**UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO**
**PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS**
**MESTRADO PROSSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

**WELSON NOGUEIRA DA SILVA**

# UM RESUMO SOBRE A HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

# E ALGUNS PROBLEMAS CURIOSOS

**SANTARÉM-PA**
**2020**

**WELSON NOGUEIRA DA SILVA**

# UM RESUMO SOBRE A HISTÓRIA DA PROBABILIDADE E ALGUNS PROBLEMAS CURIOSOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional* (PROFMAT) da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA) como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. M. Sc. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

**SANTARÉM-PA**
**2020**

Ficha catalográfica elaborada pelo Setor de Processamento Técnico da Biblioteca da UFOPACatalogação de Publicação na Fonte. UFOPA - Biblioteca Unidade Rondon

Silva, Welson Nogueira da.
Um resumo sobre a história da probabilidade e alguns problemas curiosos / Welson Nogueira da Silva. - Santarém, 2020.
86f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientador: Aroldo Eduardo Athias Rodrigues.

1. História da Matemática. 2. História da Probabilidade. 3. Livros Históricos de Probabilidade. I. Rodrigues, Aroldo Eduardo Athias. II. Título.

UFOPA/Sistema Integrado de Bibliotecas CDD 23 ed. 519

Elaborado por Bárbara Costa - CRB-23 ed.

WELSON NOGUEIRA DA SILVA

# UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DA PROBABILIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional* (PROFMAT) da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA) como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. M. Sc. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Aprovado. Santarém-PA, 06 de maio de 2019.

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Prof. M. Sc. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues
Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA

Prof. Dr. José Ricardo e Souza Mafra
Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA

Cristina Vaz

Prof.ª Dra.ª Cristina Lúcia Dias Vaz
Universidade Federal do Pará - UFPA

## AGRADECIMENTOS

À Deus, pela vida, pela saúde e pela oportunidade de realizar mais essa etapa na minha caminhada;

À minha esposa e filhas, que me acompanharam nessa aventura, muitas vezes se sujeitando ao meu mau humor;

Aos meus pais, que me proporcionaram a estrutura moral para chegar até aqui;

Aos meus irmãos, que me ajudaram direta ou indiretamente nesse trabalho;

Aos colegas do PROFMAT, em especial às turmas de 2011 (pioneira) e de 2016;

Ao meu orientador, pelo incentivo e paciência na condução desse trabalho;

E, grandemente, aos professores e coordenadores do PROFMAT na UFOPA, que são verdadeiros heróis enfrentando os mais variados desafios para oportunizar que esse programa de Mestrado chegue ao Oeste do Pará.

# RESUMO

O presente trabalho trata de elementos de História da Matemática, em específico, um resumo sobre a História da Probabilidade. Seu conteúdo objetiva, modestamente, ajudar a preencher a lacuna de material desse assunto em idioma nacional. Para tanto, foi realizada uma criteriosa pesquisa bibliográfica, na qual foram destacados os mais importantes matemáticos e seus feitos para o desenvolvimento da Probabilidade, desde a Antiguidade até o Século XX. Também são tratados alguns problemas, de grande repercussão no meio matemático, que motivaram estudos importantes para a evolução da Teoria da Probabilidade. Há, ainda, uma coleção de endereços eletrônicos, para cópias digitais de livros históricos citados no trabalho, disponíveis gratuitamente na Internet.



**Palavras-chave:** História da Matemática. História da Probabilidade. Livros Históricos de Probabilidade.

# ABSTRACT

The present work deals with elements of the History of Mathematics, in particular, a summary about the History of Probability. Its objective content modestly helps to keep a gap in material on this subject in the national language. To this end, a thorough bibliographical research was carried out, highlighting the most important mathematicians and their deeds for the development of probability, from antiquity to the twentieth century. Also included are some problems, of great repercussion in the mathematical environment, which motivated important studies for the evolution of Probability Theory. In addition, a collection of e-mail addresses for digital copies of historical books cited at work is freely available on the Internet.



**Keywords:** History of Mathematics. History of Probability. Historical Probability Books.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

Nas discussões acadêmicas, escolares e familiares, existem muitas críticas quanto ao processo de ensino/aprendizagem da matemática. Uma das mais recorrentes é que a matemática é ensinada de maneira abstrata e automatizada, sem associá-la a problemas cotidianos, ou ainda, dissociada de um contexto sociocultural.

Excerto da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018, p. 267) ressalta que uma das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental é:

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana significa reconhecer que ela é fruto do trabalho humano, muitas vezes desenvolvida para a solução de problemas reais.

Não obstante, por vezes, estudantes manifestam descontentamento ao sugerirem que a Matemática consiste (apenas) em abstrações inventadas por algumas mentes geniais e que, atualmente, os alunos são obrigados a estudar. É preocupante que alguns estudantes pensem dessa maneira. Deve-se ressaltar que a abstração continua sendo uma das ferramentas mais importantes do intelecto humano e, talvez, a mais importante da Matemática.

Na tentativa de amenizar o dilema, Roque e Pitombeira (2012, p. vii) argumentam:

> Sendo assim, parece estarmos diante de um paradoxo: como tornar a Matemática mais “concreta” sem abdicar da capacidade de abstração que o seu aprendizado proporciona? [...] Acreditamos, contudo, que quando os alunos pedem para que a Matemática se torne mais “concreta”, eles podem não querer dizer, somente, que desejam ver este conhecimento aplicado às necessidades práticas. Talvez eles demandem compreender seus conceitos em relação com algo que lhes dê sentido. Este pode ser o papel mais importante da história da Matemática para o ensino.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p. 34) documento de mais de vinte anos, já havia a preocupação da contextualização sociocultural. Esse documento ressalta que a História da Matemática é uma das ferramentas que auxiliam o professor a superar esse problema.

> A História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática.
>
> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do

> passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático.
>
> Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural.
>
> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês" e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

Essas orientações são ratificadas pela recente Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018, p. 298):

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, [...] é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.

Ao mesmo tempo, a BNCC (BRASIL, 2018) tem ampliado a importância do tema **Probabilidade**, tratando-o inclusive como uma Unidade Temática.

> A incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade temática Probabilidade e Estatística. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos.
>
> [...]
>
> No que concerne ao estudo de noções de probabilidade, a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. [...] No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem.

Tratando-se do tema **Probabilidade**, durante as pesquisas para este trabalho, foi identificada uma grande lacuna quanto à sua história disponível em nosso idioma (português brasileiro). Em outras palavras, houve dificuldades na obtenção de material para os estudos simplesmente pela falta de trabalhos acadêmicos ou livros nacionais nessa área.

Dos poucos materiais nacionais obtidos, os principais aqui referenciados se destacam por serem aqueles de maior abrangência sobre a História da Probabilidade, a saber: *Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista*, de Coutinho, C.Q.S. (1994); e *Algumas Considerações sobre a Origem da Teoria da Probabilidade*, de Viali, L. (2008). Esses trabalhos, mesmo sendo os mais abrangentes, abordam o tema de maneira breve.

No trabalho de Coutinho (1994), a História da Probabilidade é utilizada como contextualização para outros assuntos e, da mesma forma, é feito na maioria dos trabalhos consultados, nos quais se observou que o tema é meramente incidental, ou seja, raramente é tratado como assunto principal.

Este trabalho originalmente tinha proposta semelhante: usar a História da Matemática, em especial a História da Probabilidade, apenas incidentalmente. No entanto, quando a citada lacuna de material foi identificada, modificou-se o trabalho para contemplar uma abordagem mais ampla e completa, de forma que os estudos da História da Probabilidade foram aprofundados para tentar, modestamente, reduzir a carência de trabalhos na área.

Dessa forma, o objetivo principal do trabalho é apresentar elementos da História da Probabilidade, desde a Antiguidade até o Século XX, destacando os mais importantes matemáticos e suas contribuições para o desenvolvimento da Teoria da Probabilidade, e investigando alguns problemas importantes desse tema.

O objetivo principal foi trabalhado, em várias etapas, por meio de diversos objetivos específicos, a saber:

1) O levantamento de material bibliográfico tratando sobre História da Probabilidade;
2) O resumo, em um texto único e cronológico, dos elementos de História da Probabilidade encontrados;
3) O destaque de conceitos interessantes e curiosos sobre Probabilidade que surgiram no decorrer de sua história;
4) O destaque e a apresentação de soluções de alguns problemas interessantes e curiosos sobre Probabilidade que surgiram no decorrer de sua história;
5) A apresentação de ferramentas computacionais que possam ser utilizadas como recurso pedagógico e que também possam motivar os alunos na sala de aula;

6) A construção de uma ferramenta mecânica (Tábua de Galton) para ser utilizada como recurso pedagógico e que também possa motivar os alunos na sala de aula.

Para alcançar esses objetivos, este trabalho foi essencialmente realizado na forma de pesquisa bibliográfica, elaborada com base em material já publicado.

De acordo com Borges (2018, p. 13) a pesquisa bibliográfica é atividade de localização e consulta de fontes diversas de informações escritas, para coletar dados gerais ou específicos a respeito de um tema.

Cervo, Bervian e Silva (2007, p. 61) destacam que:

> A pesquisa bibliográfica é meio de formação por excelência e constitui o procedimento básico para os estudos monográficos, pelos quais se busca o domínio do estado da arte sobre determinado tema.

Gil (2010, p. 29) destaca que, tradicionalmente, esta modalidade de pesquisa inclui material impresso como livros, revistas, jornais, teses, dissertações e anais de eventos científicos. Todavia, em virtude da disseminação de novos formatos de informação, essas pesquisas passaram a incluir outros tipos de fontes, como discos, fitas magnéticas, CDs, bem como o material disponibilizado na internet. E complementa, afirmando que:

> A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que ele poderia pesquisar diretamente. Essa vantagem torna-se particularmente importante quando o problema de pesquisa requer dados muito dispersos pelo espaço. [...] A pesquisa bibliográfica também é indispensável nos estudos históricos. Em muitas situações, não há outra maneira de conhecer os fatos passados se não com base em dados bibliográficos. (GIL, 2010, p. 30)

Foi consultada uma quantidade significativa de obras, físicas e eletrônicas, entre elas: obras do acervo da Biblioteca da UFOPA, obras de acervos pessoais (minhas e de meu Orientador) e obras disponíveis na internet (em páginas eletrônicas e em arquivos para download). Também foram consultadas recorrentemente algumas páginas de uso público na Internet para comparação de informações e download de obras históricas. Todas as obras físicas e eletrônicas consultadas estão listadas nas Referências Bibliográficas ao final deste trabalho. Os endereços eletrônicos consultados recorrentemente estão listados em página própria.

Em relação à carência de obras sobre História da Probabilidade, as pesquisas em sites de busca do tipo Google retornam poucos resultados e, quase todos, tratam o assunto de forma superficial. Por sua vez, na Biblioteca da UFOPA, não há obras nas quais a História da Probabilidade tenha título próprio, sendo o assunto apenas coadjuvante nas obras de História da Matemática.

Durante a pesquisa, verificou-se que várias das obras destacadas como trabalhos de grande importância para a Probabilidade estão disponibilizadas gratuitamente em bibliotecas virtuais.

Assim, destaca-se o mérito do trabalho em colecionar os endereços de acesso, via Internet, a essas obras históricas (citadas no Capítulo 2, listadas no Apêndice A).

Certamente, muitos estudantes nunca tiveram contato com as obras originais e só as conhecem por referências, fazendo com que o acesso ao conhecimento nelas contido seja indireto, pela tradução ou interpretação de outros autores.

Quanto à estrutura do trabalho, o **Capítulo 2** traz um resumo da trajetória histórica da Probabilidade, mostrando que seu estudo e sua evolução estão associados a contextos socioculturais e que esse conhecimento se desenvolveu para superar, muitas vezes, problemas cotidianos. Também retrata que as pessoas que se destacaram têm seus nomes associados não só pela genialidade, mas, principalmente, pelo trabalho e esforço que dedicaram ao assunto. A visão histórica é ampla: são trazidas referências e elementos históricos, estudados e catalogados em vários trabalhos, desde as primeiras civilizações, passando pelos períodos conhecidos como Idade Média e Idade Moderna, até à Idade Contemporânea. Na sua elaboração, optou-se pela ênfase às obras matemáticas relevantes e, dessa forma, são citados muitos trabalhos de valor histórico que contribuíram enormemente para o avanço da Probabilidade e, consequentemente, da Estatística.

O **Capítulo 3** trata das definições Clássica e Frequentista da Probabilidade, apresentando alguns problemas que mereceram destaque histórico em razão de terem sido tratados por grandes matemáticos ou porque tiveram grande influência na História da Probabilidade. Em especial, ressalta-se dois problemas relacionados à Probabilidade Geométrica: o Problema da Agulha de Buffon e o Paradoxo de Bertrand.

Por fim, o **Capítulo 4** faz uma abordagem histórica sobre a distribuição normal e da curva a ela associada. Também é apresentado um aparelho desenvolvido por Francis Galton no século XIX, para estudar a distribuição normal, muito útil atualmente para introduzir conceitos probabilísticos mais complexos aos estudantes, como o Teorema Central do Limite.

No **Apêndice A** foram listados os endereços de acesso, via Internet, às obras históricas citadas no Capítulo 2 (quase todas disponibilizadas gratuitamente em bibliotecas virtuais). O objetivo dessa coleção é facilitar, para o estudante interessado, o acesso aos textos originais (cópias digitais nas línguas nativas) e possibilitar conclusões próprias sem a contaminação por intermediários (tradutores e intérpretes).

O **Apêndice B** traz um pequeno esquema de construção de uma Tábua de Galton, produzida conforme especificações do autor. O aparelho construído será objeto de doação para uso da Universidade Federal do Oeste Pará, como material de apoio pedagógico.

Por fim, cabe alertar que não foi objetivo deste trabalho apresentar metodologias para aplicação dos elementos pesquisados (históricos, mecânicos ou computacionais) em sala de aula. Sabe-se que tais elementos podem ser de grande valia ao professor e ser um bom motivador para os alunos. Em outras palavras, o trabalho se absteve à apresentação dos elementos pesquisados, e sua aplicação didática pode ser objeto de futuros trabalhos que utilizem este como referência.

# 2 BREVE HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

A História é a ciência que investiga o passado da humanidade e o seu processo de evolução, tendo como referência um lugar, uma época, um povo ou um indivíduo específico. Esse processo de evolução é cronológico e contínuo. Porém, para tornar mais didático ou prático o estudo da História, geralmente ela é dividida em períodos. Essa divisão tem objetivo tão somente de facilitar a compreensão e não de estabelecer rupturas na continuidade do processo histórico.

O presente capítulo também foi dividido em períodos / etapas para facilitar o estudo. Ressalta-se que essa divisão é meramente didática, não havendo descontinuidades nas transições entre períodos / etapas.

Destaca-se, também, que não foi utilizada a divisão clássica da história (Antiga, Média, Moderna e Contemporânea), mas sim, uma divisão que melhor se adequa à proposta do trabalho (Antiguidade e Idade Média, Escola Italiana, Pascal e Fermat, Huygens, Escola Inglesa, Família Bernoulli, Outros Matemáticos Europeus, Laplace e Contemporâneos, e Escola Russa).

Embora a intenção seja a de apresentar elementos de História da Probabilidade em ordem essencialmente cronológica, por vezes, vários eventos ocorrem em paralelo, por vários agentes, em vários lugares, num mesmo momento histórico.

Com relação às questões que motivam o desenvolvimento e a evolução histórica de determinado campo da Matemática, como a Probabilidade, Roque e Pitombeira (2012, p. ix) destacam:

> As situações que motivaram os matemáticos são problemas em um sentido muito mais rico. Podem ter sido problemas quotidianos (contar, fazer contas); problemas relativos à descrição dos fenômenos naturais (por que um corpo cai, por que as estrelas giram?); problemas filosóficos (o que é conhecer, como a Matemática ajuda a alcançar o conhecimento verdadeiro?); ou ainda, problemas matemáticos (como legitimar certa técnica ou certo conceito?). Na história da Matemática, encontramos motivações que misturam todos estes tipos de problemas.

Na elaboração do capítulo, optou-se por dar mais ênfase às obras matemáticas relevantes do que à biografia dos matemáticos, no entanto, por vezes, a História da Matemática se confunde com a própria História dos Matemáticos.

Por fim, enfatiza-se que a história sempre está associada a contextos socioculturais, mas que o aprofundamento de tal contextualização não foi objeto do presente trabalho.

## 2.1 Antiguidade e Idade Média

A ideia de acaso é quase tão antiga quanto as primeiras civilizações. Os povos mesopotâmios e egípcios ligavam o acaso à vontade de divindades ou outros fenômenos sobrenaturais[1]. Gadelha (2004) ressalta que "a humanidade tem lidado com a incerteza desde épocas remotas na tentativa de obter vantagens em disputas e evitar perdas advindas de fatores imprevisíveis."

David (1962, apud HACKING, 2006, p. 1) especula que jogos de azar[2] podem ter sido a primeira invenção da sociedade humana. Em seus estudos, ele cita que formas primitivas de dados[3] foram encontradas em sítios arqueológicos, que remontam ao Paleolítico, na região do Nilo e da Mesopotâmia. Esses dados primitivos consistiam num osso chamado tálus ou astrágalo[4] (Figuras 1 e 2). Pinturas em tumbas egípcias de 3.500 a.C. mostram pessoas jogando o que se acredita ser o jogo de tálus (GADELHA, 2004, p. 2). Há indícios também que o jogo era praticado pelos polinésios e siberianos (MOREIRA, 2015, p. 12).

**Figuras 2.1 e 2.2 –** Tálus (astrágalos) de animal, como dados primitivos

**Fonte:** http://turukbil.blogspot.com/2013/06/tarihi-bir-turk-oyunu-ask-atma.html. Acessado em: fev. 2018.

**Fonte:** http://www.tibetarchaeology.com/may-2014/ Acessado em: fev. 2018.

Um astrágalo tem seis lados, mas só quatro deles são estáveis o suficiente para permitir que o osso se apoie sobre eles. Devido à anatomia do osso, as probabilidades de obter cada um dos lados em um lançamento são de aproximadamente 39%, 37%, 12% e 12% (VIALI, 2008, p.144).

---

[1] Refere-se às práticas dos povos antigos de consultar presságios para interpretar a vontade dos deuses ou predizer o futuro. Este tipo de relação com o acaso, associando-o com a crença em intervenções divinas, é uma constante no comportamento humano ao longo do tempo.

[2] São chamados jogos de azar aqueles cujo resultado final não depende somente da habilidade do jogador, mas exclusiva ou predominantemente do acaso. A palavra **azar** é derivada do árabe *az-zahr* ou *al-zahr* que significa **jogo de dados** (*zahr* significa flor, que era a marcação de uma das faces do dado) e foi trazida para a Europa durante as Cruzadas. Embora no português moderno, a palavra azar esteja associada a infortúnio e desgraça, ao classificar um jogo como "de azar", pretende-se apenas dizer que o resultado é fruto do acaso.

[3] Os dados são pequenos poliedros gravados com determinadas instruções. O dado mais clássico é o de seis faces (hexaedro regular), gravado com os números de 1 a 6.

[4] **Astrágalo** ou **tálus** é um osso do calcanhar dos membros posteriores de animais como cervos, ovelhas, vacas, cavalos e antílopes.

O jogo foi amplamente difundido para o mundo grego, romano e cristão. Além de apostas, os gregos também utilizavam astrágalos ao consultar oráculos e fazer previsões do futuro. Leonard Mlodinow (2009, p. 36) destaca que:

> Os gregos também utilizavam astrágalos ao consultarem seus oráculos. As respostas que obtinham eram tidas como as palavras dos deuses. Muitas escolhas importantes, feitas por gregos proeminentes, se baseavam nesses conselhos, como descrito nos relatos do historiador Heródoto e de escritores como Homero, Ésquilo e Sófocles. Porém, apesar da importância do jogo de astrágalos tanto nas apostas como na religião, os gregos não fizeram nenhum esforço por entender as regularidades desse jogo.

Viali (2008, p. 144) informa que há registro de que o jogo também era utilizado na decisão de disputas e na divisão de heranças.

O jogo tradicional dos gregos e romanos era realizado com quatro astrágalos. O melhor resultado era denominado de jogada de Vênus. Tratava-se da obtenção das quatro faces diferentes voltadas para cima. O resultado era raro, porém não o mais improvável, demonstrando o desconhecimento dos gregos acerca de uma teoria sobre a aleatoriedade (MLODINOW, 2009, p. 36).

Mlodinow (2009, p. 36) também especula que os gregos não desenvolveram um estudo sobre a aleatoriedade porque acreditavam que o futuro se desvelava conforme a vontade dos deuses. Dessa maneira, um entendimento sobre a aleatoriedade seria irrelevante, pois o resultado de um jogo de astrágalos seria interpretado como a vontade dos deuses e não como um produto do acaso. Outra suposição para o não desenvolvimento desse estudo seria a própria filosofia grega, que os permitiu tornarem-se matemáticos importantes:

> [...] eles insistiam na verdade absoluta, provada pela lógica e pelos axiomas, e fechavam a cara ante certos pronunciamentos. Por exemplo, em *Fédon*, de Platão, Símias diz a Sócrates que "argumentos baseados em probabilidades são impostores" e antecipa o trabalho de Kahneman e Tversky, chamando a atenção para o fato de que "a menos que seja observado grande cuidado em seu uso, tendem a ser enganadores – na geometria e também em outros assuntos"[5]. Em *Teeteto*, Sócrates afirma que "argumentos baseados apenas em verossimilhança e probabilidade são suficientes para desclassificar qualquer geômetra"[6]. Porém, mesmo os gregos que acreditavam que os probabilistas possuíam algum valor talvez tenham tido dificuldades em formular uma teoria consistente naqueles dias, em que ainda não havia extensos registros de dados, porque as pessoas têm memória notavelmente fraca ao tentarem estimar a frequência - e, portanto, a probabilidade - de ocorrências passadas. (MLODINOW, 2009, p. 36, destaques e notas de rodapé do autor)

---

[5] PLATÃO. **The Dialogues of Plato**. Boston, Colonial Press, 1899, p.116, apud MLODINOW, 2009, p. 36.
[6] PLATÃO. **Theaetetus**. Montana, Kessinger, 2004, p.25, apud MLODINOW, 2009, p. 36-37.

A cultura romana, por sua vez, se concentrava mais em questões práticas. Mlodinow (2009, p. 40, nota de rodapé nossa) afirma que:

> Cícero[7] talvez tenha sido o maior defensor da probabilidade na Antiguidade. Ele a empregou para argumentar contra a interpretação habitual de que o êxito nas apostas se devia à intervenção divina [...]. Cícero acreditava que um acontecimento poderia ser antecipado e previsto mesmo que sua ocorrência dependesse do mero acaso. [...]
>
> No fim das contas, o principal legado de Cícero na área da aleatoriedade foi o termo que usou, *probabilis*, que acabou por originar o termo empregado atualmente.

M. G. Kendall (1943, apud DAVID, 1962, apud VIALI, 2008, p. 144) chama a atenção para, talvez, o primeiro registro de enumeração de resultados possíveis (espaço amostral). Não obstante a proibição dos jogos de azar pela Igreja Católica, e sem mencionar chance ou probabilidade, o bispo Wibold[8] de Cambrai, em torno do ano 960, associou 56 virtudes aos possíveis resultados do lance de três dados (Figura 2.3).

**Figura 2.3** – As 56 virtudes do bispo Wibold associadas aos resultados do lance de três dados

| [Event] | [Virtus] | [Virtue] | [Sum] | [Event] | [Virtus] | [Virtue] | [Sum] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.1.1. | Karitas, | Charity | 3 | 2.3.5. | Hospitalitas, | Hospitality | 10 |
| 1.1.2. | Fides, | Faith | 4 | 2.3.6. | Parcitas, | Economy | 11 |
| 1.1.3. | Spes, | Hope | 5 | 2.4.4. | Patientia, | Patience | 10 |
| 1.1.4. | Iustitia, | Justice | 6 | 2.4.5. | Zelus, | Zeal | 11 |
| 1.1.5. | Prudentia, | Prudence | 7 | 2.4.6. | Paupertas, | Poverty | 12 |
| 1.1.6. | Temperantia, | Temperance | 8 | 2.5.5. | Lenitas, | Mildness | 12 |
| 1.2.2. | Fortitudo, | Fortitude | 5 | 2.5.6. | Virginitas, | Virginity | 13 |
| 1.2.3. | Pax, | Peace | 6 | 2.6.6. | Reuerentia, | Reverence | 14 |
| 1.2.4. | Castitas, | Chastity | 7 | 3.3.3. | Pietas, | Piety | 9 |
| 1.2.5. | Misericordia, | Mercy | 8 | 3.3.4. | Indulgentia, | Indulgence | 10 |
| 1.2.6. | Obedientia, | Obedience | 9 | 3.3.5. | Oratio, | Prayerfulness | 11 |
| 1.3.3. | Timor, | Fear | 7 | 3.3.6. | Amor, | Love | 12 |
| 1.3.4. | Prouidentia, | Foresight | 8 | 3.4.4. | Iudicium, | Judgment | 11 |
| 1.3.5. | Discretio, | Discretion | 9 | 3.4.5. | Vigilantia, | Vigilance | 12 |
| 1.3.6. | Perseuerantia, | Perseverence | 10 | 3.4.6. | Mortificatio, | Mortification | 13 |
| 1.4.4. | Bonitas, | Goodness | 9 | 3.5.5. | Innocentia, | Innocence | 13 |
| 1.4.5. | Modestia, | Modesty | 10 | 3.5.6. | Contricio, | Contrition | 14 |
| 1.4.6. | Longanimitas, | Long-suffering | 11 | 3.6.6. | Confessio, | Exomologesis | 15 |
| 1.5.5. | Mansuetudo, | Gentleness | 11 | 4.4.4. | Maturitas, | Maturity | 12 |
| 1.5.6. | Benignitas, | Liberality | 12 | 4.4.5. | Sollicitudo, | Concern | 13 |
| 1.6.6. | Sapientia, | Wisdom | 13 | 4.4.6. | Constantia, | Constancy | 14 |
| 2.2.2. | Compunctio, | Remorse | 6 | 4.5.5. | Intellectus, | Understanding | 14 |
| 2.2.3. | Gaudium, | Joy | 7 | 4.5.6. | Suspiratio, | Longing | 15 |
| 2.2.4. | Sobrietas, | Sobriety | 8 | 4.6.6. | Fletus, | Lamentation | 16 |
| 2.2.5. | Delectatio, | Satisfaction | 9 | 5.5.5. | Hilaritas, | Cheerfulness | 15 |
| 2.2.6. | Suauitas, | Sweetness | 10 | 5.5.6. | Compassio, | Compassion | 16 |
| 2.3.3. | Astutia, | Cleverness | 8 | 5.6.6. | Continentia, | Self-control | 17 |
| 2.3.4. | Simplicitas, | Simplicity | 9 | 6.6.6. | Humilitas, | Humility | 18 |

**Fonte:** https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/wibolds-ludus-regularis-a-10th-century-board-game-virtues-outcomes. Acesso em: fev. 2018.

[7] **Marco Túlio Cícero** (**Marcus Tullius Cicero** - 106 a.C, Arpino, Itália - 43 a.C, Fórmias, Itália) - advogado, político, escritor, orador e filósofo romano.

[8] **Wibold** (c. 900, Cambrai, França - 966, Cambrai, França) - arquidiácono da igreja em Noyon, França, investido no cargo de bispo de Cambrai, na fronteira França/Bélgica, em 965, pelo Imperador Romano-Germânico Otto I.

## 2.2 Escola Italiana

Nos Séculos XV e XVI, alguns italianos se destacaram como pioneiros do cálculo probabilístico. Embora não tenham formulado conceitos ou teoremas, limitando-se a resolver situações concretas, eles foram além da simples enumeração de possibilidades para solucionar problemas de comparação de frequências e ganhos em jogos de azar.

David (1962, apud VIALI, 2008, p. 146) comenta que o frei Luca Pacioli[9], que mudou o nome de Luca di Borgo ao entrar na ordem franciscana, embora não tenha publicado nada de original, é reconhecido por uma obra grandiosa para a época. Pacioli viajou pelo Oriente e, posteriormente, ensinou matemática em Perugia, Roma, Nápoles, Pisa e Veneza antes de se tornar um professor de matemática em Milão. Fez parte da corte de Ludovico Sforza[10], duque de Milão, onde conheceu e fez grande amizade com Leonardo Da Vinci[11]. Relacionada à Da Vinci, destaca-se a obra de Pacioli denominada *De Divina Proportione*[12], concluída em 1498, onde há uma impressionante coleção de aproximadamente sessenta ilustrações feitas por Leonardo.

**Figura 2.4 –** Frei Luca Pacioli

**Fonte:** https://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/pacioli.htm
Acesso em: fev. 2018.

[9] **Luca Bartolomeo de Pacioli** (ou **Paciolo**, ou **Luca di Borgo** - 1445, Sansepolcro, Itália - 1517, Sansepolcro, Itália) - monge franciscano e célebre matemático italiano.

[10] **Ludovico Sforza** (**Ludovico, il Moro** - 1452, Vigevano, Itália - 1508, Vale do Loire, França) - foi membro da família Sforza de Milão, Itália; Duque de Milão entre 1494 e 1499. Empregador de Leonardo da Vinci e outros artistas, foi responsável por encomendar A Última Ceia, entre outras obras.

[11] **Leonardo di Ser Piero da Vinci** (1452, Anchiano, Itália - 1519, Ambroise, França) - foi um polímata, e uma das figuras mais importantes do Alto Renascimento, que se destacou como cientista, matemático, engenheiro, inventor, anatomista, pintor, escultor, arquiteto, botânico, poeta e músico.

[12] **De Divina Proportione** - escrito por Luca Pacioli e publicado em Veneza, em 1509. Um excelente trabalho em português sobre o livro foi publicado por BERTATO, F. M. **A "De Divina Proportione" de Luca Pacioli – Tradução anotada e comentada**, disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/280394>.

O trabalho pelo qual Pacioli é famoso no contexto do cálculo de probabilidade é *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proporcionalitá*[13], impresso em Veneza, no ano de 1494.

David (1962, p. 37, tradução e notas de rodapé nossas) afirma que:

> Não há dúvida que muitos, senão todos, dos matemáticos e cientistas daquela época eram plagiadores [...]. Este plágio foi ajudado pela invenção da imprensa[14], pela grande inundação de manuscritos lançados pelo saque de Constantinopla, e pelas várias incursões dos franceses na Itália. Foi aparentemente isso que legitimou a reprodução de um manuscrito inicial com as próprias emendas e melhorias e para transmiti-lo inteiro como o próprio trabalho.
>
> Frei Luca incorporou quase na totalidade o *Liber Abaci*[15] de Leonardo Pisano[16]. Do ponto de vista de probabilidade Luca é importante por um de seus exemplos na *Summa*. “A e B estão jogando um jogo justo de *balla*. Eles concordam em continuar até um deles ganhar seis rodadas. O jogo realmente para quando A ganhou cinco e B três. Como as apostas devem ser divididas?” Dizemos 7:1, mas Pacioli conclui 5:3.

A *Summa*, sem dúvida, inspirou Tartaglia e Cardano a escreverem seus trabalhos sobre a álgebra e a aritmética da época.

Tartaglia[17] teve uma infância difícil. Filho de pais muito pobres, presenciou a tomada de sua cidade natal pelos franceses em 1512. Na invasão, seu pai foi morto e Tartaglia foi deixado como morto, com o crânio fraturado e um corte de sabre profundo que lhe atingiu o palato. Sua mãe o encontrou ainda com vida e, sem recursos para assistência médica, ela lembrou que um cão machucado sempre lambe as próprias feridas para curá-las, e, dessa forma, lambeu as feridas do filho. Mais tarde, Tartaglia atribuiu sua recuperação a esse tratamento.

---

[13] **Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalitá** - escrito por Luca Pacioli, e publicado em Veneza em 1494. A Biblioteca Eletrônica Suíça disponibiliza uma versão de 1523 em: <http://www.e-rara.ch/download/pdf/2683230?name=Summa%20de%20arithmetica%20geometria%20Proportioni%20et%20proportionalita%20nuouamente%20impress>.

[14] A invenção da máquina de impressão em tipos móveis, mais conhecida como **imprensa**, pelo alemão **Johannes Gutenberg**, no século XV, provocou uma enorme revolução: a aceleração do processo de produção de livros. Após a invenção da imprensa, compor e imprimir livros deixaram de ser práticas manuais e artesanais e tornaram-se uma produção em série mecanizada. Gutenberg desenvolveu o seu invento por volta de 1430.

[15] **Liber Abaci** (também chamado ***Liber Abbaci***) é um livro histórico sobre aritmética escrito por Leonardo de Pisa, em 1202. Esse livro introduziu na Europa os numerais indianos, a notação posicional e seu funcionamento, e o zero, aprendido por Fibonacci com os árabes enquanto viveu com o seu pai, Guglielmo Bonaccio, no Norte da África. Na Biblioteca Eletrônica Suíça está disponível uma cópia digital, de uma impressão de 1857, em: <https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/10607990>.

[16] **Leonardo Fibonacci**, também conhecido como **Leonardo de Pisa**, **Leonardo Pisano** ou ainda **Leonardo Bigollo**, mas, na maioria das vezes, simplesmente como **Fibonacci** (filho de Bonacci - c. 1170 - c. 1250)- foi um matemático italiano, tido como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média.

[17] **Niccolò Fontana** (**Tartaglia** – 1499, Bréscia, Itália – 1557, Veneza, Itália) - talentoso matemático italiano. Durante a tomada de Bréscia pelos franceses em 1512, foi atingido por um golpe de sabre que perfurou seu palato e o deixou com um permanente defeito na fala, daí então seu apelido *tartaglia*, que significa *gago*.

**Figura 2.5** – Niccolò Fontana (Tartaglia)

**Fonte:** https://www.biografiasyvidas.com/biografia/t/tartaglia.htm
Acesso em: fev. 2018.

Tartaglia teve de aprender a ler e a escrever sozinho. Não dispondo de recursos para comprar papel, escrevia nas lápides do cemitério com carvão. Dessa maneira, ele aprendeu latim, grego, matemática e mecânica.

Na obra intitulada *General Trattato di Numeri et Misure*[18], Tartaglia trata o problema dos pontos de Pacioli e, também, chega à resposta 5:3, provavelmente trabalhando a questão apenas como um exercício de proporções.

Contemporâneo de Tartaglia, Girolamo Cardano[19] é uma das figuras mais controversas da história da matemática, de acordo com sua autobiografia e com escritos de autores e biógrafos de sua época. Filho ilegítimo do jurista Fazio Cardano[20], começou sua tumultuada vida profissional como médico, mas, paralelamente, dedicava-se à matemática. Ocupou cátedras importantes nas Universidades de Pavia e Bolonha.

Extremamente talentoso e versátil, Cardano havia publicado 131 livros sobre diversos assuntos em medicina, matemática, ciências e filosofia. Dentre as obras publicadas na época, a mais importante, sem dúvida, é *Ars Magna*[21], o primeiro grande tratado em latim dedicado exclusivamente à álgebra, onde pela primeira vez são mostrados métodos de solução

---

[18] **General Trattato Numeri di et Misure** - escrito por Niccolò Fontana e publicado em Veneza em 1556. Uma consulta eletrônica da obra está disponível em: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?url=/permanent/library/H5BAMGAN/>.

[19] **Girolamo Cardano** (**Gerolamo**, **Geronimo** ou **Jerome Cardan** - 1501, Pavia, Itália - 1576, Roma, Itália) - foi um polímata italiano. Homem extremamente talentoso e versátil, escreveu mais de 200 trabalhos sobre medicina, matemática, física, astronomia, filosofia, religião e música.

[20] **Fazio Cardano** (**Facio** ou **Bonifacius** - 1444, Gallarate, Itália - 1524, Milão, Itália) - jurista, médico e matemático italiano. Na matemática fez estudos sobre geometria projetiva. Foi amigo de Leonardo da Vinci e pai de Girolamo Cardano.

[21] **Artis Magnæ Sive de Regulis Algebraicis** - escrito por Girolamo Cardano e publicado em Pavia, Itália, 1545. Disponível em: <http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operaomnia/vol_4_s_4.pdf>.

de equações de terceiro e quarto graus[22]. Mas sobre a autoria desses métodos de solução, há uma complexa disputa envolvendo Cardano, Tartaglia, Scipione del Ferro[23] e Ludovico Ferrari[24].

**Figura 2.6 –** Girolamo Cardano

**Fonte:** https://www.biografiasyvidas.com/biografia/c/cardano.htm Acesso em: fev. 2018.

Na sua autobiografia, Cardano afirma ter queimado mais de 170 manuscritos não publicados que considerou serem sem interesse. Após sua morte, encontraram mais 111 textos sobreviventes. Um deles, escrito décadas antes e aparentemente revisado muitas vezes, era um tratado em 32 capítulos curtos intitulado *Liber de Ludo Aleae*[25] (O Livro dos Jogos de Azar), que foi o primeiro na história a tratar da teoria da aleatoriedade. As pessoas já apostavam e lidavam com outras incertezas há milhares de anos, mas até a chegada de Cardano, ninguém jamais realizara uma análise racional do curso seguido pelos jogos ou outros processos incertos. O discernimento de Cardano sobre o funcionamento do acaso incorporava um princípio chamado Lei do Espaço Amostral (MLODNOW, 2009, p. 58 e DAVID, 1962, p. 53).

Mlodinow (2009, p. 58) destaca que o *Liber de Ludo Aleae*

> tratava de cartas, dados, gamão e astrágalos. Não é perfeito. Suas páginas refletem a personalidade do autor, suas ideias desvairadas, seu temperamento instável, a paixão com que enfrentava cada empreendimento - e a turbulência de sua vida e sua época. O livro considera apenas os processos - como o lançamento de um dado ou a escolha de uma carta ‑ nos quais um resultado é

---

[22] No banco de dissertações do PROFMAT há um excelente trabalho sobre o assunto: SANTOS, S. R. **As Equações Polinomiais do 3º e 4º Graus: Suas Histórias e Soluções**. São Cristóvão: UFS, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=30295>.

[23] **Scipione del Ferro** (1465, Bolonha, Itália - 1526, Bolonha, Itália) – matemático italiano a quem se atribui a solução do caso particular de equação do terceiro grau $x^3 + m \cdot x = p$.

[24] **Ludovico Ferrari** (1522, Milão, Itália - 1565, Bolonha, Itália) – matemático italiano aprendiz de Girolamo Cardano. Ajudou Cardano na solução das equações quadráticas de raízes negativas, das equações cúbicas e é imensamente responsável pelo desenvolvimento do método de solução de equações quárticas.

[25] **Liber de Ludo Aleae –** escrito pro Girolamo Cardano por volta de 1525, foi publicado postumamente em 1663, Basiléia, Suíça. Disponível em: <http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operaomnia/vol_1_s_10.pdf>.

> tão provável quanto outro. E Cardano se equivoca em alguns pontos. Ainda assim, a obra representa um primeiro avanço, o primeiro êxito na tentativa humana de compreender a natureza da incerteza. E o método de Cardano para investir contra as questões ligadas ao acaso é surpreendente, tanto por sua eficácia como por sua simplicidade.

Na história da probabilidade também merece destaque Giovanni Francesco Peverone[26]. Em 1558, um ano após a morte de Tartaglia e inspirado, possivelmente, pelo *General Trattato* ou pela *Summa*, publicou *Due Brevi e Facili Trattati, il Primo d'Arithmetica; l'Altro di Geometria*[27]. Na parte aritmética do tratado, encontra-se novamente um problema de divisão de apostas. Colocando-se A e B jogando por 10 vitórias, A tendo ganhado 7 vezes e B ganhado 9 interrompe-se o jogo. Mesmo com informações iniciais diferentes, o problema é semelhante ao do *Summa*, pois um jogador precisa de três vitórias e outro apenas uma. Ele seguiu um método correto, mas ao contrário de seu próprio raciocínio, deu a resposta errada, a qual foi destacada por M. G. Kendall como um dos grandes enganos no campo da matemática. “[...] se ele apenas seguisse sua própria regra e considerasse a probabilidade de ganhar mais de perto, teria resolvido esse simples problema, em essência, quase um século antes de Fermat e Pascal.” (KENDALL, 1956, p.7 apud FAVINO, 2016).

O próximo registro relevante do campo da probabilidade está em um fragmento de autoria de Galileu Galilei[28], em seu estudo *Sopra le Scoperte de i Dadi*[29].

Galileu realizou o estudo, muito provavelmente, a pedido do Grão-Duque de Toscana[30]. O problema analisado foi o desequilíbrio entre a soma 9 e a soma 10 no lançamento de três dados. Por força da prática, os jogadores haviam percebido que a soma 10 ocorria mais vezes que a soma 9, embora (aparentemente) houvesse seis combinações para formar cada resultado:

SOMA 9: [1;2;6], [1;3;5], [1;4;4], [2;2;5], [2;3;4] e [3;3;3]

SOMA 10: [1;3;6], [1;4;5], [2;2;6], [2;3;5], [2;4;4] e [3;3;4]

---

[26] **Giovanni Francesco Peverone** (1509, Cuneo, Itália - 1559, Milão, Itália) - matemático, nobre, conselheiro e prefeito de Cuneo.

[27] **Due Brevi e Facili Trattati, il Primo d'Arithmetica; l'Altro di Geometria ne I quali si contengono alcune cose nuove piacevoli e utili, si a gentilhuomini come artegiani** - escrito por Giovanni Francesco Peverone e publicado em Lyon, França, em 1558. Disponível em: <https://archive.org/details/bub_gb__chzVM-mpKAC>.

[28] **Galileu Galilei** (**Galileo Galilei**) - (1564, Pisa, Itália - 1642, Florença, Itália) - personagem fundamental da Revolução Científica, foi notabilíssimo físico, matemático, astrônomo e filósofo.

[29] **Sopra le Scoperte de i Dadi** - escrito por Galileu Galilei, provavelmente entre 1612 e 1623. Artigo colecionado em La Opera di Galileo Galilei. Edizione Nazionale: Firenze, 1718. Vol. VIII, pag. 591-594, disponível em: <https://archive.org/details/agh6462.0008.001.umich.edu/>.

[30] **Cosme II de Médici** (1590, Florença, Itália - 1621, Florença, Itália) - Grão-Duque de Toscana de 1609 a 1621 e patrono de Galileu Galilei.

Isso parecia um problema sem solução, fazendo com que a prática desafiasse a lógica, pois quanto mais jogavam, mais ficava aparente a vantagem da soma 10. Galileu notou que havia mais inversões, ou modos diferentes, de se obter cada uma dessas combinações, verificando que o total para a soma 10 era de 27, enquanto que para a soma 9 era de 25 inversões. Por exemplo, para se obter a somatória 10 com as faces 1,3 e 6, havia seis possibilidades ([1;3;6], [1;6;3], [3;1;6], [3;6;1], [6;1;3] e [6;3;1]), e não apenas uma combinação, como imaginavam os jogadores.

**Figura 2.7** – Galileu Galilei

**Fonte:** https://www.biografiasyvidas.com/monografia/galileo/
Acesso em: fev. 2018.

A avalanche de ideias geradas pelo Renascimento italiano não diminuiu após a morte de Galileu, mas se observou que a preeminência nas artes e nas ciências estava migrando da Itália para a França. O renascimento na França foi mais tardio que o italiano, e muito provavelmente foi ajudado pelos diversos saques de manuscritos, livros e ideias que sucessivas incursões militares francesas realizaram na Itália.

Em seu estudo, Galileu escreveu como se o cálculo de uma probabilidade fosse algo óbvio, e seu trabalho sugere que quase qualquer matemático poderia estabelecer o método. Embora Galileu não tenha publicado esse fragmento, F. N. David (1962, p. 70-71) especula que possivelmente o cálculo de uma probabilidade já era de conhecimento comum entre os matemáticos italianos e, portanto, de alguns matemáticos franceses.

## 2.3 Pascal e Fermat

Enquanto um gigantesco passo foi dado pelos italianos com conceitos primitivos de espaço amostral e equiprobabilidade, o próximo passo do desenvolvimento da Teoria da

Probabilidade é, sem dúvida, dos franceses. E um dos maiores matemáticos franceses de o Século XVII foi Pierre de Fermat[31].

**Figura 2.8** – Pierre de Fermat

**Fonte:** https://twitter.com/fermatslibrary/
Acesso em: mar. 2018

Fermat era filho de um comerciante de couro e recebeu uma educação privilegiada, iniciada em casa, depois no mosteiro franciscano de Grandselve, e então na Universidade de Toulouse, onde se formou em direito. Foi nomeado *Conseilleur de la Chambre des Requêtes du Parlement* (Conselheiro Parlamentar) de Toulouse em maio de 1631, com a idade de 30 anos, e promovido a Conselheiro do Rei, ainda no *Parlement* de Toulouse, em 1648. Descrito como um homem calmo e amigável, passou toda a sua vida profissional no serviço público. Nas horas vagas estudou literatura e matemática. Seus biógrafos falam de sua "singular erudição": tinha conhecimento das principais línguas e da literatura da Europa continental; fez emendas a textos gregos e latinos; escreveu versos em latim, francês e espanhol; e na matemática realizou notáveis contribuições, principalmente nas áreas hoje denominadas de Teoria dos Números, Geometria Analítica e Teoria da Probabilidade.

Embora tenha publicado muito pouco durante a vida, Fermat manteve uma intensa correspondência com muitos dos principais cientistas de seu tempo e, dessa maneira, exerceu considerável influência sobre seus contemporâneos.

O nome de Blaise Pascal[32] aparece sempre ligado ao de Fermat como um dos "descobridores conjuntos" do Cálculo de Probabilidade. Filho de Étienne Pascal[33], muito cedo

---

[31] **Pierre de Fermat** (1601, Beaumont-de-Lomagne, França - 1665, Castres, França) - foi magistrado e entusiasta matemático e cientista francês.

[32] **Blaise Pascal** (1623, Clermont-Ferrand, França - 1662, Paris, França) - foi notável matemático, físico, inventor, filósofo e teólogo católico francês.

[33] **Étienne Pascal** (1588, Clermont-Ferrand, França - 1651, Paris, França) - foi fiscal de tributos e matemático francês. Pai de Blaise Pascal.

revelou aptidão extraordinária para a matemática. A vida de Blaise Pascal foi contada por sua irmã, que mais tarde veio a se tornar Madame Périer[34]. Ela o descreve como um garoto de grande fragilidade física e que, devido a isso, era mantido em casa por seu pai como garantia contra algum esforço excessivo. Seu pai decidiu ainda que a educação do filho deveria de início restringir-se ao estudo de línguas, não incluindo nada, portanto, de matemática. Mas isso provocou nele uma curiosidade muito grande, de forma que começou a estudar geometria às escondidas do pai, descobrindo por conta própria muitas das propriedades das figuras geométricas. Quando um dia Étienne descobriu as atividades geométricas do filho, ficou tão feliz com a capacidade do garoto que o presenteou com um exemplar dos *Elementos* de Euclides[35], que o jovem Pascal logo dominou.

**Figura 2.9** – Blaise Pascal

**Fonte:** https://www.historyly.com/historical-figures/blaise-pascal-inventions/ Acesso em: mar. 2018.

Aos quatorze anos de idade Pascal já participava de uma reunião semanal de um grupo de matemáticos franceses, germe da futura Academia Francesa. Aos dezesseis escreveu um trabalho sobre secções cônicas. Entre dezoito e dezenove anos de idade, inventou a primeira máquina de calcular, que idealizou para ajudar seu pai nas funções de fiscal de tributos. Aos vinte e um anos, interessou-se por trabalhos sobre pressão de fluidos.

Essa espantosa e precoce atividade subitamente chegou ao fim em 1650, quando, por estar com a saúde debilitada, Pascal decidiu abandonar suas pesquisas em matemática e ciências e se dedicar à contemplação religiosa. Três anos mais tarde, porém, retornou

[34] **Françoise Gilberte Pascal** (1620, Clermont-Ferrand, França - 1687, Paris, França) – **Madame Périer** por casamento, em 1641, com Rouen Florin Périer (ca. 1610 - 1672). Irmã mais velha de Blaise Pascal, escreveu *La Vie de Monsieur Paschal*, publicado em 1684.

[35] **Euclides de Alexandria** (*Εὐκλείδης*, *Eukleidēs*, c. 300 a.C.) - foi professor, matemático platónico e escritor possivelmente grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria". Além de sua principal obra, Os Elementos, Euclides também escreveu sobre perspectivas, seções cônicas, geometria esférica, teoria dos números e rigor.

brevemente à matemática. Nessa época escreveu seu *Traité du Triangle Arithmétique*[36] e, juntamente com Fermat, lançou os fundamentos da Teoria da Probabilidade moderna.

Os problemas que motivaram os esforços de Fermat e Pascal no campo da probabilidade foram apresentados a este por Antoine Gombaud[37], que ganhava a vida jogando e se autodenominava Cavaleiro de Méré.

L. Viali (2008, p. 148) destaca que:

> Segundo boa parte das fontes consultadas foi um destes dois problemas (1) **problema dos pontos** (**divisão da aposta**) e (2) o **dos dados** que motivou a correspondência entre Pascal e Fermat e, portanto iniciou a teoria da probabilidade. Acredito que saber se foi o problema um ou o dois ou talvez ambos que tenha motivado a correspondência entre os dois ilustres matemáticos franceses não é o mais relevante. O importante é que o fato desencadeou um interesse crescente pelo assunto, levando ao nascimento de mais uma disciplina matemática.

F. N. David (1962) comenta que certamente na primeira carta de Pascal (perdida) foi tratado o seguinte problema: Um jogador pretende conseguir (pelo menos) um 6 em oito lançamentos. Suponha que ele tenha feito três lances sem sucesso. Que proporção do prêmio deve ter sob esta condição? Ele deve desistir de seu quarto lance?

A suposição de que o citado problema estaria na primeira carta de Pascal se deve à resposta de Fermat, transcrita na íntegra abaixo (FERMAT, 1654, apud DAVID, 1962, p. 83, tradução nossa):

> *"Senhor, se eu me comprometo a fazer um ponto com um único dado em oito lances, e se concordarmos, depois que as apostas forem feitas, que não poderei jogar o primeiro lançamento, então eu deveria tirar do prêmio um sexto do total como recompensa por desistir do primeiro lançamento. E se concordarmos depois disso que eu não farei o segundo lance, eu deveria, para minha indenização, sacar um sexto do restante, que é 5/36 do total. E se concordarmos que não vou jogar um terceiro lance, eu deveria sacar um sexto do restante, que é 25/216 do total. E se depois disso concordarmos que eu não jogarei um quarto lance, eu devo sacar um sexto do restante, que é 125/1296 do total e eu concordo com você que este é o valor do quarto lance, supondo que já tenha feito os lançamentos anteriores. Mas você me propõe no último exemplo da sua carta (cito suas próprias palavras): 'Se eu me comprometo a encontrar um 6 em 8 lances e eu joguei 3 sem sucesso, se meu oponente me propõe que eu não deveria jogar meu quarto lance e ele quer me pagar porque eu quero fazer isso, chegará a mim com 125/1296 do total de nossas participações.'*
>
> *Isto, no entanto, não é verdade de acordo com minha teoria. Pois neste caso, os três primeiros lances não trouxeram nada ao apostador, toda a aposta permanece no jogo, e aquele que joga o dado e que concorda em não jogar o quarto lance deve tomar como recompensa um sexto do total. E se ele tivesse*

[36] **Traité du Triangle Arithmétique** - trabalho matemático de Blaise Pascal, escrito em 1654, mas só foi publicado em 1665. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/bub_gb_UqgUAAAAQAAJ>.
[37] **Antoine Gombaud**, denominado **Chavalier de Méré** (1607 - 1684) - foi um nobre e inveterado jogador francês.

> *jogado quatro lances sem atingir o ponto procurado e nós concordarmos que ele não deve jogar o quinto, ele ainda terá o mesmo um sexto do total para sua indenização. Para toda a quantia restante no jogo, ela não se segue apenas do princípio, mas é senso comum que cada lançamento deve dar igual vantagem.*
>
> *Eu te imploro, portanto, para me dizer se concordamos na teoria, como eu acredito, e se nos diferem apenas a aplicação."*

Em outra carta, de Pascal a Fermat, ele discorre sobre o seguinte problema: dois jogadores, de habilidades equivalentes, disputam um jogo de três pontos onde cada um fez uma aposta de 32 moedas. Como a aposta deve ser dividida se eles decidirem interromper o jogo antes do final? A solução proposta por Pascal foi analisar todas as possibilidades futuras do desenvolvimento do jogo. Pascal escreve (PASCAL, 1654, apud DAVID, 1962, p. 85, tradução nossa):

> *"Suponha que o primeiro jogador tenha ganhado 2 pontos e o segundo jogador 1 ponto. Eles agora têm que jogar por um ponto nesta condição, que se o primeiro jogador ganha, ele pega todo o dinheiro que está em aposta, ou seja, 64 moedas, e se o segundo jogador ganha cada jogador tem 2 pontos, então eles estão em termos de igualdade, e se eles abandonarem o jogo cada um deve tomar 32 moedas. Assim, se o primeiro jogador ganha, 64 moedas pertencem a ele, e se ele perder, 32 moedas pertencem a ele. Se então os jogadores não quiserem jogar este jogo, mas interromper sem jogar, o primeiro jogador diria para o segundo: 'Tenho certeza de 32 moedas mesmo se eu perder este jogo, e quanto aos outros 32 moedas talvez eu deva tê-los e talvez você os tenha; as chances são iguais. Vamos dividir essas 32 moedas igualmente e dê-me também os 32 moedas dos quais eu tenho certeza.' Assim, o primeiro jogador terá 48 moedas e o segundo 16."*

F. N. David (1962, p. 86, tradução nossa) continua:

> Ele agora supõe que o primeiro jogador ganhou dois pontos e o segundo jogador nenhum, e que eles estão prestes a jogar um ponto. A condição é, então, que se o primeiro jogador ganha esse ponto, ele ganha o jogo e leva 64 moedas, e se o segundo jogador ganha o ponto, eles ficam na posição já examinada, em que o primeiro jogador tem direito a 48 e o segundo a 16. Assim, se eles não quiserem jogar, o primeiro jogador poderia dizer para o segundo: "Se eu ganhar o ponto ganho 64 e se perder eu estou habilitado a 48. Dê-me as 48 dos quais tenho certeza e vamos dividir as outras 16 igualmente pois nossas chances de ganhar este ponto são iguais." Assim, o primeiro jogador terá 56 e o segundo 8 moedas. Finalmente suponha que o primeiro jogador ganhou um ponto e o segundo nenhum. Se eles continuarem a jogar por mais um ponto e o primeiro jogador ganha eles estarão na condição já examinada (56:8) enquanto se o segundo jogador vencer, eles terão um ponto cada e terão o direito de dividir (32:32). Assim, se eles não jogam este ponto o primeiro jogador poderia dizer: "Dê-me 32 e divida 56-32 igualmente", de modo que ele teria direito a 32 + 12 = 44. Este é o conteúdo do que Pascal escreve para Fermat sobre o específico problema que eles estão discutindo, e até agora não há nada de novo. Ele agora passa a generalizá-lo, possivelmente um pouco inseguro.

Pascal escreveu o *Traité du Triangle Arithmétique* no período dessas correspondências[38] e, muito provavelmente, motivado pelos problemas nelas discutidos. Ele colecionou diversas propriedades do triângulo aritmético e foi o primeiro a aplicar tais propriedades na solução de problemas de cálculo de chances em jogos de azar. Chamou essa nova disciplina de “geometria do acaso”, que mais tarde, veio a se tornar o cálculo de probabilidades. Devido a repercussão do *Traité du Triangle Arithmétique*, o triângulo aritmético ficou conhecido no ocidente como Triângulo de Pascal. No entanto, o padrão de números que o forma já era conhecido muitos séculos antes. Historiadores apontam que a discussão sobre esse padrão de números teria surgido no contexto dos estudos indianos sobre análise combinatória e de estudos gregos sobre números figurados, e o padrão numérico triangular, bem como várias de suas propriedades, já eram bastante conhecidos nas culturas árabes e chinesas medievais.

## 2.4 Huygens

Christiaan Huygens[39] foi quem escreveu a primeira publicação em Teoria da Probabilidade: um pequeno livro intitulado *De Ratiociniis in Ludo Aleae*[40], onde apresentou de forma sistemática as novas proposições trazidas pelos problemas discutidos por Pascal e Fermat, definiu as regras da probabilidade clássica e foi quem introduziu o conceito de esperança matemática.

**Figura 2.10 –** Christiaan Huygens

**Fonte:** http://www.bilgiyasam.com/christiaan-huygens-kimdir-huygensin-hayati-ve-eserleri-2172/. Acesso em: abr. 2018.

---

[38] As correspondências entre Fermat e Pascal , traduzidas para o inglês, estão disponíveis em: <https://www. york. ac.uk/depts/maths/histstat/pascal.pdf>.

[39] **Christiaan Huygens** (1629, Haia, Países Baixos - 1695, Países Baixos) – foi um físico, matemático, astrônomo, horologista e inventor neerlandês.

[40] **De Ratiociniis in Ludo Aleae** – escrito em 1657 por Christiaan Huygens, e publicado no mesmo ano como apêndice no livro *Exercitationum Mathematicarum* de Frans van Schooten. Disponível em: <https://archive. org/details/DeRatiociniisInLudoAleae> e <https://archive.org/details/ita-bnc-mag-00001383-001>.

Huygens nasceu em uma importante família holandesa, e desde cedo teve acesso aos mais importantes grupos científicos de sua época (GADELHA, 2004, p. 5). Recebeu de seu pai suas primeiras instruções em matemática e mecânica aos treze anos de idade, despertando interesse e habilidade em ambas.

> Em 1655, ano em que descobriu a primeira lua de Saturno, ele [Huygens] fez sua primeira visita à Paris onde tomou conhecimento da correspondência de Pascal e Fermat e dos problemas de probabilidade nela investigados. Aparentemente desconhecendo os detalhes dos resultados de Pascal e Fermat (publicados somente em 1679), ele resolveu uma série de 14 problemas relacionados a jogos de azar (sem usar análise combinatória), compondo seu livreto que se tornou famoso, reeditado diversas vezes e usado até o século *18* [*sic*] como um livro de introdução à teoria de probabilidade. Huygens talvez tenha sido o primeiro a perceber claramente o surgimento de uma importante teoria matemática quando, justificando a publicação de *Ludo Aleae* a van Schooten, escreveu que "*... não estamos tratando apenas com jogos mas com os fundamentos de uma nova teoria, tanto profunda como interessante.*" (GADELHA, 2004, p. 5)

Gadelha (2004, p. 5) ainda relata que outra contribuição importante de Huygens foi em 1669, quando elaborou com base em dados estatísticos levantados por John Graunt[41] na obra *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality*[42], uma curva de mortalidade, na qual definiu a noção de vida média e probabilidade de sobrevida que fundamenta cálculos atuariais, sendo o primeiro a aplicar probabilidade à estatística demográfica. Seu trabalho influenciou vários matemáticos da época, notadamente Jakob Bernoulli, e teve papel fundamental, comparável aos de Pascal e Fermat, para estabelecer a teoria de probabilidade.

**Figura 2.11** – John Graunt

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Graunt
Acesso em: abr. 2018.

---

[41] **John Graunt** (1620, Londres, Inglaterra - 1674, Londres, Inglaterra) - foi um cientista e demógrafo britânico, precursor na construção de Tábuas de Mortalidade.

[42] **Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality -** escrito por John Graunt e publicado em 1662, lança as bases para a demografia e torna-se uma das obras pioneiras no estudo atuarial de mortalidade. Esta obra continha um rudimento de tábua de vida, obtida através de dados sobre enterros em Londres. Consulta eletrônica disponível em: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?url=/permanent/echo/mpi_rostock/Graunt_1665/>.

## 2.5 Escola Inglesa

Na Inglaterra, John Wallis[43], professor ocupante da Cátedra Saviliana de Geometria da Universidade de Oxford, de 1649 a 1703, também fez estudos sobre probabilidade. O livro pelo qual é considerado um dos grandes matemáticos de seu tempo é *Arithmetica Infinitorum*[44], que muito ajudou Newton na invenção do cálculo diferencial e integral. Do ponto de vista da Probabilidade, o livro *A Treatise of Algebra, Both Historical and Practical*[45] é a mais importante de suas obras, na qual demonstra como o triângulo aritmético pode ser usado para encontrar a combinação de $n$ coisas tomadas $r$ de cada vez ($n \geq r$).

**Figura 2.12** – John Wallis

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Wallis
Acesso em: abr. 2018.

A segunda metade do Século XVII viu florescer Isaac Newton[46]. Ele era um menino de apenas doze anos quando Pascal e Fermat foram correspondentes, e tomou conhecimento dos problemas propostos por Huygens.

Nessa época, na Inglaterra, havia grande interesse pela utilidade prática imediata da matemática, em especial o cálculo de anuidades, que serviam para venda de títulos do governo britânico. Uma pequena contribuição para a teoria das anuidades e cálculos atuariais parece ter sido o único legado de Newton sobre o assunto (DAVID, 1962, p. 125). Haking (2006) completa afirmando que "...embora a contribuição direta de Newton para o entendimento da probabilidade tenha sido insignificante, sua influência indireta pode ter sido grande."

---

[43] **John Wallis** (1616, Ashford, Inglaterra - 1703, Oxford, Inglaterra) foi um matemático e criptógrafo britânico, cujos trabalhos sobre o cálculo foram precursores aos de Isaac Newton. Foi membro fundador da Royal Society.
[44] **Arithmetica Infinitorum** – escrito por John Wallis e publicado em 1656, trata de novo método para a época (aritmética de infinitesimais) que utilizava para realizar quadratura de curvas. Cópia digital disponível em: <https://archive. org/details/ArithmeticaInfinitorum>.
[45] **A Treatise of Algebra, Both Historical and Practical** – escrito por John Wallis e publicado em 1685. Cópia digital disponível em: <https://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-8842>.
[46] **Isaac Newton** (1643, Lincolnshire, Inglaterra – 1727, Londres, Inglaterra) - notabilíssimo cientista inglês. Foi astrônomo, alquimista, filósofo natural, teólogo, e mais reconhecido como físico e matemático.

**Figura 2.13** – Isaac Newton

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
Acesso em: abr. 2018.

Newton também trocou correspondência com Samuel Pepys[47] acerca de um problema sobre lançamento de dados. As cartas mostram que as ideias de Newton, claramente expressas, ainda eram elementares. Embora, nessa correspondência, não tenha apresentado cálculos explícitos na forma do triângulo aritmético ou de coeficientes binomiais, utiliza um método de enumeração muito provavelmente emprestado de Wallis. (DAVID, 1962, p. 127).

## 2.6 Família Bernoulli

Com um número surpreendente de matemáticos e cientistas entre seus membros, a família Bernoulli, da Suíça, ocupa um lugar ímpar na história da ciência (em particular na da matemática).

Os Bernoulli chegaram a Basiléia, na Suíça, refugiados da cidade de Antuérpia, Bélgica, onde o governo do Duque de Alba[48] estava perseguindo aqueles da fé protestante (DAVID, 1962, p. 130). O progenitor Nicolaus Bernoulli[49] se estabeleceu como comerciante de especiarias e sua esposa era ligada a uma família de banqueiros.

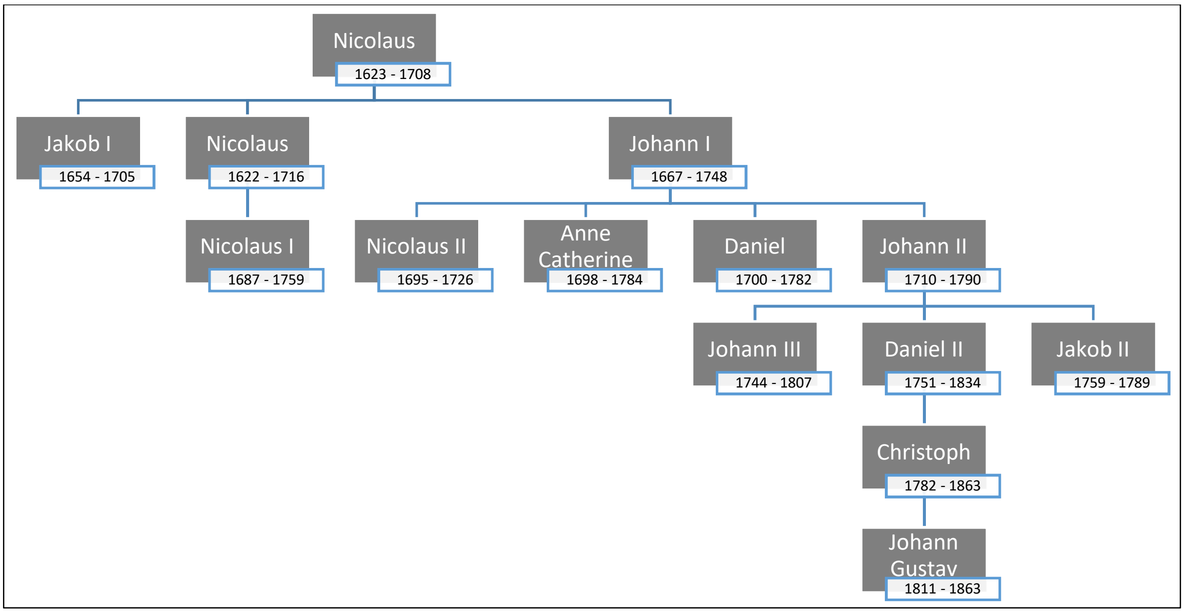
---

[47] **Samuel Pepys** (1633, Londres, Inglaterra – 1703, Londres, Inglaterra) - funcionário público inglês, famoso por seu diário, que é uma combinação de informações pessoais e revelações, como testemunha ocular, de grandes eventos.

[48] **Fernando Álvarez de Toledo y Pimentel** ou **Ferdinandus Toletanus Dux Albanus** (1507, Piedrahíta, Espanha - 1582, Lisboa, Portugal) - chamado o Gran Duque de Alba, foi militar e político castelhano que se notabilizou na luta contra os protestantes.

[49] **Nicolaus Bernoulli** (Niklaus, Nicholas ou Nicolas – 1623, Basiléia, Suíça - 1708, Basiléia, Suíça) – comerciante e político suíço. Pai dos grandes matemáticos Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli.

**Figura 2.14** – Resumo da Árvore Genealógica da Família Bernoulli




**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Família_Bernoulli (adaptado). Acesso em: jul. 2018.

Filho de Nicolaus, Jackob Bernoulli[50], primeiro do grupo de estudiosos da família, foi destinado por seus pais para ser um ministro da Igreja Reformada, e se formou em teologia. Em algum período dessa época, diz-se que ele encontrou uma cópia de Euclides e, ao estudá-la, desejou ser um matemático. Ele se correspondia com Leibniz[51] e foi um dos primeiros a aprender e aplicar aos problemas o novo cálculo diferencial/infinitesimal.

**Figura 2.15** – Jakob Bernoulli

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Jakob_Bernoulli
Acesso em: jul. 2018.

Em 1687, Jakob foi nomeado para a cátedra de matemática na Universidade de Basiléia, mantendo esta posição até sua morte.

---

[50] **Jakob Bernoulli** (Jacob, Jacques ou Jacob I – 1654, Basiléia, Suíça - 1705, Basiléia, Suíça) – notável matemático suíco, e primeiro da família Bernoulli com significativas contribuições às ciências.

[51] **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646, Leipzig, Alemanha - 1716, Hanover, Alemanha) - foi um polímata, filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão. É creditado a ele, e também a Newton, o desenvolvimento do cálculo moderno.

F. N. David (1962, p. 131, tradução e nota de rodapé nossa) menciona que:

> [...] ele foi tão bem-sucedido como professor que estudantes de toda a Europa vieram ser seus alunos. Recebeu muitas honras acadêmicas e científicas, mas apesar do reconhecimento por seus contemporâneos de suas realizações como matemático, é de se duvidar se seus anos na cadeira de matemática foram felizes. Johann Bernoulli[52], irmão de Jakob, também tinha interesse em matemática e era extremamente ciumento de seu irmão. Mesmo entre os contenciosos e briguentos dos Séculos XVII e XVIII, os irmãos Bernoulli se destacavam pela amargura e veemência de suas controvérsias. O método de desafio para um problema, que parecia haver desvanecido nas academias francesas como meio de disseminar informações, foi revivido e desenvolvido por Jakob e Johann como um método de guerra intelectual, com os dois irmãos geralmente em lados opostos. Leibniz, em vez de ser um pacificador, parece ter promovido e encorajado este conflito. A partir disso, no entanto, surgiu uma série de desenvolvimentos matemáticos, incluindo a origem e o delineamento do cálculo diferencial, sendo a maioria deles, possivelmente, atribuível a Jakob.

Em algum momento no início de sua carreira como matemático, Jakob se interessou pelo cálculo da probabilidade. Ele foi profundamente influenciado pelo livro *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, de Huygens. Sabe-se que, antes de 1685, ele começou a trabalhar nos problemas relacionados aos jogos de azar, pois nesse ano publicou vários artigos sobre o assunto. Provavelmente o trabalho pelo qual Jakob é mais conhecido entre os probabilistas, o *Ars Conjectandi*[53], foi escrito durante este período de sua vida e que ele reteve a publicação. Quando morreu em 1705, o manuscrito estava quase completo, e Nicolaus I[54], seu sobrinho, foi convidado a editá-lo com a intenção de publicação. Nicolaus I estava na época com apenas 18 anos e tinha se graduado sob orientação de Jakob. Provavelmente era a pessoa mais adequada para fazer a edição, mas a responsabilidade era muito grande para um jovem.

Em 1709, Nicolaus I doutourou-se pela Universidade de Basiléia com a tese *Dissertatio Inauguralis Mathematico-Juridica de Usu Artis Conjectandi in Jure*[55], aplicando ao Direito as idéias desenvolvidas por seu tio Jakob sobre a probabilidade de proposições. Durante 1710-1713, realizou intensa correspondência com Pierre Montmort[56] mostrando que, de fato, era um competente probabilista.

---

[52] **Johann Bernoulli** (John, Jean ou Johann I – 1667, Basiléia, Suíça - 1748, Basiléia, Suíça) – notável matemático suíço. Citado como ciumento e perverso, foi um dos professores mais inspirados de seu tempo contribuindo grandemente com vários ramos da matemática, física (principalmente óptica), astronomia e química.

[53] **Ars Conjectandi** - escrito por Jakob Bernoulli e publicado postumamente em 1713 por seu sobrinho Nicolaus Bernoulli (Nicolaus I). Disponível em: <https://ia902806.us.archive.org/3/items/BRIE000602_TO0324_PNI-2761_000000/BRIE000602_TO0324_PNI-2761_000000.pdf>.

[54] **Nicolaus I Bernoulli** (Niklaus, Nicholaus ou Nicolas – 1687, Basiléia, Suíça - 1759, Basiléia, Suíça) – proeminente matemático suíço.

[55] **Dissertatio Inauguralis Mathematico-Juridica de Usu Artis Conjectandi in Jure** - escrito por Nicolaus I Bernoulli em 1709. Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1303890>.

[56] **Pierre Rémond de Montmort** (1678, Paris, França – 1719, Paris, França) - matemático francês, membro da Royal Society e da Academia Francesa de Ciências.

F. N. David (1962, p. 133) supõe que a inveja que Johann sentia do irmão perduraram mesmo depois da morte deste. Possivelmente, devido a esse ambiente de animosidades na família, somente em 1713 Nicolaus I, pressionado por outros matemáticos, publicou o *Ars Conjectandi*. Nessa obra, a visão frequentista da probabilidade foi iniciada e uma forma fraca da Lei dos Grandes Números[57] (atualmente conhecida como Teorema de Bernoulli) foi enunciada.

## 2.7 Outros Matemáticos Europeus

No início do Século XVIII, também merece destaque Pierre Montmort que, em 1708, havia publicado *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*[58]. O trabalho aplicou ideias de combinatória e probabilidade para analisar vários jogos de azar populares naquele período.

Depois de apresentar sua tese para o grau de doutor em 1709, Nicolaus I, em viagem à Paris, tornou-se amigo de Montmort e então passaram a se corresponder. Essa correspondência foi publicada na segunda edição de *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, em 1713, e foi bastante profícua quanto à discussão de questões de probabilidade decorrentes dos problemas apresentados no livro de Montmort. Nessas correspondências, Nicolaus I também introduziu o problema que viria a se tornar o Paradoxo de São Petersburgo[59].

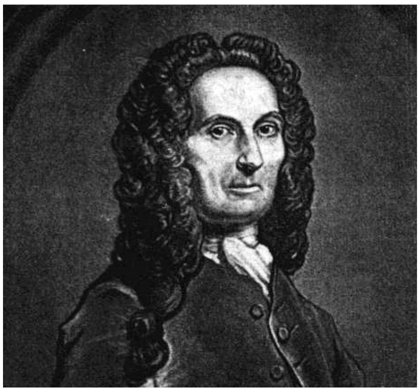
Opinião divergente sobre o trabalho de Montomort foi manifestada por Abraham de Moivre[60], o que ocasionou um conflito entre eles. Posteriormente, em 1715, durante uma visita de Montmort à Inglaterra, eles se reconciliaram e, nesse mesmo ano, Montmort foi eleito Membro da Royal Society, na qual De Moivre já era membro desde 1697.

[57] **Lei Fraca dos Grandes Números de Bernoulli:** Seja $X_i$ o total de vezes que um evento $A$ foi observado em $n$ repetições independentes de um experimento aleatório e $p = P(A)$ a probabilidade do evento $A$. Então $\frac{S_n}{n} \to p$ e, portanto, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right|\right) \to 0$, quando $n \to \infty$, onde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
[58] **Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard** - Escrito por Pierre Rédmond de Montmort e publicado em 1708, em Paris, França. Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110519q>.
[59] O **paradoxo de São Petersburgo** é um paradoxo relacionado ao cálculo de probabilidade e de decisão na economia. É baseado em um jogo de loteria particular (teórico) que leva uma variável aleatória a um valor esperado infinito (ou seja, o lucro esperado infinito), mas, numa situação prática, uma pessoa não estaria disposta a pagar mais que uma pequena quantia para participar do jogo. Exemplo: *Pedro lança uma moeda honesta repetidamente até obter uma cara. Ele concorda em pagar a Paulo $ 1 se a cara aparecer no primeiro lançamento, $ 2 se ela aparecer no segundo lançamento, $ 4 se ela aparecer no terceiro lançamento, $ 8 se ela aparecer no quarto lançamento e assim por diante. Qual seria o preço justo que Pedro deve cobrar de Paulo para entrar no jogo?* Observa-se que a esperança matemática para esse problema citado é:

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \cdots = \infty.$$

[60] **Abraham de Moivre** (1667, Vitry-le-François, França – 1754, Londres, Inglaterra) - foi um matemático francês, famoso pela fórmula de De Moivre, que relaciona os números complexos com a trigonometria, e por seus trabalhos na distribuição normal e na teoria das probabilidades.

**Figura 2.16 –** Abraham De Moivre



**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre
Acesso em: ago. 2018.

Filho de protestantes, De Moivre frequentou uma escola católica em Vitry, que era uma escola tolerante, especialmente dadas as tensões religiosas. Aos onze anos de idade, seus pais o mandaram para a Academia Protestante, em Sedan. O Édito de Nantes[61] havia garantido a liberdade de culto e, mesmo assim, a Academia Protestante foi fechada, em 1682, e De Moivre forçado a se mudar. Então estudou em Saumur até 1684. Embora matemática fosse parte do curso que ele estava estudando, De Moivre lia muitos textos matemáticos, em particular, o livro de Van Schotten, *Exercitationum Mathematicarum*, e consequentemente seu suplemento, *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, de Huygens. A perseguição religiosa aos protestantes tornou-se muito grave depois da revogação do Édito de Nantes em 1685. De Moivre foi preso por suas crenças religiosas e, quando libertado, abandonou a França. Mudou-se para Londres, onde tornou-se professor particular de matemática. Para lecionar, estudava profundamente as obras de Newton e, dessa forma, tornou-se bastante habilidoso nos novos mecanismos newtonianos. Quando Newton se mudou de Cambridge para Londres, em 1703, para assumir o cargo de diretor da Casa da Moeda britânica, tornaram-se amigos e essa amizade perdurou até o falecimento de Newton, em 1727.

Em 1711, De Moivre publicou *De Mensura Sortis*[62], o artigo que causou o conflito entre ele e Montmort.

[61] O **Édito de Nantes** foi um documento histórico assinado em 30 de abril de 1598, na cidade de Nantes (França) pelo rei francês Henrique IV. O édito concedia aos protestantes huguenotes a garantia de tolerância religiosa após 36 anos de perseguição e massacres por todo o país, com destaque para o Massacre da Noite de São Bartolomeu, de 1572. O documento estipulava que o catolicismo permanecia a religião oficial do Estado, mas oferecia aos calvinistas franceses a liberdade de praticarem o seu próprio culto.

[62] **De Mensura Sortis, seu; de Prohabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus** – Artigo escrito por Abraham De Moivre, publicado na *Philosophical Transactions*, revista científica da Royal Society, em 1711. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/philtrans01358072>.

Posteriormente, em 1718 a primeira edição de *The Doctrine of Chances*[63] foi publicada, e era uma versão ampliada de *De Mensura Sortis*, escrita em inglês, no qual aplica um tratamento prioritariamente aritmético dos problemas de probabilidade apresentados, para alcançar o público que não tinha afinidade com álgebra (DAVID, 1962, p. 165-166).

A obra *Miscellanea Analytica*[64], de 1730, contém a primeira tentativa de demonstrar a fórmula conhecida atualmente como Fórmula de Stirling[65]. Em 1733, De Moivre publicou um suplemento do *Miscellanea Analytica*, chamado *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii* $(a+b)^n$ *in Seriem Expansi*[66], no qual usou a fórmula para realizar a primeira derivação da distribuição normal[67] como uma aproximação da distribuição binomial.

Na segunda edição de *The Doctrine of Chances*, publicada em 1738, De Moivre dá crédito a Stirling pela melhoria na fórmula e reapresenta o conceito de distribuição normal como aproximação da distribuição binomial. A terceira edição, publicada postumamente em 1756, contém a prova de um caso específico dessa aproximação de distribuições, que originou o Teorema do Limite Central.

Outro trabalho de De Moivre que merece referência é *Annuities on Lives*[68], de 1725, onde apresentou a hipótese de um modelo de sobrevivência aplicado aos cálculos atuariais que veio a se tornar mais tarde a Lei de De Moivre.

Leonhard Euler[69] também se interessou pelo estudo das Probabilidades, muito provavelmente impulsionado pelos filhos de Johann Bernoulli, Nicolaus[70] e Daniel[71], que

---

[63] **The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play** – livro escrito por De Moivre, publicado em 1718, Londres, Inglaterra. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/doctrineofchance00moiv>.

[64] **Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis** - livro escrito por Abraham De Moivre, publicado em Londres, no ano de 1730. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/bub_gb_TFX1165yEc4C>.

[65] **James Stirling** (1692, Garden, Escócia - 1770, Edimburgo, Escócia) – foi notório matemático escocês e membro da Royal Society.

[66] **Approximatio ad Summam Terminorum Binomii (a +b)$^n$ in Seriem Expansi** – raro suplemento do livro *Miscellanea Analytica*, escrito por De Moivre em 1733. Cópia digital disponível em: <https://vdocuments.site/a-rare-pamphlet-of-moivre-and-some-of-his-discoveries.html>.

[67] A **Distribuição Normal** e a curva dela obtida serão tratadas no Capítulo 4 deste trabalho.

[68] **Annuities Upon Lives: or, The Valuation of Annuities upon any Number of Lives; as also, of Reversions** - livro escrito por De Moivre, publicada em 1725. Cópia digital disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ed5bAAAAQAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>.

[69] **Leonhard Paul Euler** (1707, Basiléia, Suíça - 1783, São Petersburgo, Rússia) – notabilíssimo matemático e físico suíço, que fez importantes descobertas em várias áreas da matemática como o cálculo e a teoria dos grafos. Introduziu muitas das terminologias e notações da matemática moderna. É também reconhecido por seus trabalhos na mecânica, dinâmica de fluidos, óptica, astronomia e teoria da música.

[70] **Nicolaus II Bernolli** (Niklaus, Nicholaus ou Nicolas – 1695, Basiléia, Suíça - 1726, São Petersburgo, Rússia) - matemático suíço, filho primogênito de Johann Bernoulli, com contribuições importantes em várias áreas da matemática, notadamente nas curvas, equações diferenciais, teoria das probababilidades e álgebra.

[71] **Daniel Bernoulli** (1700, Groinga, Holanda – 1782, Basiléia, Suíça) – talentoso matemático, físico e filósofo. É particularmente lembrado por suas aplicações da matemática à mecânica, especialmente a mecânica de fluidos, e por ter sido o primeiro a entender a pressão atmosférica em termos moleculares.

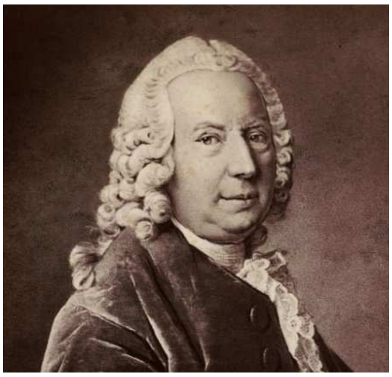
também estudaram o assunto. Na época, Nicolau e Daniel foram trabalhar na Academia Russa de Ciências. Em julho de 1726, Nicolaus morreu de apendicite, e quando Daniel assumiu o cargo do seu irmão na divisão de matemática e física da universidade, indicou a vaga em fisiologia que ele tinha desocupado para ser preenchida por seu amigo Euler. Nessa época, Euler escreveu sobre expectativas de vida, o valor de anuidades, loterias, entre outros assuntos. Ele sistematizou e organizou muitos problemas sobre probabilidade.

**Figura 2.17** – Leonhard Euler

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
Acesso em: set. 2018.

Daniel Bernoulli merece destaque, entre outras coisas, pela publicação do artigo de *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*[72], no qual apresenta pela primeira vez uma solução (satisfatória) para o Paradoxo de São Petersburgo (o nome do problema é homenagem à cidade onde Daniel morava na época).

**Figura 2.18** – Daniel Bernolli



**Fonte:** https://en.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli
Acesso em: set. 2018.

[72] **Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis** - artigo escrito por Daniel Bernoulli, escrito e publicado em 1738. Disponível em: <https://archive.org/details/SpecimenTheoriaeNovaeDeMensuraSortis>. Embora Daniel tenha publicado seu trabalho na revista da Academia Imperial de Ciências de São Petersburgo, em latim, é a versão da primeira tradução para o inglês que costuma ser referenciada, publicada na revista Econometrica, vol. 22, de 1954, da American University. Disponível em: <http://econ.ucsb.edu/~tedb/Courses/GraduateTheoryUCSB/Bernoulli.pdf>.

Em Londres, James Stirling publicou seu mais importante trabalho *Methodus Differentialis*[73]. Esse livro não trata sobre probabilidades, mas sobre sobre séries infinitas, somatórios, interpolações e quadraturas. A referência se dá porque nesse trabalho Stirling completa a demonstração da fórmula de aproximação assintótica para o fatorial de um número apresentada por De Moivre (atualmente conhecida como Fórmula de Stirling).

Ainda no Século XVIII, Georges-Louis Leclerc, o Conde de Buffon[74], realizou estudos sobre probabilidade, que ganharam notoriedade devido à sua abordagem geométrica dos problemas. A herança de uma considerável quantia em dinheiro permitiu que ele se dedicasse aos estudos científicos. Escreveu uma obra volumosa sobre História Natural, sendo precursor de Lamarck[75] e de Darwin[76]. É considerado um dos maiores biólogos de todos os tempos.

Em 1733 submeteu à Acedémie Royale des Sciences um artigo[77] em que, dentre outros problemas geométricos, estabelecia o problema que ficou conhecido como o problema da Agulha de Buffon[78]:

> *Sobre um plano formado apenas por placas paralelas e iguais, joga-se uma haste de comprimento determinado e que suponhamos de largura desprezível. Quando este objeto cairá sobre uma única placa?* (BUFFON, 1733, apud PAES, et al. 2015)

Thomas Simpson[79] publicou o *Nature and the Laws of Chance*[80] em 1740, substancialmente com o mesmo conteúdo de *Doctrine of Chances* de De Moivre, causando uma controvérsia entre eles.

Outro avanço na Teoria das Probabilidades foi dado por Joseph Lagrange[81] que foi o primeiro a aplicar o cálculo diferencial na solução desse tipo de problema.

---

[73] **Methodus Differentialis: sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum** - livro escrito por James Stirling, publicado em Londres em 1730. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/ bub_gb_71ZHAAAAYAAJ>.

[74] **Georges-Louis Leclerc - Conde de Buffon** (1707, Montbard, França – 1788, Paris, França) - foi um naturalista, matemático e escritor francês.

[75] **Jean-Baptiste Pierre Antoine de Monet - Chevalier de Lamarck** (1744, Bazetin, França – 1829, Paris, França) - foi um naturalista francês que desenvolveu a teoria dos caracteres adquiridos (uma teoria da evolução hoje desacreditada).

[76] **Charles Robert Darwin** (1809, Shrewsbury, Inglaterra – 1882, Downe, Inglaterra) - foi um naturalista britânico que alcançou fama ao convencer a comunidade científica da ocorrência da evolução e propor uma teoria para explicar como ela se dá por meio da seleção natural e sexual.

[77] Artigo publicado em **Histoire de l'Académie Royale des Sciences**, em 1733, Paris, França, pag. 43-45.

[78] O **Problema da Agulha de Buffon** será tratado no Capítulo 3 deste trabalho.

[79] **Thomas Simpson** (1710, Sutton Cheney, Inglaterra - 1761, Market Bosworth, Inglaterra) - foi matemático e inventor britânico, membro da Royal Society e conhecido pela regra de aproximar integrais definidas.

[80] **Nature and the Laws of Chance** – livro escrito por Thomas Simpson, publicado em 1740, Londres, Inglarerra. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/bub_gb_zeJbAAAAQAAJ>.

[81] **Joseph Louis Lagrange**, nascido como **Giuseppe Lodovico Lagrangia** (1736, Turim, Itália – 1813, Paris,França) - foi um notável matemático italiano. Napoleão Bonaparte fez dele Senador, Conde do Império e grande Oficial da Legião de Honra.

Em 1763, o trabalho mais importante e influente de Thomas Bayes[82] foi publicado postumamente: o *Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*[83]. O trabalho continha uma declaração de um caso especial de probabilidade, agora chamado de Teorema de Bayes. O teorema pode ser visto como uma "maneira de entender como a probabilidade de uma teoria ser verdadeira é afetada por uma nova evidência" (TIETZ, 2018, tradução nossa).

Os métodos bayesianos têm sua origem na idéia de atribuir uma probabilidade às causas de um evento observado a partir de um valor tomado *a priori* e recalculado em função dessa observação, de onde a classificação de "subjetiva". Ressalta-se a diferença entre esse método e a concepção de Jakob Bernoulli, dita "objetiva", uma vez que dependia apenas do número de observações feitas sobre o evento estudado. A dificuldade maior, tanto para Bayes como para Bernoulli, era estimar (e não calcular) as probabilidades elementares associadas aos eventos elementares (COUTINHO, 1994).

**Figura 2.19 –** Thomas Bayes

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Thomas_Bayes
Acesso em: out. 2018.

Importante passagem na história do desenvolvimento do estudo das probabilidades é o questionamento sobre a independência entre duas jogadas consecutivas de uma moeda, por D'Alembert[84], no artigo *Croix ou Pile*, da *Encyclopedié*[85].

> *(...) no curso normal da natureza, o mesmo evento (qualquer que seja ele) ocorre muito raramente duas vezes consecutivas, mais raramente três e quatro vezes, e jamais cem vezes consecutivas. (D'ALEMBERT, 1754, apud COUTINHO, 1994)*

[82] **Thomas Bayes** (1701, Londres, Inglaterra – 1761, Tunbridge Wells, Inglaterra) - foi um pastor presbiteriano e matemático inglês (pertencente à minoria calvinista na Inglaterra), eleito membro da Royal Society em 1742.
[83] **An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances** - trabalho escrito por Thomas Bayes, apresentado para a Royal Society em 1763, por carta. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/philtrans09948070>.
[84] **Jean le Rond d'Alembert** (1717, Paris, França – 1783, Paris, França) foi filósofo, matemático e físico francês que participou na edição da *Encyclopédie*, a primeira enciclopédia publicada na Europa.
[85] **Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers** - foi uma das primeiras enciclopédias, tendo sido publicada na França no Século XVIII. Essa grande obra, compreendendo 35 volumes, 71.818 artigos e 2.885 ilustrações, foi editada por Jean le Rond d'Alembert e Denis Diderot.

Nesse artigo, d’Alembert acaba fazendo confusão entre a realidade sensível e o modelo matemático, observada principalmente na atribuição do valor 2/3 para a probabilidade de obter uma “cruz” (cara) em dois lançamentos consecutivos da moeda, quando o modelo matemático resulta em 3/4.

Nicolas de Condorcet[86] tentou utilizar as técnicas probabilistas na tentativa de fundar uma Matemática Social quando, em 1785, publicou *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Decisions Rendues à la Pluralité des Voix*[87], onde escreve (CONDORCET, 1755, apud COUTINHO, 1994): “Ver-se-á quanto, se esta ciência for mais divulgada, mais cultivada, ela contribuirá para a felicidade e para o aperfeiçoamento da raça humana.”

## 2.8 Laplace e Outros Matemáticos Contemporâneos

No início do século XIX, o francês Pierre-Simon Laplace[88] publicou sua obra prima, o *Traité de Mécanique Céleste*[89], em cinco volumes, na qual reuniu grandes descobertas realizadas no campo da mecânica celeste, adicionando sua enorme contribuição para o assunto e finalizando o trabalho de Newton no sentido de demonstrar que todos os movimentos dos corpos do sistema solar são dedutíveis da Lei da Gravitação (SILVA. 2002, p. 53).

**Figura 2.20 –** Pierre-Simom Laplace

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace
Acesso em: out. 2018.

---

[86] **Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat - Marquês de Condorcet** (1743, Ribemont, França – 1794, Bourg-la-Reine, França) - normalmente referido como **Nicolas de Condorcet**, foi um filósofo e matemático francês.

[87] **Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendus à la Pluralité des Voix** – escrito por Nicolas de Condorcet e publicado na França, em 1785. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/ essaisurlapplica00cond>.

[88] **Pierre-Simon - Marquês de Laplace** (1749, Beaumont-en-Auge, França - 1827, Paris, França) - foi matemático, astrônomo e físico francês. Realizou grandes trabalhos no campo da Teoria das Probabilidades e equações diferenciais. Seus estudos também contribuíram grandemente para o desenvolvimento da física-matemática e da engenharia. Foi eleito membro da Royal Society em 1789.

[89] **Traité de Mécanique Céleste**– escrito por Pierre-Simom Laplace e publicado em Paris, Franças, publicada ao longo de 27 anos (de 1798 a 1825). Cópia digital dos 5 volumes disponível em: <https://archive.org/ search.php?query=traité%20de%20mecanique%20celeste%20smithsonian%20libraries>.

Seus trabalhos em mecânica celeste contribuíram para que o estudo da Teoria da Probabilidade viesse a ser uma das preocupações científicas de Laplace. Como astrônomo, a Teoria da Probabilidade não era um fim, mas um meio. Dessa forma, a partir de um conjunto de anotações ligadas ao tema, publica o clássico *Théorie Analytique des Probabilités*[90], em dois volumes. Viali (2008, p. 150 e 151) descreve que o primeiro volume apresenta estudos sobre as funções geradoras e várias aproximações de expressões utilizadas na Teoria da Probabilidade. No outro volume é tratado do cálculo de probabilidade propriamente dito: abre com a caracterização da probabilidade como ramo do conhecimento, apresenta a definição clássica de probabilidade e a regra de multiplicação de eventos independentes, faz uma referência à regra de Bayes (sem mencionar este); mostra a probabilidade de eventos compostos quando as probabilidades dos eventos simples são conhecidas, a aplicação da probabilidade em problemas de geodésia, de decisões em tribunais de Direito e de escolhas eleitorais, entre outros; expõe uma discussão do método dos mínimos quadrados e probabilidades das causas, e, também, reapresenta e adapta o problema da agulha de Buffon para estimar $\pi$.

Laplace retomou o trabalho de De Moivre sobre distribuição binomial e obteve uma boa aproximação do erro entre ela e a distribuição normal. Sua abordagem sobre a distribuição normal foi eminentemente probabilística. É publicação dele a primeira tabela de distribuição normal.

*Essai Philosophique sur les Probabilités*[91], é outro de seus trabalhos escrito a partir de notas de aula que juntou no breve período de 1795 em que foi como professor na Escola Normal (a escola sobreviveu apenas quatro meses) (VIALI, 2008, p.150). Nesse trabalho, Laplace expõe, entre outras coisas, sua teoria segundo a qual a sucessão de eventos e fenômenos se deve ao princípio da causalidade.

Laplace acreditava num determinismo absoluto. Afirmava que "uma coisa não pode começar a ser sem uma causa que a produza", e que "a probabilidade é relativa em parte à nossa ignorância, em parte aos nossos conhecimentos" (COUTINHO, 1994).

Importante para a evolução da Probabilidade foi o desenvolvimento do método dos mínimos quadrados, independentemente elaborado por Legendre[92] e Gauss no início Século XIX.

---

[90] **Théorie Analytique des Probabilités** – escrito por Pierre-Simom Laplace e publicado em Paris, Franças, no ano de 1812. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/theorieanaldepro00laplrich>.
[91] **Essai Philosophique sur les Probabilités** - escrito por Pierre-Simom Laplace e publicado em Paris, Franças, no ano de 1814. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/bub_gb_wAdmU2e2unAC>.
[92] **Adrien-Marie Legendre** (1752, Paris, França – 1833, Paris, França) - foi um matemático francês que fez importantes contribuições para a estatística, teoria dos números, álgebra abstrata e análise matemática.

Embora Gauss[93] tenha sido pioneiro no desenvolvimento do método (seus cálculos permitiram ao Barão Franz Xaver von Zach[94] localizar o asteroide Ceres[95] em 1801), sua publicação só ocorreu em 1809, quando apareceu no 2º volume de seu trabalho sobre mecânica celeste *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium*[96]. Por sua vez, o matemático francês Adrien-Marie Legendre desenvolveu independentemente e publicou o mesmo método em 1805 no artigo *Mémoires sur la Méthode des Moindres Quarrés, et sur l'Attraction des Ellipsoides Homogènes*[97]. O nome do método se deve à publicação de Legendre.

**Figura 2.21 –** Carl Friedrich Gauss

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss
Acesso em: nov. 2018.

O nome de Gauss também está associado à distribuição normal (chamada também de Distribuição Moivre-Laplace-Gauss). O estudo de Gauss sobre a minimização dos erros nas observações astronômicas pelo método dos mínimos quadrados acabou por resultar na distribuição normal de erros e a curva em formato de sino que a acompanha, atualmente familiar a todos que trabalham com probabilidade e estatística. Enquanto a abordagem de Laplace no estudo dessa distribuição foi probabilística, Gauss a trabalhou sob inspiração estatística. A abordagem de Gauss foi a origem da Teoria da Estimativa por Máxima Verossimilhança. (FUCHS, 1995, p. 2)

---

93 **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777, Braunschweig, Alemanha – 1855, Göttingen, Alemanha) - foi matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica.

94 **Franz Xaver von Zach** - **Barão do Sacro Império Romano** (1754, Budapeste, Hungria – 1832, Paris, França) - astrônomo austro-alemão.

95 **Ceres** é o maior dos asteroides localizado no cinturão de asteroides entre Marte e Júpiter.

96 **Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium** - escrito por Carl Friedrich Gauss e publicado em 1809, em Hamburgo, Alemanha. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/bub_gb_ORUOAAAAQAAJ>.

97 **Mémoires sur la Méthode des Moindres Quarrés, et sur l'Attraction des Ellipsoides Homogènes** - escrito por Adrien-Marie Legendre e publicado em 1805, em Paris, França. Cópia digital disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62641x/>.

Em 1855, Joseph Bertrand[98] publicou a obra *Méthode des Moindres Carrés*[99], na qual traduziu para o francês os trabalhos de Gauss sobre os mínimos quadrados. Foi eleito membro da Academia de Ciências da França, em 1856, mas permaneceu como professor da Escola Politécnica por mais de 50 anos. Bertrand também publicou um livro de autoria própria intitulado *Calcul des Probabilités*[100], no qual apresenta o famoso paradoxo de Bertrand[101].

**Figura 2.22** – Joseph Louis François Bertrand

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Joseph_Bertrand
Acesso em: fev. 2019.

Em 1837 Siméon Denis Poisson[102] publicou seu trabalho *Recherches sur la Probabilité des Jugements en Matières Criminelles et em Matière Civile*[103], no qual apresenta a distribuição por ele descoberta (hoje conhecida como Distribuição de Poisson).

Poisson estudou outros casos de distribuição probabilísticas, como por exemplo, a Distribuição de Cauchy[104].

Na época a Distribuição de Cauchy foi estudada sob um contexto diferente, associada à curva conhecida como Feiticeira de Agnesi[105]. O nome de Augustin Cauchy somente foi associado à essa distribuição durante uma controvérsia acadêmica em 1853.

---

[98] **Joseph Louis François Bertrand** (1822, Paris, França – 1900, Paris, França) - foi um matemático francês que trabalhou nas áreas de teoria dos números, geometria diferencial, probabilidade, economia e termodinâmica.
[99] **Méthode des Moindres Carrés** – tradução dos trabalhos de Gauss para o francês, por Joseph Bertrand, publicado em 1855, pela Librairie Mallet-Bachelier. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/mthodedesmoind00gaus>.
[100] **Calcul des Probabilités** – livro escrito por Joseph Bertrand, publicado em 1889, em Paris, França. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/calculdesprobabi028601mbp>.
[101] O **Paradoxo de Bertrand** será tratado no Capítulo 3 deste trabalho.
[102] **Siméon Denis Poisson** (1781, Pithiviers, França – 1840, Paris, França) - foi um matemático e físico francês.
[103] **Recherches sur la Probabilité des Jugements en Matières Criminelles et em Matière Civile** - escrito por Siméon Denis Poisson e publicado em 1837, em Paris, França. Cópia digital disponível em: <https://archive.org /details/recherchessurlap00pois>.
[104] **Augustin-Louis Cauchy** (1789, Paris, França - 1857, Paris, França) - foi matemático, engenheiro e físico francês, que fez contribuições pioneiras para vários ramos de matemática.
[105] **Maria Gaetana Agnesi** (1718, Milão, Itália - 1799, Milão, Itália) - foi uma linguista, teóloga, benfeitora, filósofa e matemática italiana. Em matemática, a **Feiticeira de Agnesi** é uma curva cúbida estudada por ela em seu livro, de 1748, *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*. A denominação "Feiticeira" para a curva se deve a uma tradução incorreta da palavra *versoria*, palavra latina que designa uma corda de manobrar vela de embarcação (ver EVES, 2004, p. 482).

**Figura 2.23** – Siméon Denis Poisson

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Sim%C3%A9on_Denis_Poisson Acesso em: nov. 2018.

Na linha dos grandes pensadores franceses de Probabilidade destaca-se Irénée-Jules Bienaymé[106]. Ele contribuiu para os campos de probabilidade e de estatística e para sua aplicação ao financiamento, demografia e ciências sociais. Traduziu para o francês as obras de seu amigo Pafnuty Chebyshev[107] e publicou a desigualdade de Bienaymé-Chebyshev, que pode ser usada para demonstrar a Lei Fraca dos Grandes Números[108].

**Figura 2.24** – Irénée-Jules Bienaymé

**Fonte:** https://en.wikipedia.org/wiki/Irénée-Jules_Bienaymé Acesso em: nov. 2018.

Bienaymé era discípulo de Laplace e defendeu suas concepções em um debate com Poisson sobre o tamanho dos júris e sobre a maioria necessária para obter uma condenação. Também se envolveu numa controvérsia com Cauchy sobre a precedência da publicação de métodos de regressão baseados no método dos mínimos quadrados ordinários e a Distribuição que atualmente leva o nome de Cauchy.

---

[106] **Irénée-Jules Bienaymé** (1796, Paris, França - 1878, Paris, França) - foi um grande estatístico francês.

[107] **Pafnuty Lvovich Chebyshev** (1821, Okatovo, Rússia - 1894, São Petersburgo, Rússia) – foi um matemático russo.

[108] **Lei Fraca dos Grandes Números de Chebyshev:** Seja $X_i$ uma sequência enumerável de variáveis aleatórias independentes dois a dois. Se a sequencia $X_i$ tem variância finita e uniformemente limitada, ou seja, existe uma constante $c \in \mathcal{R}$ tal que $Var[X_i] \leq c$. Então a sequência $X_i$ satisfaz a Lei Fraca dos Grandes Números $\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{p} 0$, em que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

## 2.9 Escola Russa e Outros Matemáticos Contemporâneos

O matemático russo Pafnuty Chebyshev desenvolveu uma comparação por desigualdade (desigualdade de Bienaymé-Chebyshev) que garante que, para uma ampla classe de distribuições de probabilidades, não mais do que uma certa fração de valores pode estar mais do que uma certa distância da média.

**Figura 2.25** – Pafnuti Chebyshev

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Pafnuti_Tchebychev
Acesso em: nov. 2018.

Outro grande matemático russo que contribuiu para a Teoria das Probabilidades foi o discípulo de Chebyshev, Andrei Markov[109]. Ele aplicou o método das frações contínuas no estudo da probabilidade e elaborou a chamada Cadeia de Markov (modelo estocástico usado para sistemas que mudam aleatoriamente).

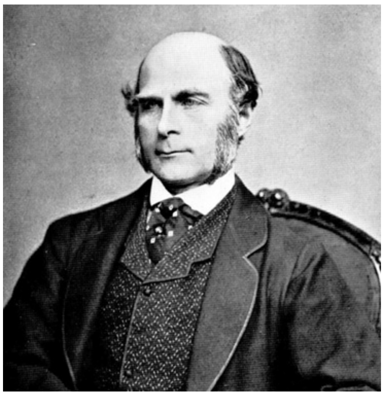
**Figura 2.26** – Andrei Markov

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Andrei_Markov
Acesso em: nov. 2018.

[109] **Andrei Andreyevich Markov** (1856, Riazan, Rússia - 1922, São Petersburgo, Rússia) - foi um matemático russo.

Com uma produção de mais de 340 artigos e livros, Francis Galton[110] criou o conceito estatístico de correlação e regressão à média, foi o primeiro a aplicar métodos estatísticos ao estudo das diferenças humanas e herança de inteligência, e introduziu o uso de questionários e pesquisas para coletar dados sobre comunidades humanas, que precisava para trabalhos genealógicos e biográficos e para seus estudos antropométricos.

**Figura 2.27** – Francis Galton



**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Francis_Galton
Acesso em: nov. 2018.

Karl Pearson[111], discípulo de Galton, foi um grande contribuidor para o desenvolvimento da estatística como uma disciplina científica séria e independente. Ele fundou o primeiro departamento de estatística universitária do mundo na University College London em 1911, e contribuiu significativamente para o campo da biometria e meteorologia.

**Figura 2.28 –** Karl Pearson

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Karl_Pearson
Acesso em: nov. 2018.

---

[110] **Francis Galton** (1822, Birmingham, Inglaterra - 1911, Haslemere, Inglaterra) - foi um polímata inglês da Era Vitoriana. Membro da Royal Society, foi estatístico, sociólogo, psicólogo, antropólogo, eugenista, geógrafo, inventor, meteorologista, proto-geneticista e psicometrista.

[111] **Karl Pearson** (1857, Londres, Inglaterra - 1936, Londres, Inglaterra) - foi um matemático e bioestatístico inglês.

Henri Poincaré[112], que estudou e enriqueceu uma enorme gama de assuntos, deu ao conceito de acaso um enfoque moderno, ligando-o à complexidade dos fenômenos observados, sem tentar mudar os instrumentos fundamentais do Cálculo das Probabilidades. (COUTINHO, 1994)

**Figura 2.29 –** Henri Poincaré

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincaré
Acesso em: nov. 2018.

Uma das primeiras contribuições à axiomatização do Cálculo das Probabilidades foi elaborada por Émile Borel[113], em sua obra *Le Hasard*[114]. Foi um dos pioneiros da Teoria da Medida e suas aplicações à Teoria da Probabilidade e introduziu o curioso experimento mental que na cultura popular ficou conhecido como Teorema do Macaco Infinito[115]. Ele também publicou alguns artigos sobre teoria dos jogos.

**Figura 2.30** – Émile Borel

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Émile_Borel
Acesso em: nov. 2018.

[112] **Jules Henri Poincaré** (1854, Nancy, França - 1912, Paris, França) - foi um matemático, físico e filósofo da ciência francês. Considerado o último universalista da matemática, era um escritor prolífico deixando mais de 30 livros publicados e mais de 500 artigos técnicos.
[113] **Félix Édouard Justin Émile Borel** (1871, Saint-Affrique, França – 1956, Paris, França) - foi um matemático e político francês.
[114] **Le Hasard** - escrito por Émile Borel e publicado em 1914, em Paris, França. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/lehasard00boreuoft>.
[115] O **Teorema do Macaco Infinito** afirma que um macaco digitando aleatoriamente em um teclado por um intervalo de tempo infinito irá quase certamente criar um texto qualquer escolhido, como por exemplo a obra completa de William Shakespeare.

O economista John Maynard Keynes[116] também escreveu sobre a probabilidade. Em sua obra, *A Treatise On Probability*[117], ele atacou a teoria clássica da probabilidade e propôs uma teoria "lógica-relacionalista". O livro é de natureza fundamentalmente filosófica, apesar de extensas formulações matemáticas e é um relato clássico da interpretação lógica da probabilidade, que foi continuada por trabalhos posteriores.

**Figura 2.31** – John Maynard Keynes

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Maynard_Keynes
Acesso em: nov. 2018.

Na história da probabilidade, também se destaca a teoria de Richard von Mises[118], que propôs uma nova teoria frequentista das probabilidades baseada na noção de sequências aleatórias infinitamente longas (a que chamava "coletivos irregulares"). A propriedade principal de um coletivo irregular é que a proporção de sucessos no resultado é a mesma em todas as subsequências previamente selecionadas. Esta propriedade relaciona-se de perto com a impossibilidade de um sistema bem-sucedido de jogos. (GOOD, 1959, p. 443-447, apud MURCHO, 2018). Von Mises também foi o autor do famoso problema do aniversário[119].

---

[116] **John Maynard Keynes** (1883, Cambridge, Inglaterra – 1946, Tilton, Inglaterra), foi um economista britânico cujas ideias mudaram fundamentalmente a teoria e prática da macroeconomia, bem como as políticas econômicas instituídas pelos governos.

[117] **A Treatise on Probability** - publicado por John Maynard Keynes na Universidade de Cambridge, em 1921. Cópia digital disponível em: <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.148462>.

[118] **Richard Edler von Mises** (1883, Lemberg, Áustria - 1953, Boston, Estados Unidos) - foi um cientista e matemático austríaco que trabalhou em mecânica de sólidos, mecânica de fluidos, aerodinâmica, estatística e teoria da probabilidade.

[119] O **Problema do Aniversário** ou **Paradoxo do Aniversário** consiste em determinar a probabilidade de que, num conjunto de *n* pessoas escolhidas aleatoriamente, pelo menos duas terem nascido no mesmo dia. Pelo princípio da casa dos pombos, a probabilidade chega a 100% quando o número de pessoas atinge 366 (já que há apenas 365 aniversários possíveis num ano regular). O senso comum diz que deveria haver um grupo de, pelo menos, metade dessas 366 pessoas para se alcançar uma probabilidade de 50% de chances de ocorrência de aniversários coincidentes. No entanto, a matemática afirma que essa probabilidade é alcançada com apenas 23 pessoas e atinge 99% de chances com apenas 57.

**Figura 2.32** – Richard von Mises

**Fonte:** https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_von_Mises
Acesso em: nov. 2018.

Em 1933, Andrei Kolmogorov[120] publicou seu livro, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*[121], estabelecendo os modernos fundamentos axiomáticos da Teoria da Probabilidade, fundamentando-a na Teoria dos Conjuntos e tornando-a mais clara em suas limitações. Kolmogorov percebeu que seria possível, através da associação de probabilidade e medida, utilizar todos os resultados conhecidos nesses domínios (devidos a Borel e Lebesgue[122]) e, por outro lado, relegar à etapa das aplicações o difícil problema da relação com o real. No prefácio de sua obra ele destaca que seu objetivo é explicitar e sistematizar o conjunto de axiomas que já estavam sendo utilizados, embora de forma implícita, pela maioria dos teóricos contemporâneos do Cálculo de Probabilidades.

**Figura 2.33** – Andrei Kolmogorov

**Fonte:** https://pt.wikipedia.org/wiki/Andrei_Kolmogorov
Acesso em: fev. 2019.

---

[120] **Andrei Nikolaevich Kolmogorov** (1903, Tambov, Rússia – 1987, Moscou, Rússia) - foi um matemático soviético, que fez contribuições significativas em Teoria das Probabilidades, topologia, lógica intuicionista, turbulência, mecânica clássica e análise de algoritmos.
[121] **Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung** (Fundamentos da Teoria da Probabilidade) – livro escrito por Andrei Kolmogorov, publicado em 1933.
[122] **Henri Léon Lebesgue** (1875, Beauvais, França – 1941, Paris, França) - foi um matemático francês famoso por sua teoria da integração, que foi uma generalização do conceito de integração do século XVII.

Outro famoso matemático da escola russa: Boris Gnedenko[123], discípulo de Kolmogorov, que, entre outros trabalhos, escreveu o livro *The Theory of Probability*[124], no qual apresentou um modelo de probabilidade geométrica que é bastante utilizado até os dias atuais.

**Figura 2.34 –** Boris Gnedenko

**Fonte:** https://www.wikidata.org/wiki/Q893804
Acesso em: fev. 2019.

No Século XX também houve grandes disputas sobre as interpretações da Probabilidade. Até meados desse século a visão frequentista era dominante, sustentando que a probabilidade significa frequência relativa de longo prazo em um grande número de ocorrências. No final do século observou-se um renascimento da visão clássica, de acordo com a qual a noção fundamental da probabilidade é uma proposição, suportada pela evidência.

Atualmente, a Teoria da Probabilidade é amplamente empregada em vários ramos da vida humana. Governos geralmente utilizam métodos de probabilidade para determinar o crescimento e a regulação de populações e a aplicação de programas sociais. Também frequentemente promovem medições de diversos tipos na população, usando métodos que são estocásticos por natureza.

Um outro efeito da Teoria da Probabilidade no cotidiano está na avaliação de riscos, importantíssima no mercado financeiro e de seguros. Várias pesquisas são financiadas na tentativa de conseguir medir mais efetivamente as ocorrências atribuídas ao acaso.

Também no desenvolvimento de muitos produtos de consumo, tais como automóveis e eletro-eletrônicos, a probabilidade está estritamente relacionada à garantia do produto.

---

[123] **Boris Vladimirovich Gnedenko** (1912, Simbirsk, Rússia – 1995, Moscou, Rússia) - foi um matemático soviético e aluno de Andrey Kolmogorov. É conhecido por seu trabalho com Kolmogorov e suas contribuições para o estudo da Teoria da Probabilidade, particularmente a teoria dos valores extremos, com resultados como o teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko.

[124] **The Theory of Probability** - livro escrito por Boris Gnedenko, publicado em 1969.

Outro bom exemplo é a aplicação da Teoria dos Jogos[125], que é rigorosamente baseada na Teoria das Probabilidades. Também há o desenvolvimento recente do computador quântico, que utiliza a Probabilidade para avaliar estados de sobreposição e interferência em seus cálculos.

## 2.10 Quadro Resumo

Finalizando nossa breve história da probabilidade, apresenta-se, a seguir, um quadro resumo com os principais destaques na linha do tempo.

**Figura 2.35** – Resumo Cronológico

| Quando? | Quem? | O quê? |
|---|---|---|
| Antiguidade | Mesopotâmios e Egípcios | Primeiros jogos de azar. |
| Idade Média | Wibold | Primeira listagem do espaço amostral de um jogo de dados. |
| Século XV | Luca Pacioli | Escreveu o *Summa de Arithmetica*, contendo o primeiro problema de probabilidade. |
| Século XVI | Cardano | Escreveu o *Liber de Ludo Aleae*, livro que trata pela primeira vez de alguns conceitos empíricos de probabilidade aplicada em jogos de azar. |
| Século XVII | Pascal e Fermat | Trocaram correspondências tratando de soluções gerais para problemas de jogos de azar. A partir das correspondências Pascal publicou o *Traité du Triangle Aritmétique*, no qual lançou os fundamentos da Teoria da Probabilidade. |
| Século XVII | Huygens | Escreveu *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, no qual apresentou sistematicamente os novos conceitos de probabilidade discutidos por Pascal e Fermat. |
| | Jakob Bernoulli | Escreveu o livro *Ars Conjectandi*, publicado postumamente, no qual expôs pela primeira vez o modelo frequentista da Probabilidade. |
| | Nicolaus I Bernoulli e Pierre Montmort | Trocaram correspondências sobre problemas de probabilidade e, entre eles, discutiram sobre uma forma rudimentar do problema que ficou conhecido como Paradoxo de São Petersburgo. |

125 **Teoria dos Jogos** é um ramo da matemática aplicada que estuda situações estratégicas onde jogadores escolhem diferentes ações na tentativa de melhorar seu retorno. Inicialmente desenvolvida como ferramenta para compreender comportamento econômico, depois foi usada para definir estratégias nucleares. A Teoria dos Jogos é hoje usada em diversos campos acadêmicos.

| Quando? | Quem? | O quê? |
|---|---|---|
| Século XVIII | Abraham de Moivre | Publicou o *The Doctrine of Chances*, que apresentava um tratamento aritmético de vários problemas de probabilidade, e o *Miscellanea Analytica*, contendo a primeira tentativa de provar a Fórmula de Stirling e a primeira derivação da Distribuição Normal. |
| | Conde de Buffon | Publicou o primeiro problema que vinculava a probabilidade à geometria (Problema da Agulha de Buffon). |
| | Thomas Bayes | Pioneiro dos estudos de probabilidade condicional, chegando ao resultado que, hoje, é conhecido como Teorema de Bayes. |
| | Pierre Laplace | Publicou o *Théorie Analytique des Probabilités*, em dois volumes, nos quais apresenta vários conceitos de probabilidade, entre eles, a definição clássica da Probabilidade utilizada até os dias atuais. |
| | Gauss e Legendre | Desenvolveram, independentemente, o método dos mínimos quadrados, amplamente utilizado no cálculo de probabilidades. |
| | Joseph Bertrand | Escreveu o livro *Calcul des Probabilités*, no qual apresentou o famoso Paradoxo de Bertrand, de Probabilidade Geométrica. |
| Século XIX | Poisson e Cauchy | Realizaram diversos estudos de distribuições probabilísticas e das curvas geradas. |
| | Bienaymé e Chebyshev | Desenvolveram a desigualdade que leva seus nomes, usada para demonstrar a Lei Fraca dos Grandes Números. |
| | Francis Galton | Criação do conceito estatístico de correlação e regressão à média. |
| Século XX | Émile Borel | Escreveu a obra *Le Hasard*, uma das primeiras contribuições à axiomatização da probabilidade. |
| | Andrei Kolmogorov | Estabeleceu os modernos fundamentos axiomáticos da Teoria da Probabilidade. |

**Fonte:** autoria própria.

# 3 AS DEFINIÇÕES DE PROBABILIDADE E ALGUNS PROBLEMAS

## 3.1 Definição Clássica de Probabilidade (por Contagem ou Laplaciana)

Verifica-se, no capítulo anterior, que a Probabilidade surgiu essencialmente pela observação dos resultados em jogos de azar.

Pascal foi o primeiro a propor um tratamento científico ao assunto, mas foi Laplace que sistematizou o cálculo de probabilidades, por isso, a primeira definição de probabilidade leva seu nome.

Segundo Coutinho (1994, p. 21-22), Laplace:

> [...] desenvolveu seu modelo matemático baseando-se em dez princípios dispostos como axiomas e definições, traduzindo sua visão “pascaliana”, e, utilizando os dois primeiros, corrigiu o exercício de D'Alembert, "croix ou pile" com dois lançamentos. Vejamos então os dois princípios:
> **Primeiro princípio:** (a probabilidade) é a relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.
> **Segundo princípio:** mas isto supõe os diversos casos igualmente possíveis. Se não o são, determina-se primeiro suas possibilidades respectivas, cuja justa apreciação é um dos pontos mais delicados da teoria do acaso. Então, a probabilidade será a soma das possibilidades de cada caso favorável.

Conforme se observa, existe uma dificuldade fundamental a ser superada no cálculo de probabilidade: determinar um espaço amostral que seja equiprovável.

Cardano tinha a noção empírica de equiprobabilidade. Em seu manuscrito *Liber de Ludo Aleae,* ele realiza pela primeira vez a abstração do empirismo para o conceito teórico (DAVID, 1962, p. 58).

Galileu escreveu um pequeno estudo (*Sopra le Scoperte de i Dadi*), no qual lhe foi apresentado o seguinte problema: no lançamento de 3 dados comuns, por que a soma 10 aparece com mais frequência que a soma 9?

Por força da prática, os jogadores sabiam que a soma 10 aparece com mais frequência que a soma 9. O que eles não entendiam é o porquê, uma vez que se supunha que havia o mesmo número de combinações para se formar 9 e 10 (aparentemente o mesmo número de elementos no espaço amostral):

SOMA 9: [1;2;6], [1;3;5], [1;4;4], [2;2;5], [2;3;4] e [3;3;3]

SOMA 10: [1;3;6], [1;4;5], [2;2;6], [2;3;5], [2;4;4] e [3;3;4]

Galileu observou que, devido às permutações, esses eventos não eram equiprováveis. As possibilidades para a obtenção das somas 9 e 10 estão na figura 3.1:

**Figura 3.1** – Permutações para as somas 9 e 10 no lançamento de 3 dados.

| **Evento A: SOMA 9** | | **Evento B: SOMA 10** | |
|---|---|---|---|
| PONTOS | PERMUTAÇÕES | PONTOS | PERMUTAÇÕES |
| 1, 2, 6 | 6 | 1, 3, 6 | 6 |
| 1, 3, 5 | 6 | 1, 4, 5 | 6 |
| 1, 4, 4 | 3 | 2, 2, 6 | 3 |
| 2, 2, 5 | 3 | 2, 3, 5 | 6 |
| 2, 3, 4 | 6 | 2, 4, 4 | 3 |
| 3, 3, 3 | 1 | 3, 3, 4 | 3 |
| TOTAL: | 25 | TOTAL: | 27 |

**Fonte:** autoria própria.

Sendo $n(A)$, $n(B)$ e $n(S)$ respectivamente o número de elementos dos eventos A e B, e do espaço amostral e $P(A)$ e $P(B)$ as probabilidades dos eventos A e B, tem-se:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{25}{216} = 11{,}57\% \quad \text{e} \qquad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{27}{216} = 12{,}50\%.$$

Assim, há uma maior probabilidade de ocorrer a soma 10.

Também relacionado à equiprobabilidade tem-se o famoso erro cometido por D'Alembert no artigo Croix ou Pile (cara ou coroa). A explicação de D'Alembert no artigo foi a seguinte (D'ALEMBERT, 1754, apud COUTINHO, 1994, p. 19-20):

> *Este jogo, que é muito conhecido, e que não tem necessidade de definição, nos fornecerá as reflexões seguintes. Queremos saber qual a aposta a se fazer para tirarmos "cara" jogando duas vezes consecutivas. A resposta que encontramos em todos os autores, e seguindo os princípios ordinários, é esta: existem quatro combinações:*
>
> *PRIMEIRA JOGADA SEGUNDA JOGADA*
> *CARA CARA*
> *COROA CARA*
> *CARA COROA*
> *COROA COROA*
>
> *Destas quatro combinações, uma fará perder e três farão ganhar; existem então 3 contra 1 para apostar a favor do jogador que lança a moeda. Se apostamos em três jogadas, encontramos oito combinações, das quais uma fará perder e sete farão ganhar; assim, existirão 7 contra 1 a apostar. Entretanto, isto é exato? Por que tomando apenas o caso das duas jogadas não é necessário reduzir a uma as duas combinações que resultam "cara" na primeira jogada? Porque, uma vez que temos "cara" como resultado, o jogo está terminado, e a segunda jogada de nada adianta. Assim, existem propriamente apenas três combinações de possibilidades:*
> *CARA, primeira jogada*
> *COROA, CARA, primeira e segunda jogadas*
> *COROA, COROA, primeira e segunda jogadas*

> *Logo, existem apenas 2 contra 1 para apostar (...). Isto é digno, me parece, da atenção dos calculistas, e irá reformar as regras unanimemente reconhecidas sobre os jogos de azar.*

Percebe-se claramente que o erro de D'Alembert foi admitir que esses eventos seriam equiprováveis.

A contribuição de Laplace para a Teoria de Probabilidade é muito importante. Em sua obra *Théorie Analytique des Probabilités*, além de lançar as bases da probabilidade clássica, sistematizou um profundo estudo sobre probabilidade geral, discutiu probabilidade de eventos compostos quando as probabilidades dos eventos simples são conhecidas, reproduziu (aparentemente de maneira independente) as conclusões de Bayes, expôs uma discussão do método dos mínimos quadrados, e, também, reapresenta e adapta o problema da agulha de Buffon para estimar π (esse problema será tratado a seguir).

Laplace também retomou o trabalho de De Moivre sobre distribuição binomial e ampliou-a para a distribuição normal, fazendo uma abordagem eminentemente probabilística (a distribuição normal e a curva gerada a partir dessa distribuição também serão tratadas a seguir).

## 3.2 Definição Frequentista de Probabilidade e o Problema da Agulha de Buffon

Um século antes de Laplace, Jakob Bernoulli escrevia o *Ars Conjectandi*, trabalho que inaugura a visão frequentista da probabilidade. Antes de Jakob Bernoulli, os estudos associados à probabilidade recaíam em situações envolvendo jogos de azar.

Pelo modelo frequentista, a probabilidade de ocorrência de um evento num experimento aleatório repetido muitas vezes se aproxima da sua frequência relativa, ou seja, da razão entre o número de ocorrências do evento e o número de repetições do experimento.

Quanto maior o número de vezes que o experimento é repetido, mais a frequência relativa se estabiliza e se aproxima da probabilidade:

$$P(A) \cong f_r(A) = \frac{n_A}{n}$$

O modelo frequentista foi apresentado, no Século XX, na tentativa de superar problemas da definição de probabilidade do modelo clássico, que se baseava fortemente em simetrias ao efetuar o cálculo de probabilidades e, portanto, falhava na falta de espaços amostrais equiprováveis.

No entanto, existem também diversas críticas ao modelo frequentista. Kondarzewski (2013, p. 7) faz excelente resumo dessas críticas:

> A principal crítica a este modelo é que a noção de frequência relativa está baseada na hipótese simples, mas muito forte, de que a frequência relativa se aproxima de um dado valor quando **n** é grande, e que tal valor não depende dos resultados obtidos nas diversas repetições, sendo assim intrínseco ao experimento.
>
> Mesmo que aceitássemos esta hipótese, temos ainda o problema de que a aproximação da frequência a um valor é apenas teórica. Na prática estaríamos lidando com uma quantidade fixa de lançamentos, e neste caso a definição passaria a depender deste total. Podemos dizer então que uma probabilidade de um evento será confiável à medida que ele consiga traduzir aproximadamente a frequência de repetição do evento A estudado. Precisaríamos saber então o que significa **n** grande.
>
> Observe também que só saberemos as probabilidades de dados eventos a posteriori, ou seja, depois que o experimento foi realizado. Sem um modelo a priori é muito difícil testar a validade dos valores encontrados.

Um experimento famoso que leva em consideração o modelo frequentista é aquele proposto por Georges-Louis Leclerc, o Conde de Buffon. Ele estava interessado em determinar algebricamente qual a probabilidade de uma agulha, de comprimento $L$, lançada aleatoriamente em um assoalho com linhas paralelas de distância $d$ cair sem haver interseção com essas linhas.

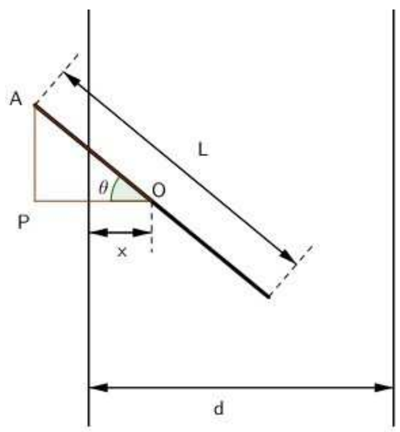
Buffon então determinou a probabilidade de a agulha intersectar uma das linhas paralelas e dispostas sobre o plano quando a agulha é jogada de forma aleatória sobre o plano.

Uma solução algébrica é apresentada abaixo:

Considere que o comprimento da agulha $L$ é menor que a distância entre as retas paralelas $d$ $(L < d)$. Nas figuras 3.2 e 3.3 observa-se que a ocorrência dos eventos relacionados depende de 3 variáveis:

**Figura 3.2 –** Evento 1

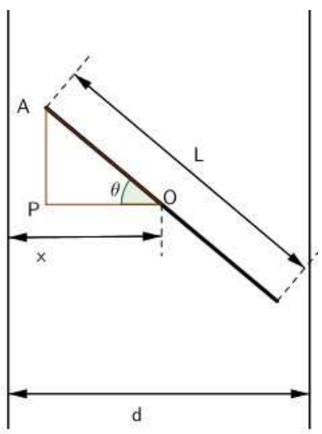
A agulha intersecta uma das paralelas




**Fonte:** Araújo, 2017.

**Figura 3.3 –** Evento 2

A agulha não intersecta uma das paralelas



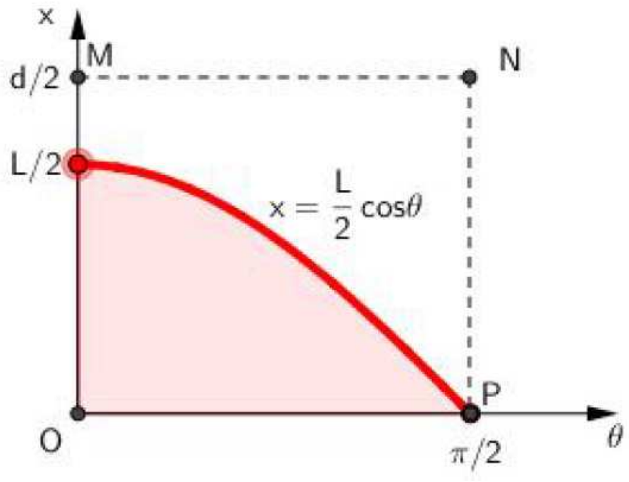

**Fonte:** Araújo, 2017.

1) $x$ é a distância entre o ponto central da agulha à paralela mais próxima, tal que $x = 0$ quando o ponto central do objeto cai sobre uma das paralelas e $x = d/2$ quando o ponto central do objeto cai sobre à metade da distância entre as paralelas;
2) $\theta$ é o ângulo formado entre a agulha e a reta que passa pelo ponto central e é perpendicular às linhas paralelas traçadas na superfície, de forma que $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
3) $OP$ é o cateto adjacente do triângulo OPA, de ângulo PÔA = $\theta$, tal que: $\cos\theta = \frac{OP}{OA}$, mas $OA = \frac{L}{2}$, o que resulta em $OP = \frac{L}{2} \cdot \cos\theta$.

Para a ocorrência do evento 1 (a agulha intersecta uma das paralelas) deve-se ter $x < OP$, ou seja, $x < \frac{L}{2} \cdot \cos\theta$.

A figura 3.4 representa graficamente a função $x = \frac{L}{2} \cdot \cos\theta$. Os casos relacionados ao evento 1 estão representados pela área sombreada e o espaço amostral representado pelo quadrilátero MNPO.

**Figura 3.4** – Gráfico da função $x = \frac{L}{2} \cdot \cos\theta$




**Fonte:** Araújo, 2017 (ajustada)

A probabilidade de a agulha intersectar uma das linhas paralelas é:

$$P = \frac{\acute{A}rea\ da\ regi\tilde{a}o\ sombreada}{\acute{A}rea\ do\ quadril\acute{a}tero\ MNPO}$$

A medida da área da região sombreada é:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{L}{2} \cdot \cos\theta\, d\theta = \frac{L}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \frac{L}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0\right) = \frac{L}{2}$$

E a medida da área do quadrilátero *MNPO* é:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi \cdot d}{4}$$

Dessa forma, a probabilidade da agulha intersectar uma das paralelas é:

$$P = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{\pi d}{4}} = \frac{L}{2} \cdot \frac{4}{\pi d} = \frac{2L}{\pi d}$$

Para o caso particular de a agulha ter o mesmo comprimento da distância entre as retas, $L = d$, a probabilidade é:

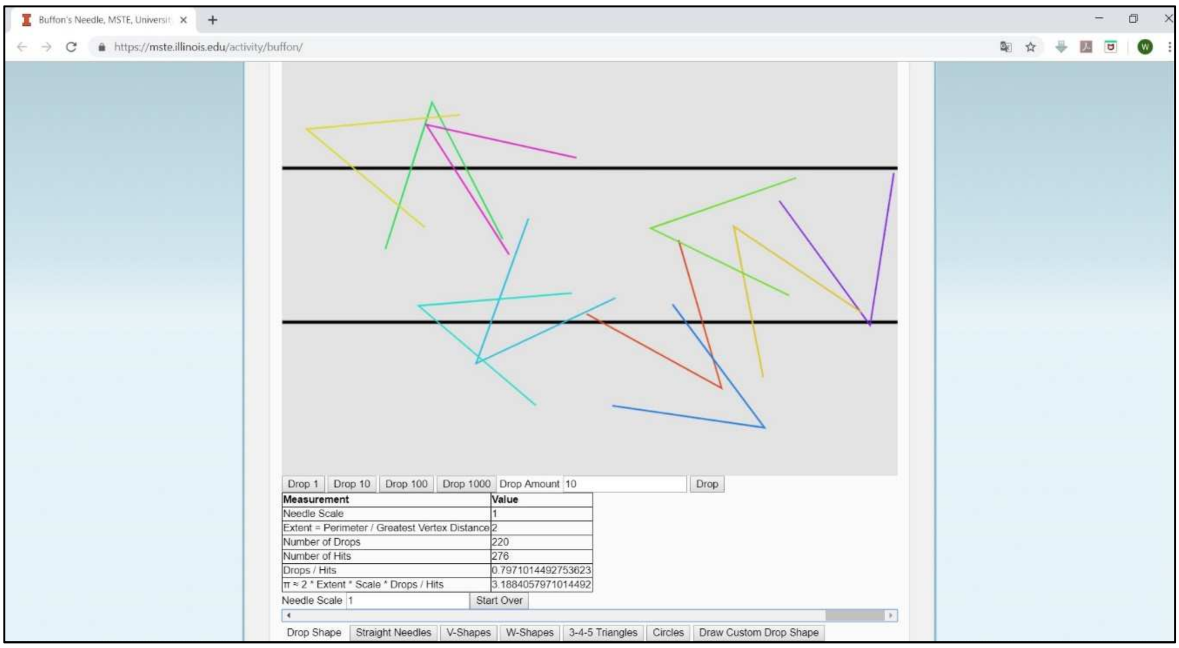
$$P = \frac{2\cancel{L}}{\pi \cancel{d}} = \frac{2}{\pi}$$

No livro *Théorie Analytique des Probabilités*, Laplace reapresentou o problema (não atribuiu crédito da origem ao Conde de Buffon), mas destaca, de maneira inédita, a possibilidade de utilização dos cálculos teóricos envolvidos no problema como um método para determinar uma aproximação experimental para o número π.

Na Internet encontram-se disponíveis muitas simulações desse experimento. Três delas foram destacadas a seguir:

1) Disponível em: <https://mste.illinois.edu/activity/buffon/> é o simulador que contém a maior quantidade de recursos (forma do objeto, tamanho do objeto em relação às paralelas, quantidade de lançamentos, etc.).

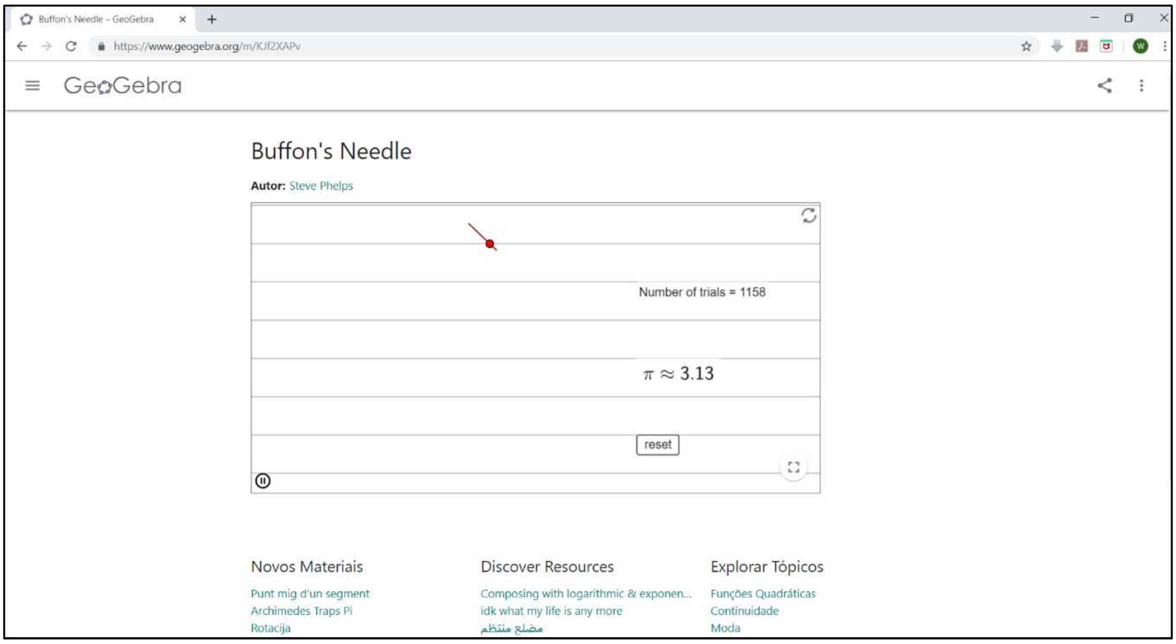
**Figura 3.5 -** Simulador para estimativa de π, utilizando o problema da Agulha de Buffon, na página <https://mste.illinois.edu/activity/buffon/>




**Fonte:** print screen da simulação, no navegador Google Chrome, sistema operacional Windows 10.

2) Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/KJf2XAPv> é um simulador feito no GeoGebra, de autoria de Steve Phelps.

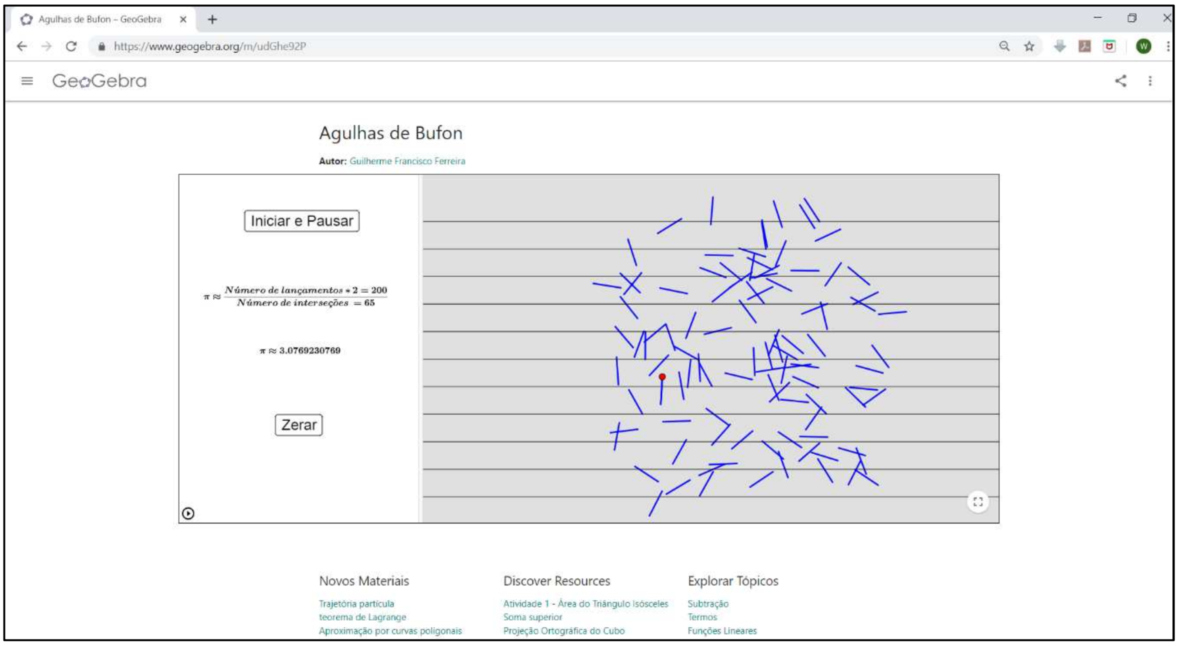
**Figura 3.6 -** Simulador para estimativa de π, utilizando o problema da Agulha de Buffon, na página <https://www.geogebra.org/m/KJf2XAPv>




**Fonte:** print screen da simulação, no navegador Google Chrome, sistema operacional Windows 10.

3) Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/udGhe92P>, também feito no GeoGebra, por Guilherme Francisco Ferreira.

**Figura 3.7 -** Simulador para estimativa de π, utilizando o problema da Agulha de Buffon, na página <https://www.geogebra.org/m/udGhe92P>




**Fonte:** print screen da simulação, no navegador Google Chrome, sistema operacional Windows 10.

Um fato interessante associado ao problema da Agulha de Buffon é sua aplicação de seu conceito na tomografia computadorizada, que revolucionou o diagnóstico médico. De acordo com Machado (2006, apud VIANA, 2013, p.28), em 1979, o bioquímico e físico nuclear sul-africano Allan MacLeod Cormack e o engenheiro elétrico inglês Godfrey Newbold Hounsfield ganharam conjuntamente o Prêmio Nobel de Medicina pela invenção e desenvolvimento da tomografia computadorizada. Viana (2013) destaca que:

> As linhas de um assoalho podem ser comparadas a um feixe plano de radiações paralelas (laser, raio X ou similar) disparado sucessivas vezes nas mais diversas direções sobre determinado objeto que se deseja saber o comprimento. Como aqui não é possível jogar a agulha nas linhas, jogam-se as linhas nas agulhas. O valor da probabilidade é calculado da mesma forma que Buffon fez, há mais de dois séculos, contando os feixes que cruzam o objeto e dividindo pelo total de feixes emitidos.

O problema da Agulha de Buffon também é considerado o marco inicial da Probabilidade Geométrica, que será tratada na próxima seção.

## 3.3 Probabilidade Geomética e o Paradoxo de Bertrand

Os modelos probabilísticos citados (clássico e frequentista) têm limitações quanto à abordagem de problemas envolvendo espaços amostrais infinitos. No entanto, quando o espaço amostral infinito se trata de figuras geométricas (conjuntos infinitos de pontos), o matemático russo Gnedenko propôs um modelo no qual observou que alguns problemas de probabilidade são equivalentes à seleção aleatória de uma região no conjunto de pontos que representam essas figuras geométricas. Nesse modelo, a probabilidade de um determinado evento se reduz à razão, caso exista, entre medidas geométricas homogêneas, tais como comprimentos, áreas ou volumes.

Oitenta anos antes, o matemático francês Joseph Bertrand utilizara conceitos semelhantes para calcular a probabilidade no seguinte problema (*Calcul des Probabilités*, p. 4, problema 5):

*Traçando ao acaso uma corda de uma circunferência, qual é a probabilidade de que ela seja maior que o lado do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência?*

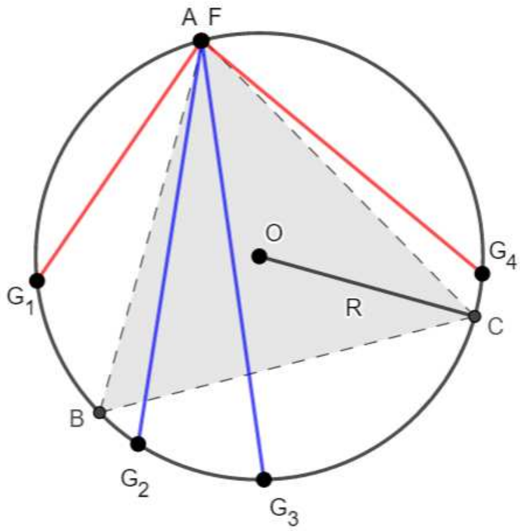
Bertrand apresentou três resoluções válidas, mas que produzem resultados diferentes para o problema.

**Primeira resolução:** a corda é traçada com base nas suas extremidades sobre a circunferência (escolha de dois pontos aleatórios na circunferência).

Para facilitar o cálculo da probabilidade em questão, deve-se imaginar o triângulo ABC de forma que um de seus vértices coincida com um dos pontos da extremidade da corda $\overline{FG_i}$ (no caso da figura 3.8, o vértice *A* e o ponto *F*). Verifica-se que, se a outra extremidade (ponto $G_i$) estiver situada entre os outros dois vértices (*B* e *C*) do triângulo, a corda será maior que o lado do triângulo (traços em azul). O comprimento do arco que contempla a solução é $\frac{2\pi}{3}R$ da circunferência, por conseguinte, a probabilidade de uma corda aleatória ser maior do que um lado do triângulo inscrito é $\frac{1}{3}$.

$$P = \frac{comprimento\ do\ arco\ BC}{comprimento\ da\ circunferência} = \frac{\frac{2\pi}{3}R}{2\pi R} = \frac{1}{3}$$

**Figura 3.8** – Solução do problema de Bertrand pela escolha das extremidades da corda.



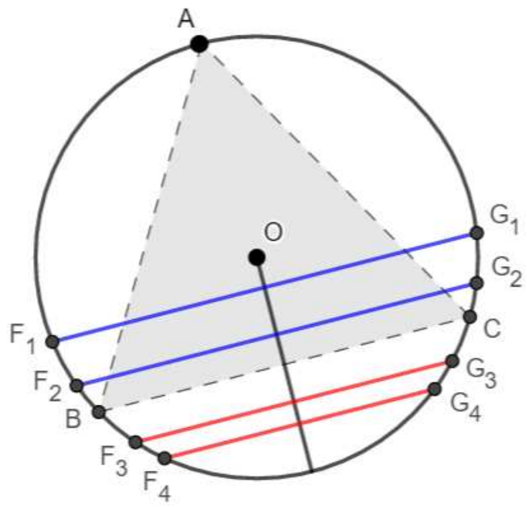

**Fonte:** autoria própria, utilizando o GeoGebra.

**Segunda resolução:** a corda é traçada perpendicularmente a um raio em qualquer direção e passando por um ponto qualquer escolhido sobre o raio (escolha da direção aleatória de um raio e de um ponto aleatório sobre esse raio).

Para facilitar o cálculo da probabilidade em questão, deve-se imaginar o triângulo ABC de forma que um de seus lados seja perpendicular ao raio escolhido (no caso da figura 3.9, o lado *BC*). A corda é maior que o lado do triângulo se estiver mais próxima do centro do círculo do que o lado *BC* (traços em azul). Em outras palavras, independentemente da direção do raio, a solução contempla metade dos pontos sobre o raio. Dessa forma:

$$P = \frac{comprimento\ do\ centro\ do\ círculo\ ao\ lado\ do\ triângulo}{comprimento\ do\ raio} = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2}$$

**Figura 3.9** – Solução do problema de Bertrand
pela escolha de um raio e de um ponto sobre esse raio.




**Fonte:** autoria própria, utilizando o GeoGebra.

**Terceira resolução:** a corda é traçada escolhendo-se um ponto qualquer no interior do círculo, que será seu ponto médio (escolha de um ponto aleatório no interior do círculo).

Nesse caso, deve-se imaginar um círculo concêntrico de raio $\frac{1}{2}R$, que é o círculo inscrito no triângulo equilátero (como na Figura 3.10).

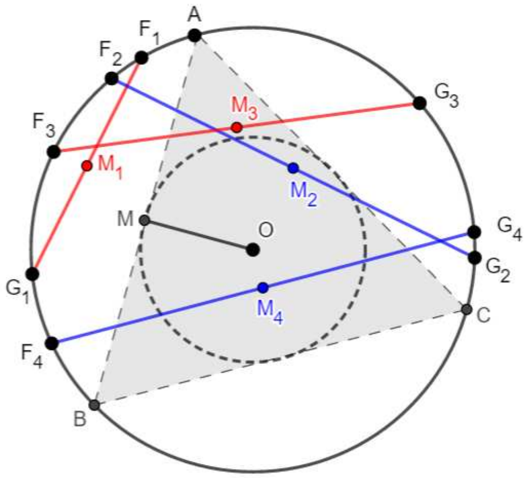
A partir de um ponto $M_i$ qualquer no interior do círculo de centro $O$ é possível traçar uma corda $\overline{F_\iota G_\iota}$, de forma que o ponto $M_i$ seja o ponto médio da corda traçada. A corda $\overline{F_\iota G_\iota}$ é sempre perpendicular à $\overline{OM_\iota}$. Se $\overline{OM_\iota} = \frac{1}{2}R$, então $\overline{F_\iota G_\iota} = \sqrt{3}R$, que é a medida do lado do triângulo. Observa-se que se $\overline{OM_\iota} < \frac{1}{2}R$, então $\overline{F_\iota G_\iota} > \sqrt{3}R$; e se $\overline{OM_\iota} > \frac{1}{2}R$, então $\overline{F_\iota G_\iota} < \sqrt{3}R$.

Assim, para que a corda seja maior que o lado do triângulo, o ponto $M_i$ escolhido deve estar dentro do círculo inscrito (traços em azul). Para facilitar a visualização, deve-se imaginar o triângulo de forma a alinhar paralelamente seu lado com a corda (no caso da Figura 3.10, o lado $BC$ com a corda $\overline{F_4 G_4}$).

A área do círculo menor é 1/4 da área do círculo maior, portanto, a probabilidade de uma corda aleatória ser maior do que um lado do triângulo inscrito é $\frac{1}{4}$.

$$P = \frac{área\ do\ círulo\ menor}{área\ do\ círulo\ maior} = \frac{\pi\left(\frac{1}{2}R\right)^2}{\pi\ R^2} = \frac{1}{4}$$

**Figuras 3.10 –** Solução do problema de Bertrand pela escolha do ponto médio da corda.




**Fonte:** autoria própria, utilizando o GeoGebra.

Sobre as três soluções apresentadas do problema de Bertrand, Wagner (1997, p. 33) afirma que todas estão corretas.

> A explicação é a seguinte: O enunciado do problema começa com a seguinte expressão: Escolhendo ao acaso uma corda de uma circunferência, ... . Aí está o ponto. Essa expressão não está bem definida, ou seja, não se sabe precisamente o que seja escolher uma corda de uma circunferência. Escolher uma corda significa escolher um procedimento de como desenhá-la, ou seja, o que vou fazer primeiro e o que farei depois.
> 1) Vou escolher primeiro um dos extremos da corda e depois o outro?
> 2) Vou escolher uma direção e depois a sua distância ao centro?
> 3) Vou escolher o ponto médio da corda?
>
> Cada uma dessas alternativas conduz a uma resposta diferente, e isso é natural no caso das probabilidades geométricas. O termo escolher deve estar acompanhado de um procedimento, sem o qual essa palavra fica com significado vago e pode permitir múltiplas interpretações [...]

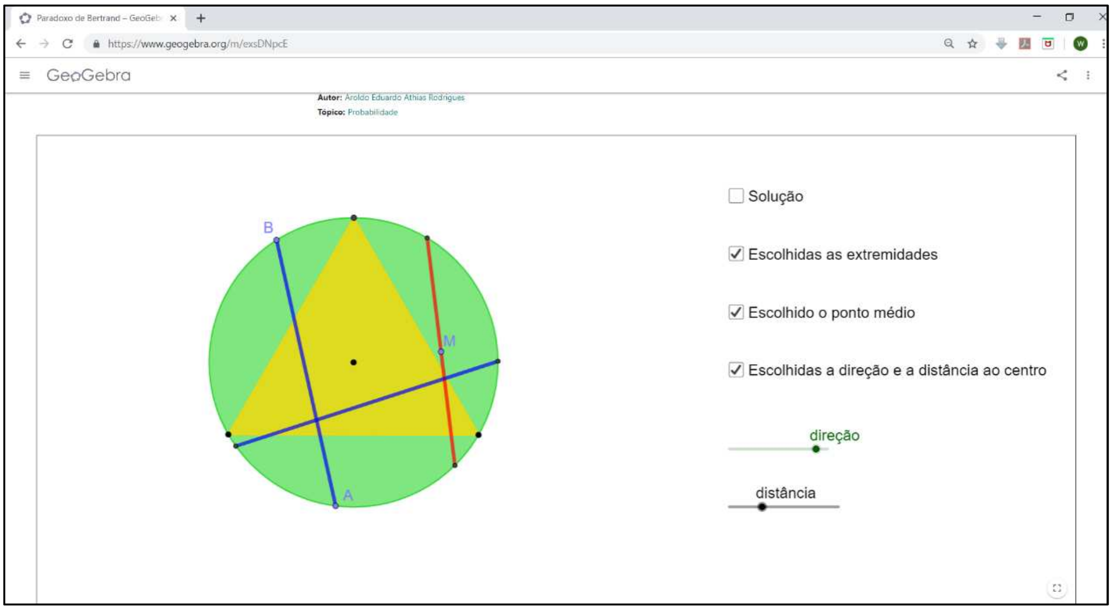
Em outras palavras, a solução do problema depende do método pelo qual uma corda é escolhida aleatoriamente. Acontece que, somente se o método de seleção aleatória for especificado, o problema terá uma solução bem definida.

Isso ocorre porque cada método diferente tem uma distribuição subjacente diferente de cordas. As três soluções apresentadas por Bertrand correspondem a diferentes métodos de seleção e, na ausência de informações adicionais, não há razão para preferir uma à outra e, consequentemente, o problema como indicado não tem solução única.

Para auxiliar no estudo desse problema, também existem várias aplicações computacionais disponíveis na Internet. Duas delas são:

1) Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/exsDNpcE>, feito em GeoGebra, por Aroldo Eduardo Athias Rodrigues.

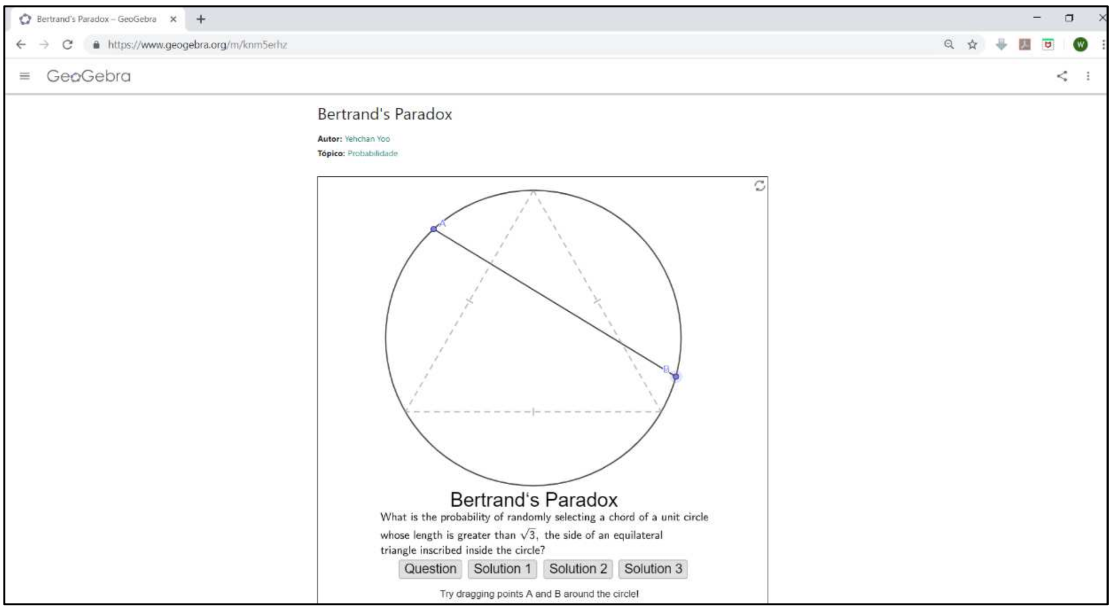
**Figura 3.11 -** Aplicação para auxiliar o entendimento das soluções do Paradoxo de Bertrand, disponível em <https://www.geogebra.org/m/exsDNpcE>




**Fonte:** print screen da simulação, no navegador Google Chrome, sistema operacional Windows 10.

2) Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/knm5erhz>, feito em GeoGebra, por Yehchan Yoo.

**Figura 3.12 -** Aplicação para auxiliar o entendimento das soluções do Paradoxo de Bertrand, disponível em <https://www.geogebra.org/m/knm5erhz>




**Fonte:** print screen da simulação, no navegador Google Chrome, sistema operacional Windows 10.

Os problemas anteriormente apresentados possuem, além de valor histórico, a característica de serem curiosos e de fácil compreensão. São, portanto, ótimos exemplos para despertar nos alunos da educação básica o interesse por conceitos da probabilidade, observada do ponto de vista clássico ou frequentista e, ainda, da probabilidade geométrica.

Os professores também podem realizar experiências práticas com alguns dos problemas, em especial o Problema da Agulha de Buffon, coletando os resultados e comparando-os com as probabilidades matematicamente calculadas.

Por fim, as aplicações computacionais sugeridas são ótimos recursos para utilização didática. São aplicações de fácil manuseio, graficamente animadas e que trabalham vários pontos curiosos dos problemas.

# 4 HISTÓRIA E CONSIDERAÇÕES SOBRE A CURVA NORMAL E O DISPOSITIVO DE GALTON

Dando continuidade a este trabalho, trataremos neste capítulo sobre alguns aspectos históricos relacionados com a distribuição normal e a curva gerada a partir dela.

Caire (2013, p. 8) destaca que estudiosos dos séculos XVIII e XIX desenvolveram uma função densidade de probabilidade para ajustar os erros experimentais obtidos em medidas físicas. Devido à imperfeição dos nossos sentidos ou dos instrumentos utilizados, os resultados das observações estão sujeitos a erros. Essa função densidade de probabilidade resultou na conhecida curva em forma de sino, que representa a distribuição normal.

Caire (2013, p. 15) afirma ainda que:

> Essa curva descreve tanto fenômenos físicos como financeiros e tem uma propriedade que é enunciada como Teorema Central do Limite que diz que podemos aproximar outras distribuições sob determinadas hipóteses gerais pela normal quando o número de observações fica grande. O Teorema Central do Limite afirma que quando o tamanho da amostra aumenta a distribuição amostral da sua média (distribuição de freqüência das médias amostrais) aproxima-se cada vez mais de uma distribuição normal.

Originalmente a descoberta dessa distribuição foi atribuída a Pierre-Simon Laplace em 1778, quando obteve uma boa aproximação da distribuição normal por meio da aproximação da distribuição binomial, utilizando a função gama de Euler. Em 1781, Laplace publicou a primeira tabela da distribuição normal.

Mais tarde (possivelmente em 1795), Carl Friedrich Gauss trabalhou na distribuição e obteve sua curva (até hoje conhecida como gaussiana).

No artigo *Historical Note on the Original of the Normal Curve of Errors*, Karl Pearson questiona a origem e a história da curva normal. Nele destacava que a atribuição errônea à Gauss foi reforçada em razão de uma referência de Laplace em seu livro *Théorie Analytique des Probabilités*, de 1812.

No mesmo artigo, Pearson afirma que os créditos são devidos à Abraham de Moivre, que foi o primeiro a desenvolver a fórmula da "curva normal", pois havia um suplemento, denominado *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii* $(a+b)^n$ *in Seriem expansi*, datado de 12 de novembro de 1733, anexo ao livro *Miscellanea Analytica*, publicado por Moivre em 1730. Nesse suplemento, Pearson encontrou o primeiro tratamento conhecido dado à curva normal. Embora datado de 1733, foi adicionado somente a algumas cópias de *Miscellanea Analytica* e atualmente pouquíssimos exemplares contém esse suplemento. Dessa forma, atualmente é atribuído a De Moivre o pioneirismo nos estudos da distribuição normal.

Atribuir o pioneirismo a De Moivre não diminui os méritos de Laplace e Gauss. A partir de seus estudos sobre a distribuição normal, iniciados por volta 1778, Laplace conseguiu derivar o Teorema Central do Limite, mostrando que, mesmo que uma distribuição não seja normalmente distribuída, as médias das amostras repetidas da distribuição seriam distribuídas quase que normalmente e, quanto maior o tamanho da amostra, mais próxima a uma distribuição normal seria a distribuição das médias.

Os trabalhos de Gauss, em especial o *Theoria Motus Corporum Coelestium* (1809), estabeleceram técnicas baseadas na distribuição normal que se tornaram métodos padrões usados no Século XIX. Os argumentos teóricos usados na distribuição normal eram baseados no Teorema Central do Limite.

A curva normal também é chamada de "curva em forma de sino", nome que se deve a Esprit Joufrret[126], que utilizou pela primeira vez o termo "superfície de sino" em 1872. O nome "distribuição normal" foi inventado por Charles Peirce[127], Francis Galton e Wilhelm Lexis[128], por volta de 1875 (CAIRE, 2013, p. 15).

Algumas vezes a curva também é chamada de Lei dos Erros. Isso se deve às suas primeiras utilizações, nas quais Laplace e Gauss, como astrônomos, identificaram que os erros de suas observações astronômicas tendiam à essa distribuição. Devido à essa característica, a curva normal é comumente empregada para análise de erros nos estudos científicos, uma vez que sempre existem erros nas observações devido imperfeições sensoriais ou instrumentais, e esses erros com frequência são "normalmente distribuídos".

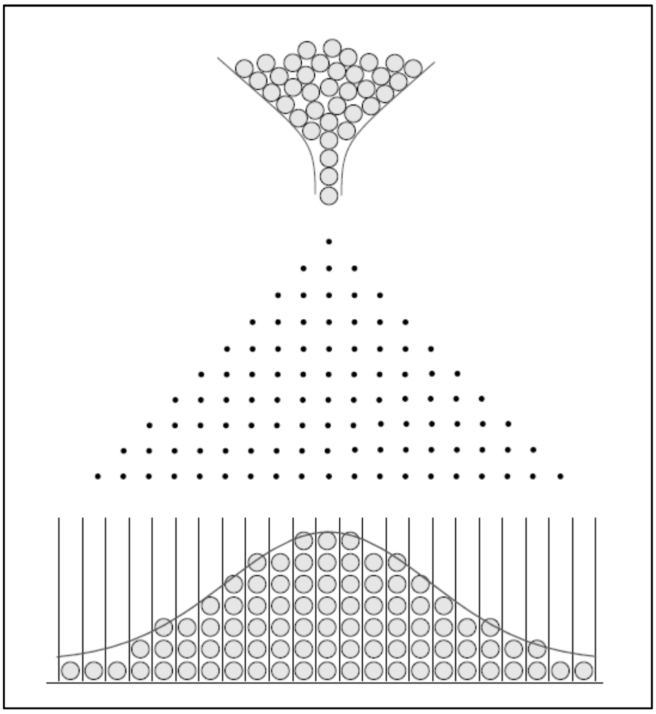
No Século XIX, Galton inventou um dispositivo muito engenhoso para simular a tendência da distribuição binomial à lei normal. O dispositivo de Galton é constituído de uma caixa retangular, na qual há uma abertura para a inserção de pequenas esferas que, ao serem despejadas, encontrarão objetos cilíndricos fixados como obstáculos, sendo dispostos em níveis e, ao final do percurso de cada esfera, estas são coletadas por canaletas que estão ordenadas na parte inferior do dispositivo.

As esferas, ao colidirem com os obstáculos e caírem, seja para a direita, seja para a esquerda, encontrarão um novo obstáculo. E assim, há uma série de colisões sucessivas, um obstáculo no primeiro nível, dois no segundo, três no terceiro, até atingir uma canaleta ao final

[126] **Esprit Jouffret** (1837, Monteux, França – 1904, França) - foi oficial de artilharia e matemático francês, autor de Traité Élémentaire de Géométrie à Quatre Dimensions (1903).
[127] **Charles Sanders Peirce** (1839, Cambridge, Massachusetts, EUA – 1914, Milford, Pensilvânia, EUA) - foi filósofo, pedagogo, cientista, linguista e matemático americano.
[128] **Wilhelm Lexis** (1837, Eschweiler, Alemanha – 1914, Göttingen, Alemanha) - foi economista e estatístico alemão.

do percurso que estará à esquerda ou à direita do último obstáculo em que a esfera colidiu (figura 4.1).

**Figura 4.1 -** Tábua/Prancha de Galton



**Fonte:** Fuchs, 1995.

Teoricamente, cada esfera, ao passar por uma abertura suficientemente estreita, atinge o primeiro obstáculo (central do primeiro nível), podendo então cair para a direita, com probabilidade $p$, ou para a esquerda, com probabilidade 1 – $p$. Admite-se que assim aconteça para os demais níveis. Portanto, a quantidade de vezes que uma esfera cai para a direita, até que atinja uma das canaletas, será uma variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros $n$ (número de níveis) e $p$. É razoável admitir a hipótese de que, para cada queda da esfera, se tem probabilidade igual a $\frac{1}{2}$ de queda para esquerda ou para a direita. Então, numerando as canaletas da esquerda para a direita de 0 a $n$ (número das canaletas), a probabilidade de que uma esfera solta no dispositivo caia na canaleta $k$ é a probabilidade de que a esfera caia $k$ vezes para a direita e $n - k$ vezes para a esquerda durante seu percurso. Ou seja, a distribuição de probabilidades do dispositivo segue o modelo binomial com $p = \frac{1}{2}$:

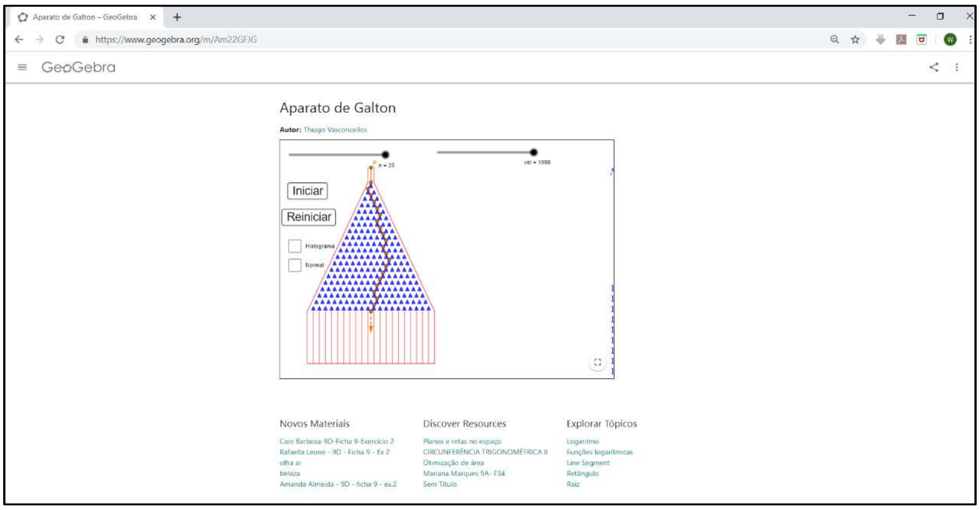
$$P(X = k) \ = \ \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \ = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, \ k = 0, 1, 2, 3, ..., n$$

Considerando que cada esfera é uma variável aleatória independente, a distribuição obtida é resultado do Teorema Central do Limite que, a grosso modo, afirma que, quando um número virtualmente infinito de variáveis não correlacionadas, com a mesma distribuição, é somado para produzir $Y = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$, a variável $Y$ resultante possuirá distribuição normal.

Para o dispositivo de Galton também existem várias simulações disponíveis na Internet. Citam-se duas delas:

1) Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/Am22GFJG>, feito em GeoGebra, por Thiago Vasconcellos.

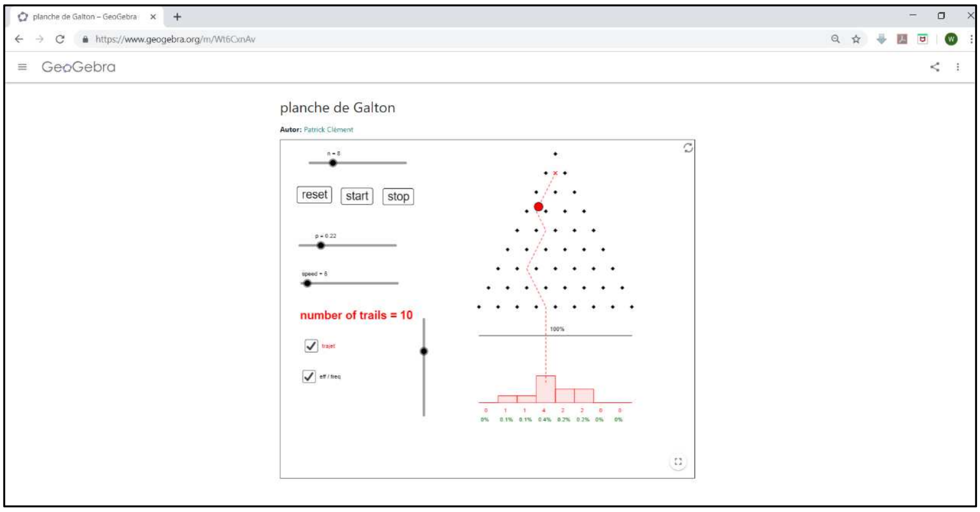
**Figura 4.2 -** Aplicação simulando a distribuição numa Prancha de Galton, disponível em <https://www.geogebra.org/m/Am22GFJG>




**Fonte:** print screen da simulação, no navegador Google Chrome, sistema operacional Windows 10.

2) Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/Wt6CxnAv>, feito em GeoGebra, por Patrick Clément.

**Figura 4.3** Aplicação simulando a distribuição numa Prancha de Galton, disponível em <https://www.geogebra.org/m/Wt6CxnAv>




**Fonte:** print screen da simulação, no navegador Google Chrome, sistema operacional Windows 10.

A tábua de Galton é considerada um valioso recurso didático para introduzir a alunos conceitos mais complexos como a distribuição normal, a curva normal e o Teorema Central do Limite, bem como noções de erro e incerteza (JUNIOR e SILVEIRA, 2011).

Assim, com auxílio dessas ferramentas práticas, tanto da tábua mecânica quanto de sua simulação computadorizada, é possível demonstrar experimentalmente os resultados que geram a distribuição e a curva normal, facilitando o entendimento do aluno sobre o assunto uma vez que o resultado gráfico que o dispositivo desperta a intuição para os conceitos citados.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo e tratamento da incerteza causou uma revolução na Matemática. Saber que, mesmo em eventos aleatórios, é possível estabelecer um padrão de relações e resultados auxiliaram enormemente no entendimento da nossa realidade. O conhecimento sobre o assunto que se tem hoje é fruto de muito trabalho, ao longo de vários séculos, e que contempla uma história rica e intrigante. No entanto, essa História da Probabilidade, não encontra, em língua vernácula, a devida atenção por parte dos estudiosos. Dessa forma, objetivou-se com este trabalho a produção de material para tentar reduzir a lacuna de publicações sobre a História da Probabilidade em nosso idioma.

Observa-se que a Sociedade Brasileira de Matemática destaca, no seu relatório **PROFMAT: Uma Reflexão e Alguns Resultados** (2017, p. 6), que entre as diretrizes do PROFMAT está (grifo nosso):

> incentivar a pesquisa e a **produção de materiais** e práticas pedagógicas inovadoras para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática na escola (textos, atividades, softwares, simulações, práticas pedagógicas inovadoras e diferenciadas em ambientes de aprendizagem etc.).

Dessa forma, o objetivo deste trabalho atende a diretriz do PROFMAT e, portanto, considera-se exitoso o resultado e destaca-se os seguintes produtos:

1) O **resumo cronológico sobre História da Probabilidade** do **Capítulo 2**, que consegue abranger desde os primórdios dos jogos de azar até as recentes descobertas sobre Teoria da Probabilidade, e pode servir de referência para outros interessados no assunto;

2) Também sob enfoque histórico, tratou-se **alguns problemas importantes no desenvolvimento da probabilidade**. Além de serem apresentadas soluções bastante claras e ilustradas, também foram disponibilizados endereços de algumas **aplicações computacionais gratuitas** da Internet para auxiliar professores e alunos quando do estudo desses problemas.

3) Ainda sob enfoque histórico, foi tratada a **distribuição normal e a curva gerada** a partir dessa distribuição, e um destaque ao aparelho de Galton, que auxilia na percepção de conceitos probabilísticos mais complexos, a exemplo do Teorema Central do Limite. Para auxiliar professores e alunos, também foram pesquisados endereços de algumas **aplicações computacionais gratuitas** disponibilizadas na Internet.

4) Elaborou-se a **curadoria das obras históricas**, citadas no Capítulo 2, cujos endereços eletrônicos estão listados no **Apêndice A**. Trata-se da coleção das cópias eletrônicas dos textos originais das obras históricas, na língua em que foram escritas. Durante as pesquisas, notou-se que várias das obras citadas estão disponíveis gratuitamente em bibliotecas virtuais.

Dessa forma, a curadoria teve por objetivo colecionar todas aquelas obras do Capítulo 2, no entanto, algumas (poucas) não foram encontradas e outras (poucas) ainda estão sob proteção financeira dos direitos autorais. As obras encontradas foram copiadas na mídia que contém este trabalho e estão organizadas conforme a numeração de rodapé que aparece no Capítulo 2.

5) Por fim, entrega-se à título de doação, para a Universidade Federal do Oeste do Pará, como suplemento deste trabalho, uma **Tábua de Galton mecânica**, construída conforme especificações do autor, cujo descrição das especificações está no **Apêndice B**.

Dessa forma, atendendo à diretriz do PROFMAT, este trabalho tem o mérito de haver produzido vários produtos que, com certeza, podem apoiar didaticamente o professor em sala de aula e ajudar os alunos a manifestar curiosidade, intuição e entendimento sobre os assuntos aqui tratados.

Por fim, lembra-se que o trabalho não tratou de planos, metodologias ou formas de aplicação dos produtos na sala de aula, mas tais questões podem (e devem) ser trabalhadas por outros estudiosos do assunto que queiram utilizar os produtos aqui apresentados e este trabalho como referência.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALMEIDA, M.; AMORIM, V. G.; SPATTI, K. B. F. A Tábua de Galton como Ferramenta de Estudo das Distribuições Binomial e Normal e de sua Relação pelo Teorema Central do Limite. 3º EnICT. São Paulo, IFSP: 2018. Disponível em: <https://arq.ifsp.edu.br/eventos/index.php/enict/3EnICT/paper/view/236/0>. Acesso em 30 de mar. 2019.

[2] ARAUJO, E. A. **Probabilidade Geométrica no Ensino Médio: Uma Experiência Usando o Geogebra**. Campina Grande, UEPB: 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94459>. Acesso em: 13 mar. 2019.

[3] BERTATO, F. M. A **"De Divina Proportione" de Luca Pacioli - Tradução anotada e comentada**. Campinas, São Paulo: 2008. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/280394>. Acesso em: 03 fev. 2018.

[4] BORGES, C. N. **A História da Matemática e Ludicidade como Proposta Didática para o Ensino da Matemática**. Arraias, UFTO: 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160910484>. Acesso em: 30 mar. 2019.

[5] BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.

[6] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, MEC/SEB: 2018. Disponível em: <http://basenacional comum.mec.gov.br/abase/#medio/a-area-de-matematica-e-suas-tecnologias>. Acesso em: abr. 2019.

[7] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, MEC/SEF: 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: abr. 2019.

[8] BRASIL. Presidência da República. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Lei das Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: abr 2019.

[9] CAIRE, E. A História da Origem da Curva Normal. Rio Claro, UNESP: 2013. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91024>. Acesso em: 21 fev. 2019.

[10] CERVO, A. L.; BERVIAN. P. A.; SILVA. R. **Metodologia Científica**. 6ª ed. São Paulo, Pearson Prentice Hall: 2007.

[11] COUTINHO, C. Q. S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 2, n. 1, p. 50-67, 2007. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12991/12092>. Acesso em: 03 fev. 2018.

[12] COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Freqüentista**. São Paulo, PUC: 1994. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/29436571_Introducao_ao_conceito_de_probabilidade_por_uma_visao_frequentista_estudo_epistemologico_e_didatico>. Acesso em: 12 jan. 2019.

[13] DAVID, F. N. **Games, Gods and Gambling**. Mineola, NY: Dover Publications, 1962. Disponível em: <https://dspace.ucalgary.ca/bitstream/1880/41346/1/aih.pdf>. Acesso em: 03 jan. 2018.

[14] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora UNICAMP, 2004.

[15] FAVINO, F. **Dizionario Biografico degli Italiani**. Roma, vol. 82, Istituto Giovanni Treccani, 2016. Disponível em <http://www.treccani.it/enciclo pedia/giovan-francesco-peverone_(Dizionario-Biografico)/>. Acesso em: 03 fev. 2018.

[16] FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. **Curso de Estatística**. 5ª. Ed. São Paulo, Atlas: 1994.

[17] FUCHS, A. **Plaidoyer Pour La Loi Normale**. IRMA, Université de Strasbourg, 1995. Disponível em: <http://irma.math.unistra.fr/~foata/fuchs/FuchsNormale.pdf>. Acesso em: 21. nov. 2018.

[18] GADELHA, A. Uma Pequena História da Probabilidade. **Notas de Aula Teoria de Probabilidade I**. Rio de Janeiro, mar. 2004. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br /~viali/estatistica/mat2006/material/textos/hist_prob_Gadelha.pdf>. Acesso em: 01 set. 2017.

[19] GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5ª ed. São Paulo, Atlas: 2010.

[20] GOOD, I. J. **Tipos de Probabilidade**. Science, New Séries, vol. 129, n. 3347, p. 443-447. Disponível em: <https://criticanarede.com/fil_probphil.html>. Acesso em: 26 nov. 2018.

[21] HACKING, I. **The Emergence of Probability**. London: Cambridge Univeresity Press, 2006. Disponível em: <http://www.andreasaltelli.eu/file/repository/Jan_Hacking_Emergence_Probability.pdf>. Acesso em: 02 jan. 2018.

[22] JUNIOR, P. L.; SILVEIRA, F. L. **Discutindo os conceitos de erro e incerteza a partir da tábua de Galton com estudantes de graduação: uma contribuição para a incorporação de novas abordagens da metrologia ao ensino da Física superior**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 28, n. 2. Santa Catarina, UFSC: 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/2175-7941.2011v28n2p400/19032>. Acesso em 30 mar. 2019.

[23] KONDARZEWSKI, L. **Probabilidade Geométrica e Grandes Números**. Santo André, UFABC: 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=28309>. Acesso em: 30 jan. 2018.

[24] MLODINOW, L. **O Andar do Bêbado**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora: 2009.

[25] MOREIRA. A. P. M. **Aplicação da Teoria da Decisão e Probabilidade Subjetiva em Sala de Aula no Ensino Médio**. Campinas, UNICAMP: 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=72861>. Acesso em: 09 set. 2017.

[26] PAES, A. Z.; FIORINI, N.; CABRERA, P. S.; NASCIMENTO, S. **O Problema da Agulha de Buffon**. USP, 2015. Disponível em <http://wiki.stoa.usp.br/images/5/5a/MEFE_O_problema_das_Agulhas_de_Buffon.pdf>

[27] PULSKAMP, R.; OTERO, D. **Wibold's Ludus Regularis, a 10th Century Board Game**. Convergence. Cincinnati, Ohio: Xavier University, 2014. Disponível em <https://www. maa.org/book/export/html/430396>. Acesso em: 01 fev. 2018.

[28] ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de História da Matemática**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, SBM: 2012.

[29] SANTOS, C. A. T.; CHAVES, M. F. **Publicação de Normas Técnicas para Apresentação de Trabalhos Científicos da UFOPA**. Santarém, UFOPA: 2016.

[30] SANTOS, S. R. **As Equações Polinomiais do 3º e 4º Graus: Suas Histórias e Soluções**. São Cristóvão: UFS, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=30295>. Acesso em: 09 mai. 2018.

[31] SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **PROFMAT: Uma Reflexão e Alguns Resultados**. Rio de Janeiro, SBM, 2017. Disponível em: < http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2017/07/PROFMAT-relatorio_DIGITAL.pdf>

[32] SILVA, A.R. **Motivações Matemáticas por meio de resolução de problemas de Probabilidade Geométrica**. Natal, UFRN: 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160240446>. Acesso em: 13 mar. 2019.

[33] SILVA, I. A. **Probabilidade: a visão laplaciana e a visão freqüentista na introdução do conceito**. PCU, São Paulo: 2002. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/29436813_Probabilidades_a_visao_laplaciana_e_a_visao_frequentista_na_introducao_do_conceito>. Acesso em: 26 dez. 2017.

[34] SILVA, L. M. **Fórmula de Stirling: Uma Demonstração**. Recife: UFPE, 2004. Disponível em: <http://www.cin.ufpe.br/~lms4/docs/doc.pdf>. Acesso em: 11 nov. 2018.

[35] SILVEIRA, J. F. P. **Tipos de Aleatoriedade.** Disponível em: <http://www.mat. ufrgs.br/~portosil/probab3.html>. Acesso em: 02 jan. 2018.

[36] TIETZ, T. **The Important Theorem of Thomas Bayes**. Disponível em: <http://scihi.org/theorem-thomas-bayes/>. Acesso em: 30 nov. 2018.

[37] VIALI, L. **Algumas Considerações sobre a Origem da Teoria da Probabilidade**. Revista Brasileira de História da Matemática, São Paulo, vol. 8, n. 16, p. 143-153, out. 2008 / mar. 2009. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.8,%20no16,%20outubro%20(2008)/3%20-%20Viali%20-%20final.pdf>. Acesso em: 01 set. 2017.

[38] VIANA, F. C. A. **Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos**. João Pessoa, PROFMAT: 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=36803>. Acesso em: 13 mar. 2019.

[39] WAGNER, E. Probabilidade Geométrica. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, Editora SBM, nº. 34: 1997.

## PÁGINAS ELETRÔNICAS CONSULTADAS RECORRENTEMENTE


[1]. http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/

[2]. http://econ.ucsb.edu/~tedb/ Courses/GraduateTheoryUCSB/Bernoulli.pdf

[3]. http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/opera.html

[4]. http://www.portalaction.com.br/probabilidades/721-lei-fraca-dos-grandes-numeros

[5]. http://www.treccani.it/enciclopedia/giovan-francesco-peverone_(Dizionario-Biografico)

[5]. https://archive.org/

[6]. https://books.google.com.br/

[7]. https://gallica.bnf.fr/

[8]. https://vdocuments.site/a-rare-pamphlet-of-moivre-and-some-of-his-discoveries.html

[10]. https://en.wikipedia.org/wiki/

[11]. https://pt.wikipedia.org/wiki/

[12]. https://www.e-rara.ch/

[13]. https://www.geogebra.org

## APÊNDICE A

## LISTA DE OBRAS HISTÓRICAS CITADAS NO CAPÍTULO 2

**[1].** **De Divina Proportione** - *Luca Pacioli*: <https://archive.org/details/divinaproportion00paci>

**[2].** **Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalitá** - *Luca Pacioli*: <http://www.e-rara.ch/download/pdf/2683230?name=Summa%20de%20arithmetica%20geometria%20Proportioni%20et%20proporti onalita%20nuouamente%20impress>

**[3].** **Liber Abbaci** - *Leonardo Fibonacci*: <https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/10607990>

**[4].** **General Trattato Numeri di et Misure** - *Niccolò Fontana*: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?url=/ permanent/library/H5BAMGAN/>

**[5].** **Artis Magnæ Sive de Regulis Algebraicis** - *Girolamo Cardano*: <http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operaomnia/vol_4_s_4.pdf>

**[6].** **Liber de Ludo Aleae** –*Girolamo Cardano*: <http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operaomnia/vol_1_s_10.pdf>

**[7].** **Due Brevi e Facili Trattati, il Primo d'Arithmetica; l'Altro di Geometria ne I quali si contengono alcune cose nuove piacevoli e utili, si a gentilhuomini come artegiani -** *Giovanni Francesco Peverone*: <https://archive.org/details/bub_gb__chzVM-mpKAC>

**[8].** **Sopra le Scoperte de i Dadi -** *Galileu Galilei*: <https://archive.org/details/agh6462.0008.001.umich.edu/>

**[9].** **Traité du Triangle Arithmétique** - *Blaise Pascal*: <https://archive.org/details/bub_gb_UqgUAAAAQAAJ>.

**[10].** **De Ratiociniis in Ludo Aleae** –*Christiaan Huygens*: <https://archive. org/details/DeRatiociniisInLudoAleae>

**[11].** **Exercitationum Mathematicarum** - *Frans van Schooten*: <https://archive.org/details/ita-bnc-mag-00001383-001>

**[12].** **Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality** - *John Graunt*: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?url=/permanent/echo/mpi_rostock/Graunt_1665/>

**[13].** **Arithmetica Infinitorum** –*John Wallis*: <https://archive.org/details/ArithmeticaInfinitorum>

**[14].** **A Treatise of Algebra, Both Historical and Practical** –John Wallis: <https://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-8842>

**[15]. Ars Conjectandi** - *Jakob Bernoulli*: <https://ia902806.us.archive.org/3/items/BRIE000602_TO0324_PNI- 2761_000000/BRIE000602_TO0324_PNI-2761_000000.pdf>

**[16]. Dissertatio Inauguralis Mathematico-Juridica de Usu Artis Conjectandi in Jure** - *Nicolaus I Bernoulli*: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1303890>

**[17]. Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard** - *Pierre Rédmond de Montmort*: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110519q>

**[18]. De Mensura Sortis, seu; de Prohabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus** –*Abraham De Moivre*: <https://archive.org/details/philtrans01358072>

**[19]. The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play** – *Abraham De Moivre*: <https://archive.org/details/doctrineof chance00moiv>

**[20]. Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis** - *Abraham De Moivre*: <https://archive.org/details/bub_gb_TFX1165yEc4C>

**[21]. Approximatio ad Summam Terminorum Binomii $(a + b)^n$ in Seriem Expansi** – *Abraham De Moivre*: <https://vdocuments.site/a-rare-pamphlet-of-moivre-and-some-of-his-discoveries.html>

**[22]. Annuities Upon Lives: or, The Valuation of Annuities upon any Number of Lives; as also, of Reversions** – *Abraham De Moivre*: <https://books.google.com.br/books?id=ed5bAAAAQAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>

**[23]. Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis** - *Daniel Bernoulli*: <https://archive.org/details/SpecimenTheoriaeNovaeDeMensuraSortis> e <http://econ.ucsb.edu/~tedb/Courses/GraduateTheoryUCSB/Bernoulli.pdf>

**[24]. Methodus Differentialis: sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum** - *James Stirling*: <https://archive.org/details/bub_gb_71ZHAAAAYAAJ>

**[25]. Nature and the Laws of Chance** – *Thomas Simpson*: <https://archive.org/details/bub_gb_zeJbAAAAQAAJ>

**[26]. An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances** - *Thomas Bayes*: <https://archive.org/details/ philtrans09948070>

**[27]. Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendus à la Pluralité des Voix** – *Nicolas de Condorcet*: <https://archive.org/details/essaisurlapplica00cond>

**[28]. Traité de Mécanique Céleste**– *Pierre-Simom Laplace*: <https://archive.org/search.php?query=traité%20de%20mecanique%20celeste%20smithsonian%20libraries>

**[29]. Théorie Analytique des Probabilités** – *Pierre-Simom Laplace*: <https://archive.org/details/theorieanaldepro00laplrich>

**[30].** **Essai Philosophique sur les Probabilités** - *Pierre-Simom Laplace*: <https://archive.org/details/bub_gb_wAdmU2e2unAC>

**[31].** **Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium** - *Carl Friedrich Gauss*: <https://archive.org/details/bub_gb_ORUOAAAAQAAJ>

**[32].** **Mémoires sur la Méthode des Moindres Quarrés, et sur l'Attraction des Ellipsoides Homogènes** - *Adrien-Marie Legendre*: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62641x/>

**[33].** **Méthode des Moindres Carrés –** *Joseph Bertrand*: <https://archive.org/details/mthodedesmoind00gaus>

**[34].** **Calcul des Probabilités –** *Joseph Bertrand*: <https://archive.org/details/calculdesprobabi028601mbp>

**[35].** **Recherches sur la Probabilité des Jugements en Matières Criminelles et em Matière Civile** - *Siméon Denis Poisson*: <https://archive.org/details/recherchessurlap00pois>

**[36].** **Le Hasard** - *Émile Borel*: <https://archive.org/details/lehasard00boreuoft>

**[37].** **A Treatise on Probability** - *John Maynard Keynes*: <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.148462>

# APÊNDICE B

## TÁBUA DE GALTON

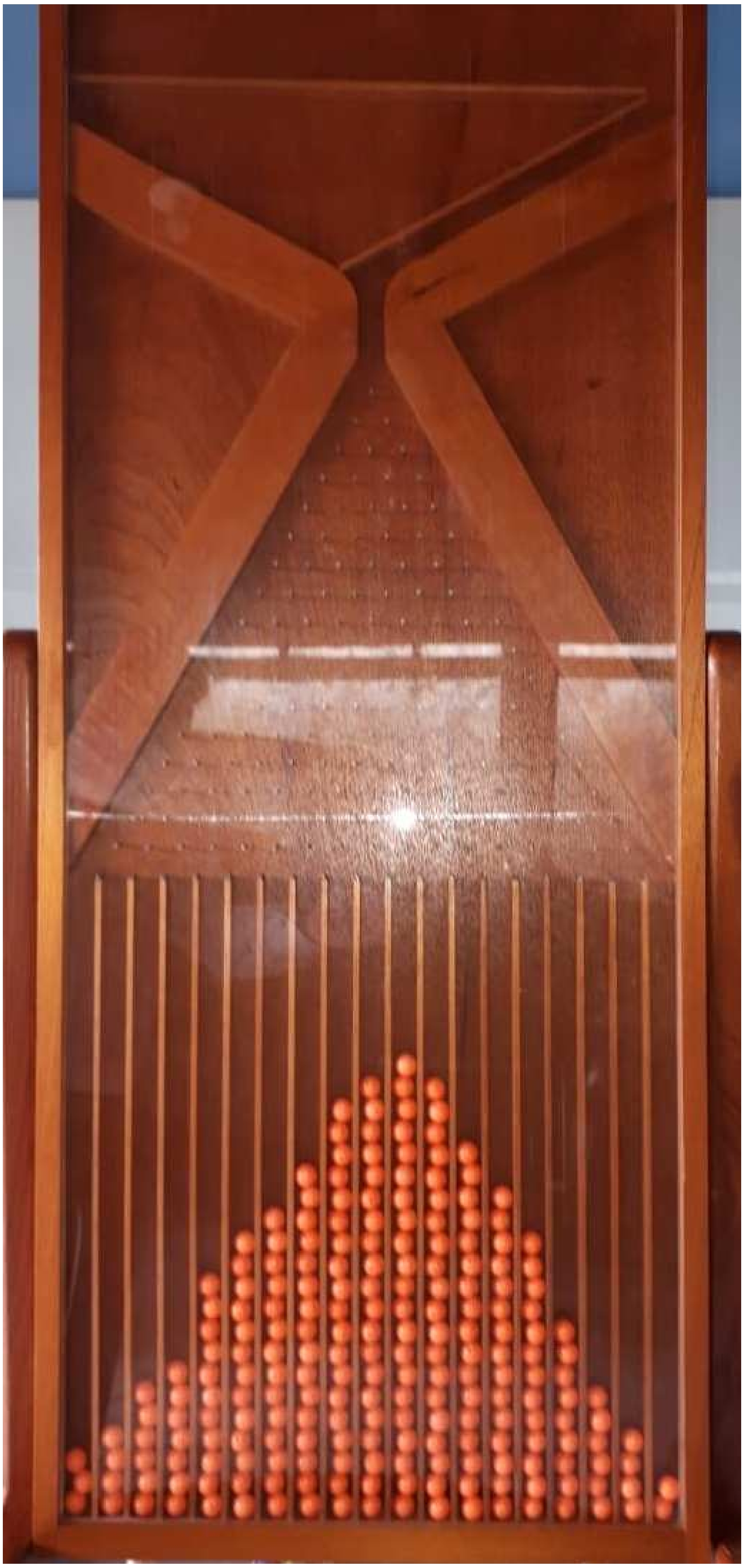
Este trabalho traz como suplemento uma Tábua de Galton, construída conforme especificações a seguir.

O aparelho foi construído em madeira leve (cedro), as esferas são bolinhas plásticas (missangas), os obstáculos são pregos espaçados em forma de triângulos isósceles (a base é o lado menor) e o conjunto esferas/obstáculos foi protegido com plástico acrílico.

Foram colocados 13 níveis de obstáculos, e, portanto, há 14 canaletas (0 a 13). A altura entre níveis de obstáculos é de 20 mm e a distância horizontal entre dois pregos adjacentes no mesmo nível é de 18 mm, de forma que o conjunto de três pegos formam um triângulo isósceles de base 18 mm e altura 20 mm. A altura pouco maior que a base serve para compensar os efeitos gravitacionais na queda das esferas. As distâncias entre obstáculso dimensões garantem que as esferas de 14 mm (facilmente encontradas no mercado) percorram a tábua sem ficarem presas entre os obstáculos. Por outro lado, se o diâmetro da esfera for muito menor que a distância entre os pregos, ela poderá se comportar de maneira diversa da pretendida, saltando mais de um nível após uma colisão. As canaletas possuem largura de 16 mm, de forma que as esferas, após a queda, fiquem amontoadas de maneira que um perfil da curva normal seja visualizado. Foram utilizadas 220 esferas.

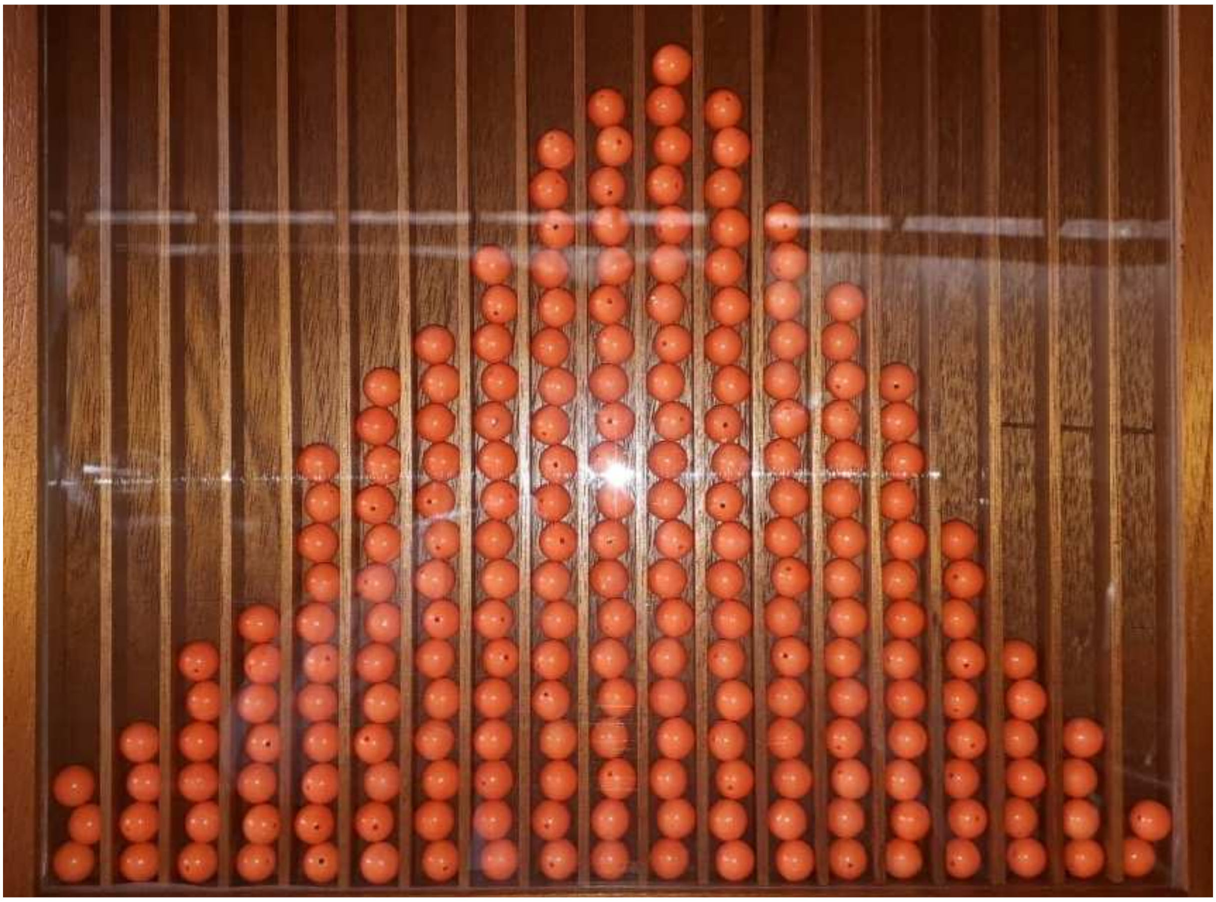
Os detalhes descritos podem ser observados nas Figuras B.1 e B.2, nas páginas seguintes.

**Figura B.1** – Tábua de Galton construída (especificações do autor)



**Fonte:** Autor.

**Figura B.2** – Detalhe da Tábua de Galton construída



**Fonte:** Autor.

Apesar da aparente simplicidade, a Tábua de Galton requereu uma manufatura bastante cuidadosa de modo a assegurar o pressuposto de equiprobabilidade - à direita ou à esquerda de um prego - para cada uma das colisões das esferas.

O aparelho construído será doado à Universidade Federal do Oeste do Pará, para uso de seus professores e alunos como material de apoio didático