrair a segunda equação da primeira no sistema (C), obtém-se $(a-d)(x_1-x_3)=0$, como $x_1\neq x_3$, deve-se ter $a=d$. Assim, pelo sistema (C), $b=e$ e pelo sistema (A), $c=f$.

4.1.2. Progressões Aritméticas

4.1.2.1. Progressão aritmética

Definição: Progressão Aritmética é uma sequência de números $(a_1,a_2,...,a_n,...)$ na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante, essa constante é chamada de razão e será representada por r .

Proposição 3: O termo de ordem n de uma progressão aritmética é $a_n=a_1+(n-1)r$, isto é, um polinômio em n de grau menor ou igual a 1.

Demonstração: Pela definição de progressão aritmética, temos

$$\begin{aligned}&a_2-a_1=r\\&a_3-a_2=r\\&\dots\dots\dots\dots\\&a_n-a_{n-1}=r\end{aligned}$$

Somando, resulta

$$a_n-a_1=(n-1)r$$

A reciproca desta proposição é verdadeira. Se o termo geral de uma sequência for um polinômio em n, de grau menor ou igual a 1, então ela será uma progressão aritmética. De fato, se $x_n = an + b$, então (x_n), é uma progressão aritmética de razão $r = a$ e primeiro termo igual a $a + b$.

Proposição 4: A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética (a_n) é igual a $s_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Demonstração: Cada termo dentre os seguintes $a_1, a_2, ..., a_n$, figura exatamente duas vezes na soma $(a_n + a_1) + (a_{n-1} + a_2) + (a_{n-2} + a_3) + ... + (a_2 + a_{n-1}) + (a_n + a_1)$, então

$$2s_n = (a_n + a_1) + (a_{n-1} + a_2) + (a_{n-2} + a_3) + ... + (a_2 + a_{n-1}) + (a_n + a_1)$$

De cada parêntese para o seguinte a primeira parcela é subtraída por r, enquanto a segunda é somada a r, isto é, todas as parcelas são iguais a primeira. Daí,

$$2s_n = (a_n + a_1) \cdot n$$

$$s_n = \frac{(a_n + a_1) \cdot n}{2} \cdot$$

4.1.2.2. Progressão Aritmética de Segunda Ordem

Definição: Progressão Aritmética de Segunda Ordem é uma sequência (a_n) na qual as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética com razão diferente de zero.

Proposição 5: Toda sequência na qual o termo de ordem geral é um polinômio em n, do segundo grau, é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Demonstração: De fato, se $a_n = an^2 + bn + c$, com $a \neq 0$, então

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = a\left(n+1\right)^2 + b\left(n+1\right) + c - \left(an^2 + bn + c\right)$$

$$\Delta a_n = 2an + \left(a+b\right).$$

Portanto, (Δa_n) é uma progressão aritmética, isto é, (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Proposição 6: Se $\left(y_n\right)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem então o termo geral é um polinômio do segundo grau em n.

Demonstração: Pela definição de progressão aritmética de segunda ordem, tem-se

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= a \\ y_3 - y_2 &= a + r \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n - y_{n-1} &= a + \left(n-2\right)r \end{aligned}$$

Somando, e utilizando a fórmula da soma de termos de uma progressão aritmética, tem-se

$$y_n - y_1 = \left(\frac{a + \left(a + \left(n-2\right)r\right)}{2}\right)\left(n-1\right)$$

$$y_n - y_1 = \left(a + \frac{\left(n-2\right)r}{2}\right)\left(n-1\right)$$

$$y_n = a\left(n-1\right) + \frac{\left(n-1\right)\left(n-2\right)r}{2} + y_1$$

Portanto, o termo de ordem geral de $\left(y_n\right)$ é o seguinte polinômio do segundo grau em n:

$$y_n = \frac{r}{2}n^2 + \left(a - \frac{3r}{2}\right)n + r - a + y_1.$$

4.1.3. Progressões e Caracterização da Função Quadrática

Proposição 7: Se $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ é uma função quadrática e $\left(x_n\right)$ é uma progressão aritmética qualquer, então a sequência $\left(f(x_n)\right)$, tem a propriedade de que as diferenças sucessivas $d_1 = f(x_2) - f(x_1)$, $d_1 = f(x_3) - f(x_2)$,..., $d_n = f(x_{n+1}) - f(x_n)$ formam uma progressão aritmética.

Demonstração: Pela proposição 3,

$$
\begin{aligned}
x_n &= x_1 + \left(n-1\right)r \\
x_{n+1} &= x_1 + nr \\
x_{n+2} &= x_1 + \left(n+1\right)r
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
d_{n+1} &= f(x_{n+2}) - f(x_{n+1}) \\
d_{n+1} &= a\left(x_1+\left(n+1\right)r\right)^2 + b\left(x_1+\left(n+1\right)r\right)+c-(a\left(x_1+nr\right)^2+b\left(x_1+nr\right)+c) \\
d_{n+1} &= a\left(2x_1+2nr+r\right)r+br \qquad \text{(A)}
\end{aligned}
$$

Da mesma forma, obtém-se d_n

$$
\begin{aligned}
d_n &= f(x_{n+1}) - f(x_n) \\
d_n &= a\left(x_1+nr\right)^2+b\left(x_1+nr\right)+c-(a\left(x_1+\left(n-1\right)r\right)^2+b\left(x_1+\left(n-1\right)r\right)+c) \\
d_n &= a\left(2x_1+2nr-r\right)r+br \qquad \text{(B)}
\end{aligned}
$$

Subtraindo membro a membro as fórmulas (A) e (B), tem-se:

$$d_{n+1}-d_n = a\left(2x_1+2nr+r\right)r+br-\left(a\left(2x_1+2nr-r\right)r+br\right)=2ar^2.$$

Teorema 1: Toda função $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ que transforma progressões aritméticas em progressões aritméticas de segunda ordem é da forma $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$.

Demonstração: Por hipótese, as sequências $\left(f\left(0\right), f\left(1\right), f\left(2\right),..., f\left(n\right),...,\right)$ e $\left(f\left(1\right), f\left(0\right), f\left(-1\right), f\left(-2\right),..., f\left(-n\right),...,\right)$ são progressões aritméticas de segunda ordem. Pela proposição 6, existem constantes $a \neq 0$, b e c, tais que

$$f(n) = an^2 + bn + c \text{, para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Dado $p \in \mathbb{Z}$, por hipótese, a sequência

$$\left(f\left(\frac{1}{p}\right), f\left(\frac{2}{p}\right), \ldots, f\left(\frac{n}{p}\right), \ldots \right)$$

é uma progressão aritmética de segunda ordem, assim, existem constantes $a' \neq 0$, b' e c', tais que

$$f\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n + c' \text{, para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Daí

$$f(n) = f\left(\frac{np}{p}\right) = a'(np)^2 + b'(np) + c'$$

$$f(n) = \left(p^2 a'\right)n^2 + \left(pb'\right)n + c'.$$

Conclui-se que as funções quadráticas definidas por $g(x) = ax^2 + bx + c$ e $h(x) = \left(p^2 a'\right)x^2 + \left(pb'\right)x + c'$ coincidem para todo $x = n$. Pela proposição 2, deve-se ter $a = p^2 a'$, $b = pb'$ e $c = c'$. Portanto,

$$f\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{a}{p^2} n^2 + \frac{b}{p} n + c \text{, isto é,}$$

$$f\left(\frac{n}{p}\right) = a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right) + c$$

Para demonstração do próximo teorema, será admito que a função quadrática é contínua, além do seguinte resultado: Se existirem funções g e h definidas e contínuas em $\mathbb{R}$ e tais que $g(r) = h(r)$ para todo racional r, então $g(x) = h(x)$ para todo real x, (GUIDORIZZI, 2001) e (LIMA, 2011).

Teorema de Caracterização da Função Quadrática: Toda função contínua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que transforma progressões aritméticas em progressões aritméticas de segunda ordem é da forma $f(x)=ax^2+bx+c$.

Demonstração: Pelo teorema 1, as funções contínuas f e ax^2+bx+c são tais que $f(r)=ar^2+br+c$ para todo número racional $r=\frac{n}{p}$, daí conclui-se que $f(x)=ax^2+bx+c$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

4.2. Funções Exponenciais e Progressões

Nesta seção serão apresentadas as definições de funções exponenciais e progressão geométrica com o objetivo de demonstrar o teorema de caracterização da função de tipo exponencial.

4.2.1. Função Exponencial

Definição: Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ chama-se exponencial quando existe número real positivo $a\neq 1$, tal que $f(x)=a^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

A função exponencial possui a seguinte propriedade: Se $a>1$, então f é crescente. Se $a<1$, então f é decrescente. Para uma discussão sobre o significado de potências com expoente irracional, bem como a demonstração da propriedade acima, indicam-se (LIMA, 2009) e (ÁVILA, 2003).

Lema 1: Fixado o número real positivo $a\neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r\in\mathbb{Q}$.

Demonstrações para esse resultado encontram-se em (GUIDORIZZI, 2001) e (LIMA, 2006).

Teorema 2: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função crescente ou decrescente. Se $f(nx)=\left(f(x)\right)^n$ quaisquer que sejam $n\in\mathbb{Z}$ e $x\in\mathbb{R}$, então $f(x)=a^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$, onde $a=f(1)$.

Demonstração: Dado $p\in\mathbb{Z}$ tem-se, por hipótese, $f(p)=f(p\cdot 1)=f(1)^p$, fazendo $f(1)=a$, obtém-se

$$f(p)=a^p.$$

Para todo número racional $r=p/q$ ($p\in\mathbb{Z}$ e $q\in\mathbb{N}$), pode-se escrever $f(r)^q=f(qr)=f(p)$, daí,

$$f(r)^q=a^p \quad \Rightarrow \quad f(r)=a^{\frac{p}{q}}=a^r.$$

Supondo que existe x irracional com $f(x)\neq a^x$, digamos $f(x)<a^x$, pelo Lema 1, existe $r\in\mathbb{Q}$, tal que $f(x)<g(r)=a^r<a^x$.

Mas f crescente implica em $x<r$, enquanto que $a^r<a^x$ com $a>1$ implica em $x>r$. Para f decrescente teríamos $x>r$, enquanto que $a^r<a^x$ com $0<a<1$ implicaria em $x<r$. Com essa contradição conclui-se que $f(x)=a^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$

.

4.2.2. Progressão Geométrica. É uma sequência na qual o quociente entre cada termo e o termo anterior é constante, esse quociente é chamado de razão e será representado por q.

Proposição 9: O termo de ordem n de uma progressão geométrica é $a_n=a_1q^{n-1}$.

Demonstração: Pela definição de progressão aritmética, temos

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= a_{n-1} q \end{aligned}$$

Multiplicando, resulta

$$a_2 a_3 \ldots a_n = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} q^{n-1}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

4.2.3. Progressões e Caracterização da Função Exponencial

Considere a função $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ba^x$, onde a e b são constantes positivas. Se $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ é uma progressão aritmética de razão r, então a sequência $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão a^r, pois $f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n + r} = ba^{x_n} a^r = f(x_n) a^r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O teorema a seguir mostra que esta propriedade é característica desse tipo de função.

Teorema de Caracterização: Se $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função crescente ou decrescente que transforma toda progressão aritmética $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ numa progressão geométrica $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots)$, então $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo $b = f(0)$ e $a = \dfrac{f(1)}{f(0)}$.

Demonstração: Dado $x \in \mathbb{R}$, considere os seguintes números em progressão aritmética

$$0,\ x,\ 2x\ ,\ldots,\ nx\,,$$

assim, por hipótese, os seguintes números estão em progressão geométrica

$$f(0),\ f(x),\ f(2x),\ \ldots,\ f(nx).$$

Daí, visto que $q = \dfrac{f(x)}{f(0)}$, o termo de ordem $n+1$ é dado por

$$f(nx) = f(0)\left(\frac{f(x)}{f(0)}\right)^n \text{, isto é,}$$

$$\frac{f(nx)}{f(0)} = \left(\frac{f(x)}{f(0)}\right)^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para dividir por $f(0)$ deve-se ter certeza que $f(0) \neq 0$. Isso sempre ocorre de fato, pois do contrário os números $0, f(1), f(2)$, por exemplo, não estariam em progressão geométrica, uma vez que estamos supondo f crescente ou decrescente.

Por hipótese, os números $f(nx),\ f(0),\ f(-nx)$, estão em progressão geométrica para todo $n \in \mathbb{N}$, assim,

$$f(-nx) = \frac{(f(0))^2}{f(nx)}$$

$$\frac{f(-nx)}{f(0)} = \left(\frac{f(nx)}{f(0)}\right)^{-1}$$

$$\frac{f(-nx)}{f(0)} = \left(\frac{f(x)}{f(0)}\right)^{-n}$$

Portanto,

$$\frac{f(nx)}{f(0)} = \left(\frac{f(x)}{f(0)}\right)^n \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Pelo teorema 2, $\dfrac{f(x)}{f(0)} = a^x$, sendo $a = \dfrac{f(1)}{f(0)}$. Fazendo $f(0) = b$ tem-se $f(x) = ba^x$.

4.3. Experimento e Caracterização de Função

Esta seção contém exemplos de como testar os dados obtidos com o experimento escoamento de água, em relação às propriedades características das funções quadráticas e exponencial, apresentadas neste capítulo.

Considere a seguinte proposta de atividade matemática, para o ensino médio: Investigar qual das funções elementares é mais adequada para a solução do problema da seção 2.4 (evolução da altura em função do tempo). Nesta atividade, o professor irá orientar os alunos a construir o gráfico de pontos, tal como feito no experimento escoamento de água. Após a construção do gráfico, espera-se que não seja cogitada a Função Afim, muito menos a Função Linear, como solução do problema. Apesar da Função Exponencial não possuir zero, é razoável supor, pela disposição dos pontos, que esta função aproxime à solução. As outras opções são a Função Quadrática e a Função Polinomial.

A seguir, será apresentada a maneira de utilizar o teorema de caracterização da seção 4.2, para mostrar aos alunos que este modelo não é adequado para solução do problema. Em seguida, os dados experimentais serão testados para a propriedade que caracteriza a função quadrática.

4.3.1. Experimento e Caracterização da Função Exponencial

Vamos verificar se o modelo $h(t)=ba^t$ é adequado para o problema.

Vamos utilizar, na próxima tabela, os dados do experimento escoamento de água, para testar essa característica da função exponencial.

Tabela 4 – Experimento e função exponencial.

t	h_t	$y_t = \frac{h_t}{h_{t-1}}$	$y_t = \frac{h_t}{h_{t-1}}$
0	36		
1	30,9	0,85833	0,9
2	26,2	0,8479	0,8
3	21,8	0,83206	0,8
4	17,8	0,81651	0,8
5	14,2	0,79775	0,8
6	11	0,77465	0,8
7	8,2	0,74546	0,7
8	5,8	0,70732	0,7
9	3,9	0,67241	0,7
10	2,4	0,615385	0,6
11	1,2	0,5	0,5
12	0,4	0,333333	0,3

A sequência $(26,2;\ 21,8;\ 17,8;\ 14,2;\ 11)$, digamos, aproxima-se termo a termo de uma progressão geométrica. Enquanto que, $(11;\ 8,2;\ 5,8;\ 3,9)$ aproxima-se de outra progressão geométrica. Vamos calcular o erro cometido ao aproximar a sequência $(h_1,...,h_{12})$, por essas duas progressões geométricas.

Aproximação pela PG de razão 0,8.

Tabela 5 – Aproximação por PG.

t	h_t	x_t	$e_t = \| h_t - x_t \|$
1	30,9	30,9	0
2	26,2	24,72	1,48
3	21,8	19,776	2,024
4	17,8	15,8208	1,9792
5	14,2	12,65664	1,54336
6	11	10,125312	0,874688
7	8,2	8,1002496	0,0997504
8	5,8	6,48019968	0,6801997
9	3,9	5,184159744	1,2841597
10	2,4	4,147327795	1,7473278
11	1,2	3,317862236	2,1178622
12	0,4	2,654289789	2,2542898

O erro chegaria a dois centímetros. Pode-se considerar um erro grande para o problema.

Vamos, agora, aproximar pela PG de razão 0,7.

Tabela 6 – Aproximação por PG.

t	h_t	x_t	$e_t = \lvert h_t - x_t \rvert$
1	30,9	65,4489201	34,54892
2	26,2	45,81424406	19,614244
3	21,8	32,06997085	10,269971
4	17,8	22,44897959	4,6489796
5	14,2	15,71428571	1,5142857
6	11	11	0
7	8,2	7,7	0,5
8	5,8	5,39	0,41
9	3,9	3,773	0,127
10	2,4	2,6411	0,2411
11	1,2	1,84877	0,64877
12	0,4	1,294139	0,894139

Portanto, a função exponencial não aproxima satisfatoriamente à solução do problema.

4.3.2. Experimento e Caracterização da Função Quadrática

Testaremos, agora, a propriedade que caracteriza a função quadrática.

Tabela 7 – Experimento e função quadrática.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h_t	36	30,9	26,2	21,8	17,8	14,2	11	8,2	5,8	3,9	2,4	1,2	0,4
$y_t = h_t - h_{t-1}$		-5,1	-4,7	-4,4	-4	-3,6	-3,2	-2,8	-2,4	-1,9	-1,5	-1,2	-0,8
$z_t = y_t - y_{t-1}$			0,4	0,3	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,5	0,4	0,3	0,4

Os números da primeira linha da tabela 7 estão em PA. Então, deve-se verificar se os números da segunda linha estão em progressão aritmética de segunda ordem. Para isso, os números da terceira linha devem está em PA. Isto é, os números da quarta linha devem ser iguais. Não é exatamente o que acontece. Mas, a sequência (y_t), digamos, está próxima de uma PA. Entenda que o objetivo desta seção, não é provar que a função quadrática é o melhor modelo para o fenômeno, pois é impossível testar para todas as progressões aritméticas. Mas, os resultados da tabela anterior nos indicam que a função quadrática é um bom investimento na busca do modelo.

CAPÍTULO 5

ATIVIDADE MATEMÁTICA LCP

PARA O ENSINO MÉDIO

A atividade, apresentada a seguir, propõe um experimento como forma de engajar os alunos no processo de ensino-aprendizagem. Inserindo-os naturalmente em um contexto de investigação em busca da solução do problema, cujo caráter interdisciplinar, torna-se um atrativo a mais. A atividade foi dividida em duas aulas. Contou com a participação de seis alunos, do segundo ano do ensino médio, da Escola Estadual Pedro Álvares Cabral. Situada na cidade de Santarém do estado do Pará.

Esta atividade gira em torno da resolução do problema da variação da altura em função do tempo de escoamento, para o caso específico do tanque disponibilizado aos alunos. Os alunos realizarão o experimento, tabularão os dados e construirão o gráfico de pontos usando o Excel. Será explicado que existe solução geral para esse tipo de problema. Além disso, serão citados estudiosos e teorias que contribuíram para resolver o problema. Bem como, será indicado como encontrar a velocidade com que a água passa pelo orifício, e relacioná-la com o alcance do jato de água. Na busca da função elementar que melhor aproxima a solução, será apresentada a caracterização da função exponencial. Os alunos encontrarão os coeficientes da fórmula da função (quadrática) que resolve o problema. Resolvendo sistemas de equações.

5.1. Atividade

Aula 1:

A primeira aula, no laboratório da escola, começou com a apresentação do problema aos alunos. O material disponível era: recipiente de vidro, tanque auxiliar, bomba submersa, relógio de parede, cronômetro, régua, esquadro, papel, canetas e fita adesiva.

Fotografia 21 – Aula 1.

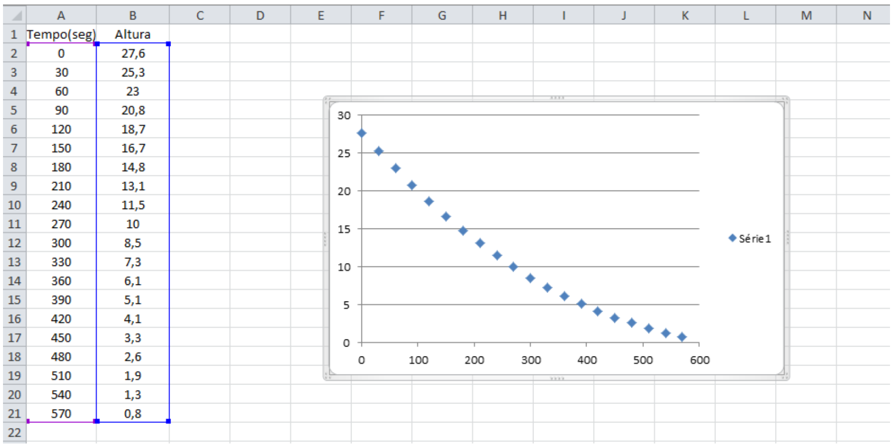
Ao observar o fenômeno, decidiram que bloqueariam o orifício sempre que desejassem medir a altura do nível da água e utilizariam um cronômetro para determinar o intervalo de tempo entre cada medição. Decidiram padronizar o intervalo e dez segundos foi consensual inicialmente. Mas, observaram que nos instantes finais do escoamento, esse intervalo representaria pouca variação na altura. Enquanto comentavam sobre o alcance do jato, que diminuía em função da velocidade, a qual dependia da pressão no orifício que, por sua vez, dependia do nível da superfície da água. A intervenção nesse momento, limitou-se a indicar pesquisas e citar Evangelista Torricelli, localizando historicamente o problema. A obtenção da fórmula

$v = \sqrt{2gh}$, tal como feito no capítulo 2, e como relacionar essa velocidade com o alcance do jato foram reservadas para a aula 2.

Após realizarem o escoamento apenas para observação, decidiram iniciar as medições. Para isso, fixaram, com fita adesiva, uma régua no recipiente. Escolheram a altura inicial. Iniciaram o escoamento, e o interrompiam a cada intervalo de tempo de 30 segundos, para aferir a altura e registrar no papel.

Fotografias 22 – Alunos realizando o experimento

Com a tabela obtida, construíram o gráfico da função. Tanto em papel milimetrado, quanto usando o Excel. O primeiro a ficar pronto foi o seguinte:

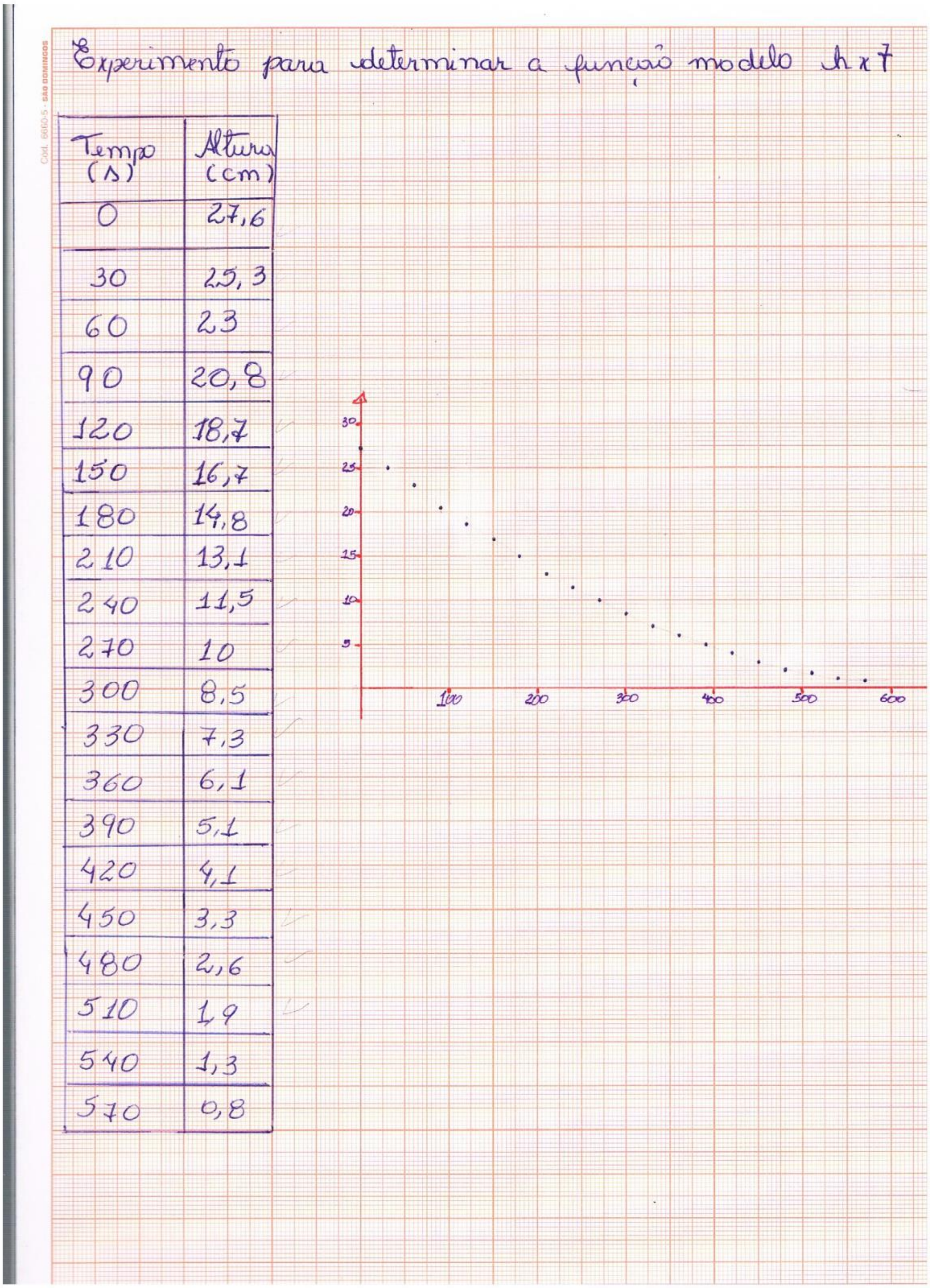


Tempo(seg)	Altura
0	27,6
30	25,3
60	23
90	20,8
120	18,7
150	16,7
180	14,8
210	13,1
240	11,5
270	10
300	8,5
330	7,3
360	6,1
390	5,1
420	4,1
450	3,3
480	2,6
510	1,9
540	1,3
570	0,8

Figura 10 – Tabela e gráfico do experimento dos alunos.

Um dos alunos disse que achava se tratar da “metade de uma parábola”. Enquanto outros achavam ser o gráfico de uma função exponencial. Um dos alunos falou que não teria como responder, talvez não fosse nenhum nem outro. Coube, então, um momento de intervenção. Nesta oportunidade, foi falado sobre a caracterização da função exponencial e mostrado alguns exemplos de fácil manipulação. O grupo tentou, então, aproximar os valores da coluna da altura, por uma progressão geométrica, e chegou à conclusão que a função exponencial não seria uma linha de tendência adequada. Veja a seção Experimento e Caracterização de Funções Elementares. Enquanto isso, também refez o experimento, para um intervalo de tempo menor e finalizou a construção do gráfico no papel.

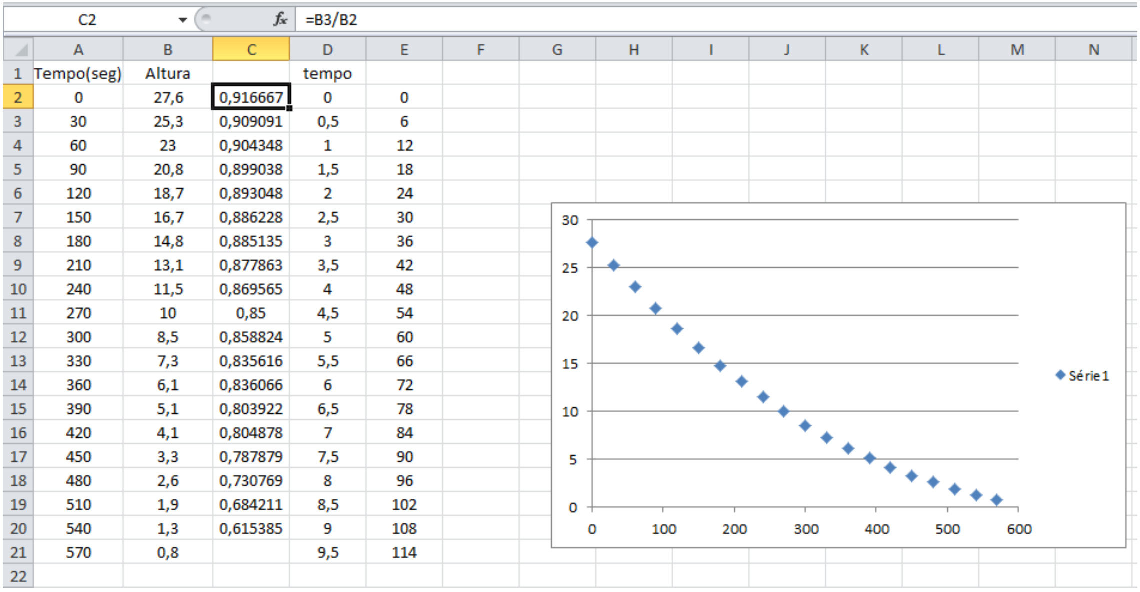
Fotografias 22 – Refazem o experimento enquanto testam a função exponencial.



Experimento para determinar a função modelo h x T

Tempo (s)	Altura (cm)
0	27,6
30	25,3
60	23
90	20,8
120	18,7
150	16,7
180	14,8
210	13,1
240	11,5
270	10
300	8,5
330	7,3
360	6,1
390	5,1
420	4,1
450	3,3
480	2,6
510	1,9
540	1,3
570	0,8

Figura 11 – Gráfico do experimento realizado pelos alunos.



	Tempo(seg)	Altura		tempo	
2	0	27,6	0,916667	0	0
3	30	25,3	0,909091	0,5	6
4	60	23	0,904348	1	12
5	90	20,8	0,899038	1,5	18
6	120	18,7	0,893048	2	24
7	150	16,7	0,886228	2,5	30
8	180	14,8	0,885135	3	36
9	210	13,1	0,877863	3,5	42
10	240	11,5	0,869565	4	48
11	270	10	0,85	4,5	54
12	300	8,5	0,858824	5	60
13	330	7,3	0,835616	5,5	66
14	360	6,1	0,836066	6	72
15	390	5,1	0,803922	6,5	78
16	420	4,1	0,804878	7	84
17	450	3,3	0,787879	7,5	90
18	480	2,6	0,730769	8	96
19	510	1,9	0,684211	8,5	102
20	540	1,3	0,615385	9	108
21	570	0,8		9,5	114

Figura 12 – Comparar a sequência das alturas com uma PG

Cada célula da coluna C é formada pelo quociente entre a altura referente a linha seguinte e a altura correspondente. A coluna D é referente ao tempo, em minutos. Enquanto que, a coluna E é outro múltiplo dos valores de tempo, o qual o grupo considerou adequado para construir o gráfico no papel milimetrado.

A seguir o gráfico para o intervalo de tempo de dez segundos.

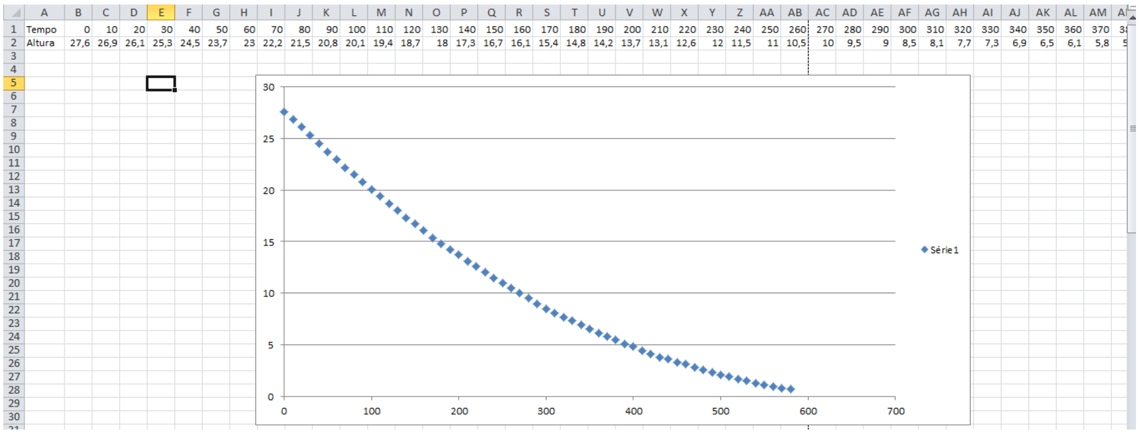


Figura 13 – Gráfico do experimento feito pelos alunos.

Encerrou-se assim a primeira aula, a qual teve duração 2 horas. O grupo desejava utilizar a função quadrática como modelo. Foi pedido para que o fizessem na aula seguinte, em grupo. Além disso, foram lembrados da pesquisa indicada sobre os aspectos físicos do experimento.

Aula 2:

Esta aula ocorreu no dia seguinte à primeira. Com duração de uma hora e trinta minutos. Composta por dois momentos.

Primeiro Momento: Exposição oral para os alunos, com uso da lousa e pincel: Obtenção do resultado $v=\sqrt{2gh}$, tal como feito no capítulo 2; Relação entre a velocidade da água ao passar pelo orifício e o alcance do jato, tal como feito na seção Coeficiente de Velocidade.

Segundo Momento: Obtenção da fórmula da função quadrática que melhor aproxima os pontos do gráfico construído com o experimento.

Fotografias 23 – Aula 2.

A estratégia foi obter a fórmula da parábola que contivesse três pontos escolhidos no gráfico. O ponto de abscissa zero foi o preferido. Além de facilitar as contas, segundo os alunos era o ponto que estava menos sujeito às imprecisões dos instrumentos de medida. Segue abaixo, o resultado apresentado pelo grupo. O tempo está em minutos e a altura em milímetros.

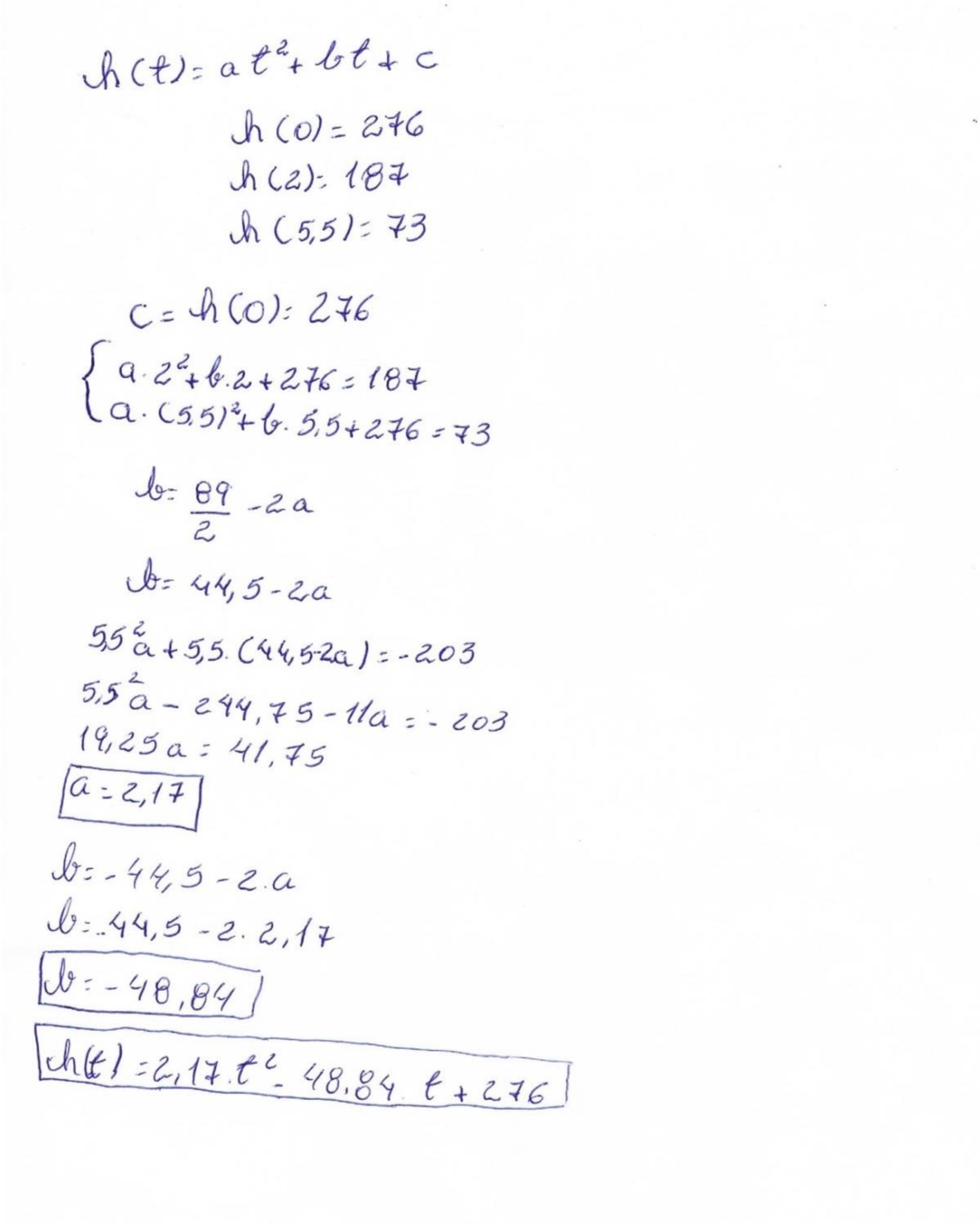


Figura 14 – Sistema de equações e resposta dos alunos para o problema.

O gráfico, a seguir, foi apresentado aos alunos contendo seus resultados.

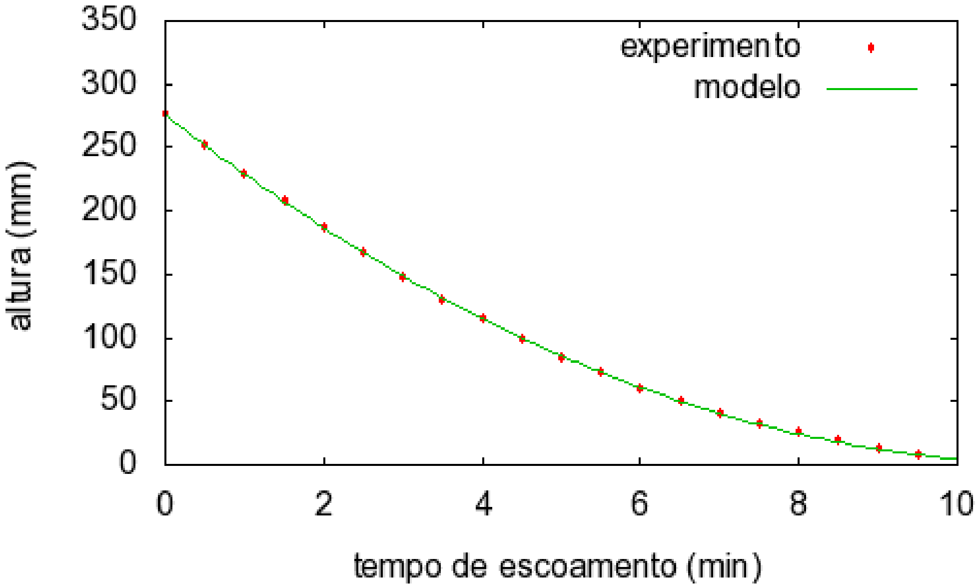


Figura 15 – Gráfico com os resultados dos alunos.

5.2. Avaliação das Aulas

Nesta seção, serão apresentadas as respostas dos alunos a dois questionários, um individual (anexo A) e outro para o grupo (anexo B). Esses questionários foram aplicados, principalmente, para verificar se a ideia central é capaz de atrair e motivar os alunos a realizarem a atividade. O objetivo dessa análise é tornar a atividade descrita nesse capítulo um parâmetro, a respeito da receptividade dos estudantes para uma atividade que envolva mais alunos e um número maior de aulas. Além do mais, detectar possíveis dificuldades na realização do experimento e classificar cada etapa da atividade quanto ao grau de dificuldade atribuído pelo aluno.

5.2.1. Questionários

As perguntas do questionário individual são:

- A execução do experimento foi um atrativo para a participação na atividade?

- Você acha que os conteúdos matemáticos podem ser ensinados com atividades desse tipo? Você aprendeu ou recordou algum conteúdo matemático durante a atividade?
- Você aprendeu ou recordou algum conceito de outra disciplina durante a atividade?
- O que você achou mais interessante na atividade?

No questionário individual, pede-se a atribuição de um grau de dificuldade, de 1 a 5, a cada etapa da atividade. As etapas consideradas são: coleta de dados do experimento; construir o gráfico com o Excel; construir o gráfico em papel milimetrado; caracterização da função exponencial; comparar a sequência das alturas com uma PG e resolução do sistema para encontrar os coeficientes da função quadrática.

As perguntas do questionário para o grupo são:

- A execução do experimento de alguma forma atraiu o grupo a tentar resolver o problema?
- Quais fatores dificultaram a realização do experimento?
- De que maneira a visualização do gráfico de pontos, construído com o experimento, contribuiu com a busca da solução do problema?
- A caracterização da função exponencial foi útil para a investigação? De que maneira?
- O que o grupo achou mais interessante na atividade?
- Você aprendeu ou recordou algum conceito de outra disciplina durante a atividade?

5.2.2. Resultados

A respeito de o experimento constituir um atrativo para a participação na atividade. A resposta dada pelo grupo foi: **"Sim, pois era algo diferente do que estávamos acostumados e isso nos motivou a resolver o problema"**. Nos questionários individuais, todos responderam de maneira positiva, inclusive a maioria destacou que o aspecto prático os motivou a resolver o problema proposto. A seguir, as respostas de três dos alunos.

"Sim, foi o que mais me atraiu para participar da atividade".

"Foi uma atração, pois não foi só teoria e teve prática o que motivou a chegar ao fim do problema".

"Foi, pois não fizemos só cálculo, analisamos e vimos na prática como um experimento poderia dar origem a uma fórmula aplicada".

A respeito da possibilidade dos conteúdos matemáticos serem ensinados com atividades práticas, todos os alunos disseram acreditar que sim. Os alunos consideram que esse tipo de atividade para o ensino de Matemática pode "prender a atenção do aluno", atrai-lo a resolver problemas e torná-lo "mais participativo". As respostas a seguir foram transcritas como os alunos as fizeram.

"Sim, seria uma forma mais dinâmica de aprendizagem, e assim os alunos poderiam ser mais participativos e interagiriam muito mais".

"Sim, é uma forma que prenderia mais a atenção dos alunos, assim como prendeu a minha. É um jeito de aprender mais rápido e com mais eficiência".

"Sim, pois aplicar Matemática é difícil e essas atividades podem nos ajudar a superar essa dificuldade".

Sobre os conteúdos de Matemática que aprenderam ou recordaram, citaram funções, progressões e sistemas. Em relação à caracterização da função exponencial, os alunos afirmaram que este recurso foi útil para concluir que a função exponencial não traria uma boa aproximação para os dados do experimento. Foram perguntados se a caracterização foi útil para a investigação. A resposta do grupo foi: **"Sim. Vimos que a função exponencial não traria uma boa aproximação, mesmo sem precisar resolver o sistema e construir o gráfico".**

Nas respostas sobre o que acharam de mais interessante na atividade, destaca-se a própria execução do experimento. A resposta do grupo foi*:* ***"Tudo, vimos uma outra realidade, ao contrário de termos um problema somente no papel, vimos o que realmente acontece, sua aplicação e sua resolução".*** A seguir, a resposta de quatro dos alunos.

"Eu acredito que a execução do experimento foi a parte mais interessante".

"Eu achei a execução do experimento mais interessante".

"O gráfico conseguido com o resultado passou por todos os pontos marcados com a experiência"

"A execução do experimento e sua aplicação ao gráfico, junto com a fórmula. Na verdade tudo."

A respeito da realização do experimento, em especial a coleta de dados, o grupo respondeu que "não foi difícil". Quanto ao grau de dificuldade atribuído individualmente, a coleta de dados do experimento foi considerada a segunda etapa mais fácil da atividade, a etapa considerada mais fácil foi a construção do gráfico com o Excel. O gráfico 4, a seguir, mostra a média do grau de dificuldade atribuído pelos alunos a cada etapa da atividade.

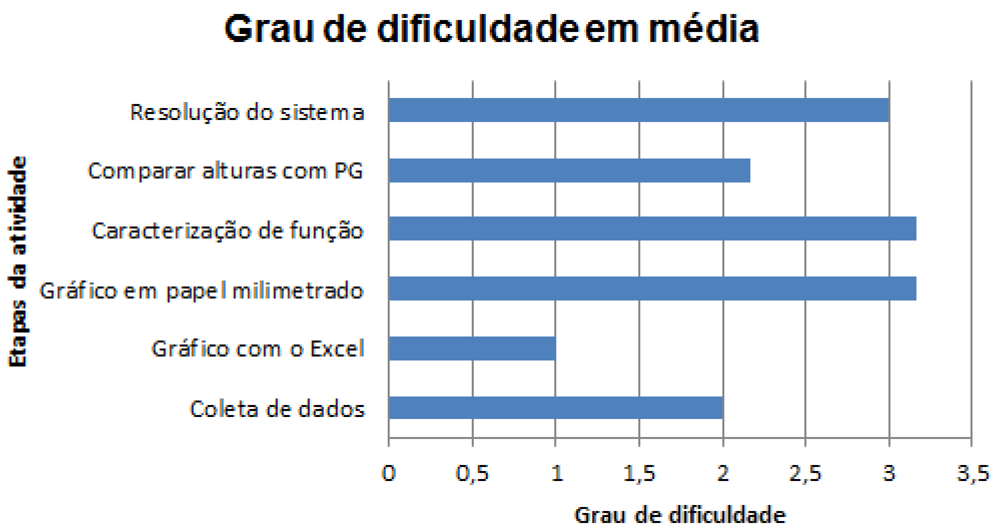


Gráfico 4 – Comparação entre as médias dos graus de dificuldade.

A etapa da caracterização da função exponencial foi considerada a mais difícil. Para supera-la foram exibidos exemplos de fácil manipulação e assegurou-se que os alunos entenderam os teoremas (não foram demonstrados), a "visão geométrica" das progressões foi importante para isso, por exemplo: associar progressão aritmética a pontos igualmente espaçados na reta. O procedimento para utilizar teorema de caracterização não foi considerado difícil. Na etapa de resolução dos sistemas, os procedimentos para resolver um sistema de duas incógnitas já eram conhecidos pelos alunos.

Tendo em vista a receptividade dos alunos, conclui-se que o aspecto prático e interdisciplinar da atividade constitui um eficiente atrativo para o estudante engajar-se no processo de ensino e de aprendizagem. Além disso, os procedimentos para obtenção dos dados experimentais podem ser considerados simples.

CONCLUSÃO

Uma das atitudes pedagógicas para melhoria da qualidade do ensino de Matemática na educação básica no Brasil é fazer a aula de Matemática mais interessante para o aluno. O estudo da abordagem LCP é enriquecedor para o desenvolvimento de atividades para o ensino médio nesse sentido.

Uma parte importante do trabalho é o embasamento teórico, em relação às questões matemáticas e físicas do fenômeno, para o professor que deseja aplicar a atividade. O estudo feito é indicado para estudantes de Matemática em geral. Esse estudo contém uma aplicação de equações diferenciais e gera exercícios interessantes. Os resultados obtidos nos experimentos do capítulo 3 estão de acordo com as previsões contidas na literatura especializada (Mecânica dos Fluídos).

O envolvimento dos alunos parece variar em função de diversos fatores ligados à motivação. A realização de experimento mostrou-se um eficiente atrativo para despertar o interesse do aluno. Somada à estreita relação existente entre Matemática e Física foi possível propor ao estudante do ensino médio uma experiência de coleta e análise de dados em um fenômeno para resolver um problema. A resolução desse problema envolve o estudo de conteúdos matemáticos para esse nível de ensino.

Os alunos demonstraram dedicação e interesse durante toda a atividade descrita no capítulo 5, essa resposta dos alunos foi bastante gratificante. Os aspectos práticos e interdisciplinar da atividade foram fundamentais para esse resultado.

OBRAS CONSULTADAS

[1] Ávila, Geraldo. **Cálculo das Funções de Uma Variável Real** (volume 1), 7.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

[2] Arias, J. F. (2004). **Perspectivas recientes en el estúdio de la motivación: la teoría de la orientación de meta.** *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducati.* Disponível em: <http://www.investigacion-psicopedagogica.org>

[3] ARTHUR STINNER PUBLICAÇÕES <http://home.ee.umanitoba.ca/~stinner/publications.html>

[3] Daugherty, R. L., J. B. Franzini, and E. J. Finnemore. **Fluid Mechanics with Engineering Applications**. McGraw-Hill, Inc. 8ed, 1985.

[4] Falkovich, G. **Fluid Mechanics, a short course for physicists**. Cambridge University Press, 2011.

[5] GALIAZZI, M.C. et all. **Objetivos das atividades experimentais no ensino médio: a pesquisa coletiva como modo de formação de profesores de ciencias**. Ciência & Educação, 2001. Disponível em: <http://www.ulbra.br/actascientiae/edicoes.html>

[6] Guidorizzi, H.L. **Um Curso de Cálculo** (volume1), 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[7] Lima, Elon Lages. et. al. **A Matemática do Ensino Médio** (volume 1), 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[8] Lima, Elon Lages. Curso de Análise (volume 1). 13.ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2011.

[9] Lima, Elon Lages. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[10] Stinner, A. **Special Edition of interchange: Large Context Problems and Thought Experiments in Science Education.** Co – editing with lan Winchester and Stephen Klassen. 2004.

[11] Stinner, A. and Metz, D. **Thought Experiments, Einstein, and Physics Education. Physics in Canada**, pp. 27-37. (Nov./Dec. 2006).

[12] Stinner, A. **Philosophy, thought experiments and large context problems in the secondary school physics course.** Vol.12, pp 244-257.1990

[13] White, Frank M. **Mecânica dos fluidos**/ Frank M. White; tradução Mario Moro Fecchio, Nelson Manzanares Filho – 6.ed. – Porto Alegre: AMGH, 2011.

[14] White, F. M. . **Fluid Mechanics**. McGraw-Hill, 1979

ANEXO A – QUESTIONÁRIOS INDIVIDUAIS

EXPERIMENTO PARA OBTER A FUNÇÃO QUE MODELA O ESCOAMENTO DE ÁGUA

1. A execução do experimento foi um atrativo para a participação na atividade?

Sim.

2. Você acha que os conteúdos matemáticos podem ser ensinados com atividades desse tipo? Você aprendeu ou recordou algum conteúdo matemático durante a atividade?

Sim. Pois aplicar matemática é difícil e essas atividades podem nos ajudar a superar essa dificuldade.
Sim. Função, Progressão Geométrica e Sistemas

3. De 1 a 5, qual o grau de dificuldade que você atribui as seguintes etapas:

Coleta de dados do experimento.

1 2 3 4 5

Construir o gráfico com o excel.

1 2 3 4 5

Construir o gráfico em papel milimetrado

1 2 3 4 5

Caracterização da função exponencial.

1 2 3 4 5

Comparar a sequência das alturas com uma PG.

1 2 3 4 5

Resolução do sistema para encontrar os coeficientes da função quadrática.

1 2 3 4 5

4. Você aprendeu ou recordou algum conceito de outra disciplina durante a atividade?

Sim. Pressão, Tensão superficial.

5. O que você achou mais interessante na atividade?

O gráfico conseguido com o resultado passou por to-
dos os pontos marcados com a experiência.

Figura 16 – Questionário individual para o aluno A.

EXPERIMENTO PARA OBTER A FUNÇÃO QUE MODELA O ESCOAMENTO DE ÁGUA

1. A execução do experimento foi um atrativo para a participação na atividade?

sim, pois através do experimento é mais emotivo realizar a atividade.

2. Você acha que os conteúdos matemáticos podem ser ensinados com atividades desse tipo? Você aprendeu ou recordou algum conteúdo matemático durante a atividade?

sim, varios assuntos recordados das series anteriores.

3. De 1 a 5, qual o grau de dificuldade que você atribui as seguintes etapas:

Coleta de dados do experimento.

1 2 3 4 5

Construir o gráfico com o excel.

1 2 3 4 5

Construir o gráfico em papel milimetrado

1 2 3 4 5

Caracterização da função exponencial.

1 2 3 4 5

Comparar a sequência das alturas com uma PG.

1 2 3 4 5

Resolução do sistema para encontrar os coeficientes da função quadrática.

1 2 3 4 5

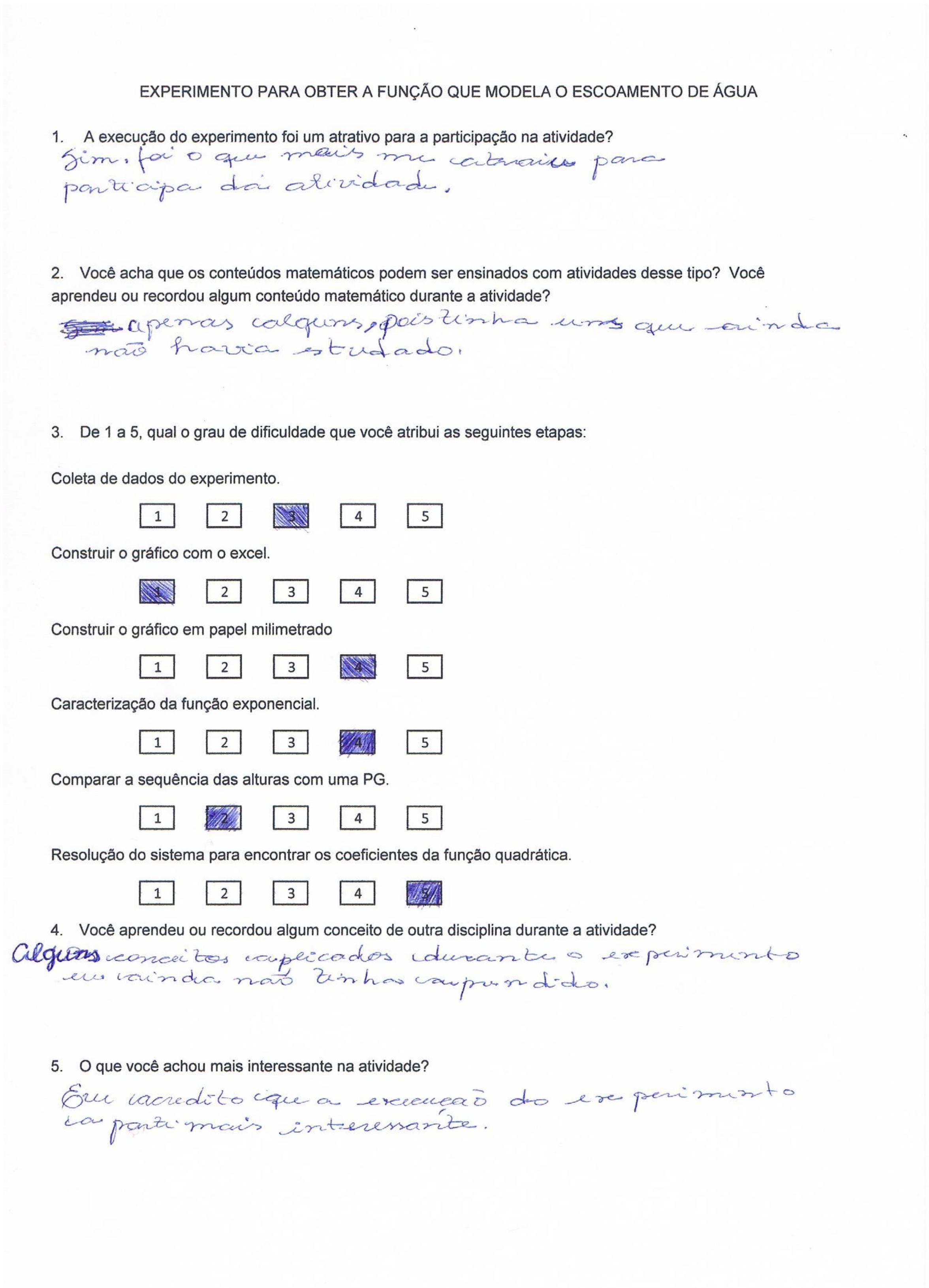
4. Você aprendeu ou recordou algum conceito de outra disciplina durante a atividade?

Os assuntos discutidos na execução do experimento são muito semelhantes aos assuntos da matéria Fisica.

5. O que você achou mais interessante na atividade?

Eu achei a execução do experimento mais interessante.

Figura 17 – Questionário individual para o aluno B.



EXPERIMENTO PARA OBTER A FUNÇÃO QUE MODELA O ESCOAMENTO DE ÁGUA

1. A execução do experimento foi um atrativo para a participação na atividade?

Sim, foi o que mais me atraiu para participar da atividade.

2. Você acha que os conteúdos matemáticos podem ser ensinados com atividades desse tipo? Você aprendeu ou recordou algum conteúdo matemático durante a atividade?

~~Sim~~ apenas alguns, pois tinha uns que ainda não havia estudado.

3. De 1 a 5, qual o grau de dificuldade que você atribui as seguintes etapas:

Coleta de dados do experimento.

1 2 **3** 4 5

Construir o gráfico com o excel.

1 2 3 4 5

Construir o gráfico em papel milimetrado

1 2 3 **4** 5

Caracterização da função exponencial.

1 2 3 **4** 5

Comparar a sequência das alturas com uma PG.

1 **2** 3 4 5

Resolução do sistema para encontrar os coeficientes da função quadrática.

1 2 3 4 **5**

4. Você aprendeu ou recordou algum conceito de outra disciplina durante a atividade?

Alguns conceitos aplicados durante o experimento eu ainda não tinha aprendido.

5. O que você achou mais interessante na atividade?

Eu acredito que a execução do experimento a parte mais interessante.

Figura 18 – Questionário individual para o aluno C.

EXPERIMENTO PARA OBTER A FUNÇÃO QUE MODELA O ESCOAMENTO DE ÁGUA

1. A execução do experimento foi um atrativo para a participação na atividade?

Foi, pois não fizemos só cálculo, analizamos e vimos na prática como um experimento poderia dar origem a uma fórmula aplicada.

2. Você acha que os conteúdos matemáticos podem ser ensinados com atividades desse tipo? Você aprendeu ou recordou algum conteúdo matemático durante a atividade?

Sim, seria uma forma mais dinâmica de aprendizagem, e assim os alunos poderiam ser mais participativos e interageriam muito mais. E também aprimoramos mais o conhecimento sobre funções.

3. De 1 a 5, qual o grau de dificuldade que você atribui as seguintes etapas:

Coleta de dados do experimento.

■ 2 3 4 5

Construir o gráfico com o excel.

■ 2 3 4 5

Construir o gráfico em papel milimetrado

1 ■ 3 4 5

Caracterização da função exponencial.

1 ■ 3 4 5

Comparar a sequência das alturas com uma PG.

■ 2 3 4 5

Resolução do sistema para encontrar os coeficientes da função quadrática.

1 ■ 3 4 5

4. Você aprendeu ou recordou algum conceito de outra disciplina durante a atividade?

Física - sobre a pressão.
Matemática - cálculos, funções, sistemas.

5. O que você achou mais interessante na atividade?

A execucão do experimento e sua aplicação ao gráfico, junto com a fórmula. Na verdade, tudo.

Figura 19 – Questionário individual para o aluno D.

EXPERIMENTO PARA OBTER A FUNÇÃO QUE MODELA O ESCOAMENTO DE ÁGUA

1. A execução do experimento foi um atrativo para a participação na atividade?

Foi uma atração, pois não foi so teoria e tive pratica oque motivou a chegar ao fim do problema.

2. Você acha que os conteúdos matemáticos podem ser ensinados com atividades desse tipo? Você aprendeu ou recordou algum conteúdo matemático durante a atividade?

Sim, é uma forma que prenderia mais a atenção dos alunos, assim como prendeu a minha. É um jeito de aprender mais rapido e com mais eficiencia

3. De 1 a 5, qual o grau de dificuldade que você atribui as seguintes etapas:

Coleta de dados do experimento.

[1] 2 3 4 5

Construir o gráfico com o excel.

[1] 2 3 4 5

Construir o gráfico em papel milimetrado

1 2 [3] 4 5

Caracterização da função exponencial.

1 [2] 3 4 5

Comparar a sequência das alturas com uma PG.

1 [2] 3 4 5

Resolução do sistema para encontrar os coeficientes da função quadrática.

1 [2] 3 4 5

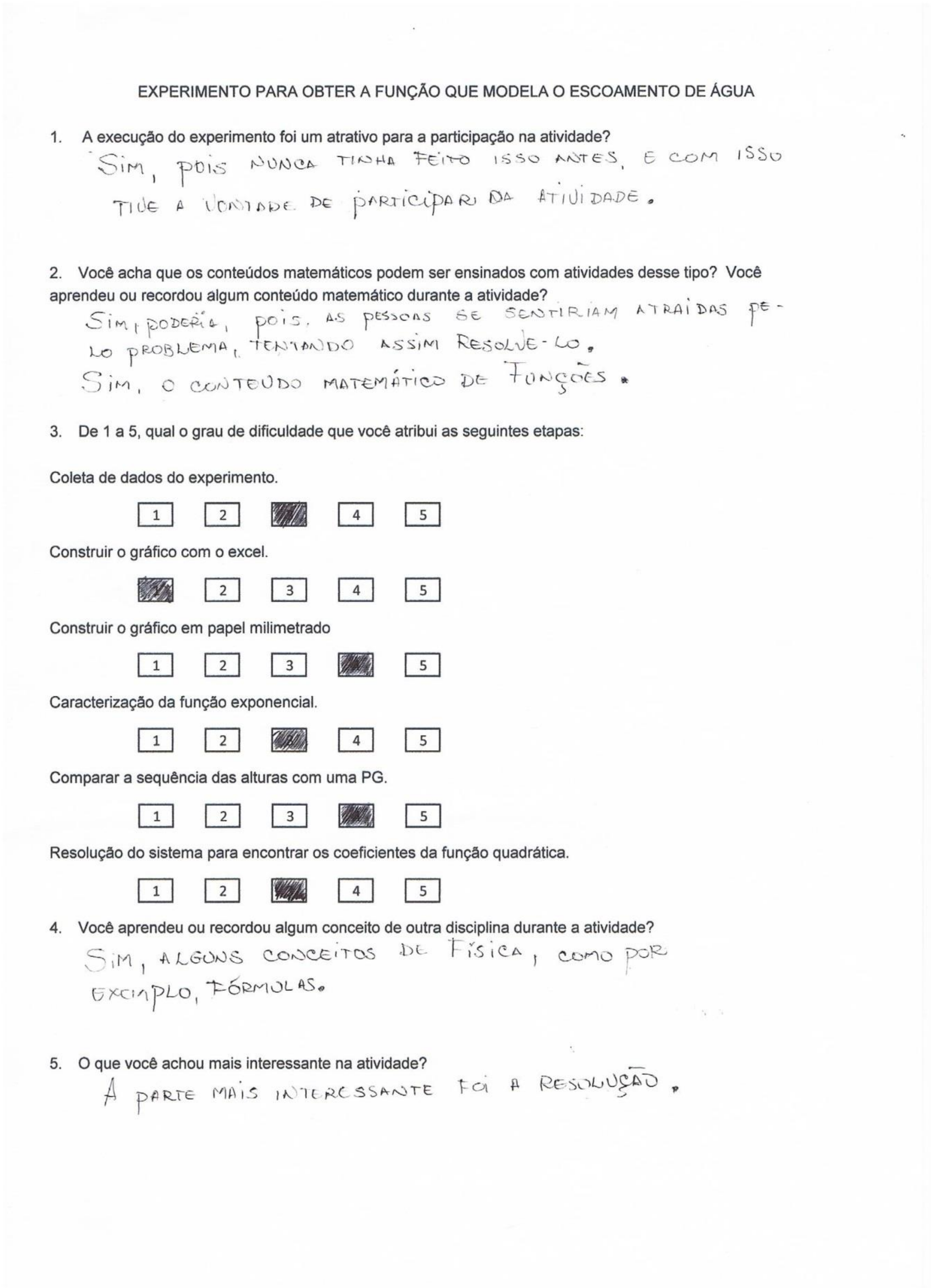
4. Você aprendeu ou recordou algum conceito de outra disciplina durante a atividade?

Aprende, no momento que que a quantidade de água diminui a uma mudança no ~~caso~~ escoamento da água e isso envolve física.

5. O que você achou mais interessante na atividade?

A pratica, no momento que estavamos vendo a água escorrendo, o calculo foi interessante porque eu aprendi a fazer, ou seja, era uma coisa nova pra mim.

Figura 20 – Questionário individual para o aluno E.



EXPERIMENTO PARA OBTER A FUNÇÃO QUE MODELA O ESCOAMENTO DE ÁGUA

1. A execução do experimento foi um atrativo para a participação na atividade?

SIM, POIS NUNCA TINHA FEITO ISSO ANTES, E COM ISSO TIVE A VONTADE DE PARTICIPAR DA ATIVIDADE.

2. Você acha que os conteúdos matemáticos podem ser ensinados com atividades desse tipo? Você aprendeu ou recordou algum conteúdo matemático durante a atividade?

SIM, PODERIA, POIS, AS PESSOAS SE SENTIRIAM ATRAÍDAS PE-
LO PROBLEMA, TENTANDO ASSIM RESOLVE-LO.
SIM, O CONTEUDO MATEMÁTICO DE FUNÇÕES.

3. De 1 a 5, qual o grau de dificuldade que você atribui as seguintes etapas:

Coleta de dados do experimento.

1 2 ■ 4 5

Construir o gráfico com o excel.

■ 2 3 4 5

Construir o gráfico em papel milimetrado

1 2 3 ■ 5

Caracterização da função exponencial.

1 2 ■ 4 5

Comparar a sequência das alturas com uma PG.

1 2 3 ■ 5

Resolução do sistema para encontrar os coeficientes da função quadrática.

1 2 ■ 4 5

4. Você aprendeu ou recordou algum conceito de outra disciplina durante a atividade?

SIM, ALGUNS CONCEITOS DE FÍSICA, COMO POR EXEMPLO, FÓRMULAS.

5. O que você achou mais interessante na atividade?

A PARTE MAIS INTERESSANTE FOI A RESOLUÇÃO.

Figura 21 – Questionário individual para o aluno F.

ANEXO B – QUESTIONÁRIOS INDIVIDUAIS

EXPERIMENTO PARA OBTER A FUNÇÃO QUE MODELA O ESCOAMENTO DE ÁGUA

1. A execução do experimento de alguma forma atraiu o grupo a tentar resolver o problema?

Sim, pois era algo diferente do que estavamos acostumados e isso nos motivou a resolver o problema.

2. Quais fatores dificultaram a realização do experimento?

A realização do experimento não foi difícil, apenas sua aplicação na formula, mas depois da explicação tornou-se fácil.

3. De que maneira a visualização do gráfico de pontos, construído com o experimento, contribuiu com a busca da solução do problema?

Com o grafico ficou mais facil de analisarmos o problema, e encontrar a equação que o soluciona.

4. A caracterização da função exponencial foi útil para a investigação? De que maneira?

Sim. Vimos que a função exponencial não traria uma boa aproximação, mesmo sem precisar resolver o sistema e construir o grafico

5. O que o grupo achou de mais interessante na atividade?

Tudo, vimos uma outra realidade, ao contrario de termos um problema somente no papel, vimos o que realmente acontece, sua aplicação e sua resolução

6. Você aprendeu ou recordou algum conceito de outra disciplina durante a atividade?

Além da matematica tivemos a fisica como um auxilio para encontrar o resultado final.

Figura 16 – Questionário respondido pelo grupo de alunos.