Universidade Federal do Oeste do Pará
Instituto de Ciências da Educação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Michael Machado de Moraes

Análise de Erros em Problemas de Aritmética:

Uma Abordagem na 2ª Fase da OBMEP no Oeste do Pará

Santarém - PA

2018

Michael Machado de Moraes

Análise de Erros em Problemas de Aritmética:

Uma Abordagem na 2ª Fase da OBMEP no Oeste do Pará

Dissertação apresentada como requisito parcial ao Programa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal do Oeste do Pará

Instituto de Ciências da Educação

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Dr. Mario Tanaka Filho

Coorientador: Dr. Rodrigo Medeiros dos Santos

Santarém - PA

2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/UFOPA

M827a Moraes, Michael Machado
Análise de erros em problemas de aritmética: uma abordagem na 2ª fase da OBMEP no oeste do Pará / Michael Machado Moraes. – Santarém, Pará, 2018.
140 f.: il.
Inclui bibliografias.

Orientador Mario Tanaka Filho
Coorientador Rodrigo Medeiros dos Santos
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1. Metodologia de pesquisa. 2. Análise de erros. 3. Aritmética. 4. Educação básica. I. Tanaka Filho, Mario, *orient*. II. Santos, Rodrigo Medeiros dos, *coorient*. III. Título.

CDD: 23 ed. 513

Bibliotecário - Documentalista: Eliete Sousa – CRB/2 1101

Universidade Federal do Oeste do Pará

Instituto de Ciências da Educação

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Análise de Erros em Problemas de Aritmética:
Uma Abordagem na 2ª Fase da OBMEP no Oeste do Pará

por

Michael Machado de Moraes[1]

Dissertação apresentada como requisito parcial ao Programa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Santarém - PA, 28 de fevereiro de 2018.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. *Mario Tanaka Filho*
(Ufopa - Orientador)

Prof. Dr. *Rodrigo Medeiros dos Santos*
(Ufopa / Co- Orientador)

Prof. Dr. *José Ricardo e Souza Mafra*
(Ufopa - Examinador Interno)

Prof. Dr. *Damião Pedro Meira Filho*
(IFPA – Examinador Externo)

---

[1] O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Este trabalho é dedicado à minha esposa Thalita Késsia,
e a meu filho Guilherme de Moraes.

Agradecimentos

Todos temos objetivos, sonhos a serem realizados e, quando nos propormos a alcança-los, diversos obstáculos se apresentam para testar se estamos dispostos a fazer sacrifícios. Ao longo do processo que se encerra com elaboração desta dissertação, muitos foram os momentos difíceis, seja por conta de estar longe da família e dos amigos, ou pela "tensão" da rotina intensiva de estudos ao se preparar para as disciplinas. Nestes termos, faço uma singela homenagem ao destacar aqui meus agradecimentos, aqueles que de alguma forma foram fundamentais para a concretização deste sonho.

Primeiramente exalto ao Senhor Deus, criador dos céus. Certamente me protegeu durante as diversas viajens que realizei de Laranjal do Jari – AP, para Santarém – PA. Concedeu-me entendimento dos conteúdos do curso para vencer as disciplinas e o Exame Nacional de Qualificação. Ainda me proporcionou a oportunidade de conhecer pessoas maravilhosas que sentirei saudades, assim que retornar para minha cidade.

Em segunda estancia agradeço meus familiares, minha esposa Thalita Késsia, que compreendeu minhas ausências enquanto me dedicava ao curso. Ressalto o nascimento de meu filho, Guilherme de Moraes, que nos trouxe grande alegria. Agradeço aos meus pais, Milson de Moraes e Iracilda de Moraes, pelo apoio e orações constantes. Agradeço a meu irmão Michel Moraes.

Neste paragrafo agradeço as pessoas que se tornaram amigos especiais (fora do PROFMAT). Destaco à família abençoada que tivemos o prazer de conhecer, Carlos Cezar Feitosa, sua esposa Cristiana Feitosa, seus dois filhos, Carlos Cristiano e Cristian Kalebe. Agradeço a Dona Socorro e a seu esposo Artemio. Agradeço a "Mãezinha" ao Marcio Clénio e ao "Paizinho".

Agradeço aos amigos que mesmo distante sempre torceram pela minha conquista, são eles: Tiago Frango, Fábio Costa, Alex Mota e Oseias Soares. Agradeço os amigos da turma "PROFMAT 2016", dentre os quais, Wemerson Diego (Me ajudou bastante na etapa final desta produção), Raul Silva (Companheiro de estudos, exemplo de perseverança), Gordiano Santana, Herbert Rego e Welson Nogueira. Os momentos de estudos em grupo, e as histórias que distraíram por vezes um ambiente tenso por conta das avaliações, foram de grande importância.

Ainda destino agradecimentos ao corpo docente do PROFMAT/UFOPA, pelo comprometimento com ensino, certamente levarei lições preciosas enquanto professor. Evidencio meus agradecimentos ao Prof. Mario Tanaka e ao Prof. Rodrigo Medeiros, ambos foram de extrema importância para a realização desta dissertação. Agradeço ao Prof. Aquino e ao Prof. Hamilton que nos auxiliaram através da disciplina "Trabalho de

Conclusão de Curso”, ministrada no último semestre.

Em termos institucionais, agradeço:

IFAP - Instituto Federal do Amapá.

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

UFOPA - Universidade Federal do Oeste do Pará.

IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

SBM - Sociedade Brasileira de Matemática.

Finalizo desejando paz, felicidade, saúde e vida longa a todos. Nunca desistam de Sonhar, somos capazes de alcançar o impossível, basta ter força de vontade, Deus no coração e coragem para enfrentar os desafios.

“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito”.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)

Resumo

O presente trabalho descreve uma abordagem investigativa por meio das técnicas de análise de erro, tendo como público alvo os alunos da Educação Básica nas escolas públicas do Oeste do Pará. Tal pesquisa é classificada como Teoria Fundamentada em Dados (*Grounded Theory*). Os dados que compõem o *corpus* da pesquisa são as provas da 2ª fase da 12ª OBMEP, donde foram selecionados problemas dos três níveis que exigem conhecimentos de aritmética. O objetivo desta comunicação cientifica é empregar a análise de erros como metodologia de pesquisa, visando detectar os erros de Aritmética cometidos com maior frequência pelos alunos da Educação Básica na rede pública, produzindo um estudo capaz de atribuir um grau de aprendizagem nos tópicos de Aritmética com base nos erros. Como a população é toda a Região Oeste do estado do Pará, foi feito um plano de amostragem, baseado nas técnicas de inferência estatística, permitindo a pesquisa ter uma margem de erros de 3%, com nível de confiança de 95%. As análises foram feitas dividindo os dados em três níveis conforme a separação na OBMEP, isto é, nível 1 (6º ano e 7º ano do Ensino Fundamental), nível 2 (8º ano e 9º ano do Ensino Fundamental) e Nível 3 (Ensino Médio). Os resultados apontam um alto índice de erros, sendo boa parte devido aos conceitos básicos, demonstrando que uma parcela considerável dos alunos não possui domínio dos tópicos de Aritméticas, além de dificuldades na compreensão e interpretação nos itens escolhidos. Conclui-se que às respostas dos alunos estão carregadas de informações, que permitem ao professor uma visão das habilidades dos alunos em compreensão e aptidão de resolver problemas. Assim é possível instruir "novo métodos" capazes de transformar essas informações em algo positivo para o aprendizado do aluno, criando estratégias que permitam aos educandos desenvolver o pensamento crítico em relação as próprias soluções.

Palavras-chave: Metodologia de Pesquisa. Análise de Erros. Aritmética. Educação Básica.

Abstract

This paper describes an investigative approach through error analysis techniques, having as target the students of basic education in public schools in the West of Pará. This research is classified as Grounded Theory. The data that make up the corpus of the research are the tests of the 2nd phase of the 12th OBMEP, where problems of the three levels that require knowledge of arithmetic were selected. The objective of this scientific communication is to use error analysis as a research methodology, aiming at detecting the Arithmetic errors most frequently committed by students of Basic Education in the public network, producing a study capable of assigning a degree of learning in the topics of Arithmetic with based on errors. Since the population is the entire western region of the state of Pará, a sampling plan based on statistical inference techniques was done, allowing the research to have a margin of error of 3 %, with a confidence level of 95 %. The analyzes were done dividing the data into three levels according to the separation in the OBMEP, that is, level 1 (6th and 7th year of Elementary School), level 2 (8th and 9th year of Elementary School) and Level 3 (High School). The results point to a high error rate, being a good part due to the basic concepts, demonstrating that a considerable number of students do not have mastery of Arithmetic topics, as well as difficulties in understanding and interpreting the chosen items. It is concluded that the students 'responses are loaded with information, which allows the teacher a vision of students' abilities to understand and solve problems. Thus it is possible to instruct "new methods" capable of transforming this information into something positive for student learning, creating strategies that allow students to develop critical thinking about their own solutions.

Keywords: Research Methodology. Error Analysis. Arithmetic. Basic Education.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

AAS	Amostra Aleatória Simples
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
MCT	Ministério de Ciências e Tecnologia
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
IMO	Olimpíada Internacional de Matemática
OPM	Olimpíada Paulista de Matemática
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacional
PIC	Programa de Iniciação Cientifica júnior
PICME	Programa de de Iniciação Cientifica e Mestrado
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PIB	Produto Interno Bruto
MEC	Ministério da Educação
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Sumário

1 Introdução

Sabe-se que o ensino de Matemática é alvo de debates nos mais diversos níveis escolares, principalmente no que se refere ao ensino básico. Diversos indicadores, tais como SAEB, ENEM e PISA, mostram que existe muito a ser feito para se ter um ensino de Matemática desejável na Educação Básica.

Talvez seja a Educação Básica o maior desafio da Educação no Brasil. Na última pesquisa realizada pelo PISA (MORENO, 2016) o país apresentou a primeira queda desde 2003 em Matemática, e constatou que sete em cada dez alunos brasileiros, com idade entre 15 e 16 anos, estão abaixo do nível básico de conhecimento. A avaliação foi realizada em 70 países, a posição do Brasil em matemática foi 66ª.

> "Os resultados do Brasil no Pisa são gravíssimos porque apontam uma estagnação em um patamar muito baixo. 70% dos alunos do Brasil abaixo do nível 2 em matemática é algo inaceitável. O Pisa é mais uma evidência do que vemos todos os dias nas escolas", afirmou Denis Mizne, da Fundação Lemann (MORENO, 2016).

Diante deste quadro, surgem vários questionamentos, direcionados ao contexto do Oeste do Pará:

a) Qual a causa deste desempenho negativo?

b) Estes índices refletem a realidade local?

c) As metodologias de ensino usadas pelos professores geram resultados positivos?

d) Na escola o desempenho também é ruim?

O fato é, nesse momento deve-se criar alternativas objetivando reverter este cenário, buscando identificar no que se baseiam as principais dificuldades dos alunos, no que se refere à aprendizagem, para posteriormente desenvolver métodos que possibilitem ao menos amenizar tais dificuldades.

Assim, como forma de contribuir para melhoria do ensino, produz-se essa pesquisa, tendo por base a técnica de Análise de Erros. Esta técnica vem ganhando destaque no Brasil por conta dos estudos de vários pesquisadores, dentre os quais cita-se Cury (2007), sendo possível utilizá-la como Metodologia de Ensino ou Metodologia de Pesquisa.

A marca desta metodologia consiste em produzir um levantamento dos tipos de erros na produção escrita dos envolvidos. Este levantamento revela os principais erros, além de diagnosticar as falhas de ensino e aprendizagem, podendo influenciar diretamente na prática docente, e no comportamento dos educandos em relação aos seus erros.

Tendo em vista a relevância do tema, e suas eventuais contribuições na Matemática para a região em que for aplicada, faz-se uso das técnicas da análise de erros como metodologia de pesquisa, tendo como área de concentração a Educação Matemática.

Esta investigação produz uma análise de erros nas respostas dos alunos da Educação Básica em problemas de Aritmética retirados da 12ª OBMEP realizada em 32 cidades do Oeste do Pará, onde são elencados os erros cometidos com maior frequência, distribuindo a análise em três níveis segundo a divisão na OBMEP.

A justificativa pela escolha dos problemas de Aritmética dá-se em razão de estes comporem a base dos tópicos matemáticos. Haja vista que é essencial aos alunos terem domínio das técnicas aritméticas, para poder compreender os demais conceitos. Diagnosticar os erros em sua "origem" é de suma importância para sanar aprendizagens equivocas, pois em conformidade com Brousseau (1983 apud CURY, 2007, p. 33) "O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado".

> Efetivamente, detectar os erros dos alunos apenas para conhece-los, algumas vezes citando-os como piadas, não os ajuda a se conscientizarem das dificuldades. Acredito ser necessário compreender o que o aluno sabe, ou melhor, como determinado conhecimento, estabelecido em certo momento de sua história de vida, está funcionando como obstáculo para a superação da dificuldade e o que suas respostas decoradas estão encobrindo em termos de não-conhecimento. (CURY, 2007, p. 48).

Esta dissertação apresenta-se organizada em seis capítulos. No início é descrito de forma sistemática o conteúdo que o leitor vai encontrar no seu interior. Acredita-se que essa estrutura proporciona ao leitor uma visão geral das partes, auxiliando na compreensão e o incentiva a continuar a leitura nas próximas seções.

O capítulo 1 apresenta a Introdução, contendo a problematização do tema e as ideias iniciais que envolvem o desenvolvimento da investigação.

O capítulo 2 tem por tema "Referencial Teórico", os tópicos lá inseridos têm por finalidade fundamentar a pesquisa. Alguns deles possuem uma larga abrangência, no entanto serão apresentados com propósitos específicos. Este capítulo é composto por 5 seções: a 1ª trata da OBMEP; a 2ª sobre Avaliação na Educação Básica, nesta ainda se aborda de forma sucinta a Educação Matemática; a 3ª acerca do Ensino de Aritmética; a 4ª trata da análise de conteúdo e pôr fim a 5ª sobre a Análise de erros.

O capítulo 3 tem por tema "Metodologia", os temas lá abordados têm por propósito mostrar qual a pesquisa, além de esclarecer como e onde será conduzida. Sendo composto por quatro seções, a saber: a 1ª trata da Classificação da pesquisa; a 2ª acerca do Local e sujeito da pesquisa; a 3ª trata da Constituição do *corpus* da pesquisa e a 4ª sobre o Plano de amostragem.

O capítulo 4 apresenta a "Análise dos Dados", neste é posto em prática o que foi exposto nos capítulos anteriores, fazendo uso da análise de erros como metodologia de pesquisa. Tal capítulo é formado por quatro seções, são estas: 1ª Panorama Geral da Análise dos Dados; 2ª Análise do item no nível 1; 3ª Análise do item no nível 2; 4ª Análise do item no nível 3.

O capítulo 5 tem por título “Discussão dos Resultados”. Neste os dados são apurados de maneira geral, explicitadas as classes de erros que ocorreram com maior frequência nos itens. Para consolidar as discussões dos resultados, toma-se por base a análise de erros como metodologia de pesquisa.

Findando esses capítulos, vem o capítulo 6, chamado “Considerações Finais”, e as Referências. Há ainda três apêndices. APÊNDICE A – Dados quantitativos dos erros por cidade no nível 1, APÊNDICE B – Dados quantitativos dos erros por cidade no nível 2, APÊNDICE C – Dados quantitativos dos erros por cidade no nível 3.

Por fim tem-se cinco anexos ANEXO A – Ofício solicitando as provas da 2ª fase da 12ª OBMEP. ANEXO B – Tabelas de valores para intervalos e níveis de confiança. ANEXO C – Solução do item no nível 1. ANEXO D - Solução do item no nível 2. ANEXO E - Solução do item no nível 3.

Acredita-se que esta produção pode produzir a reflexão dos professores quanto a visão dos erros no processo de ensino e aprendizado, mostrando como as respostas dos alunos, ainda que incorretas podem conduzir o aprendizado rumo a um grau elevado, se forem trabalhadas de forma adequada.

2 Referencial Teórico

Este capítulo será a base para fundamentar a pesquisa. Iniciando por fazer uma abordagem história da OBMEP, logo depois mostra-se como a Olimpíada está organizada revelando seus avanços em cada nova edição. Em seguida passa-se a discutir a avaliação na educação básica, cujo propósito não é abordar como esta vem sendo desenvolvida nas escolas, apenas faz-se uma síntese segundo alguns autores do papel da avaliação e a importância dos professores para a qualidade do ensino de Matemática.

Será posto em pauta algumas reflexões quanto o ensino de Aritmética, expondo sua relevância na formação de outros conteúdos da Matemática, além de abordar algumas estratégias sugeridas por alguns autores para se ensinar o tema, ainda se expõe problemáticas deste ensino.

A penúltima seção tratada é a Análise de Conteúdo, revela-se as etapas de tal procedimento, esclarecendo a maneira com que estas são empregados em uma pesquisa. Finaliza-se com a Análise de Erros, sendo instituída uma reflexão sobre a visão do erro no processo de ensino, e apresentando a análise de erros como metodologia de pesquisa.

2.1 OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, é um projeto de inclusão social que objetiva descobrir, incentivar e reconhecer talentos em processo de formação nas diversas áreas do conhecimento em todo território nacional. Esta vem sendo realizada desde 2005 pelo Ministério da Educação (MEC), pelo Ministério de Ciências e Tecnologia (MCT) em parceria com o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) (BRASIL, 2017a).

Em seguida, expõem-se o panorama histórico da evolução das olimpíadas de matemática no cenário internacional e nacional, visando compreender os fatos que conduziram à implantação do projeto que culminou na OBMEP.

2.1.1 Surgimento da IMO e da OBM

Em 1894, na Hungria, foi realizada a primeira competição de Matemática, com intenção de homenagear o professor Jósef Kürschák[1], sendo promovida pela sociedade de

[1] Matemático húngaro. É conhecido por seu trabalho sobre trigonometria e pela criação da teoria da valoração. Em 1918 provou que a soma dos recíprocos de números naturais consecutivos não pode ser um inteiro. Estendendo argumento de David Hilbert, provou que tudo pode ser construído usando uma régua e um compasso. Foi eleito membro da Academia de Ciências da Hungria em 1897 (WIKIPÉDIA, 2013).

Matemática e Física daquele país, participaram de tal competição todos os formandos do segundo grau. Esse projeto foi um sucesso a ponto de romper as fronteiras e se espalhar pela Europa, tendo influenciado diretamente para o modelo das Olímpiadas Internacionais atuais (CALDAS; VIANA, 2016).

No entanto, apenas em 1959, em Brasov, na Romênia aconteceu de fato a primeira Olimpíada Internacional de Matemática - IMO, com a participação de 52 pessoas de sete países, sendo eles: Alemanha Oriental, Bulgária, Hungria, Polônia, Romênia, Tchecoslováquia e URSS. Atualmente a IMO acontece anualmente, participam mais de cem países e cada nova edição é realizada em um país distinto da edição anterior. Em 2017, o Brasil teve a honra de sediar a 58ª IMO.

No ano de 1977, foi realizada a primeira Olimpíada de Matemática no Brasil, precisamente a Olimpíada Paulista de Matemática - OPM, organizada pela Academia de Ciências do Estado de São Paulo. Em 1979, surgem a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), uma idealização da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

> A OBM, em conjunto com as Olimpíadas Regionais de Matemática, envolve anualmente a participação de cerca de 200 mil estudantes no Brasil. Esse envolvimento da OBM com as Olimpíadas Regionais de Matemática tem como objetivo selecionar os alunos que vão representar o Brasil nas diversas Olimpíadas Internacionais (Internacional, Ibero-Americano etc.) que são disputadas (CALDAS; VIANA, 2016, p. 328).

Inicialmente de 1979 a 1989, a OBM era composta por única fase, e não havia separação em níveis sendo uma prova discursiva com cinco ou seis questões. Em 1990, a OBM passou a ser realizada em duas fases, sendo a primeira com 20 ou 25 questões subjetivas. E foi dividida em dois níveis, o OBM Sênior, voltado aos alunos do ensino médio e OBM júnior, para alunos do ensino fundamental, com exceção da 5ª série.

Houve ainda outra alteração na OBM em 1998, na qual os alunos das quintas séries foram incluídos. Ainda existiu uma mudança acentuada com relação aos objetivos, pois a partir deste momento a OBM não se preocupava apenas em revelar talentos, também visava contribuir de forma significativa para a ensino e aprendizagem na Educação Básica, passando a ser um método de auxílio ao ensino (CALDAS; VIANA, 2016).

2.1.2 Instituição da OBMEP

A OBMEP foi inspirada no projeto NUMERATIZAR, realizado em 2003 no estado do Ceará, cujo foco era desenvolver estratégias para melhorar o ensino de Matemática na Educação Básica, defendendo que “descobrir, divulgar e aprimorar os talentos de nossa juventude é a forma mais efetiva e rápida de inclusão social” (SCHIRLO; MEZA, 2013, p. 5).

> A OBMEP foi lançada de forma oficial em 19 de maio de 2005, em Brasília pelo então presidente Luiz Inácio Lula da Silva, pelo ministro da

> educação, Tarso Genro e pelo ministro de ciência e tecnologia, Eduardo Campos. A primeira edição mobilizou as escolas do país, com mais de 10,5 milhões de inscritos, os números mostram que a OBMEP torna-se uma das maiores competições do mundo, superando a olímpiada de matemática realizada nos Estados Unidos, que conta com cerca de 6 milhões de participantes a cada ano (CALDAS; VIANA, 2016, p. 329)

Na cerimônia de lançamento da OBMEP, o então Ministro de Ciência e Tecnologia Eduardo Campos[2] destacou os ganhos da Olimpíada para o país.

> A Olimpíada de Matemática é um canal de inclusão social, uma vez que propicia o descobrimento de talentos, inclusive entre os mais carentes, gente que nunca teve uma oportunidade, e que agora passam a dispor dos meios mínimos para avançar numa carreira com melhores perspectivas (CALDAS; VIANA, 2016, p. 328).

A OBMEP vem sendo realizada anualmente, incentivando alunos e professores, contribuindo de forma significativa para o avanço da educação básica, ela é composta por três níveis, o nível 1 abrange os alunos do 6º ano e 7º ano do ensino fundamental, o nível 2 é composto pelos alunos do 8º ano e do 9º ano do ensino fundamental, e o nível 3 é efetuado pelos alunos do ensino médio.

Desde sua implantação a quantidade de participantes tem sido expressiva, chegando a ser considerada uma das maiores competições de matemática do planeta. A OBMEP cumpre seu papel e a cada nova edição revela novos talentos, além de incentivar escolas e professores a prepararem seus alunos.

Nota-se sua relevância por meio dos números em cada edição, e por estar presente em mais de 98% do território nacional. A seguir apresenta-se uma tabela com os números dessa olimpíada desde sua implantação em 2005, até sua última edição realizada em 2017.

[2] Eduardo Campos Ministro da Ciência e Tecnologia no ano de 2005; durante o seu ministério teve início a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

Tabela 2.1 – Dados quantitativos da OBMEP

Ano	Qtd. de Escolas	Qtd. de alunos na 1ª fase	Qtd. de alunos na 2ª fase	% M. P
2005	31031	10.520.831	457.725	93.50
2006	32.655	14.181.705	630.864	94,50
2007	38.450	17.341.732	780.333	98,10
2008	40.397	18.336.029	789.998	98,70
2009	43.854	19.198.710	841.139	99,10
2010	44.717	19.665.928	863.139	99,16
2011	44.691	18.720.068	818.566	98,90
2012	46.728	19.166.371	823.871	99,42
2013	47.144	18.762.859	954.926	99,35
2014	46.711	18.192.526	907.446	99,41
2015	47.580	17.972.333	889.018	99,48
2016	47.474	17.839.424	913.889	99,59
2017	53.231	18.240.497	941.630	99,57

Fonte: Dados do Portal da OBMEP

Nota: % M. P - Percentual de municípios que participaram; Qtd. - Quantidade

Dado os resultados positivos a OBMEP torna-se referência no cenário nacional, pois, diversos projetos (programas e portais) foram criados, visando preparar os alunos e incentivar a participação das escolas. A partir de 2017 a OBM foi integrada à OBMEP, ou seja, as escolas particulares foram convidadas a participar da OBMEP, e a primeira fase da OBM deixou de existir.

2.1.3 Premiações e Programas

A 1ª fase da OBMEP é uma prova com questões de múltipla escolha, todos os alunos inscritos pelas escolas participam. A 2ª fase é uma prova discursiva com 6 questões e versam sobre geometria, contagem e aritmética, participam desta fase 5% dos que fizeram a primeira fase e foram melhores classificados de cada escola. Os prêmios concedidos são:

a) 500 medalhas de ouro;

b) 1500 medalhas de prata;

c) 4500 medalhas de bronze;

d) Cerca de 46.200 certificados de menção honrosa.

Além disso, 6500 medalhistas que permanecem no ensino básico passam a participar do Programa de Iniciação Científica Jr - PIC, sendo bolsistas do CNPq, caso não sejam preenchidas as vagas, alunos que receberam menção honrosa passam a ser contemplados.

Existe ainda um outro programa fruto da OBMEP, o Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), onde é concedido bolsas de estudo a medalhista de ouro, prata ou bronze, de qualquer edição da OBMEP, desde que este esteja devidamente matriculado em curso de ensino superior.

Há premiações para professores e escolas, sendo até 1.029 professores, e aproximadamente 495 escolas, tais premiações são feitas de acordo com a pontuação dos alunos, seguindo os seguintes critérios:

a) 10 pontos, medalhista de ouro;

b) 8 pontos, medalhista de prata;

c) 6 pontos, medalhista de bronze;

d) 3 pontos, menção honrosa;

e) 1 ponto, cada aluno que compareceu na segunda fase, porém não premiado.

Cada escola é responsável pela organização, aplicação e correção das provas da primeira fase, sendo que não há limites de inscritos nesta etapa. Desta forma a OBMEP desempenha importante função no contexto escolar e social, tendo contribuições relevantes para educandos, educadores e sociedade.

Percebe-se diante dos resultados que a olimpíada além de revelar talentos, também descobre e instiga a formação de grupos de alunos e professores, em que mostram não ser impossível, com vontade, dedicação e estudo obter a mais elevada classificação nesta competição.

Segundo Brasil (2017b) ao se apurar os dados, concernentes aos alunos premiados, é possível garantir o impacto extremamente positivo da OBMEP, uma vez que esta tem se mostrado uma ferramenta útil no ensino de uma disciplina considerada difícil por muitos, contribuindo para a qualificação nas áreas de ciências exatas, promovendo aprendizado satisfatório na escola e comunidade.

> No que diz respeito à OBMEP, o contato entre o aluno premiado e o meio universitário é promovido de várias maneiras. Em primeiro lugar, a OBMEP valoriza naturalmente a autoestima do aluno, que ao se ver premiado em nível nacional, abre seus horizontes, antes restritos à comunidade local. Passa a ser natural para esse aluno programar seu futuro nas melhores universidades (BRASIL, 2017b, p. 5).

A OBMEP completa 12 anos em 2017. Desde 2005 destina-se a revelar talentos em todas as partes do Brasil e assim produz resultados significativos com impacto direto no ensino da Matemática. De acordo com Brasil (2017b), por meio do certame, foi possível constatar que de fato os talentos existem, dentre os premiados, destacou-se pequenas cidades que demonstraram excelentes resultados. Firmando o slogan "Revelando Novos Talentos para o Brasil", inspirando outras escolas, professores e alunos em todos os cantos do país.

2.2 Avaliação no Contexto Escolar

A avaliação está diretamente ligada à prática docente, pois em meio ao processo de ensino surge a necessidade de diagnosticar o grau de aprendizagem de cada discente. Sendo assim, nesta seção discorre-se acerca da avaliação no ensino básico. De início apresenta-se o conceito de avaliação:

> *Avaliar* é julgar ou fazer a apreciação de alguém ou alguma coisa, tendo como base uma escala de valores. Assim sendo, a avaliação consiste na coleta de dados quantitativos e qualitativos previamente definidos. Portanto, não é suficiente testar e medir, pois os resultados obtidos através desses instrumentos devem ser interpretados em termos de avaliação (HAYDT, 2008, p. 10) [grifos do autor].

Vê-se que o ato de avaliar remete ao professor. Assim, enfatiza-se a relevância do educador matemático e de sua postura na formação dos discentes, através de uma reflexão a respeito do desempenho dos educandos em Matemática, apontando atitudes que não devem ser seguidas por professores de Matemática ao lecionar essa ciência.

2.2.1 Processo de Avaliação

Nortear e verificar o rendimento escolar requer uma postura atuante por parte do educador (avaliador), afinal as dimensões do processo de avaliação são amplas e atingem todas as fases do ensino, uma vez que a avalição deve ser vista como um processo sistemático e contínuo, onde serão obtidas informações e manifestações acerca do desenvolvimento das atividades docentes e discentes atribuindo-lhe grau, conceito ou nota (LIBÂNEO, 2017).

Tyler (1974 apud HAYDT, 2008, p.11) expressa, "o processo de avaliação consiste essencialmente em determinar em que medida os objetivos educacionais estão sendo realmente alcançados pelo programa do currículo e do ensino". Cada avaliador possui parâmetros que determinam o grau de assimilação centrado nos objetivos sistematicamente propostos no desencadeamento do ensino.

Os resultados obtidos por meio desta sistematização dizem respeito ao nível que se deseja alcançar os objetivos, cumprindo-se as exigências do conteúdo, por meio de instrumentos e procedimentos, como por exemplo: provas, exercícios teóricos e práticos, testes, observações, intervenções e etc.

A avaliação, ainda segundo Libâneo (2017), cumpre ao menos três funções, sendo estas: pedagógica didática, diagnóstica e controle.

a) *Função pedagógica didática* faz referência aos objetivos gerais e específicos, assim como as condições e possibilidades de atingi-los, sendo estes os pontos de partida na elaboração dos componentes avaliativos.

b) *Função diagnóstica* trata acerca da apuração das ações dos professores e dos alunos, com intuito de fiscalizar a postura com relação ao avanço ou mudança sobre os objetivos estipulados, ou seja, essa função garante o desenvolvimento da função pedagógica didática

c) *Função controle* refere-se à qualificação sistemática e comprovação dos resultados por parte dos educandos, através desta são coletados os dados do rendimento da aprendizagem e após submetê-los a critérios, se atribui conceito ou nota, isto é, expressa-se em juízo de valor.

O cumprimento das três funções, faz com que a avaliação deixe de ser isolada com ênfase apenas em aspectos quantitativos, além disso contribui para que o aluno possua controle de sua própria atividade, isto é, proporciona uma aprendizagem ativa.

> A aprendizagem ativa é aquela construída pelo educando a partir da assimilação ativa dos conteúdos socioculturais. Isso significa que o educando assimila esses conteúdos, tornando-os seus, por meio de atividade de internalização de experiências vividas. O educando se desenvolve à medida que torna propriamente suas as experiências vividas. Não basta o educando reproduzir reflexamente as informações que a ele forem confiadas. É preciso que as compreenda, as manipule, as possa utilizar de modo flexível, transferível, multilateral (LUCKESI, 2011, p.151)

Portanto, na prática escolar os sistemas de avaliação devem ser elaborados de forma a revelar a real condição do aprendizado, produzir no aluno não o sentimento de opressão, porém de liberdade instigando o pensamento crítico e o prazer pelo aprendizado.

> Nesse sentido, é preciso repensar certas ideias que predominam sobre o significado da avaliação em Matemática, ou seja, as que concebem como prioritário avaliar apenas se os alunos memorizam as regras e esquemas, não verificando a compreensão dos conceitos, o desenvolvimento de atitudes e procedimentos e a criatividade nas soluções, que, por sua vez, se refletem nas possibilidades de enfrentar situações-problema e resolvê-las. Outra ideia dominante é a que atribui exclusivamente ao desempenho do aluno as causas das dificuldades nas avaliações (BRASIL, 1998, p. 54).

Observa-se que a avaliação deve gerar uma aprendizagem significativa para o aluno, logo torna-se necessário que o professor elabore estratégias para exigir do aluno a interpretação e o raciocínio, conforme Morreto (2005, p. 96), "se tivermos que elaborar provas que sejam bem-feitas, atingindo seu real objetivo, que é verificar se houve aprendizagem significativa de conteúdos relevantes".

2.2.2 Educador Matemático e sua Importância para o Ensino

Esforços educacionais de diversas nações têm feito com que a Educação Matemática torne-se um importante campo de ensino e pesquisa com saberes próprios, onde se estabelece não apenas o "matemático", mas o "educador matemático", pois no âmbito da Educação Matemática, além de ser importante o professor possuir uma base sólida sobre conhecimentos matemáticos, é essencial que este esteja aperfeiçoado pedagogicamente para desvendar possíveis bloqueios no aprendizado e inovar em suas práticas de ensino.

> A educação Matemática caracteriza-se como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 6).

A Educação Matemática no Brasil surgiu no final de 1970, com influência do Movimento da Matemática Moderna (1950 – 1960), o marco deste avanço foi a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e os primeiros programas de pós-graduação em Educação Matemática. Contudo, mesmo diante das significativas conquistas na Educação, o ensino no Brasil ainda é um desafio constante.

Toma-se por base os resultados do ENEM de 2016, apresentados pelo ministro da Educação, Mendonça Filho; pela secretária executiva do Ministério da Educação, Maria Helena Guimarães Castro, e pela presidente do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep), órgão vinculado ao MEC responsável pelo exame, Maria Inês Fini, em 18 de janeiro de 2017, no MEC:

> Considerada a média total, os participantes obtiveram as maiores médias em ciências humanas e suas tecnologias (533,5), em linguagens e códigos e suas tecnologias (520,5), matemática e suas tecnologias (489,5) e ciências da natureza e suas tecnologias (477,1) (BRASIL, 2017c).

Percebe-se que a média em Matemática está abaixo de 50%, e mais, encontra-se a frente apenas do eixo "ciências da natureza e suas tecnologias", porém os componentes deste eixo são: Física, Química e Biologia, disciplinas que em parte dependem da Matemática. Assim podemos afirmar que os eixos tecnológicos das disciplinas que envolvem "cálculo" são os indicadores mais baixos no ENEM 2016. Ainda foi divulgada a maior nota obtida em Matemática e suas tecnologias (991,5), e a menor em linguagens e códigos e suas tecnologias (287,5).

A Matemática é vista por muitos como uma disciplina difícil de ser entendida. Desde a antiguidade poucos eram os privilegiados por compreender a Matemática. Na entrada da academia de Platão havia a seguinte frase "que não entre aqui, quem ignora a matemática", estes eram vistos como seres supremos, chegando muitas vezes a se isolarem do restante da sociedade.

Acredita-se ser este (comportamento com relação à matemática) o ponto em que muitos educadores precisam melhorar. Prieto (2006, p. 2) levanta dois questionamentos a esse respeito:

> Por que a maior parte dos alunos lidam bem com a Matemática desde a Educação Infantil até aproximadamente a 3ª série do Ensino Fundamental,

> e daí para frente passa a odiar essa disciplina? Por que grande parte dos alunos chega ao Ensino Médio com muita dificuldade para usar algoritmos e conceitos estudados nas séries anteriores? (PRIETO, 2006, p. 2).

Ao buscar respostas para essas questões a autora defende que a atitude do professor com relação à Matemática determina a maneira como o aluno irá ver essa ciência. Também afirma que o professor não pode se portar como na era platônica e pitagórica, assumindo uma postura em que a Matemática é para poucos, precisa desenvolver métodos de ensino que possibilitem uma proximidade entre o aluno e a Matemática, e não expor os conteúdos como se fossem difíceis com exercícios praticamente impossíveis de resolver.

> O professor deve mudar sua forma de ver e ensinar, pois tudo isso é contrário ao que os grandes estudiosos da Educação já vêm falando há algum tempo. Muitos estudiosos se preocuparam e se preocupam até hoje em saber de que forma o conhecimento se origina e evolui. Por exemplo, Jean Piaget diz que as estruturas do pensamento são adquiridas pela ação do sujeito sobre o meio, portanto cabe ao professor criar condições para a construção progressiva dessas estruturas através de atividades que envolvam experimentação, reflexão e descobertas (PRIETO, 2006, p.2).

Nesse sentido o professor de Matemática não deve ensinar do mesmo modo como outros ensinavam em tempos passados (da forma como ele foi ensinado), é necessária uma postura ativa, criativa, inovadora e desafiante, afinal o Educador deve encontrar meios para solucionar os seguintes questionamentos: "Como ensinar a Matemática? Como motivar o aluno? Como ensiná-lo a pensar? Como torná-lo independente? ".

> Se todos os professores compreendessem que a qualidade do processo mental, não a produção de respostas corretas, é a medida do desenvolvimento educativo, algo de pouco menos do que uma revolução no ensino teria lugar na escola"(PINTO, 1956 apud BINELLO, 2014, p. 10)

Estes são alguns pontos relevantes que apontam ser possível a partir de práticas pedagógicas "inovadoras" obter-se um avanço significativo no ensino da Matemática na educação básica, onde o professor deve desempenhar papel fundamental para essa conquista.

2.3 Ensino de Aritmética

Na presente seção dá-se um enfoque ao ensino dos conteúdos de Aritmética, destaca-se sua importância no contexto escolar e fora da escola, ainda expressa-se em conformidade com alguns autores estratégias para condução do ensino destes conceitos, e por fim expressa-se as dificuldades que muitos professores e alunos encontram em relação à ensinar e aprender Aritmética.

A aprendizagem e o ensino de Matemática possuem extrema importância em todos os estágios da formação intelectual, pois, em concordância com Brasil (1998, p. 24), "A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo, e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural".

Portanto nessa ótica, o estudante através do conhecimento matemático será capaz de compreender o mundo à sua volta, interagido com ele, estando apto a instruir mudanças no meio em que vive. Assim, o anseio do ensino de Aritmética é produzir significado para os alunos, ou seja, influenciar diretamente em suas práticas cotidianas, tornando-se legítimo e consistente.

A etimologia do termo Aritmética procede do latim *arithmetica*, com origem na palavra grega *aritmetikos*, que por sua vez é composta por *arithmos* que se refere a *número*, e por *tiko* que se remete a *ciência*, portanto, Aritmética significa *ciência dos números*.

A Aritmética surgiu naturalmente pela necessidade do homem de contar, esta é a base de toda a Matemática, nela se estabelecem conceitos importantes, como os sistemas de base posicional, representações dos algarismos, operações, estudo de frações, conceitos sobre múltiplos e divisores, dentre outros.

2.3.1 Importância da Aritmética na Formação Matemática

A Educação Básica é composta pelas seguintes etapas: Educação Infantil, Ensino Fundamental um, Ensino Fundamental dois e Ensino Médio. Em todos esses estágios a Matemática ocupa posição importante, uma vez que em conjunto com a leitura e a escrita, é responsável por uma das aprendizagens mais essenciais na formação intelectual do ser humano.

O primeiro contato das crianças com a Matemática ocorre em sua maioria por intermédio dos conceitos básicos da Aritmética (ainda que não seja empregado esse termo formalmente), quando se apresentam a noção de quantidade e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

> Quando a criança começa a aprender a contar ela poderá começar a usar a contagem como um instrumento de pensamento, para auxiliar sua habilidade de registrar e lembra-se de quantidades, e amplificar sua capacidade de resolver problemas. Por exemplo, a criança pode utilizar a contagem para se lembrar do número de figurinhas que trocou com seu amigo (NUNES et al., 2009, p. 20).

Percebe-se as dimensões do conhecimento matemático ao produzir habilidades nas mais diversas áreas do saber. Santana (2016, p. 2) afirma que "a Matemática fornece conhecimentos necessários para dominar os números que estão presentes em tudo na vida. Além disso, desenvolve o raciocínio deliberando a inteligência". Com isso, nota-se que os temas dessa ciência possuem grande importância na vida social dos educandos, e justamente por isso faz-se necessário que estes estejam preparados em termos de poder exercer com segurança os mais diversos conceitos matemáticos.

O termo "exercer com segurança" o conhecimento matemático, refere-se a possuir domínio principalmente nos princípios básicos, isto é, nos tópicos de Aritmética, onde são englobadas as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão), afinal estas regras comportam-se como a base para tantos outros ramos da Matemática, logo é inquestionável a notoriedade da Aritmética.

2.3.2 Estratégias Relevantes para o Ensino de Aritmética

Frente à relevância da Aritmética, questiona-se: Na escola os alunos têm compreendido esses conceitos? Os alunos são capazes de aplicar o ensino adquirido de aritmética em sua vida fora do ambiente educacional? Alguns autores como Lins e Gimenez (2006), Grando (2010) e Santana (2016) posicionam-se de maneira negativa. Segundo Lins e Gimenez (2006) "A Aritmética escolar, hoje, embora plenamente justificada do ponto de vista dos significados matemáticos, parece não levar em conta as necessidades da rua, embora muitas vezes se diga que sim".

> A existência de uma Aritmética da rua e uma Aritmética da escola permite verificar um campo de grande tensão e conflito nesse espaço aberto. O que se vê é que os algarismos tratados na escola são da escola e mecanismo que possibilitam fazer as contas nas ruas são das ruas. [...]. Dessa forma, não se pode pensar o ensino de Matemática de acordo com o sistema tradicional de Educação, o mundo é outro, os recursos tecnológicos estão aí, muitos deles inclusive acessíveis. E, um ensino voltado para a repetição e verbalização de conteúdo, é algo que não deve mais pertencer a este tempo (SANTANA, 2016, p.3).

A solução, com base nos pensadores citados, consiste em estreitar os laços entre o ensino oferecido na escola e as situações cotidianas, utilizando-se das novas tecnologias, dinâmicas e inovações na condução das aulas. Não menos importante, há necessidade de criar um sistema de avaliação eficaz, que possa de fato constatar o grau de aprendizado.

Não esquecendo que o professor é o principal personagem nesse processo, ele contribui de forma direta para que os alunos desenvolvam as habilidades de compreensão, interpretação e execução do conhecimento matemático, aplicando-o em todo o meio social.

Outro ponto relevante acerca do ensino de Aritmética é a preocupação na elaboração dos problemas. Conforme Grossnickle e Brueckner (1965) existem alguns requisitos que devem ser levados em consideração para construção do aprendizado adequado, são estes:

a) *Desenho de solução de problema*: Em todas as séries as crianças são muito beneficiadas pelo desenho ou objetivação das soluções de problemas reais, ou criados para substituir os reais. Tal objetivação pode ser feita por material concreto exploratório ou com desenhos. O uso de materiais concretos é especialmente desejável para a solução de problemas nas séries inferiores e para o trabalho com as crianças mais lentas em toda as séries da escola elementar. O uso de objetos e desenhos ajuda a criança a visualizar as relações apresentadas no problema e isto facilita à criança compreender do mesmo;

b) *Elaboração de problemas originais*: Um bom meio de testar a compreensão da criança sobre um determinado processo em aplicação é a verificação da habilidade que tem a criança de organizar problemas originais para ilustrá-los;

c) *Problemas sem números:* A prática oral do método a ser usado na resolução de problemas quando números não são dados é um valioso recurso que muito ajuda as crianças a sentir as relações numéricas nas situações apresentadas;

d) *Estimativa de resposta*: Quando a criança é capaz de estimar resposta para problemas, não aceita respostas absurdas. Essa estimativa requer habilidade de computar mentalmente com números arredondados.

Uma outra estratégia de grande valia no ensino com crianças é o uso de jogos, pois isto estimula o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático. Conforme Palhares (2008, p.3) este raciocínio "procede das coordenações mais gerais das ações de classificar, ordenar e colocar em correspondência, sendo a base do conceito de número e das regras aritméticas".

Os jogos podem ser usados como uma "ponte" para se apresentar as regras e leis da Matemática de forma natural sem sobrecarga de conteúdo, assim o aluno aprende "brincando", e desenvolve o sentimento de prazer ao estudar.

> O uso de jogos para ensinar Aritmética não é uma prática nova. Muitos professores já os utilizam a longo tempo. No entanto, eles têm sido usados apenas como um complemento, para reforço de aprendizagem, parte de lições em forma de folhas mimeografadas ou cartões relâmpagos. Jogos também são usados como prêmios em atividades extras para as crianças que já acabaram o trabalho. Aqui o que eu proponho é trazer os jogos de um plano secundário para um plano principal na aprendizagem da Aritmética (KAMII, 1982 apud PALHARES, 2008, p.3).

Portanto, para um aproveitamento desejável no ensino de Aritmética é ideal que os alunos tenham um contato inicialmente com instrumentos concretos, situações do dia-a-dia, relacionando a vida cotidiana com ensino produzido na sala de aula, inserindo ainda a estratégia de trabalhar os jogos. Acredita-se que seguindo essas estratégias o professor seja capaz de cativar seus alunos despertando neles o interesse e desenvolvendo o raciocínio lógico matemático.

2.3.3 Problemáticas no Ensino de Aritmética

Existem diversos fatores que se não forem trabalhados de forma adequada podem incidir em obstáculos na aprendizagem dos discentes no contexto dos conteúdos de Aritmética. A primeira dificuldade relatada aqui, diz respeito ao livro didático. Não são poucos os professores que seguem o livro didático como único ou principal recurso na preparação de suas aulas.

Segundo Cruz (2005 apud SILVA, 2007, p. 1) "não obstante esse ensino é quase sempre norteado pelos livros didáticos nos quais se verifica uma predominância de exercícios para aplicação das técnicas". O autor aponta como uma dificuldade o uso apenas dos problemas propostos nos livros didáticos, expressando que estes possuem em sua maioria "aplicações técnicas", ou seja, problemas que não estabelecem uma conexão com a realidade, requerendo dos alunos apenas o uso mecânico das fórmulas e leis, este tipo de ensino influência de forma negativa na formação dos alunos.

> Ao relacionar ideias matemáticas entre si, podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição, decomposição, inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações como no trabalho com o espaço, forma e medidas. O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma ferramenta eficaz para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos (BRASIL, 1998, p. 37).

O pensamento exposto acima sugere uma contextualização dos problemas com diversas áreas do saber, trabalha-los de forma isolada não é o suficiente para aquisição das habilidades e competências que os alunos precisam desenvolver, logo o livro didático pode ser usado como complemento no planejamento das aulas e não como único recurso para o ensino.

Outra dificuldade presente é a desmotivação dos alunos. Quando o aluno não demonstra interesse em aprender fica impossível para o professor ensinar, por conseguinte a aula termina por se tornar monótona e "chata".

> A motivação tornou-se um tema muito debatido na Educação, pela simples constatação de que, em paridade de outras condições, sua ausência representa queda de investimento pessoal de qualidade nas tarefas de aprendizagem. Alunos desmotivados estudam muito pouco ou nada e, consequentemente, aprendem muito pouco (FIORAVANÇO, 2010, p. 1).

Fioravanço (2010, p. 5) afirma que para fomenta, o interesse nos alunos é preciso "proporcionar situações que despertem no educando motivação para interação com o objeto do conhecimento, com seus colegas e com os próprios professores", haja vista que a motivação do educando consiste em uma problemática em destaque, que possui influências diretas no ensino, uma vez que motivar os alunos torna-se uma tarefa incessante no processo de construção do conhecimento.

Para finalizar, apresenta-se um último impedimento no ensino de Aritmética. Segundo Rocha e Santana (2011, p. 1) "percebe-se uma grande dificuldade tanto para os alunos no que se refere à compreensão dos conteúdos, quanto para os professores em lidar com tal situação, por não adaptarem o conteúdo à realidade dos alunos". A autora citada destaca uma dificuldade do professor por não saber como lidar com o "fracasso" do ensino.

Nessa concepção os olhares se voltam para "o professor d", não estando apto a criar estratégias que possam sanar as dúvidas dos alunos, logo a qualificação do professor é de suma importância nesse processo, especialmente no que se refere ao primeiro contato com a Matemática, isto requer professores capacitados pedagogicamente para instruir os discentes por meio de métodos que os estimulem a aprender.

2.4 Análise de Conteúdo

A análise de conteúdo consiste em um conjunto de instrumentos metodológicos em constante aperfeiçoamento que se aplicam a conteúdos diversificados que podem ser aplicados em diversas áreas. Destaca-se nesse tema os esforços de Bardin (2016). Pode-se afirmar que a análise de conteúdo tem enfoque direcionado a revelar conteúdos latentes, trazendo à tona informações "ocultas". Tornando-se extremamente eficaz no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que contém um caráter investigativo, assim terminar por contribuir de forma positiva para aquisição do conhecimento.

> A interpretação dos dados coletados é a principal etapa de um projeto de pesquisa, e é justamente esse o papel da análise de conteúdo – metodologia de grande importância para as ciências da comunicação, desenvolvida nos Estados Unidos no início do século XX. (BARDIN, 2016).

Com objetivos abrangentes as análises possuem enfoques na frequência com que surgem os elementos nas pesquisas (produções). Em contrapartida os resultados qualitativos direcionam-se para a ausência ou presença de determinada característica visando ultrapassar o alcance simplesmente descritivo das técnicas quantitativas para atingir interpretações mais profundas com base na inferência.

Moraes (2003 apud CURY, 2007, p. 64) afirma que "os textos não carregam um significado a ser apenas identificado: são significantes, exigindo que o leitor ou pesquisador construa significados com base em suas teorias e pontos de vista". As análises de conteúdos, segundo Bardin (2016), desenvolvem-se em três passos, a saber: Pré Análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

2.4.1 Pré Análise

Esta etapa é marcada pela organização da pesquisa, onde o autor sistematiza suas ideias para então construir um plano de análise preciso e eficiente que denote de fato a realidade dos dados. Existem basicamente três missões neste momento: escolha dos documentos, formulação das hipóteses e dos objetivos. Destacam-se nessa fase alguns pontos:

a) Leitura flutuante – O pesquisador estabelece um contato com os documentos a serem analisados, deixando-se impregnar pelos dados, assim a leitura vai se tornando mais precisa e as hipóteses emergem pouco a pouco.

b) Escolha dos documentos – Os documentos darão origem ao *corpus*, ou seja, o conjunto dos documentos que serão levados em conta nos procedimentos analíticos. Para constituí-lo, diversas vezes se estabelecem regras, seleções e escolhas.

c) Formulação das hipóteses e dos objetivos: Com a leitura flutuante, a escolha dos documentos e a constituição do *corpus*, surgem as hipóteses, isto é, afirmativas provisórias que serão validadas ou não no decorrer da inferência dos dados. Segundo Bardin (2016) não é obrigatório possuir um corpus para estipular as hipóteses, pois existem análises feitas às "cegas" sem ideias pré - concebida.

d) A referenciação dos índices, elaboração de indicadores e a preparação do material, são partes indispensáveis para se iniciar o processo e edição dos textos da pesquisa. Consistem em enfatizar os parâmetros mais frequentes, coletando imagens, entrevistas, além de produções científicas que servirão de subsídio na argumentação dos resultados.

2.4.2 Exploração do Material

Sendo a primeira etapa concluída com sucesso, nesta fase deve-se apenas pôr em prática as decisões tomadas, sendo um momento fastidioso e lento, onde se vai codificar, enumerar ou decompor os dados. Segundo Cury (2007), deve - se fazer um estudo aprofundado do material, separando em categorias e estabelecendo as unidades da análise.

2.4.3 Tratamento dos Resultados

Nesta etapa, os dados brutos são trabalhados de maneira a serem significativos, capazes de apresentar características ocultas. Para obter este propósito diversas técnicas podem ser empregadas, desde os procedimentos estatísticos mais simples como a porcentagem, organização de tabelas, a mais complexos, por meio de inferências estatísticas, interpretações e "texto síntese".

Portanto, neste ponto visa-se descrever as categorias, é onde a pesquisa atinge seu ponto máximo, pois segundo Triviños (1987 apud CURY, 2007, p.65) “não é possível que o pesquisador detenha sua atenção exclusivamente no conteúdo manifesto nos documentos. Ele deve aprofundar sua análise tratando de desvendar o conteúdo latente que eles possuem”, ou seja, procurar entender a forma como o aluno produziu a resposta. Feito isso, segundo Cury (2007, p.65) “é possível utilizar os resultados para elaborar estratégias de ensino para auxiliar os educandos a superarem as dificuldades detectadas”.

2.5 Análise de Erros

Nesta seção, aborda-se uma discussão relacionada a como os erros são tratados por educadores e educandos. Posteriormente, descreve-se a Análise de Erros, destacando de qual maneira esta pode ser útil no processo de ensino. Procura-se fazer uma descrição sucinta, porém com extrema clareza e precisão.

A análise de erros em uma visão geral, consiste em diligenciar uma atenção especial à produção escrita dos alunos, com intuito de compreender o raciocínio do discente principalmente quando apresentam respostas erradas.

Nas concepções de Silva e Buriasco (2006) a ação de analisar a produção dos discentes, faz com que o educador reflita sobre sua prática pedagógica, evidenciando a necessidade de procedimentos didáticos capazes de reconhecer e traçar estratégias que produzam resultados satisfatórios que possibilitem construir e reconstruir conhecimentos.

2.5.1 Visão do Erro no Processo de Ensino

O palco do desenvolvimento intelectual dos alunos é o ambiente escolar, nele cria-se, explora-se, desenvolve-se, transmite-se e absolve-se conhecimento, de modo que o erro é um dos principais personagens. É comum ouvir os alunos se manifestarem por meio de provérbios, conforme Souza (2001, p. 137): “Errando é que se aprende; na escola da vida os erros são os melhores mestres; a prática leva à perfeição”, ou seja, após cada etapa algo é superado, de forma que o resultado da etapa seguinte é melhor do que o obtido na etapa anterior.

No âmbito desse discurso suje o seguinte questionamento: o que é o erro? Segundo Luft, Barbosa e Pereira (2000, p. 285), a palavra “erro” significa “ação ou efeito de errar; equívoco; incorreção; descaminho; falta; falha; pecado”, diante deste fato, surge uma dúvida: O erro é algo bom ou ruim? É justamente neste ponto que apresenta-se este referencial, aqui defende-se a tese de que o erro pode ser algo bom, desde que seja visto como uma ferramenta de pesquisa para auxiliar no ensino e aprendizagem dos jovens.

Quando expõe-se este assunto, remete-se ao contexto escolar, logo lembra-se do processo de avaliação, afinal, quando os erros surgem? Em sua maioria nos instrumentos avaliativos, e mais uma vez nos pergunta-se: "Qual a postura do educador ao se deparar com os erros dos alunos?" Segundo Cury (1995), a forma de tratar os erros varia dependendo do professor, existem aqueles que simplesmente encontram os erros, porém não os apresenta aos alunos (descartam, como algo desnecessário), há aqueles que, a partir dos erros retomam o conteúdo, reexplicando, fazendo com que o aluno compreenda o que estava errado, e existem aqueles que questionam o aluno, com objetivo de entender qual o raciocínio empregado pelo aluno, para obter a resposta.

Em contrapartida "Qual a postura dos alunos em relação ao erro?"

> Em geral, o erro é execrado, e o aluno teme a reação do professor se não consegue dar a resposta esperada. Muitas vezes, cria-se uma reação em cadeia: o professor tentando fazê-lo cair nas "ciladas" em questões que apresentam exatamente as dificuldades que o aluno oculta ou, até mesmo, não se dá conta da existência (CURY, 2007, p. 91)

No âmbito deste pensamento, é essencial dar mais relevância aos erros cometidos pelos alunos, objetivando alcançar um melhor desempenho em matemática.

> Um erro corrigido (por ele mesmo) pode ser mais fecundo do que um acerto imediato, porque a comparação de uma hipótese falsa e suas consequências fornecem novos conhecimentos e a comparação entre dois erros dá novas ideias (CENCI, 2013, p.18).

Desta forma, é de grande importância usar os erros como algo positivo, auxiliando o educador no processo de ensino e aprendizagem, buscando entender o raciocínio que conduziu o aluno a falha, permitindo uma intervenção por parte do professor, que objetiva esclarecer o pensamento equivocado do aluno, e além disso, mostrar o procedimento correto. Adiante detalharemos este processo segundo a proposta de Cury (2007).

2.5.2 Análise de Erros como Metodologia de Pesquisa

A Análise de erros é uma tendência em Educação Matemática, que ganha grande destaque no Brasil pelos estudos de vários autores, dentre os quais destacam-se os de Cury (2007). A autora se baseia nas propostas de Bardin (1979) para análise de conteúdo, adaptando uma metodologia centrada na construção do conhecimento, isto é, defende que a postura adotada por muitos professores ao corrigir uma atividade considerando apenas os acertos e ignorando os erros, não produz no aluno habilidades de autonomia.

As ideias defendidas pelos autores acerca deste tema, afirmam que nada garante que o aluno que "errou" uma atividade nada sabe. Segundo suas hipóteses, os erros não são o bastante para que o avaliador conclua a ineficiência do conhecimento. Cury (2007) assume que o aluno que erra, errou porque em algum estágio de sua aprendizagem assimilou o conteúdo de forma equivocada, e assim faz-se necessário que o professor investigue onde isto ocorreu, para que o aprendizado seja revisto e o educando não prossiga nesta prática.

A Análise de Erros pode ser trabalhada de duas formas, como *Metodologia de Pesquisa* ou como *Metodologia de Ensino*. Para os fins desta produção, será abordado análise de erros apenas com metodologia de pesquisa, tendo um caráter investigativo, que possibilita ao aluno e ao professor entender como se dá a construção do conhecimento, influenciando diretamente na postura do educador em sua prática docente.

De acordo com esta metodologia de pesquisa, é desnecessário detectar os erros dos alunos apenas para conhecê-los. Para a autora a análise da produção dos alunos não tem por objetivo atribuir conceito ou nota, pois ainda que possa ser utilizada no processo de avaliação, é mais produtivo empregar essa análise para investigar as falhas de aprendizagem e planejar estratégias de ensino, provocando assim uma "mudança no comportamento dos educadores". A partir dessa postura é possível alcançar sucesso no aperfeiçoamento dos conhecimentos latentes dos alunos, ou seja, por meio da análise de erros, se pode delinear a forma como os educandos assimilaram e/ou assimilam de maneira incorreta determinado conteúdo.

Ainda que este processo possa ser empregado em diversas ciências e áreas do conhecimento, é notória sua aplicabilidade acentuada no que se refere ao ensino de Matemática nos mais variados níveis escolares, pois os meios utilizados para constatar o grau de assimilação da aprendizagem, segundo Feltes (2007, p.31), "são as provas escritas, testes e listas de exercícios, onde as respostas dos alunos, devem ser fiéis ao foco sob o qual o conteúdo foi estudado".

Logo diversas soluções podem surgir, incentivadas por raciocínios diferenciados, exigindo naturalmente uma ação de análise e interpretação para assim efetuar-se julgamento quanto as habilidades desenvolvidas pelos discentes.

> O erro pode ser considerado como ponto de partida, como fonte de informação, proporcionando aprendizagens. Deve ser encarado como uma etapa a ser vencida pelos alunos. Ele denuncia o percurso que o discente traçou, o caminho que ele percorreu até chegar a uma determinada resposta, e esses caminhos, esses percursos fazem parte de possibilidades na construção do seu conhecimento (FELTES, 2007, p.31).

Nesses princípios aplica-se a análise de erros como metodologia de pesquisa, objetivando compreender a construção do conhecimento dos alunos por meio de suas produções escritas, para posteriormente desenvolver métodos e estratégias de ensino que produzam no educando uma reflexão, incentivando-o a reconstruir o conhecimento pautado nos erros anteriormente concebidos.

O capítulo que segue, expõem os procedimentos metodológicos da presente pesquisa. Deixa-se claro o local, sujeitos e os critérios adotados para seleção da amostra, detalhando às cidades envolvidas e a quantidade de provas de cada uma.

3 Metodologia

Nesse capítulo discorre-se sobre as características da pesquisa, deixando claro quais suas especificidades em relação a: classificação; finalidade; objetivos, tipo e linha de pesquisa. Ainda nesses propósitos é exposto o local e sujeitos que fazem parte da pesquisa, indicando como se deu o processo para escolha do tema.

Adiante se constitui o corpus, apresentando o universo envolvido na investigação, chama-se atenção para os dados distribuídos por cidades. Finaliza-se o capítulo produzindo um breve estudo das técnicas da inferência estatística para estimativa de uma amostra por meio de proporção, sendo conhecida a população, tais procedimentos perfazem um plano de amostragem que será seguido no capítulo 4.

3.1 Classificação da Pesquisa

Classifica-se a pesquisa, segundo o roteiro apresentado por Gil (2010), inicialmente quanto à área do conhecimento, conforme o CNPq em Ciências Exatas e da Terra; segundo sua finalidade é aplicada (pesquisa voltada à aquisição de conhecimentos com vistas à aplicação numa situação específica); conforme seus objetivos têm caráter descritiva (baseia-se nas características de uma determinada população) e explicativa (propósito identificar fatores que determinam ou contribuem para ocorrência de fenômenos); os dados são quantitativos e qualitativos; o grau de controle das variáveis é não experimental; o tipo da Pesquisa é Teoria Fundamentada em Dados (*Grounded Theory*).

> O pesquisador, mediante procedimentos diversos, reúne um volume de dados referente a determinado fenômeno. Após compará-los, codificá-los e extrair suas regularidades, conclui com teorias que emergiram desse processo de análise. Têm-se, pois, uma teoria fundamentada nos dados. O propósito do pesquisador não é, pois, o de testar uma teoria, mas de entender uma determinada situação, como e por que os participantes agem dessa maneira e por que essas situações se desenvolvem daquele modo. (GIL, 2010, p.41).

Nestes princípios, o objeto desta produção científica é empregar a análise de erros como metodologia de pesquisa seguindo os preceitos de Cury (2007), visando:

a) Analisar e classificar os principais erros sobre Aritmética dos alunos da Educação Básica;

b) Relacionar as principais dificuldades detectadas entre o Ensino Fundamental, e o Ensino Médio;

c) Revelar algumas falhas de aprendizagem.

Portanto, essa comunicação possui características direcionadas a encontrar, categorizar e explorar as respostas equivocadas dos estudantes no ensino básico no contexto das provas da OBMEP, produzindo um estudo embasado capaz de inferir as habilidades e competências no que tange os conteúdos iniciais de aritmética detidos pelos discentes das escolas públicas.

3.2 Local e Sujeitos da Pesquisa

Em junho de 2016, após várias discussões, decidiu-se por fazer uma pesquisa voltada para educação matemática, por meio de sondagens nas novas tendências em educação (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), (LUCKESI, 2011), (ESTEBAN, 2001), (CURY, 2007), (BORBA; ARAÚJO, 2012), (MORRETO, 2005) etc. Encontrou-se alguns trabalhos relacionados à análise da produção escrita dos alunos, foi então que optou-se por uma pesquisa regida pela Análise de Erros.

Ao consultar várias produções científicas acerca do tema (FELTES, 2007), (COSTA, 2015), (SANTOS, 2016), entre outros, foi possível perceber que a maioria é voltada para uma análise "isolada" de no máximo quatro turmas, em uma ou duas escolas. Para ser uma pesquisa com dimensões mais abrangentes, decidiu-se, após diálogo com os orientadores fazer uma abordagem em todo o Oeste do Estado do Pará, por intermédio das provas da segunda fase da OBMEP.

> O Pará é uma das 27 unidades federativas do Brasil. É o segundo maior estado do país com uma extensão de 1.248.042,515 km^2, pouco maior que Angola, dividido em 144 municípios, estar situado no centro da região norte e tem como limites o Suriname e o Amapá a norte, o oceano Atlântico a nordeste, o Maranhão a leste, Tocantins a sudeste, Mato Grosso a sul, o Amazonas a oeste e Roraima e a Guiana a noroeste. O estado é o mais populoso da região norte, contando com uma população de 8.272.724 habitantes. Sua capital, Belém, reúne em sua região metropolitana cerca de 2,1 milhões de habitantes, sendo a maior população metropolitana da região Norte. Outras cidades importantes do estado são: Abaetetuba, Altamira, Ananindeua, Barcarena, Castanhal, Itaituba, Marabá, Parauapebas, Redenção, Santarém e Tucuruí. O relevo é baixo e plano; 58% do território se encontra abaixo dos 200 metros. As altitudes superiores a 500 metros estão nas serras de Carajás, Cachimbo e Acari. Os rios principais são: rio Amazonas, rio Tapajós, rio Tocantins, rio Xingu, rio Jari e rio Pará (PARÁ, 2010b).

O IBGE faz subdivisões nos estados brasileiros, estas são chamadas de mesorregiões, por sua vez são compostas por municípios com similares características, por exemplo: socioeconômicas e geográficas. O propósito dessa subdivisão é voltado para objetivos centrados em estudos estatísticos, no entanto não formam entidades administrativas ou políticas.

Oficialmente, o estado do Pará é dividido em seis mesorregiões. A figura 3.1, mostra como está organizada tal divisão:

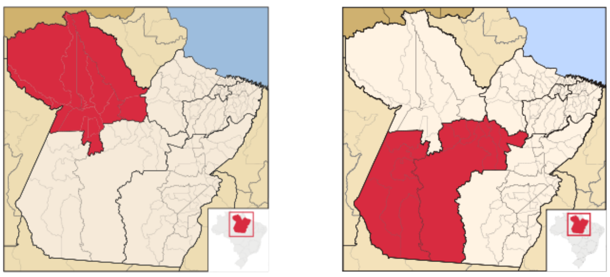
Figura 3.1 – Mapa das subdivisões do estado do Pará

Fonte: Wikipedia

1. Baixo Amazonas;
2. Marajó;
3. Metropolitana de Belém;
4. Nordeste Paraense;
5. Sudeste Paraense;
6. Sudoeste Paraense.

O levantamento de dados desta pesquisa, ocorre no Oeste do Pará que é composto pelas mesorregiões: Baixo Amazonas e Sudoeste Paraense. Abrangendo 32 cidades, com território de aproximadamente 756.241.576 km^2, e população em torno de 1.329.141 habitantes (BRASIL, 2016), equivalente a 20% da população do estado do Pará. Apresenta densidade demográfica de 1,8 hab/km^2. O PIB segundo Brasil (2014) é de R$18.768.156.000.

Figura 3.2 – Subdivisões que compõem a região Oeste do Pará



(a) Mapa do Baixo Amazonas

(b) Mapa do Sudoeste Paraense

Fonte: Wikipedia

A economia do Oeste do Pará baseia-se no extrativismo mineral (ferro, bauxita, manganês, calcário, ouro, estanho) e vegetal (madeira), na agricultura, na pecuária, na indústria e no turismo. Pela característica natural da região, destaca-se também como forte ramo da economia a indústria madeireira (PARÁ, 2010a).

O público alvo deste trabalho são os alunos das escolas públicas que estavam cursando do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental e do primeiro ao terceiro ano do Ensino Médio em 2016 que participaram da segunda fase da 12ª OBMEP, no dia 10 de setembro de 2016 conforme a distribuição por níveis da OBMEP.

3.3 Constituição do Corpus da Pesquisa

As provas que compõem o corpus da pesquisa são as aplicadas na segunda fase da OBMEP no dia 10 de setembro de 2016, estas perfazem um total de 4377, sendo 1952 do nível 1, 1482 do nível 2 e 943 do nível 3, conforme a tabela abaixo:

Tabela 3.1 – Frequência de provas, por nível, da 2ª fase da OBMEP realizada nos municípios da Região do Oeste do Pará, em 2016

Cidade	**N 1**	**N 2**	**N 3**	**Total**	**Cidade**	**N 1**	**N 2**	**N 3**	**Total**
Alenquer	81	72	5	158	Mojuí dos Campos	36	18	25	79
Almeirim	26	28	7	61	Monte Alegre	130	101	63	294
Altamira	108	95	53	256	Novo Progresso	0	23	18	41
Anapú	24	25	0	49	Óbidos	108	86	56	250
Aveiro	32	21	19	72	Oriximiná	92	73	86	251
Belterra	32	21	16	69	Pacajá	69	50	31	150
Brasil Novo	32	21	13	66	Placas	40	23	0	63
Cachoera da Serra	0	4	0	4	Porto de Moz	12	12	0	24
Castelo dos Sonhos	14	7	7	28	Prainha	81	69	28	178
Curuá	33	29	18	80	Rurópolis	48	22	8	78
Curuai	0	9	0	9	Santarém	505	359	318	1182
Faro	12	7	9	28	Senador José Porfílio	21	18	6	45
Itaituba	120	73	22	215	Terra Santa	32	21	21	74
Jacareacanga	12	16	0	28	Trairão	14	11	3	28
Juruti	139	94	56	289	Uruará	28	8	20	56
Medicilândia	37	31	25	93	Vitória do Xingu	34	30	10	74
					Total	**1952**	**1482**	**943**	**4377**

Fonte: Corpus da pesquisa

Nota: N 1, N 2 e N 3 significam respectivamente, nível 1, nível 2 e nível 3.

Destas foram selecionados três problemas que versam sobre os conteúdos de Aritmética, sendo um problema de cada nível. Ressalta-se que há uma gama de provas que não foram analisadas, pois foram enviadas a correção nacional da OBMEP, e por essa razão não teve-se acesso. Porém, tais provas não afetam os resultados da pesquisa, uma vez que correspondem a uma porcentagem menor do que 1,5%.

Responde-se duas perguntas quanto à composição do corpus:

1. Qual a razão para analisar-se problemas com conceitos de Aritmética?

   Decidiu-se analisar essa gama de problemas pois eles apresentam conceitos inicias (operações básicas, fatoração, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum, sistema de base posicional, etc), assim pode-se identificar as falhas de raciocínio usadas pelos alunos em problemas que exigem o conhecimento mínimo de Matemática, porém de extrema importância.

2. Por que problemas da OBMEP?

   Tem-se duas razões em particular:

   a) Estes problemas são selecionados de forma a exigir do aluno uma interpretação mais elaborada, uma vez que são problemas contextualizados propostos por uma comissão de professores experientes compromissados com a Educação Básica.
   b) Os professores podem usar a análise de erros para fazer o aluno compreender onde está errando, com o estímulo de ter um desempenho melhor em sua vida acadêmica e consequentemente profissional, além de poder se preparar para olimpíadas futuras, criando estratégias de ensino que incentive o aluno a aprender.

> Ainda que os pesquisadores tenham como objetivo entender os erros cometidos pelos alunos e descobrir suas causas, para remediá-los ou para aproveitá-los como ferramenta para a aprendizagem, parece que a dificuldade maior com que se deparam é relacionada à falta de atividade que desafiem o aluno a querer modificar sua atitude face a aquele erro (CURY, 2007, p. 48).

Mesmo diante de tais restrições na constituição do corpus (selecionando apenas três problemas), os dados ainda são extensos, logo faz-se preciso selecionar uma amostra com dimensão suficiente que não venha interferir nos resultados gerais da população, ou seja, uma amostra que permita generalizar os resultados. Isto será tratado na próxima seção.

3.4 Plano de Amostragem

Nesta seção será apresentado o processo para estimar uma amostra com uma margem de erro desejada, tais conceitos fazem parte da Inferência Estatística, cujo estudo fornece métodos para se extrair conclusões sobre uma população a partir dos dados amostrais. As definições a baixo foram extraídas de Moore (2011), Bussab e Morettin (2010), Crespo (2002).

Definição 1 *Ao conjunto de entes portadores de, pelo menos uma característica comum denomina-se **população estatística** ou **universo estatístico**.*

Definição 2 *Uma **amostra** é um subconjunto finito de uma população.*

Definição 3 *Uma **Amostra Aleatória Simples** (AAS) de tamanho n de uma variável aleatória X, com dada distribuição, é o conjunto de n variáveis aleatórias independentes $X_1, X_2, ..., X_n$, cada uma com a mesma distribuição de X. Ou seja, a amostra será a $n-upla$ ordenada $(X_1, X_2, ..., X_n)$, onde X_i indica a observação do $i-ésimo$ elemento sorteado.*

Definição 4 *Um **intervalo de confiança** é uma faixa (um intervalo) de valores usada para se estimar o verdadeiro valor de um parâmetro populacional. A um intervalo de confiança associa-se um nível de confiança, tal como $0,95$ (ou 95%) ou $0,99$ (ou 99%).*

Definição 5 *Um **nível de confiança** é a taxa de sucesso do método para um intervalo de confiança, ou seja, é a probabilidade de o método, na verdade, produzir um intervalo que contenha o parâmetro desconhecido. O nível de confiança é comumente expresso como uma probabilidade $1-\alpha$. Portanto, para um nível de confiança de $0,95$, teremos $\alpha = 0,05$.*

Definição 6 ***Margem de Erros** é a diferença máxima provável (com probabilidade $1-\alpha$) entre a proporção amostral observada e a verdadeira proporção populacional p.*

3.4.1 Tamanho de uma Amostra por Estimativa da Proporção

Outro parâmetro estatístico cuja determinação afeta o tamanho da amostra é a proporção populacional. O nível de confiança para uma proporção populacional p terá margem de erro aproximadamente igual a um valor E, se não conhece-se o tamanho da população, ou caso ela seja infinita, obtém-se a amostra pela expressão que segue:

$$n_0 = \frac{z_{\alpha/2}^2 \, p^*(1-p^*)}{E^2} \tag{3.1}$$

As variáveis representam:

- n_0 é o tamanho da amostra para uma população desconhecida ou infinita;
- $z_{\alpha/2}$ corresponde ao grau de confiança desejado, este valor é dado de acordo com nível de confiança (ver anexo B);
- p^* é a proporção populacional dos indivíduos que pertencem as categorias que estamos interessados em estudar;
- E é a margem de erro ou erro máximo desejado.

> O n_0 obtido não se altera muito quando se muda p^*, desde que p^* não esteja muito afastado de $0,5$. Logo, use a adivinhação conservadora $p^* = 0,5$, se espera que a verdadeira p esteja, grosso modo, entre $0,3$ e $0,7$. (MOORE, 2011, p.393).

Sendo o tamanho da população conhecido, faz-se a correção da amostra por meio da expressão

$$n = \frac{n_0 N}{n_0 + N - 1} \tag{3.2}$$

Onde n representa o tamanho real da amostra e N tamanho da população.

3.4.2 Tamanho dos Dados da Pesquisa

Seguindo o método descrito na subseção anterior, será estimada a amostra por meio da proporção em cada nível que é realizada a pesquisa. Deseja-se um nível de confiança de 95% com erro máximo de 3%.

3.4.2.1 Amostra do Nível 1

Para o cálculo do tamanho da amostra inicial (supondo a população desconhecida), considere a equação 3.1, para o grau de confiança desejado, usa-se $z_{\alpha/2} = 1,96$; proporção populacional $p^* = 0,5$ e margem de erro $E = 0,03$

$$n_0 = \frac{1,96^2(0,5)0,5}{0,03^2} = 1067,11111 \tag{3.3}$$

Substituindo na equação 3.2, com $N = 1952$ (População do nível 1), tem-se

$$n = \frac{1067,11111(1952)}{1067,11111 + 1951} = 690,167065 \cong 690 \tag{3.4}$$

3.4.2.2 Amostra do Nível 2

Como a amostra segue as mesmas condições do nível 1, tem-se de 3.3 que $n_0 = 1067,1111$ e a população $N = 1482$. Pela equação 3.2, tem-se

$$n = \frac{1067,11111(1482)}{1067,11111 + 1481} = 620,639602 \cong 621 \tag{3.5}$$

3.4.2.3 Amostra do Nível 3

Segue os mesmos termos das anteriores, sendo a população $N = 943$ e por 3.3 $n_0 = 1067,11111$, novamente substituindo em 3.2 obtém-se

$$n = \frac{1067,11111(943)}{1067,11111 + 942} = 500,861188 \cong 501 \tag{3.6}$$

Na Tabela 3.2 encontram-se as amostras conforme cada cidade da região Oeste do Pará envolvida na pesquisa, para um nível de confiança de 95% com margem de erros 3%.

Respaldados pelos cálculos anteriores. Para obter a estimativa de forma individualizada foi dividida a quantidade de provas de cada cidade pela população do nível, o percentual assim obtido foi multiplicado pela amostra do respectivo nível, resultando na quantidade de provas que compõem o corpus.

Por exemplo, para a cidade de Santarém no nível 1, os dados são: Quantidade de provas $N_{stm} = 505$, população do nível $N = 1952$, percentual $p_{stm} = \frac{505}{1952} = 0,258709016$, multiplicando p_{stm} pela amostra do nível obtida na equação 3.4, ou seja, $(0,258709016)(690) \cong 179$, portanto 179 é a amostra da cidade de Santarém para o nível 1.

Tabela 3.2 – Frequência da amostra de provas, por nível, da 2ª fase da OBMEP realizada nos municípios da Região do Oeste do Pará, em 2016

Cidade	**N 1**	**N 2**	**N 3**	**Total**	**Cidade**	**N 1**	**N 2**	**N 3**	**Total**
Alenquer	29	30	3	61	Mojuí dos Campos	13	8	13	34
Almeirim	9	12	4	25	Monte Alegre	46	42	33	121
Altamira	38	40	28	106	Novo Progresso	0	10	10	20
Anapú	8	10	0	18	Óbidos	38	36	30	104
Aveiro	11	9	10	30	Oriximiná	33	31	46	110
Belterra	11	11	9	31	Pacajá	24	21	16	61
Brasil Novo	11	9	7	27	Placas	14	10	0	24
Cachoera da Serra	0	2	0	2	Porto de Moz	4	5	0	9
Castelo dos Sonhos	5	3	4	12	Prainha	29	29	15	73
Curuá	12	12	10	34	Rurópolis	17	9	4	30
Curuai	0	4	0	4	Santarém	179	150	169	498
Faro	4	3	5	12	Senador José Porfílio	7	8	3	18
Itaituba	42	31	12	85	Terra Santa	11	9	11	31
Jacareacanga	4	7	0	11	Trairão	5	5	2	12
Juruti	49	39	30	118	Uruará	10	3	11	24
Medicilândia	13	13	13	39	Vitória do Xingu	12	13	5	30
					Total	**690**	**621**	**501**	**1812**

Fonte: Corpus da pesquisa

Nota: N 1, N 2 e N 3 significam respectivamente, nível 1, nível 2 e nível 3.

Portanto, serão realizadas as análises dos erros cometidos pelos alunos nos problemas de Aritmética na realização da prova da 2ª fase da 12ª OBMEP, conforme amostra de 1812 alunos da rede pública das escolas do Oeste do Pará.

No próximo capítulo, será abordada a análise dos dados. Tal análise será feita de forma quantitativa e qualitativa. Ainda serão expostas ilustrações retiradas do *corpus* da pesquisa, estabelecendo possíveis justificativas para os erros cometidos pelos alunos.

4 Análise dos Dados

Neste capítulo é posto em prática tudo que foi abordado nos capítulos anteriores, iniciando por dar um tratamento aos dados segundo as etapas de análise de conteúdo produzidas por Bardin (2016), já detalhadas na seção 2.4. O *corpus* da pesquisa foi analisado, e constituiu-se as categorias de respostas,[1] posteriormente por meio das similaridades das categorias foram estipuladas as Classes de erros[2] compostas por agrupamentos das categorias.

No decorrer teve início a análise dos erros em cada nível de forma individualizada, destacando os dados de maneira quantitativa e qualitativa. Para se ter detalhes nos resultados, fez-se uma análise de cada subitem, averiguando quais classes estão inseridas neles. Ainda foram selecionadas ilustrações das respostas do corpus e anexadas nas respectivas classes e níveis.

4.1 Panorama Geral da Análise dos Dados

Após a seleção da amostra, iniciou-se o processo de análise das respostas dos alunos, seguindo as etapas presentes na seção 2.4 (Pré - análise, exploração do material e tratamento dos resultados). Na pré-análise foi feita uma leitura flutuante no *corpus* da pesquisa, objetivando ter um contato com os argumentos dos alunos ao proporem as soluções. Esta fase ainda consolidou a escolha do tema, pois ainda que de forma superficial, foi possível perceber uma carência de aprendizado por parte dos alunos com relação aos tópicos de Aritmética.

Em segunda instância, teve início a Exploração do Material. A estratégia adotada consistiu em enumerar as provas de cada cidade. Em seguida foi criada uma planilha no *Microsoft Excel*, para cada uma das 32 cidades envolvidas.

A partir daí foram verificadas as produções escritas dos educandos, tais verificações deram origem às categorias de respostas que surgiam no decorrer da análise, ou seja, as categorias emergiram dos dados. Respostas distintas davam origens a novas categorias, estas foram codificadas para ter-se uma melhor compreensão dos dados. Logo depois as categorias de respostas foram agrupadas conforme as semelhanças gerando às classes de erros.

[1] As categorias de respostas não seguiram produções cientificas já existentes na literatura e nem matrizes de referências, foram estipuladas pelos autores conformem as produções dos alunos no corpus da pesquisa.

[2] As classes de erros assim como as categorias de respostas foram impostas pelos autores em conformidade com as produções dos alunos presentes no corpus.

Apresenta-se a seguir uma descrição das classes de erros criadas na pesquisa de uma maneira geral, as mesmas serão discutidas com maiores detalhes em cada um dos níveis:

a) **Erro relacionado à falta de concentração** - Erros desta natureza possuem ao menos uma característica comum, o aluno compreende o enunciado e inicia o procedimento adequado para obter a solução correta, no entanto, ao decorrer do processo de resolução este comete equívocos por falta de atenção, esquecendo de considerar algumas informações do problema, logo é conduzido às respostas incorretas.

b) **Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos** - Os alunos que cometem esses erros, não possuem domínios dos conhecimentos básicos da Matemática, como consequência, não são capazes de fazer contagem com números naturais, desconhecem o sistema de base posicional, não compreendendo o que são algarismos, apresentam dificuldades ao efetuar as operações elementares, além de não saber calcular a média aritmética de números naturais.

c) **Erro relacionado à má interpretação** - Uma das primeiras etapas no processo de solução de um problema consiste em compreender o que é requerido na questão. Os erros motivados por não entender o enunciado estão incluídos nessa classe, sendo causados em alguns casos pela dificuldade do aluno na leitura e compreensão do texto.

d) **Erro relacionado ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas** - Os erros inseridos nessa classe são aqueles em que os alunos não conseguem identificar os múltiplos de determinado número, desconhecendo os principais critérios de divisibilidade, não sabem usar o mínimo múltiplo comum (MMC), apresentam deficiência no uso do algoritmo da multiplicação quando se deseja que o produto de números com mais de um algarismo seja múltiplo de algum valor.

e) **Erro relacionado à aplicação de conhecimento equivocado** - Os erros inseridos nessa classe são motivados pelo fato do aluno possuir conhecimento acerca de algum tópico matemático, no entanto não é capaz de discernir em qual tipo de problema tal conhecimento deve ser aplicado, assim terminar por tentar resolver o problema com um conhecimento que não é o adequado para se alcançar a solução. Esta classe é marcada pelo fato do aluno não possuir domínio dos conceitos exigidos e nem dos conhecimentos utilizados.

f) **Erro relacionado a todas as classes** - Os erros que compõem essa classe em sua maioria são aqueles que não apresentam qualquer justificativa na solução, ou seja, os alunos não conseguem estabelecer um raciocínio que possa fundamentar sua resposta. Outro erro inserido aqui diz respeito ao aluno expressar uma resposta que discorda do enunciado, e ainda erros onde o enunciado é apenas transcrito na "solução". Assim, infere-se que os autores de tais respostas propõem soluções que estão caracterizadas por todas as demais classes apresentadas.

Nota-se que os títulos das classes possuem dimensões abrangentes, e podem conduzir o leitor às ambiguidades. Para solucionar esta questão, apresenta-se a tabela 4.1, com a finalidade de dar mais objetividade às classes. Tal tabela, expressa em quais classes às dificuldades expostas pelos alunos estarão inseridas para os fins da análise aqui realizada.

Tabela 4.1 – Dificuldades dos alunos que compõem às classes de erros

Classe	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**
Erro relacionado à falta de concentração					X										
Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	X	X	X			X									
Erro relacionado à má interpretação									X						X
Erro relacionado ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas				X				X			X				
Erro relacionado à aplicação de conhecimento equivocado							X								
Erro relacionado a todas as classes										X		X	X	X	

Nota: A: Operações elementares. B: Conceitos de algarismos. C: Contagem com números naturais. D: Critérios de divisibilidades. E: Falta de atenção (Inicia corretamente, mas se perde no decorrer). F: Média aritmética. G: Aplicação de conhecimento inadequado. H: Progressão aritmética. I: Compreensão do enunciado. J: Discorda do enunciado. K: Conceito de múltiplos. L: Reescreve o enunciado do problema. M: Sem justificativa. N: Resposta sem sentido. O: Baseia em subitens anteriores.

Findado o processo de codificação, categorização e classificação, iniciou-se a tabulação e análise. As classes descritas anteriormente foram distribuídas segundo as categorias de respostas nos itens de cada nível. A análise foi efetuada considerando as classes do item em cada um dos subitens de forma individualizada, objetivando deixar o mais claro possível os dados obtidos. Nas próximas seções deste capítulo, será analisado cada item, sendo o item 1 do nível 1, o item 2 do nível 2 e o item 3 do nível 3.

4.1.1 Dados Gerais

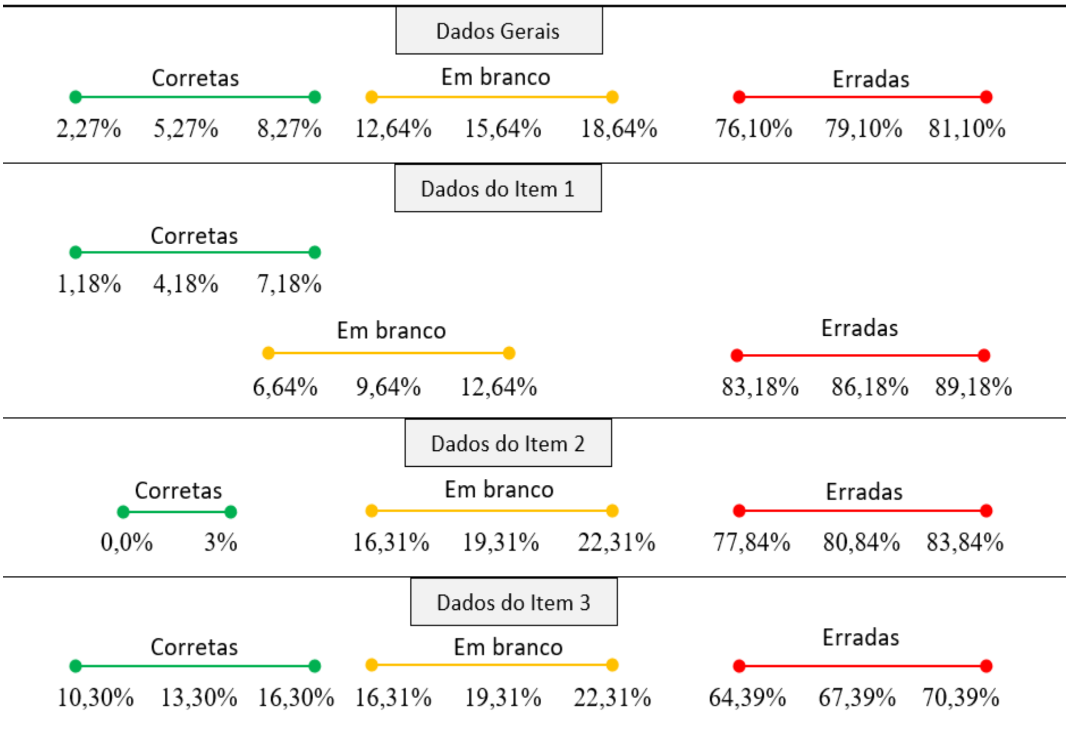
Apresenta-se a seguir os dados gerais das quantidades de respostas corretas, em branco e erradas presentes no *corpus* da pesquisa, tais dados estão expressos na tabela 4.2. Destaca-se que estimativas da proporção serão apresentadas na forma de intervalos de confiança. Assim quando dois intervalos de confiança se superpõem, isso implica em empate técnico.

Tabela 4.2 – Dados quantitativos da pesquisa

	Item 1		Item 2		Item 3		Total	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
Corretas	85	4,18	0	0	201	13,30	286	5,27
Em branco	196	9,64	361	19,16	292	19,31	849	15,64
Erradas	1753	86,18	1523	80,84	1019	67,39	4295	79,10
Total	2034	100	1884	100	1512	100	5430	100

Em termos gerais, foram analisadas 5430 respostas, sendo 2034 do nível 1, 1884 do nível 2 e 1512 do nível 3. Ainda na tabela 4.2 encontram-se os percentuais das respostas corretas, em branco e erradas. Segundo o plano de amostragem estabelecido estes resultados possuem um nível de confiança de 95%, com margem de erro de 3%. Estes dados devem ser interpretados em intervalos de confiança, conforme a figura abaixo.

Figura 4.1 – Intervalos de confiança das respostas corretas, em branco e erradas



Em relação aos dados gerais, o percentual de acertos está em 5,27%, com margem de erros de três pontos percentuais. As respostas em branco correspondem à 15,64%, com margem de erros de 3%. E as respostas erradas são responsáveis por 79,10% com margem de erros de 3%.

Destaca-se uma particularidade em cada item. No item 1, é possível perceber que acontece um empate técnico entre as quantidades de respostas “corretas” e as “em branco”, em torno de 7%. No item 2, as respostas corretas representam 0% podendo chegar à 3% com à margem de erro. O item 3, foi o que obteve maior percentual de acertos, 13,3% com 3% para mais ou para menos.

As respostas "corretas" e as respostas "em branco" não foram consideradas, à análise é feita apenas nas respostas erradas. Tal análise será conduzida por meio da seguinte dinâmica, apresentando:

a) o item do respectivo nível;

b) os tópicos de Aritmética que o aluno precisa dominar para solucionar o item;

c) um panorama geral da quantidade de respostas corretas, em branco e erradas no item;

d) às categorias de respostas no item;

e) às classes de erros no item;

f) às classes de erros nos subitens do item.

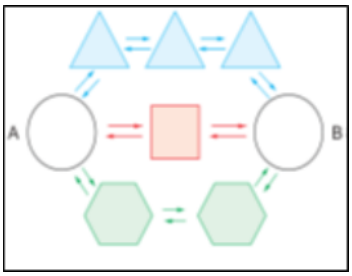
Continuando o processo, às classes de erros são ilustradas por meio de exemplos de respostas retiradas do *corpus* da pesquisa em cada subitem do respectivo item. Durante essa etapa de exposições de respostas, às mesmas serão comentadas explicitando os erros cometidos, e empregado a análise de erros como metodologia de pesquisa, buscando compreender (em parte) o pensamento do aluno ao propor a solução.

4.2 Análise do Item no Nível 1

Dá-se início aos procedimentos de análise no item do nível 1. Abaixo tem-se o item que versa sobre os conceitos de Aritmética que será objeto de estudo neste nível.

(OBMEP - 2016) Item 1 *Na brincadeira do vai e volta, Xavier, Yara e Zezé começam juntos na casa A e pulam, simultaneamente, de casa em casa, indo de A para B ou voltando de B para A várias vezes. Xavier faz o caminho pelas casas triangulares, Yara pela casa quadrada e Zezé pelas casas hexagonais. Cada uma das crianças só retorna pelo caminho em que veio depois de chegar à casa A ou à casa B.*

Figura 4.2 – Ilustração do item 1



Fonte: 2ª fase da 12ª OBMEP

a) Em que casa cada uma das crianças estará após pular exatamente dez vezes? Use a letra X para marcar a casa em que estará Xavier, a letra Y para marcar a casa em que estará Yara, e a letra Z para marcar a casa em que estará Zezé.

b) Após iniciar a brincadeira, quantos pulos cada uma delas dará até se encontrarem novamente na casa A?

c) Explique por que as crianças nunca se encontrarão na casa B

No anexo C, encontra-se a solução deste item, divulgada no portal da OBMEP. De posse desta solução, foram verificadas as habilidades[3] que o aluno deve possuir para obter a solução correta. Tais habilidades estão explicitadas abaixo:

a) contagem da quantidade de pulos por meio dos números naturais;

b) fazer uma contagem individualizada para chegar à casa A, e encontrar o MMC;

c) fazer uma contagem individualizada para chegar à casa B;

d) encontrar uma progressão aritmética para cada criança ao chegar à casa B;

e) perceber que as progressões não possuem termos comuns, e concluir que este fato é suficiente para não poderem se encontrar na casa B.

É possível estabelecer uma relação entre as habilidades estipuladas acima e as requeridas por Brasil (1998, p. 71), expostas a seguir.

> Reconhecimento dos significados dos números naturais em diferentes contextos e estabelecimento de relações entre números naturais, tais como: ser múltiplo de, ser divisor de.[...] Compreensão do sistema de numeração decimal, identificando o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam e extensão das regras desse sistema para leitura, escrita e representação dos números racionais na forma decimal. Reconhecimento de números inteiros em diferentes contextos cotidianos e históricos e exploração de situações-problema em que indicam falta, diferença, orientação. (BRASIL, 1998, p. 71).

Assim, percebe-se que o item proposto não está fora do nível escolar dos alunos (6º ano e 7º ano do Ensino Fundamental), ou seja, os alunos devem ser capazes de solucionar o item. Segue-se com as análises.

Na tabela seguinte há a análise quantitativa dos alunos que acertaram, não responderam ou erraram o item 1.

[3] Habilidades atribuídas pelos autores, de acordo com a solução divulgada pela organização da OBMEP.

Tabela 4.3 – Dados quantitativos do item 1

Item 1	**Subitem a)**		**Subitem b)**		**Subitem c)**	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
Corretas	70	10,32	17	2,51	0	0
Em branco	54	7,96	59	8,70	83	12,24
Erradas	554	81,71	602	88,79	595	87,76
Total	678	100	678	100	678	100

Por meio dos dados conclui-se que o subitem com o maior percentual de acerto foi o a) com 10,32%, isto se deve ao fato deste exigir apenas habilidade de contagem dos números naturais. Posteriormente se apresenta o subitem b) com um percentual de acerto de 2,51% e o subitem c) com 0% de acerto, entre os subitens b) e c) há um empate técnico dentro da margem de erro.

Ao considerar-se o percentual de erros, percebe-se que não há grande diferença nos subitens, todos com mais de 80%, destacando-se o subitem c) onde não houve acertos.

Sendo produzida a análise das provas listaram-se as categorias das respostas com tendência aos erros, obtendo os resultados expressos na tabela 4.4 que segue.

Tabela 4.4 – Categorias de respostas do item 1

Código	**Categorias de respostas**	**fi**
A1	Faz corretamente a contagem dos pulos	70
A2	Faz contagem correta de ao menos um	168
A3	Não compreende o enunciado	190
A4	Erra ao fazer a contagem	166
A5	Contando cada casa como um pulo	30
	Branco no subitem a)	54
B1	Resposta errada sem raciocínio	413
B2	Inicia o raciocínio correto, porém não faz uso do MMC	85
B3	Serão apenas dois pulos	55
B4	Encontra a solução, mas não expressa o raciocínio	17
B5	Contagem separada, porém, errada	49
	Branco no subitem b)	59
C1	Solução não expressa um pensamento	80
C2	Porque o número de pulos é diferente	141
C3	Porque os números de casas são diferentes	88
C4	Saíram em direções diferentes	32
C5	Reescreve o enunciado	13
C6	Aluno se baseia nos itens anteriores	124
C7	Porque as crianças não param de pular	115
C8	Não concorda com o enunciado	2
	Branco no subitem c)	83

Na tabela 4.4 estão os dados obtidos por meio da análise das respostas dos alunos na amostra do nível 1. Estabeleceram-se 18 categorias de respostas, além das provas em branco, onde cinco são do subitem a), cinco do subitem b) e oito do subitem c). Ainda consta na tabela, a quantidade de respostas recebida por cada categoria.

Em seguida as categorias foram agrupadas segundo semelhança nos tipos de respostas, originando assim as classes de erros. As soluções corretas e em branco foram descartadas, trabalha-se apenas com as respostas erradas.

Tabela 4.5 – Classes de erros do item 1

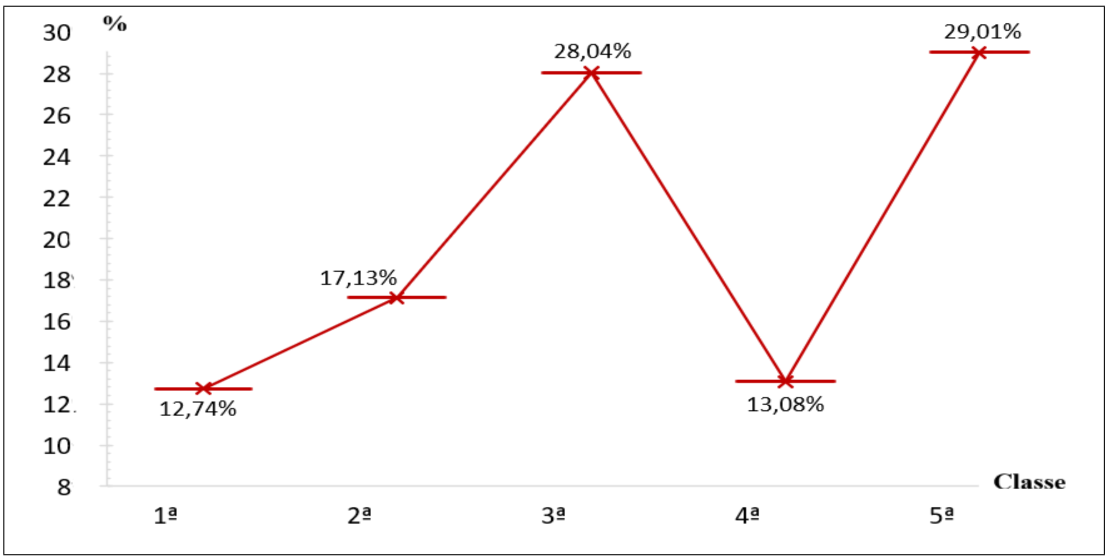
Classe	**C.R**	**fi**	**fr (%)**
1ª Erro relacionado à falta de concentração	A2 B3	223	12,74
2ª Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	A4 B2 B6	300	17,13
3ª Erro relacionado à má interpretação	A5 A3 C7 C6 C4	491	28,04
4ª Erro relacionado ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas	C2 C3	229	13,08
5ª Erro relacionado à todas as categorias	B1 C1 C5 C8	508	29,01
Total		1751	100

Nota: C. R - Significa categoria de resposta.

Constituem-se cinco classes neste item. Levando em consideração as respostas erradas, no total registraram-se 1751 respostas, pelo fato do item ser subdividido em a), b) e c), ou seja, há provas que estão sendo contadas até três vezes (amostra 678).

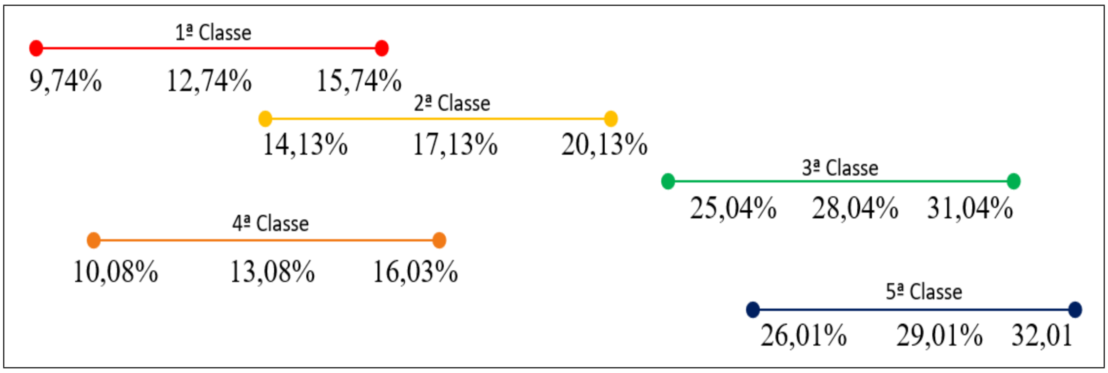
A seguir, tem-se o gráfico que fornece um panorama geral das respostas erradas do item 1, segundo as classes de erros deste item.

Figura 4.3 – Gráfico das classes de erros no item 1



Destaca-se no gráfico com índices mais elevados a 5ª classe e a 3ª classe, posteriormente a 1ª classe, a 2ª classe e a 4ª classe. Portanto, os erros relacionados a todas às classes, e os erros devidos à má interpretação, foram os que ocorreram com maior frequência.

Figura 4.4 – Intervalo de confiança das classes de erros no item 1



Ainda sobre às classes de erros deste item, observa-se na figura 4.4 que há um empate técnico entre a 1ª classe, 2ª classe e a 4ª classe. Acontece outro empate técnico entre a 3ª classe, e a 5ª classe.

Inicia-se uma análise detalhada das classes em cada subitem, pois, na visão geral exposta a cima não é possível identificar quais classes mais ocorreram nos subitens. A tabela seguinte apresenta de forma quantitativa os dados das classes nos subitens.

Tabela 4.6 – Dados quantitativos das classes nos subitens do item 1

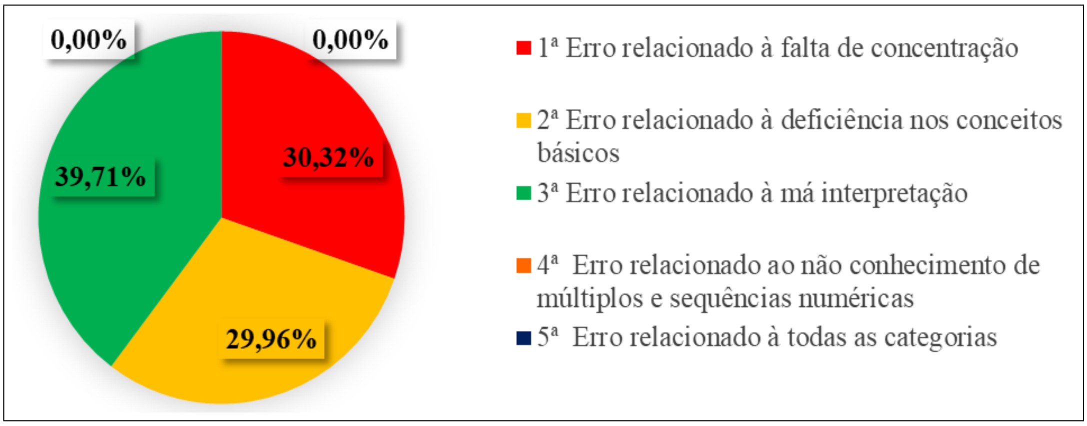
Classes do item 1	**Subitem a)**		**Subitem b)**		**Subitem c)**	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
1ª Erro relacionado à falta de concentração	168	30,32	55	9,14	0	0
2ª Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	166	29,96	134	22,26	0	0
3ª Erro relacionado à má interpretação	220	39,71	0	0	271	45,55
4ª Erro relacionado ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas	0	0	0	0	229	38,49
5ªErro relacionado à todas as categorias	0	0	413	68,60	95	15,97
Total	553	100	602	100	595	100

Desta tabela são extraídos três gráficos, um para cada subitem, estes serão analisados por meio de ilustrações das respostas retiradas do corpus.

4.2.1 Análise do Subitem a)

O gráfico abaixo, apresenta a estimativa da proporção das classes de erros deste item. Serão omitidas as ilustrações dos intervalos de confiança, porém os mesmos serão levados em consideração durante o processo de análise.

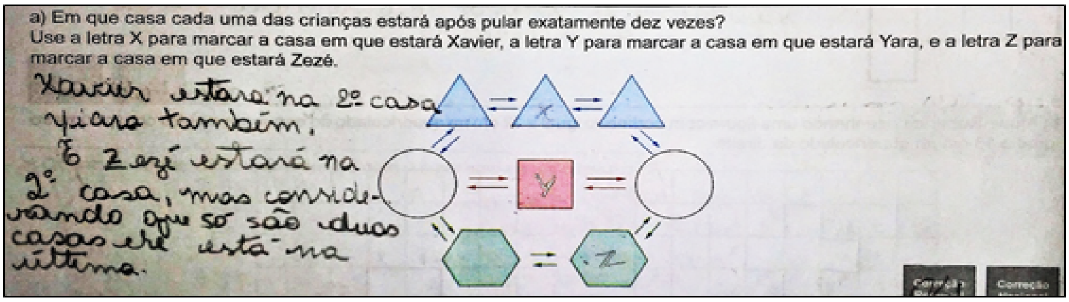
Figura 4.5 – Gráfico das classes de erros no subitem a) do item 1



Neste subitem observa-se que não há erros das classes 4 e 5. Nota-se que 39,71% dos erros estão relacionados à má interpretação do item. 29,96% apresentam os erros relacionados aos conceitos básicos, e 32,32% relacionados à falta de concentração. Assim, há um empate técnico entre a 1ª classe e a 2ª classe.

A seguir, apresentam-se as respostas dos alunos nas classes de erros que surgiram no subitem, iniciando-se pela 1ª Classe: Erro relacionado à falta de concentração (30,32%).

Figura 4.6 – Erro da 1ª classe no subitem a) do item 1

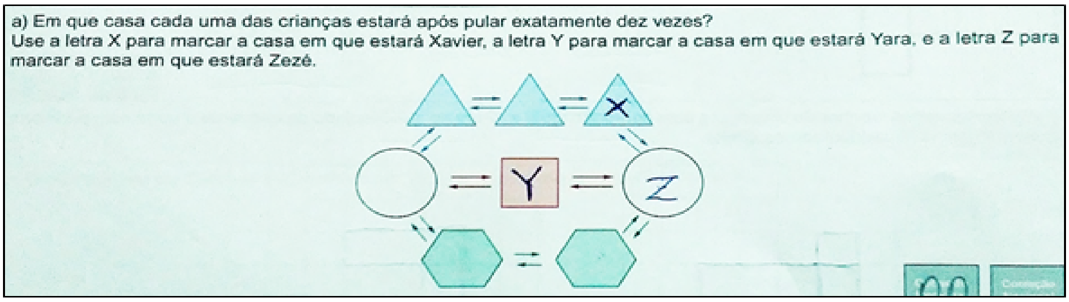


Fonte: Corpus da pesquisa

Na solução exposta o aluno compreende o item, e inicia o processo de contagem dos pulos de Xavier, Yara e Zezé, fazendo corretamente a contagem dos pulos de Xavier e Zezé, entretanto erra ao contar os 10 pulos de Yara. Conclui-se que o aluno era capaz de solucionar essa etapa do problema, porém por falta de atenção falha. Uma possível justificativa é que o aluno pode (no caso de Yara) ter contado as casas como pulos.

Outra classe de erro neste subitem é a 2ª classe: Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos (29,96%).

Figura 4.7 – Erro da 2ª classe no subitem a) do item 1

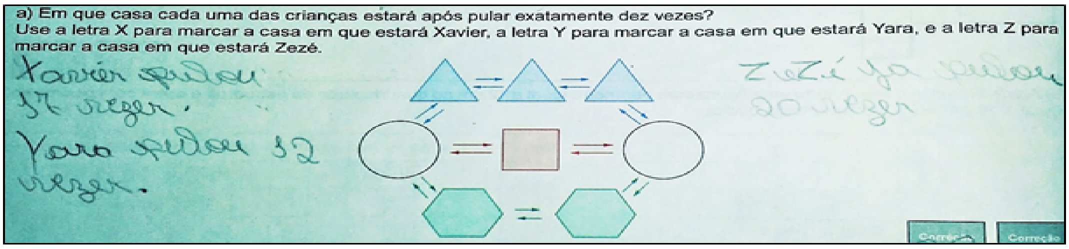


Fonte: Corpus da pesquisa

Nesta solução percebe-se que o aluno compreende o enunciado, porém não consegue fazer a contagem correta dos 10 pulos dados por Xavier, Yara e Zezé. Constata-se que o aluno não foi capaz de associar os pulos à contagem de números naturais. Isso demonstra aspectos negativos em sua aprendizagem, uma vez que o processo de contagem é o mais básico dos conhecimentos matemáticos.

Ainda neste subitem há 39,71% de erros devidos à 3ª Classe: Erro relacionado à má interpretação. Para ilustrar a classe mostra-se a resposta abaixo.

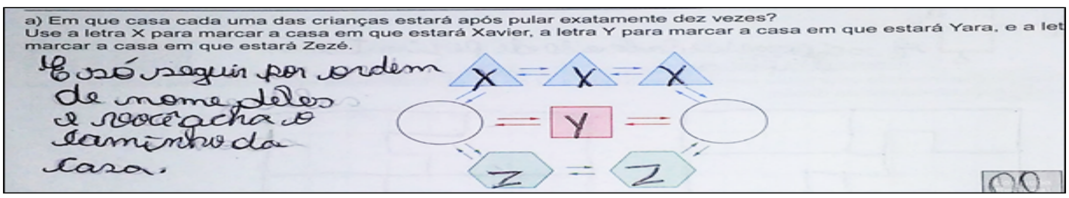
Figura 4.8 – Erro da 3ª classe no subitem a) do item 1



Fonte: Corpus da pesquisa

Apresenta-se a resposta de um aluno que visivelmente não foi capaz de compreender o problema, afirmando que Xavier pulou 17 vezes, Yara pulou 12 vezes e Zezé 20 vezes, e ainda, não é marcado nas casas o local que as crianças estarão. Não é possível identificar o raciocínio que o fez proceder desta maneira.

Figura 4.9 – Outro erro da 3ª classe no subitem a) do item 1



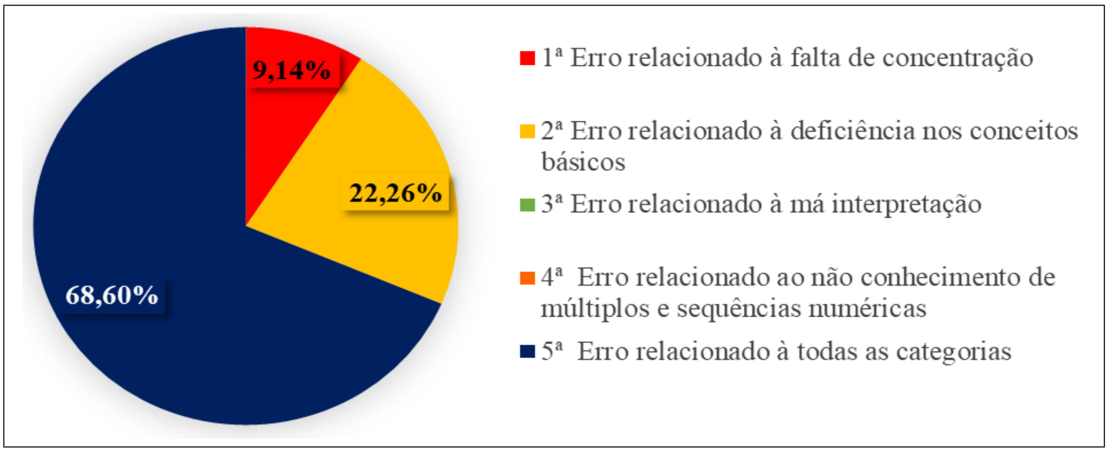
Fonte: Corpus da pesquisa

Esta imagem, retrata mais um erro devido à 3ª classe. Observa-se que o aluno entende de forma incorreta que o objetivo do problema é encontrar o caminho das casas seguido por Xavier, Yara e Zezé. Confiando nesta interpretação ele marca todas as casas (exceto as em forma de círculo). Esta resposta pode ter sido instigada por leitura incompleta do enunciado do problema, é possível que tenha lido apenas a parte geral, que explica por qual caminho cada criança pode seguir durante a brincadeira, esquecendo de ler a pergunta do subitem a).

4.2.2 Análise do Subitem b)

Faz-se agora a análise das classes no subitem b) do item 1. Assim como no subitem anterior, serão omitidas as ilustrações dos intervalos de confiança, porém os mesmos serão levados em consideração durante o processo de análise, sempre que for estabelecido um empate entre as classes.

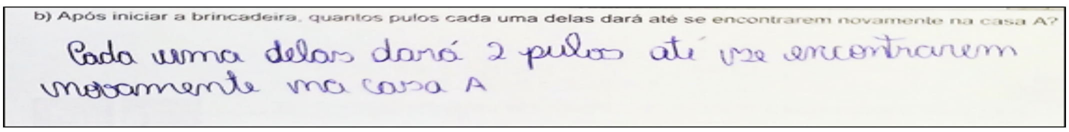
Figura 4.10 – Gráfico das classes de erro no subitem b) do item 1



Neste subitem observa-se que não há erros das 3ª e 4ª classes (isoladamente). Nota-se que 68,60% dos erros estão relacionados à todas as categorias do item. Há ainda 22,26% dos erros relacionados à deficiência nos conceitos básicos e 9,14% relacionados à falta de concentração.

A seguir, apresentam-se alguns exemplos de respostas dos alunos nas classes de erros que surgiram no subitem, iniciando pela 1ª Classe: Erro relacionado à falta de concentração (9,14%).

Figura 4.11 – Erro da 1ª classe no subitem b) do item 1

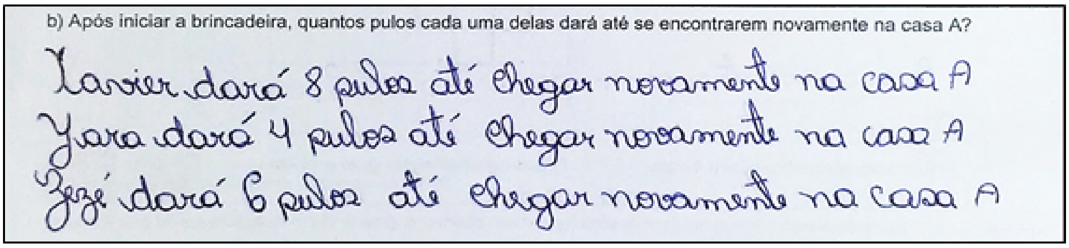


Fonte: Corpus da pesquisa

Ao final de 10 pulos Yara e Zezé estarão de fato a 2 pulos de se encontrarem novamente na casa A. Xavier também estaria a 2 pulos de chegar na casa A se não estivesse pulando na direção contrária (ou seja, de A para B). Isso indica três coisas: i)): o aluno conseguiu resolver o item a); ii): o aluno entendeu equivocadamente que este item era continuação do item anterior; iii): supondo que esse item é continuação do anterior, o aluno esquece de considerar a direção que Xavier está indo ao final de 10 pulos. Muito provavelmente ele também não considerou a direção que Yara e Zezé estavam pulando ao final de 10 pulos. Entende-se que o aluno cometeu esse erro por não atentar que o item b) independia do item anterior.

Outra classe de erro neste subitem é a 2ª classe: Erro relacionado à deficiência nos conceitos básico (22,26%). A questão a propõe um problema que pode ser resolvido pelo uso de um conceito básico: o MMC.

Figura 4.12 – Erro da 2ª classe no subitem b) do item 1


b) Após iniciar a brincadeira, quantos pulos cada uma delas dará até se encontrarem novamente na casa A?

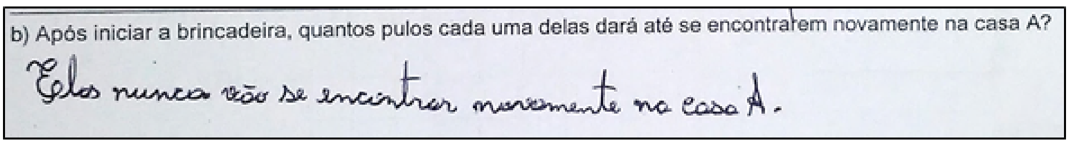
Xavier dará 8 pulos até chegar novamente na casa A
Yara dará 4 pulos até chegar novamente na casa A
Zezé dará 6 pulos até chegar novamente na casa A

Fonte: Corpus da pesquisa

Nota-se que o aluno compreende o enunciado fazendo a contagem correta da quantidade de pulos de Xavier, Yara e Zezé, para que estes retornem à casa A. Porém, o mesmo mostra não saber aplicar o conceito de MMC em situações contextualizadas, pois entende-se que para o aluno o problema estava solucionado. Conclui-se que o aluno seria capaz de solucionar o problema se dominasse esse conceito.

Ainda neste subitem há 68,60% dos erros pertencentes à 5ª Classe: Erro devido a todas as outras categorias, para ilustrar a classe mostra-se a resposta abaixo.

Figura 4.13 – Erro da 5ª classe no subitem b) do item 1

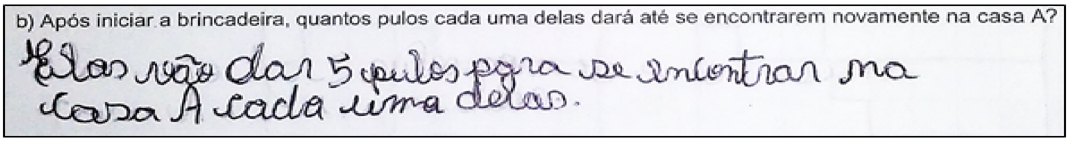

b) Após iniciar a brincadeira, quantos pulos cada uma delas dará até se encontrarem novamente na casa A?

Elas nunca vão se encontrar novamente na casa A.

Fonte: Corpus da pesquisa

Na resposta o aluno discorda do enunciado. Isso mostra uma deficiência de entendimento e ausência de argumentos matemáticos para propor uma resposta. Conclui-se que este não tem domínio dos conceitos básicos, e como forma de suprimir essa carência resolve questionar o que o problema exige.

Figura 4.14 – Outro erro da 5ª classe no subitem b) do item 1



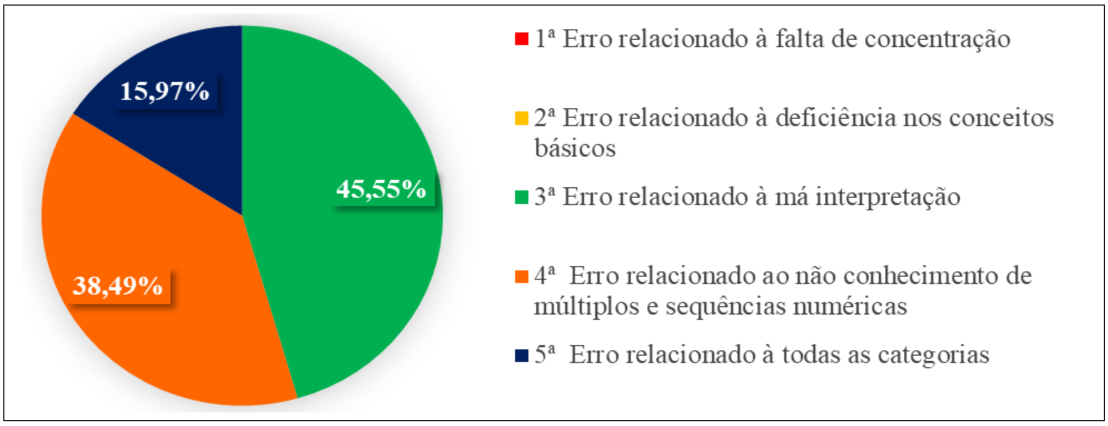
Fonte: Corpus da pesquisa

Ainda sobre a 5ª classe, um outro tipo de resposta que surgiu com frequência considerável, é aquela onde aluno expõe uma solução errada sem qualquer justificativa. A imagem acima extraída do corpus da pesquisa ilustra essa situação. Nota-se que não há o raciocínio de contar a quantidade de pulos de Xavier, Yara e Zezé, e menos ainda o aluno percebe que era necessário o uso do MMC. Portanto uma possível explicação: o aluno "chuta" uma resposta qualquer apenas para não deixar em branco.

4.2.3 Análise do Subitem c)

A Figura 4.15 apresenta as classes de erro no subitem c) do item 1. Serão omitidas as ilustrações dos intervalos de confiança, porém os mesmos serão levados em consideração.

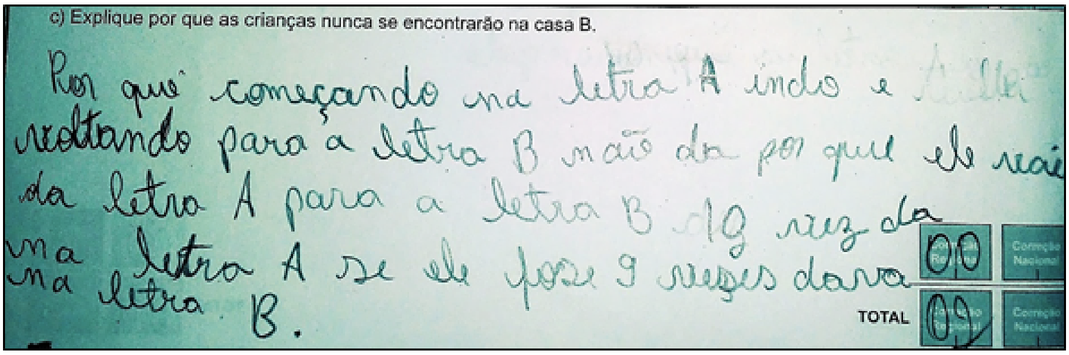
Figura 4.15 – Gráfico das classes de erro no subitem c) do item 1



Neste subitem observa-se que não há erros das 1ª e 2ª classes (isoladamente). Nota-se que 45,55% dos erros estão relacionados a má interpretação do item, e com 38,49% se apresentam os erros relacionados ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas, e 15,97% os relacionados a falta de concentração.

A seguir, apresentam-se exemplos de respostas dos alunos nas classes de erros que surgiram no subitem, iniciando-se pela 3ª Classe: Erro relacionado à má interpretação (45,55%).

Figura 4.16 – Erro da 3ª classe no subitem c) do item 1

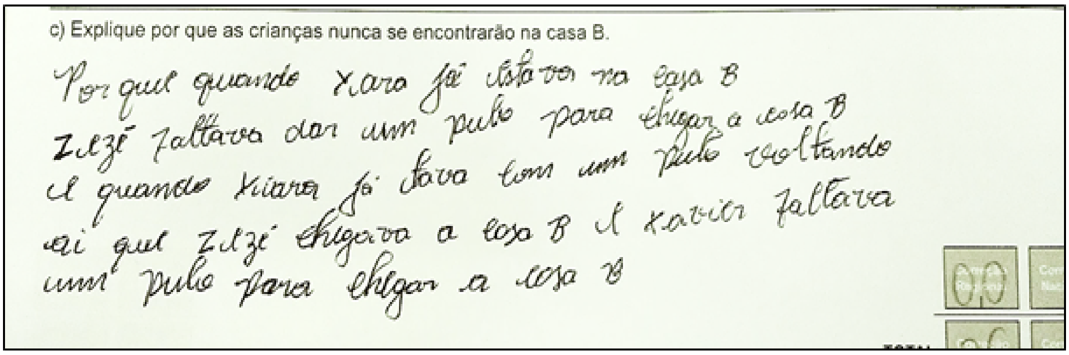


Fonte: Corpus da pesquisa

Esta foi a classe que ocorreu com maior frequência. Na solução é possível perceber que o aluno inicia reescrevendo o enunciado do item, posteriormente argumenta que não é possível em razão de serem dados apenas 10 pulos, ou seja, o aluno entende que este subitem é continuação dos anteriores. Assim um fator determinante (não o único) para não obter sucesso na solução o fato de não interpretar o problema corretamente.

Outra classe de erro neste subitem é a 4ª: erros relacionados ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas, com 38,49%.

Figura 4.17 – Erro da 4ª classe no subitem c) do item 1

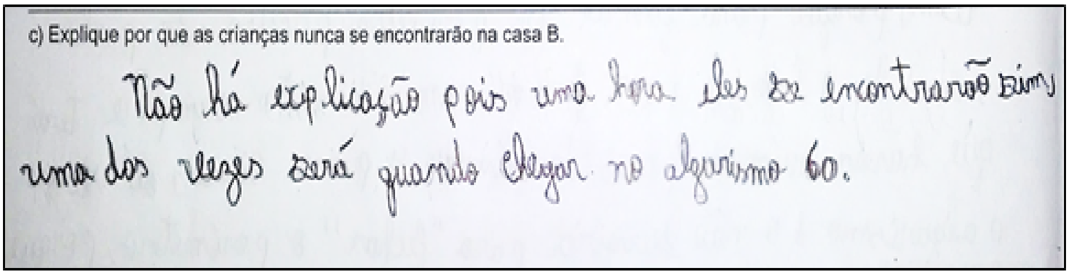


Fonte: Corpus da pesquisa

Observa-se por meio desta solução que o aluno compreende o problema, justificando que o motivo das crianças não se encontrarem na casa B é por conta das quantidades de casas que cada uma pula ser diferente. De fato, é por essa razão. No entanto, pensa que apenas isso é o bastante para explicar. Assim conclui-se que o aluno não possui conhecimento adequado quanto aos conceitos de múltiplos e sequências.

Por fim a última classe neste subitem é a 5ª (Erro relacionado a todas as outras categorias), com incidência de 15,97%. Abaixo as figuras 4.18 e 4.19 apresentam exemplos de respotas aqui inseridas.

Figura 4.18 – Erro da 5ª classe no subitem c) do item 1

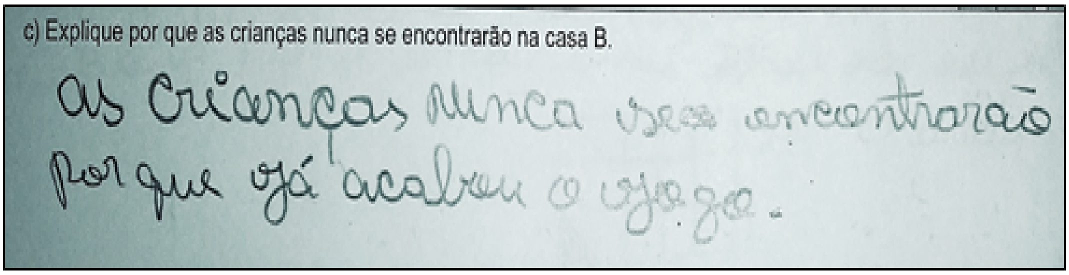

c) Explique por que as crianças nunca se encontrarão na casa B.

Não há explicação pois uma hora eles se encontrarão sim uma dos vezes será quando chegar no algarismo 60.

Fonte: Corpus da pesquisa

O aluno afirma que o enunciado está incorreto, segundo ele, as crianças se encontrarão em B e ainda diz que será no "algarismo 60". Isso indica que o aluno não detém conhecimento suficiente para obter a solução, o mesmo demonstra dificuldade na interpretação e claramente nos conceitos básicos. Como forma de suprir suas carências de conhecimento decide discordar do que é exigido.

Figura 4.19 – Outro erro da 5ª classe no subitem c) do item 1


c) Explique por que as crianças nunca se encontrarão na casa B.

as crianças nunca se encontrarão por que já acabou o jogo.

Fonte: Corpus da pesquisa

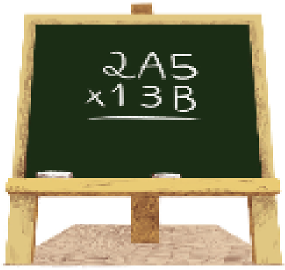
Ao finalizar a análise dos dados deste item, expõe-se esta resposta, onde o aluno fica com a ideia que a brincadeira do vai e volta (como é chamado no enunciado) é um jogo. Na ocasião não sabendo como proceder para encontrar a solução, o mesmo afirma "as crianças nunca se encontrarão, porque já acabou o jogo".

4.3 Análise do Item no Nível 2

Aborda-se nesta seção o processo de análise no item do nível 2. Abaixo tem-se o item que versa sobre os conceitos de Aritmética que será objeto de estudo neste nível.

(OBMEP - 2016) Item 2 *Na figura, as letras A e B representam os possíveis algarismos que tornam o produto dos números 2A5 e 13B um múltiplo de 36.*

Figura 4.20 – Ilustração do item 2



Fonte: 2ª fase da 12ª OBMEP

a) Em todos os possíveis resultados para o produto desses números, o algarismo das unidades é o mesmo. Qual é esse algarismo?

b) Quais são os possíveis valores de B?

c) Qual é o maior valor possível para esse produto?

No anexo D, encontra-se a solução deste item, divulgada no portal da OBMEP. De posse desta solução, foram verificadas as habilidades[4] que o aluno deve possuir para obter a solução correta. Tais habilidades estão explicitadas abaixo:

a) identificar o algarismo das unidades de número natural;

b) saber quando o número é múltiplo de 5, e quando não é múltiplo de 36;

c) identificar a paridade de um número natural;

d) conhecer o critério de divisibilidade por 4;

e) saber quando um número é múltiplo de 36,

f) conhecer o critério de divisibilidade por 9;

g) ter domínio das operações elementares entre números naturais.

É possível estabelecer uma relação entre as habilidades estipuladas acima e as requeridas por Brasil (1998, p. 71), expostas a seguir.

> Reconhecimento dos significados dos números naturais em diferentes contextos e estabelecimento de relações entre números naturais, tais como. ser múltiplo de..., ser divisor de. [...] Análise, interpretação, formulação e resolução de situações problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais, reconhecendo que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver um mesmo problema (BRASIL, 1998, p. 71).

Assim, percebe-se que o item proposto não está fora do nível escolar dos alunos (8º ano e 9º ano do Ensino Fundamental), ou seja, os alunos devem ser capazes de solucionar o item. Segue-se com as análises.

[4] Habilidades atribuídas pelos autores, de acordo com a solução divulgada pela organização da OBMEP.

Na tabela 4.7 há a análise quantitativa dos alunos que acertaram, não responderam ou erraram o item 2.

Tabela 4.7 – Dados quantitativos do item 2

Item 2	**Subitem a)**		**Subitem b)**		**Subitem c)**	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
Corretas	0	0	0	0	0	0
Em branco	131	20,86	107	17,04	123	19,59
Erradas	497	79,14	521	82,96	505	80,41
Total	628	100	628	100	628	100

Por meio dos dados conclui-se que não houve acertos no item. Uma possibilidade para justificar este fato encontra-se nas dificuldades dos educandos em relação às operações básicas, além de não saberem interpretar o enunciado. Outro fato é a ausência do conhecimento de múltiplos dos números naturais.

Considera-se o percentual de erros, vê-se que não há grande diferença nos subitens, todos com aproximadamente 80%. Destaca-se que nos subitens os que não responderam errado, deixaram em branco, demostrando que não possuem domínio dos conceitos exigidos para solucionar o item.

Sendo produzida a análise das provas, foram listadas as categorias de respostas com tendência aos erros, obtendo os resultados expressos na tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Categorias de respostas no item 2

Código	**Categorias de respostas**	**fi**
A1	Não compreende o conceito de múltiplo	34
A2	Em função de A e B	84
A3	Atribui valores para A e B, erra as operações	47
A4	Errada sem justificativa	218
A5	Algarismo com mais de um digito	93
A6	Algarismo Romanos	11
A7	Tenta fazer contas com as incógnitas	10
	Branco no subitem a)	131
B1	No item a) aluno escolhe um valor para A e B, e aqui o repete	21
B2	Resposta errada sem justificativa	391
B3	Resposta em função de A e B	72
B4	Lista todos os algarismos	14
B5	Acertou ao menos um possível valor de B	12
B6	Algarismo com mais de um digito	11
	Branco no subitem b)	107
C1	Atribuir valores, faz a multiplicação errada	8
C2	Resposta sem justificativa	420
C3	Resposta em função de A e B	64
C4	Tomou o maior dos algarismos e efetuou a multiplicação	3
C5	36 porque ele é múltiplo dele	6
C6	Discorda do enunciado	4
	Branco no subitem c)	123

Na tabela 4.8 acima estão os dados obtidos por meio da análise das respostas dos alunos na amostra do nível 2. Foram estabelecidas 19 categorias de respostas, além das provas em branco, onde sete são do subitem a), seis do subitem b) e seis do subitem c). Ainda consta na tabela a quantidade de respostas recebida por cada categoria.

Em seguida, as categorias foram agrupadas segundo semelhanças nos tipos de respostas, originando assim as classes de erros, as provas em branco foram descartadas, trabalha-se apenas com as respostas erradas.

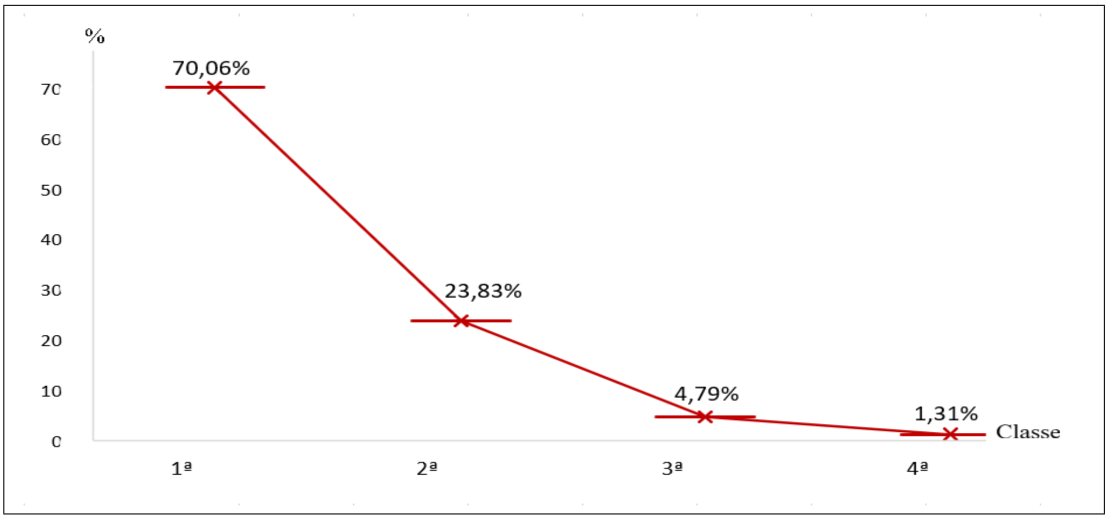
Tabela 4.9 – Classes de erros do item 2

Classe	**Cat**	**fi**	**fr (%)**
1ª Erro relacionado à má interpretação	A1 B2 C2 C6 A4	1067	70,06
2ª Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	A2 A5 A7 B1 B3 C1 C3 B6	363	23,83
3ª Erro relacionado ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas	A3 B5 B4	73	4,79
4ª Erro relacionado a aplicação de conhecimento equivocado	A6 C4 C5	20	1,31
Total		1523	100

Foram constituídas quatro classes neste item, levando em consideração as respostas erradas, e descartando as em branco. No total registram-se 1523 respostas, pelo fato do item ser subdividido em a), b) e c), ou seja, há provas que estão sendo contadas até três vezes (amostra 628).

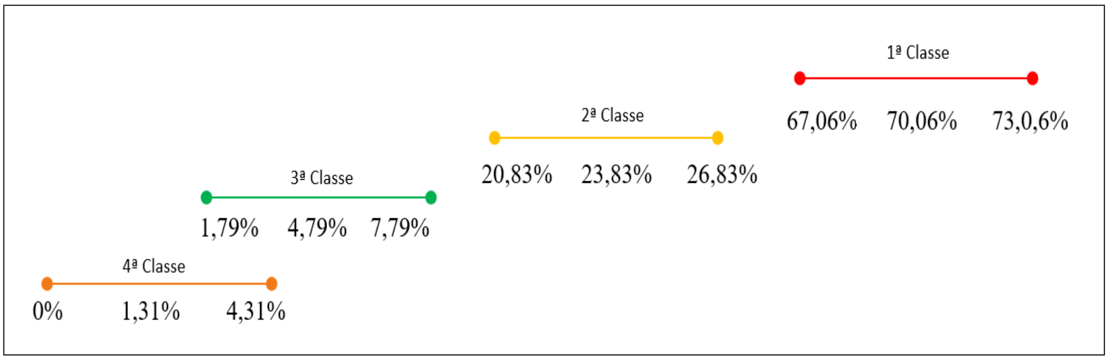
Em seguida, há o gráfico que fornece uma visão geral das respostas erradas do item 2, segundo às classes de erros deste item.

Figura 4.21 – Gráfico das classes de erro no item 2



Destaca-se a 1ª classe com 70,06%, em seguida a 2ª classe com 23,83%, posteriormente a 3ª com 4,79% e pôr fim a 4ª classe com 1,31%.

Figura 4.22 – Intervalo de confiança das classes de erros no item 2



A figura 4.22, mostra as estimativas da proporção para às classes segundo os intervalos de confiança. É possível constatar que existe um empate técnico entre a 3ª classe, e a 4ª classe.

Inicia-se uma análise detalhada das classes em cada subitem. A tabela seguinte apresenta de forma quantitativa os dados das classes nos subitens.

Tabela 4.10 – Dados quantitativos das classes nos subitens do item 2

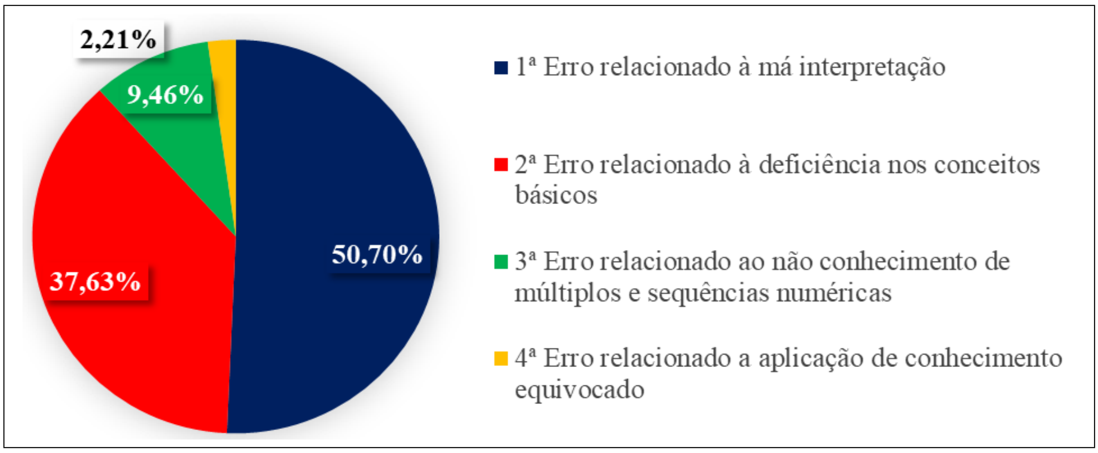
Classes do nível 2	**Subitem a)**		**Subitem b)**		**Subitem c)**	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
1ª Erro relacionado à má interpretação	252	50,70	391	75,05	424	83,96
2ª Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	187	37,63	104	19,96	72	14,26
3ª Erro relacionado ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas	47	9,46	26	4,99	0	0
4ª Erro relacionado a aplicação de conhecimento equivocado	11	2,21	0	0	9	1,78
Total	497	100	521	100	505	100

Desta tabela são extraídos três gráficos, um para cada subitem. Estes serão analisados por meio de ilustrações das respostas retiradas do corpus.

4.3.1 Análise do Subitem a)

A figura 4.23, apresenta às classes de erros no subitem a) do item 2. Serão omitidas as ilustrações dos intervalos de confiança, porém os mesmos serão levados em consideração.

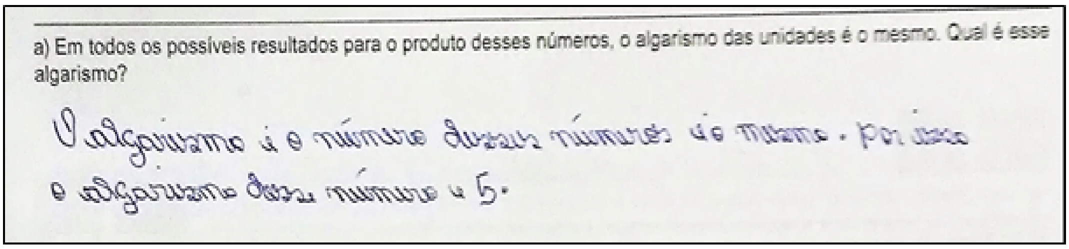
Figura 4.23 – Gráfico das classes de erros no subitem a) do item 2



Neste subitem observa-se que há erros das 4 classes. Nota-se que a 1ª classe que trata da interpretação do problema é a mais frequente, com 50,70% do total dos erros. Logo depois a 2ª classe que diz respeito aos erros quanto aos conceitos básicos se apresentam com 37,63%, em seguida a 3ª classe com 9,46% e a 4ª classe com 2,21%.

A seguir, apresentam-se as respostas dos alunos nas classes de erros que surgiram no subitem, iniciando-se pela 1ª Classe: Erro relacionado à má interpretação (50,70%).

Figura 4.24 – Erro da 1ª classe no subitem a) do item 2

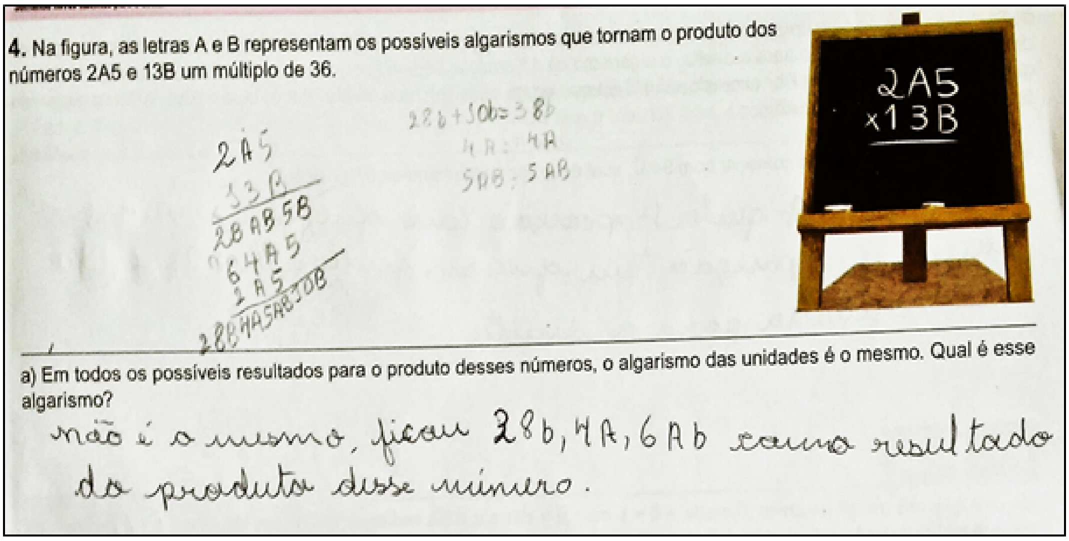


Fonte: Corpus da pesquisa

Na resposta apresentada o aluno não é capaz de compreender o enunciado, pois no mesmo há a informação que o algarismo das unidades obtido do produto entre os valores apresentados é o mesmo, porém o aluno entende que o algarismo das unidades dos dois valores que serão multiplicados (2A5 e 13B) são os mesmos, e assim afirma que a resposta é 5, pois 5 é o algarismo das unidades de 2A5.

Outra classe de erro neste subitem é a 2ª: Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos, que ocorreu em 37,63% das respostas.

Figura 4.25 – Erro da 2ª classe no subitem a) do item 2


4. Na figura, as letras A e B representam os possíveis algarismos que tornam o produto dos números 2A5 e 13B um múltiplo de 36.

a) Em todos os possíveis resultados para o produto desses números, o algarismo das unidades é o mesmo. Qual é esse algarismo?

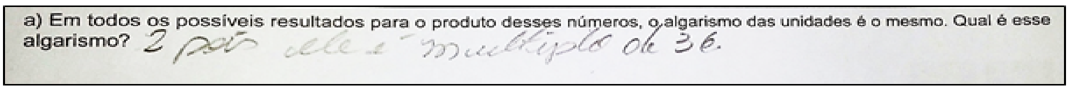
não é o mesmo, ficou 28b, 4A, 6Ab como resultado do produto desse número.

Fonte: Corpus da pesquisa

Nesta solução, percebe-se que a estratégia empregada foi utilizar o algoritmo da multiplicação. É possível que essa escolha tenha sido incentivada pela imagem que acompanha o enunciado. O aluno opta por fazer a multiplicação com as letras (A e B), isso gerou dificuldades, uma vez que ele usa as propriedades da adição e da multiplicação (distributiva, associativa) para justificar os passos, porém estas não são validas da forma que foram usadas no algoritmo da multiplicação (trata os algarismos como termos de uma equação). Assim obtém uma expressão em função de A e B com mais do que um algarismo, esta é dada como resposta (errada). Conclui-se que tais erros estão relacionados a certo grau de deficiência em relação aos conceitos básicos.

A 3ª classe: Erro relacionado ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas, aparece em 9,46% das respostas neste subitem.

Figura 4.26 – Erro da 3ª classe no subitem a) do item 2

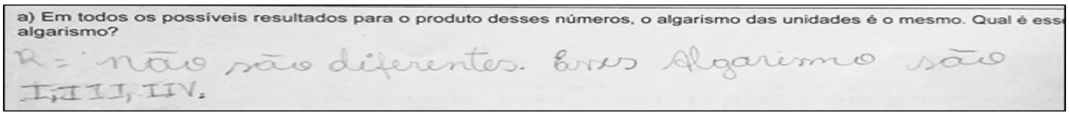

a) Em todos os possíveis resultados para o produto desses números, o algarismo das unidades é o mesmo. Qual é esse algarismo? 2 pois ele é multiplo de 36.

Fonte: Corpus da pesquisa

O conhecimento necessário para solucionar o problema está relacionado a esta classe, onde os alunos deveriam ter domínio dos principais critérios de divisibilidade, e serem capazes de decidir quando um determinado número natural é múltiplo de outro. Porém as repostas que sugiram indicam que tal conhecimento não foi assimilado de maneira adequado. No exemplo que ilustra esta classe o aluno afirma que “2 é múltiplo de 36”, o que é de certa forma até absurdo, pois 2 é menor do que 36.

Aborda-se agora a 4ª Classe: Erro relacionado a aplicação de conhecimento equivocado, ocorreu em 2,21% das respostas erradas.

Figura 4.27 – Erro da 4ª classe no subitem a) do item 2


a) Em todos os possíveis resultados para o produto desses números, o algarismo das unidades é o mesmo. Qual é ess
algarismo?
R: não são diferentes. Eles Algarismo são I,III,IIV.

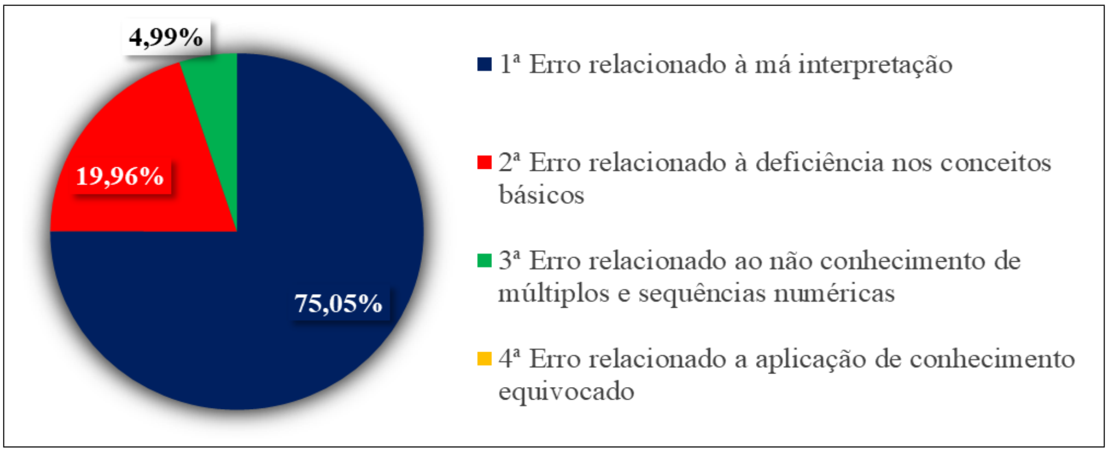
Fonte: Corpus da pesquisa

Apresenta-se uma solução onde é constatado que o aluno não sabe o conceito de algarismo. Em sua solução discorda no enunciado, afirmando que o algarismo da unidade do produto nem sempre é o mesmo, e ainda expõem que tais algarismos são os algarismos romanos. Uma possibilidade que pode ter contribuído para essa má interpretação é o fato de em suas aulas, o contato com o termo algarismo tenha ocorrido apenas quando foram trabalhados os algarismos romanos, enquanto que a noção de números naturais foi aceita de forma intuitiva.

4.3.2 Análise do Subitem b)

Faz-se agora a análise das classes no subitem b) do item 2. Serão omitidas as ilustrações dos intervalos de confiança, porém os mesmos serão levados em consideração.

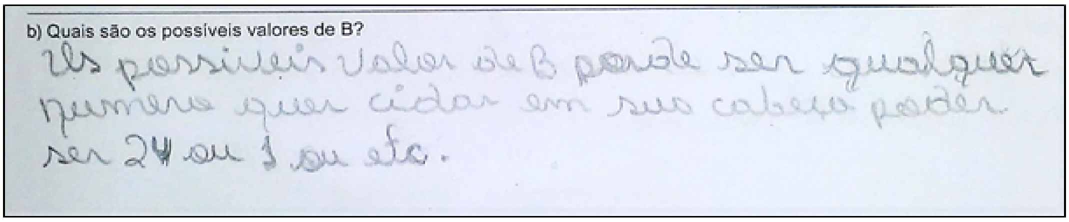
Figura 4.28 – Gráfico das classes de erros do subitem b) no item 2



Observa-se por meio do gráfico que não há erros da 4ª classe. Nota-se que a 1ª classe que trata da interpretação do problema é a mais frequente, com 75,05% do total dos erros, logo depois a 2ª classe que diz respeito aos erros dos conceitos básicos se apresentam com 19,96%, em seguida a 3ª classe com 4,99%.

A seguir, apresentam-se exemplos de respostas dos alunos nas classes de erros que surgiram no subitem b), iniciando-se pela 1ª Classe: Erro relacionado à má interpretação (75,05%).

Figura 4.29 – Erro da 1ª classe no subitem b) do item 2

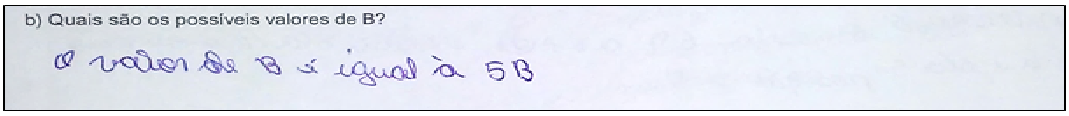


Fonte: Corpus da pesquisa

Na solução exposta o aluno afirma que o algarismo B pode ser qualquer número. Isso demonstra um não entendimento do problema, uma vez que o enunciado estabelece que os algarismos A e B fazem com que o produto dos dois números seja múltiplo de 36. Logo conclui-se que B não pode ser qualquer número, ou seja, o aluno deveria entender há princípio que o algarismo B necessariamente deveria ser par, pois, para o produto de 2A5 e 13B ser múltiplo de 36, a primeira condição é que este produto seja par. Como o algarismo das unidades de um dos fatores é 5, o algarismo das unidades do outro fator deve obrigatoriamente ser par. Portanto estabelece-se um erro por má interpretação.

Aborda-se a seguir a 2ª classe: Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos, verificada em 19,96% dos erros encontrados neste subitem.

Figura 4.30 – Erro da 2ª classe no subitem b) do item 2

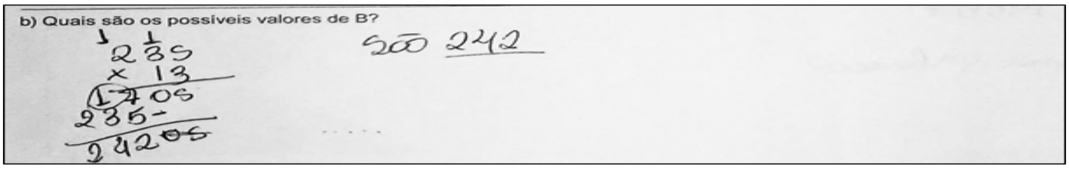


Fonte: Corpus da pesquisa

Nesta solução, percebe-se que o aluno não compreende o enunciado e nem sabe o que é um algarismo, pois é requerido os possíveis valores de B, e a resposta dada é 5B. Com essa resposta existiriam dois possíveis valores para B, ou seja, os algarismos 1 e 0, pois são os únicos casos em que 5B e igual a B (como B deve ser par, seria o 0).

Assim como é apresentada uma resposta aleatória sem justificativa, conclui-se que o aluno não era capaz de questionar sua própria solução por meio dos conceitos básicos.

Figura 4.31 – Outro erro da 2ª classe no subitem b) do item 2

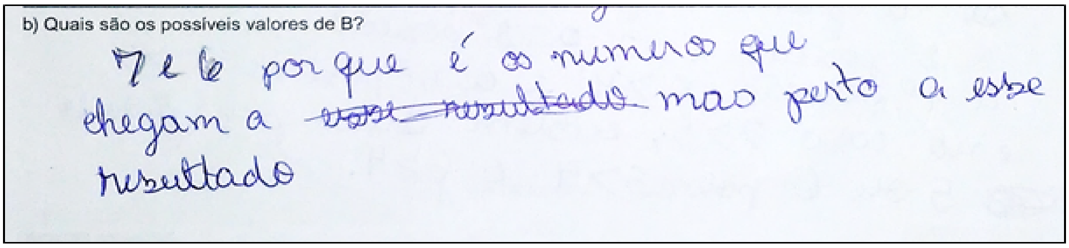


Fonte: Corpus da pesquisa

Nesta outra solução, vê-se que o aluno atribui um valor qualquer para A, e simplesmente descarta o B, faz uso do algoritmo da multiplicação errando o produto de 235 e 13. Frente ao exposto, o primeiro erro estabelecido foi o de atribuir um valor qualquer para A, e descartar o B, e depois não foi capaz de fazer a multiplicação de dois números naturais.

A última classe que será discutida neste subitem é a 3ª: Erro relacionado ao não conhecimento de múltiplos e sequências numéricas, responsável por 4,99% dos erros.

Figura 4.32 – Erro da 3ª classe no subitem b) do item 2



Fonte: Corpus da pesquisa

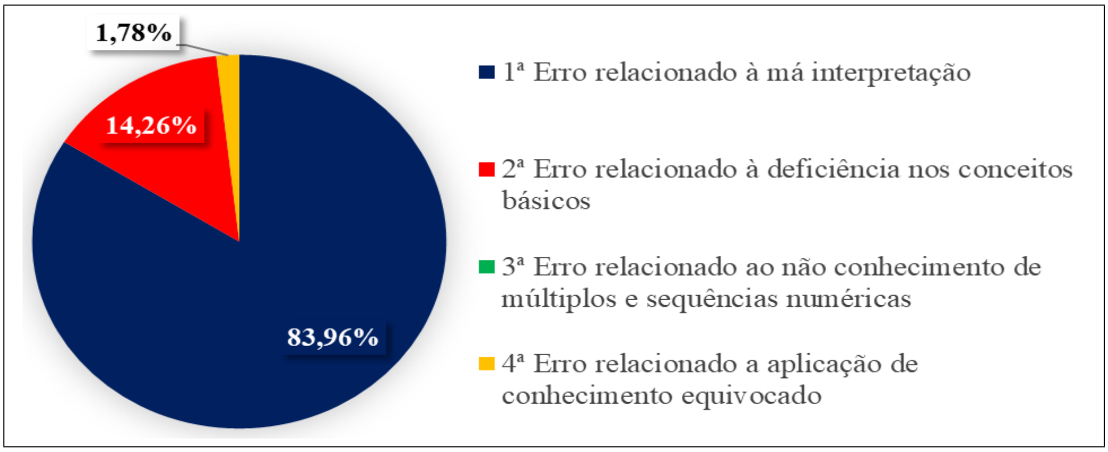
Na realidade todos os erros deste item estão relacionados de alguma forma com esta classe, pois, para solucionar, o aluno deveria entender o problema, aplicar conceitos básicos e logo em seguida usar os conhecimentos de múltiplos para decidir a veracidade dos resultados alcançados. No entanto a maioria dos alunos não passou das etapas iniciais, por essa razão tem-se apenas 4,99% de erros aqui. Na resposta acima são apontados como possíveis valores para B, 7 e 6. O 7 pode ser facilmente descartado (pois B não é ímpar), já o 6 realmente é um dos possíveis valores para B, porém não há argumento na solução para justificar tal resposta.

4.3.3 Análise do Subitem c)

Inicia-se a abordagem do subitem c), apresentando algumas respostas extraídas do corpus, que objetivam dar uma compreensão dos erros inseridos em cada classe. As ilustrações dos intervalos de confiança serão omitidas, porém os mesmos serão levados em consideração.

Observa-se por meio do gráfico que não há erros da 3ª classe. Nota-se que a 1ª classe que trata da interpretação do problema é a mais frequente, com 83,96% do total dos

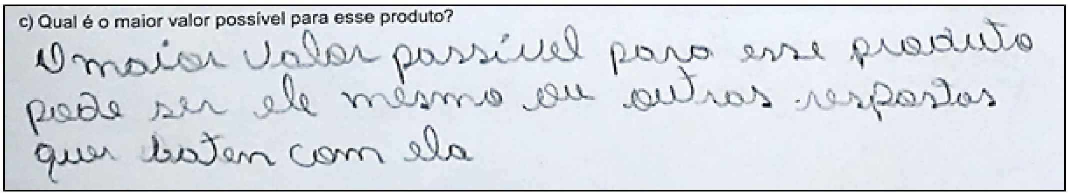
Figura 4.33 – Gráfico das classes de erros do subitem c) no item 2



erros, logo depois a 2ª classe que diz respeito aos erros dos conceitos básicos se apresenta com 14,26%, em seguida a 4ª classe com 1,78%.

Dá-se início pela 1ª Classe: Erro relacionado à má interpretação (83,96%).

Figura 4.34 – Erro da 1ª classe no subitem c) do item 2

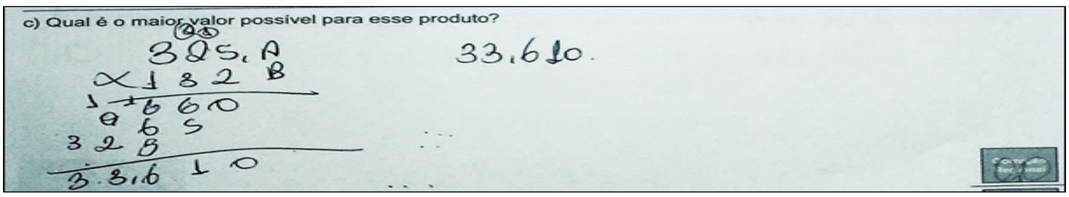


Fonte: Corpus da pesquisa

A solução demonstra a interpretação incorreta de todo o item, pois no enunciado fica evidente que o produto dos valores mencionados deve ser múltiplo de 36 e existe mais de uma possibilidade. Porém o aluno com essa resposta, entende que há apenas uma possibilidade ao afirmar que o "produto pode ser ele mesmo". Há uma informação adicionada na resposta "ou outras que batem com ela". Não foi possível interpretar essa expressão. Assim, em parte esse erro foi gerado pela não compreensão do problema.

A 2ª Classe: Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos teve uma ocorrência em 14,26% dos dados deste subitem.

Figura 4.35 – Erro da 2ª classe no subitem c) do item 2

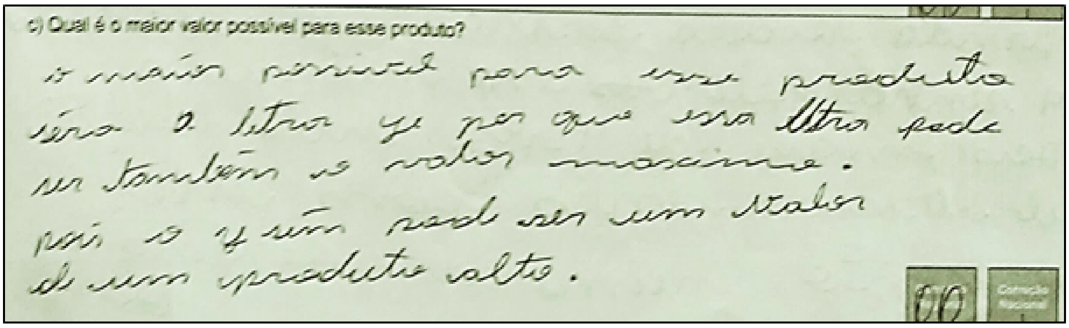


Fonte: Corpus da pesquisa

Verifica-se nessa solução que o aluno inicia escrevendo o algoritmo da multiplicação, mostrando que é compreendido o enunciado. Como segundo passo, é efetuada a multiplicação entre 325 e 132, chegando a 33,610. Tal resultado está errado, indicando uma dificuldade nas operações elementares. Há ainda um dado nessa resposta que são as incógnitas A e B, é possível que a estratégia adotada pelo aluno, fosse efetuar a multiplicação com A e B, e por ser impossível, resolve retira-las das expressões, fazendo a multiplicação apenas com os números.

A classe que fecha a discussão neste subitem é a 4ª: Erro relacionado a aplicação de conhecimento equivocado, responsável por 1,78% dos erros

Figura 4.36 – Erro da 4ª classe no subitem c) do item 2



Fonte: Corpus da pesquisa

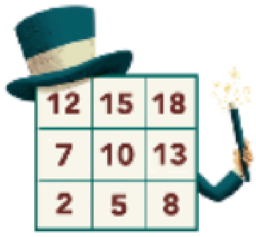
Na resposta aqui apresentada, o aluno afirma que o maior valor possível para o produto é a letra y, justificando que o y é o valor máximo, uma vez que ele pode ser o resultado de produto alto. O argumento indica que o aluno relacionou equivocadamente os conceitos de função quadrática com o fato de ser máximo o valor, pois, ao ensinar esse tópico na maioria das vezes o professor trabalha apenas com as incógnitas x e y. na maioria das vezes é trabalhado apenas com as incógnitas x e y. Portanto este erro é atribuído a aplicação de conhecimento equivocado.

4.4 Análise do Item no Nível 3

Aborda-se nesta seção à análise no item do nível 3. Abaixo tem-se o item que versa sobre os conceitos de Aritmética que será objeto de estudo neste nível.

(OBMEP - 2016) Item 3 *Um quadriculado* 3*x*3 *preenchido com números inteiros é chamado de medimágico quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.*

Figura 4.37 – Ilustração do item 3



Fonte: 2ª fase da 12ª OBMEP

a) Preencha o quadriculado abaixo para que ele seja medimágico.

3		**19**
8		

b) O quadriculado medimágico abaixo tem os números 7, 9 e 20 nas posições indicadas. Qual é o valor de x?

	7	
9	x	
		20

c) Explique por que, em qualquer quadriculado medimágico, a soma de todos os números é um múltiplo de 9.

No anexo E, encontra-se a solução deste item, divulgada no portal da OBMEP. De posse desta solução, foram verificadas as habilidades[5] que o aluno deve possuir para obter a solução correta. Tais habilidades estão explicitadas abaixo:

a) adicionar incógnitas para as casas do medimágico que estão vazias;

b) calcular a média aritmética de dois valores;

[5] Habilidades atribuídas pelos autores, de acordo com a solução divulgada pela organização da OBMEP.

c) por meio da média aritmética encontrar e resolver equações por meio de diversas substituições;

d) perceber que a média aritmética dos valores laterais, pode ser expressa em função do valor central em um medimágico 3x3;

e) escrever a soma dos valores do medimágico em função do valor central, e ver que o resultado é múltiplo de 9.

É possível estabelecer uma relação entre as habilidades estipuladas acima e as requeridas por Brasil (2002, p. 46), expostas a seguir.

> Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc). Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema. Formular hipóteses e prever resultados. Selecionar estratégias de resolução de problemas. Interpretar e criticar resultados numa situação concreta. Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos. Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades. Discutir ideias e produzir argumentos convincentes (BRASIL, 2002, p. 46).

Percebe-se que o item proposto não está fora do nível escolar dos alunos (Ensino Médio). O conhecimento acerca de múltiplo, o aluno deve ter adquirido no Ensino Fundamental. Portanto, os alunos devem ser capazes de solucionar o item. Assim prossegue-se com a análise.

Na tabela seguinte há a análise quantitativa dos alunos que acertaram, não responderam ou erraram o item 3.

Tabela 4.11 – Dados quantitativos do item 3

Item 3	**Subitem a)**		**Subitem b)**		**Subitem c)**	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
Corretas	84	16,67	117	23,21	0	0
Em branco	31	6,15	99	19,64	162	32,14
Erradas	389	77,18	288	57,14	342	67,86
Total	504	100	504	100	504	100

Por meio dos dados da tabela 4.11 conclui-se que o subitem com o maior percentual de acerto foi o b) com 23,21%. A maioria dos alunos que acertou este item, chegou à solução observando um padrão nas linhas e colunas do medimágico. Posteriormente se apresenta o subitem a) com um percentual de acerto de 16,67% e o subitem c) com 0% de acerto.

Considera-se o percentual de erros, vê-se que o subitem c) obteve com 67,86%, e 32,14% não responderam, o que pode ser inferido como 100% de erros, demostrando que não possuem domínio dos conceitos exigidos para solucionar o item. Em seguida o subitem a) consta com 77,18% de erros e o b) com 57,14% de respostas erradas.

Faz-se uma análise das respostas. Sendo produzida a análise das provas, listaram-se as categorias de respostas com tendência aos erros, obtendo os resultados expressos na tabela 4.12.

Tabela 4.12 – Categorias de respostas no item 3

Código	**Categorias de respostas**	**fi**
A1	Correto, resolve observando o padrão	73
A2	Correto, justifica que obteve o resultado por conta da média aritmética	11
A3	Consegue estabelecer o padrão, porém se perde no decorrer da solução	56
A4	Acerta parte dos valores	50
A5	Errado sem justificativa	243
A6	Usa os conhecimentos de média, porém erra nas contas	3
A7	Faz contas, mas não consegue resolver	37
	Branco no subitem a)	31
B1	Aluno confunde o conceito de média com regra de três simples	10
B2	Faz contas com os valores	38
B3	Acerta, mas não justifica	39
B4	Preenche "todos"corretos, mas, esquece de encontrar valor para x	54
B5	Preenche corretamente, não utiliza os conhecimentos de média aritmética	73
B6	Usa corretamente o conceito de média e encontra a solução	5
B7	Errado sem justificativa	136
B8	Tenta observar um padrão observando o exemplo, mais falha	50
	Branco no subitem b)	99
C1	Justifica que o resultado se dar pelo fato de o quadriculado ser 3X3.	124
C2	Justifica que o resultado se dar pelo fato de alguns números serem primos	24
C3	Afirma que 9 é múltiplo de todo número real	110
C4	Aluno cria uma árvore de possibilidades com os algarismos	2
C5	Repete o que estar no enunciado do problema	80
C6	Discorda do enunciado	2
	Branco no subitem c)	162

Na tabela 4.12 acima estão os dados obtidos por meio da análise das respostas dos alunos na amostra do nível 3. Estabeleceram-se 21 categorias de respostas, além das provas em branco, onde sete são do subitem a), oito do subitem b) e seis do subitem c). Ainda consta na tabela, a quantidade de respostas recebida por cada categoria.

Em seguida as categorias foram agrupadas segundo semelhança nos tipos de respostas originando-se as classes de erros, as provas em branco foram descartadas, trabalha-se apenas com as respostas erradas.

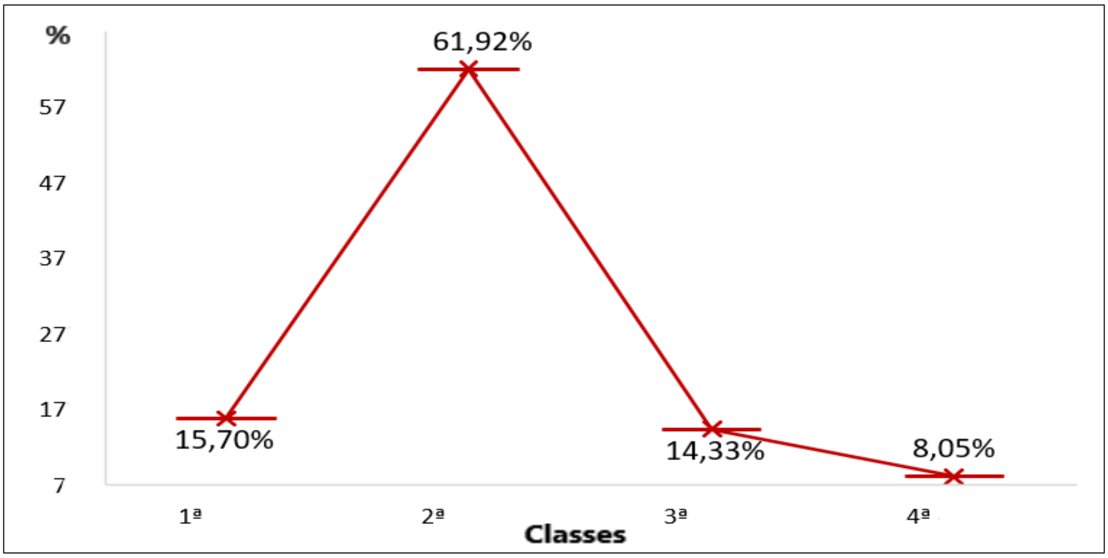
Tabela 4.13 – Classes de erros do item 3

Classe	Categoria	fi	fr (%)
1ª Erro relacionado à falta de concentração	A3 B4 A4	160	15,70
2ª Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	A5 B2 B7 B8 A6 C1	631	61,92
3ª Erro relacionado à aplicação de conhecimento equivocado	B1 C2 C3 C4	146	14,33
4ª Erro relacionado à má interpretação	C5 C6	82	8,05
Total		1019	100

Instituem-se neste item quatro classes. Levando em consideração as respostas erradas, no total registraram-se 1019 respostas, pelo fato do item ser subdividido em a), b) e c), ou seja, há provas que estão sendo contadas até três vezes (amostra 504).

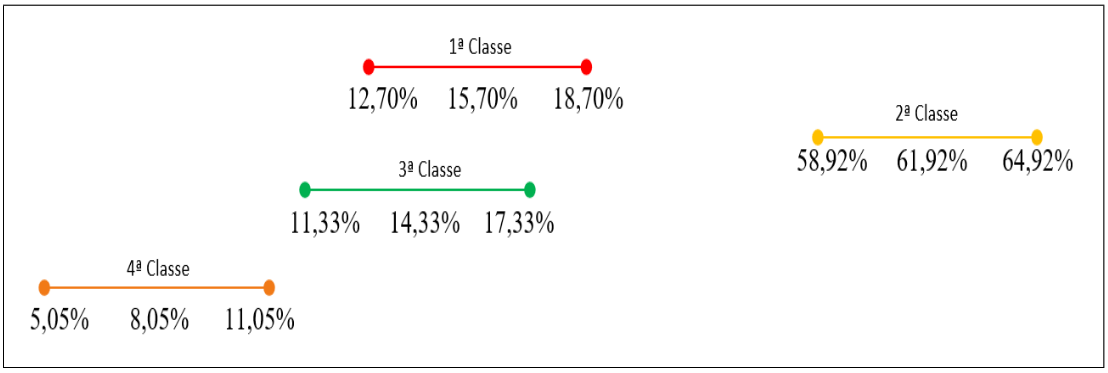
A seguir tem-se o gráfico que fornece um panorama geral das respostas erradas do nível 3, segundo as classes de erros deste item.

Figura 4.38 – Gráfico das classes de erros no item 3



Destaca-se a 2ª classe com 61,92%, em seguida a 1ª classe com 15,70%, a 3ª com 14,33%, e a 4ª classe aparece com 8,05%. Portanto, os erros relacionados à deficiência nos conceitos básicos, foram os que ocorreram com maior frequência. A figura abaixo, mostra os intervalos de confiança das classes de acordo com o plano de amostragem.

Figura 4.39 – Intervalo de confiança das classes de erros no item 3



Ainda sobre às classes de erros deste item, observa-se na figura 4.39, que há um empate técnico entre a 1ª classe e a 3ª classe.

Inicia-se uma análise detalhada das classes em cada subitem. A tabela seguinte apresenta de forma quantitativa os dados das classes nos subitens.

Tabela 4.14 – Dados quantitativos das classes nos subitens do item 3

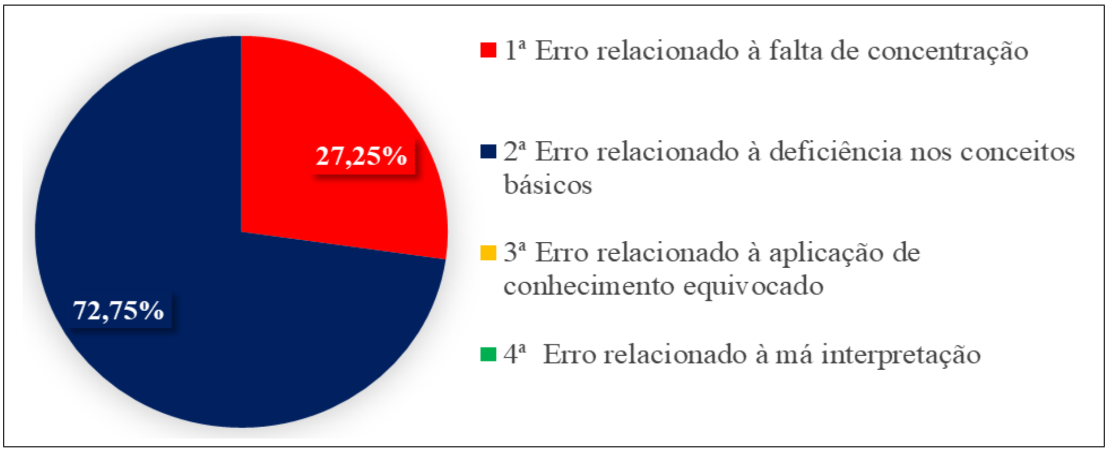
Classes do item 3	**Subitem a)**		**Subitem b)**		**Subitem c)**	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
1ª Erro relacionado à falta de concentração	106	27,25	54	18,75	0	0
2ª Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	283	72,75	224	77,78	124	36,26
3ª Erro relacionado à aplicação de conhecimento equivocado	0	0	10	3,47	136	39,77
4ª Erro relacionado à má interpretação	0	0	0	0	82	23,98
Total	389	100	288	100	342	100

Desta tabela extraem-se três gráficos, um para cada subitem. Estes serão analisados por meio de ilustrações das respostas retiradas do corpus.

4.4.1 Análise do Subitem a)

Inicia-se a abordagem do subitem a), apresentando algumas respostas extraídas do corpus, que objetivam dar uma compreensão dos erros inseridos em cada classe. A ilustração com intervalos de confiança será omitida, porém serão levados em consideração.

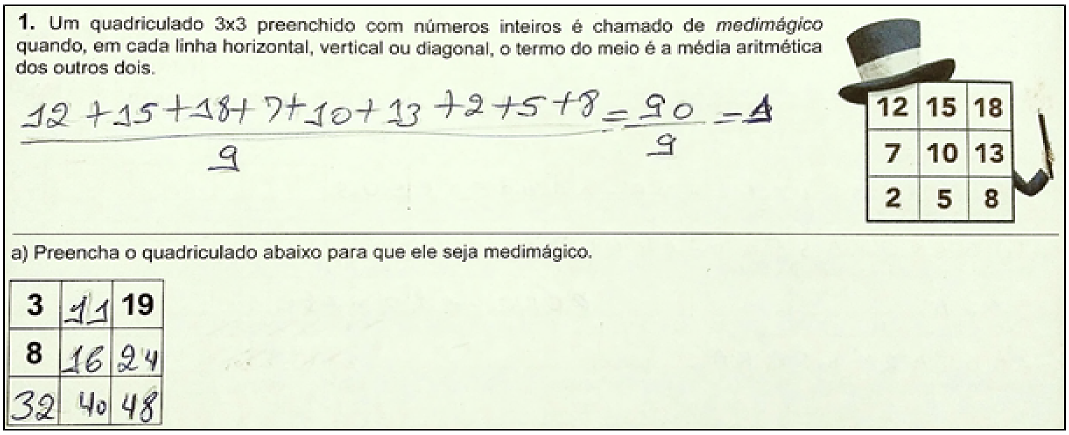
Figura 4.40 – Gráfico das classes de erros no subitem a) do item 3



Neste subitem observa-se que não há erros das 3ª e 4ª classes, sendo os erros devidos à 1ª e 2ª classes. Nota-se que 72,75% dos erros estão relacionados à deficiência nos conceitos básicos, sendo o principal deles o cálculo da média aritmética. 27,25% desses erros relacionados à falta de concentração.

A seguir, apresentam-se as respostas dos alunos nas classes de erros que surgiram no subitem, iniciando-se pela 1ª Classe: Erro relacionados à falta de concentração (27,25%).

Figura 4.41 – Erro da 1ª classe no subitem a) do item 3

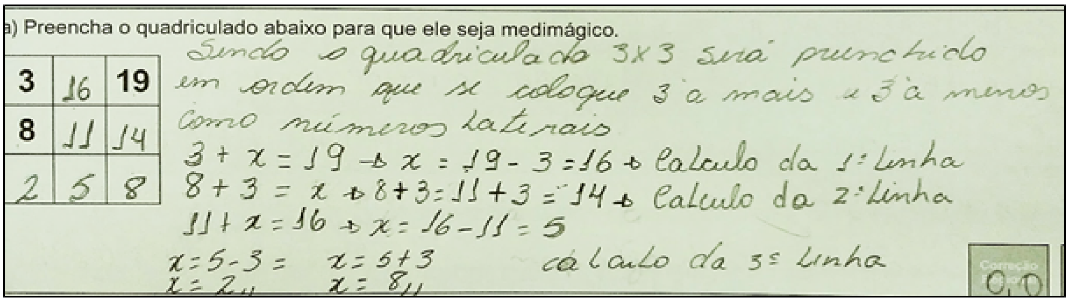


Fonte: Corpus da pesquisa

Na solução acima preenche-se o quadriculado com alguns valores corretos. Em seguida o aluno calcula a média aritmética dos valores que ele preencheu, isso mostra que o aluno detém conhecimento suficiente para calcular a média aritmética. Portanto infere-se que o erro foi gerado por falta de atenção (mais uma vez o aluno demonstra falta de atenção na divisão de 90 por nove).

Vai-se à 2ª classe que trata dos erros relacionados às deficiências nos conceitos básicos, responsáveis por 72,75% dos erros.

Figura 4.42 – Erro da 2ª classe no subitem a) do item 3



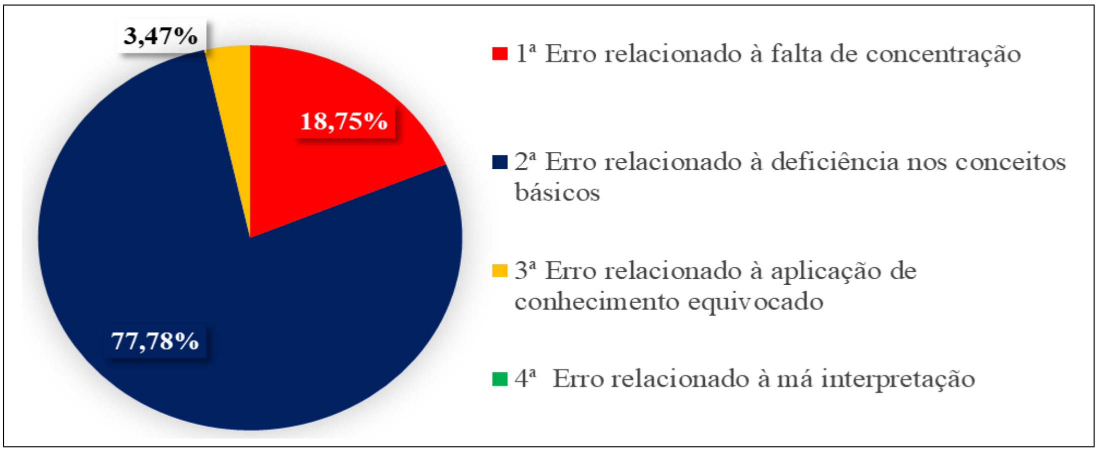
Fonte: Corpus da pesquisa

Na presente solução, argumenta-se que pelo fato do quadriculado ser 3x3, o valor três deve ser adicionado e retirado dos números laterais, isso já é um indício de falta de conhecimento dos conceitos de média aritmética. No decorrer da solução é posta em prática tal teoria, e por meio de várias equações, em algumas adicionando 3 e em outras retirando 3, o quadriculado é preenchido. Conclui-se que o aluno desconhece a média aritmética, pois ao olhar para os números preenchidos claramente não ocorre de os valores centrais serem a média aritmética dos lateais (linhas, colunas e diagonais), e mesmo diante disto a solução é mantida. Muitas outras soluções com erros semelhantes surgiram no corpus, onde os alunos além de desconhecer os conceitos requeridos ainda erram as operações elementares.

4.4.2 Análise do Subitem b)

Prossegue-se para o subitem b), onde foram detectadas as presenças de três das quatro classes deste item. A ilustração com intervalos de confiança será omitida, porém serão levados em consideração.

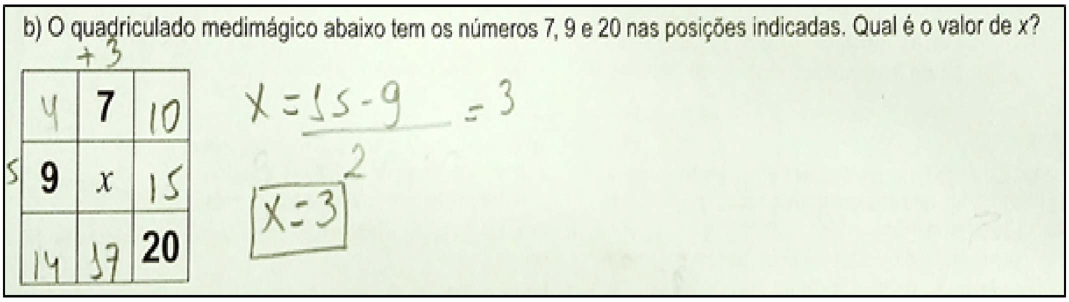
Figura 4.43 – Gráfico das classes de erros no subitem b) do item 3



Neste subitem não houve erros relacionados à 4ª classe. Assim como no subitem a) a 2ª classe que trata dos conceitos básicos é a mais frequente com 77,78% dos erros, logo depois a 1ª com 18,75%, em seguida a 3ª classe com 3,47%.

Faz-se assim como nos subitens anteriores uma ilustração das respostas. Inicia-se pela 1ª Classe: Erro relacionado à falta de concentração.

Figura 4.44 – Erro da 1ª classe no subitem b) do item 3

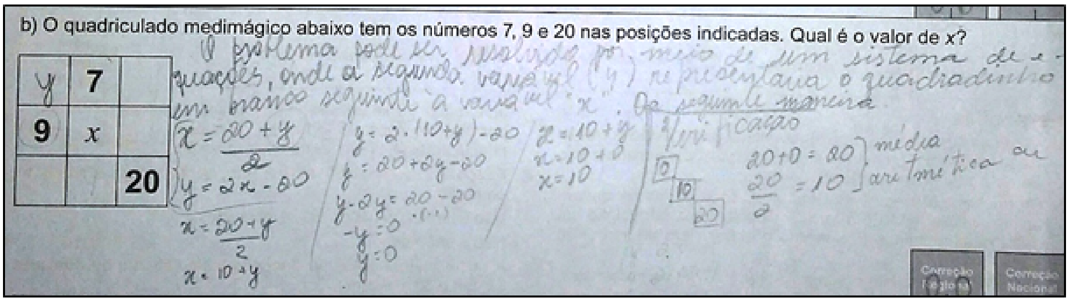


Fonte: Corpus da pesquisa

Observa-se que na solução todos os valores do quadriculado com exceção do valor de x foram preenchidos corretamente. Isso mostra que o aluno foi capaz de acertar cinco dos seis necessários para chegar no medimágico correto, ou seja, claramente a possibilidade para concluir esse problema com sucesso era mais do que 80%, no entanto, por falta de atenção, ao calcular a média faz uma subtração ao invés de soma. Outros erros semelhantes estão inseridos nessa classe, por exemplo, casos em que o aluno preenche com valores corretos os quadrinhos em branco, e esquece de dar resposta para x (que era o objetivo).

Outra classe de erros presente aqui é a 2ª que versa sobre os erros relacionados às deficiências nos conceitos básicos.

Figura 4.45 – Erro da 2ª classe no subitem b) do item 3

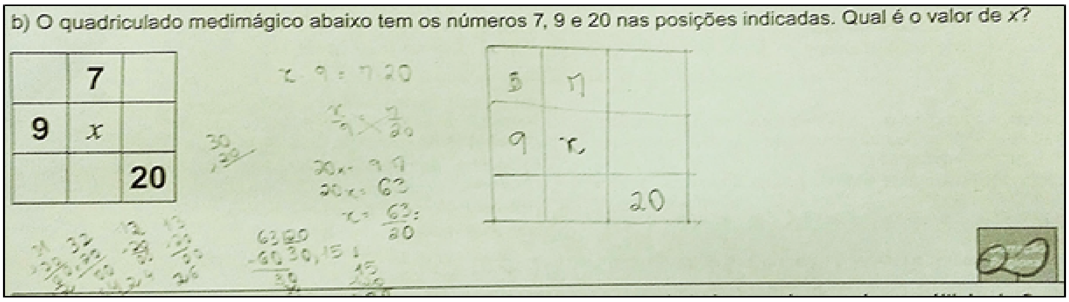


Fonte: Corpus da pesquisa

Observa-se que o problema é entendido ao ser traçada a estratégia correta para resolvê-lo, então é posto a variável y, após aplicar corretamente o conhecimento de média aritmética, chega-se a uma equação, e então é demonstrado erro ao desenvolvê-la. O fato do aluno não conseguir resolver uma equação que envolvia fração culminou em um erro que prejudicou toda a continuação da resposta.

Trata-se a seguir a última classe de erros neste subitem, a 3ª, versando sobre aplicação de conhecimento equivocado.

Figura 4.46 – Erro da 3ª classe no subitem b) do item 3



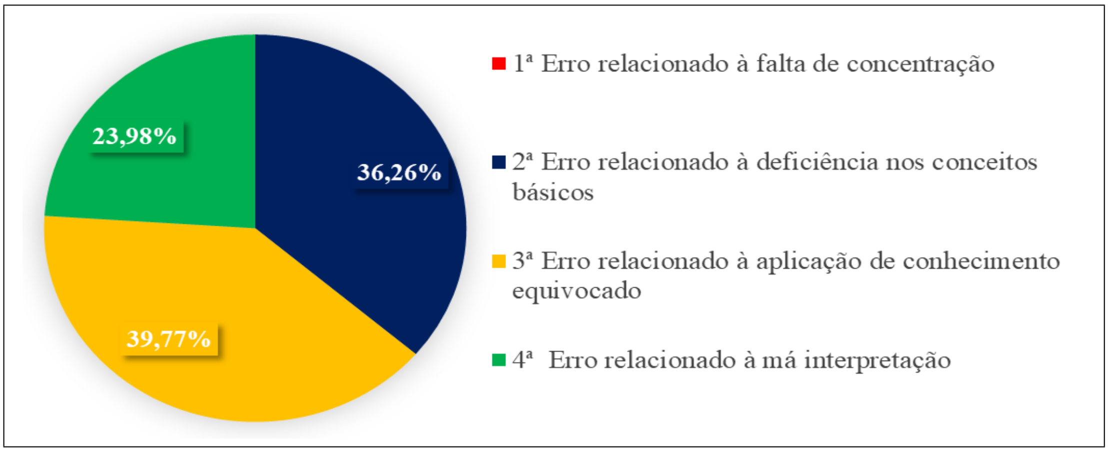
Fonte: Corpus da pesquisa

A solução exposta mostra que o aluno estabelece uma espécie de proporção entre os valores que estão no quadriculado. Há ao mmenos duas hipóteses para tal raciocínio: primeiro, ele pode ter confundido média aritmética com progressão geométrica; segundo, pensa que "regra de três simples" é uma forma de se chegar à solução. Portanto, provavelmente a causa do fracasso neste problema, deve-se a não ter domínio sobre os conhecimentos de média, e nem sabe em qual ocasião usar os outros conceitos matemáticos.

4.4.3 Análise do Subitem c)

Aborda-se agora o subitem c), onde foram verificadas três das quatro classes do item. A ilustração com intervalos de confiança será omitida, porém serão levados em consideração.

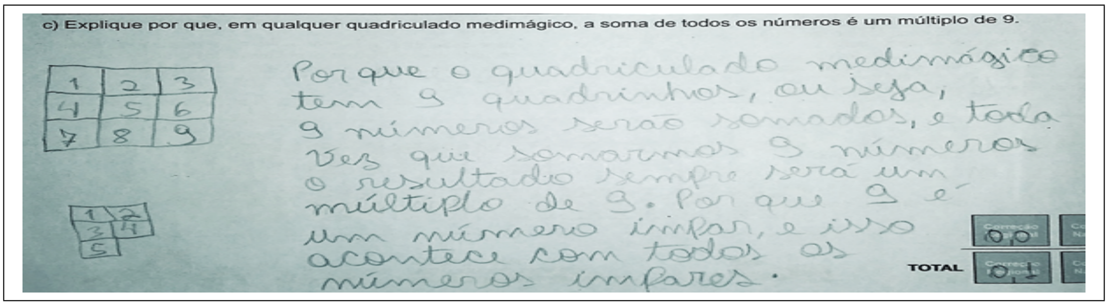
Figura 4.47 – Gráfico das classes de erros no subitem c) do item 3



Neste subitem não houve erros relacionados à 1ª classe. Os erros que ocorreram com maior frequência foram os da 3ª classe com 39,77%, seguidos dos erros da 2ª classe, com 36,26%, e da 3ª classe, com 23,98%. Observa-se que há um empate técnico entre a 2ª classe, e a 3ª classe.

Faz-se assim como nos subitens anteriores uma ilustração das respostas. Inicia-se pela 2ª Classe: Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos.

Figura 4.48 – Erro da 2ª classe no subitem c) do item 3

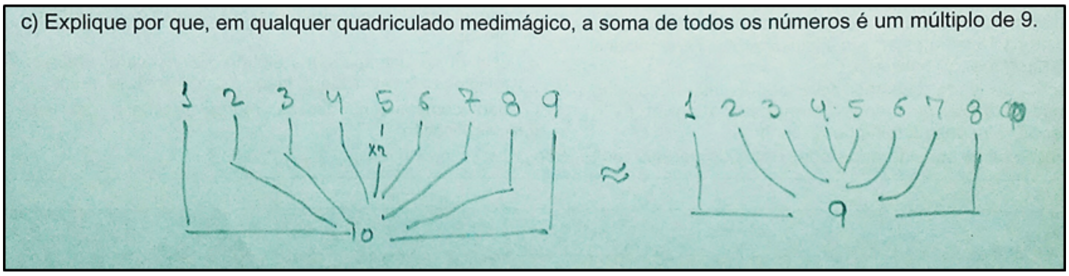


Fonte: Corpus da pesquisa

Os erros desta classe estão entre os mais cometidos. Observa-se nesta resposta que o aluno defende que o fato da soma de todos os valores no medimágico ser múltiplo de 9, dá-se porque são nove números. Além disso ainda generaliza seu pensamento afirmando que isso acontece com todos os números ímpares. Assim este erro em parte é gerado pela ausência dos conhecimentos básicos. Neste exemplo é possível perceber que o aluno não conhece os principais critérios de divisibilidade. Outros erros com as mesmas características integram essa classe, por exemplo erros onde é justificado que o resultado é devido a 9 ser inteiro, ou ser número primo.

Faz-se agora a discussão da 3ª classe, que versa sobre a aplicação de conhecimento equivocado, compondo 39,77% dos erros.

Figura 4.49 – Erro da 3ª classe no subitem c) do item 3

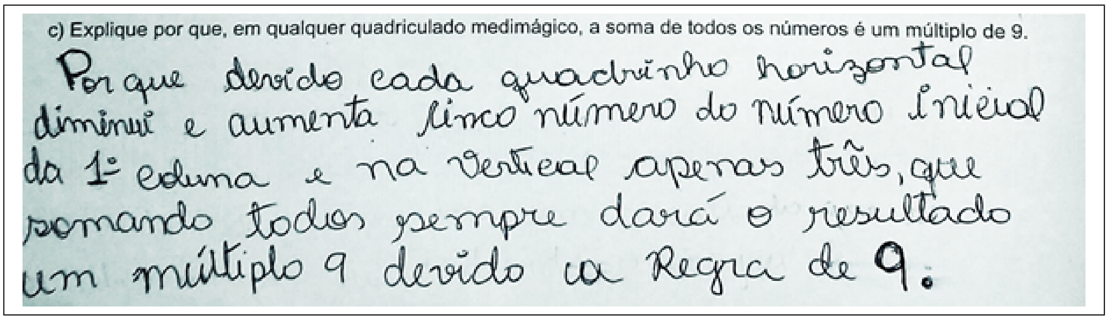


Fonte: Corpus da pesquisa

Nas soluções desta classe os alunos empregaram conceitos matemáticos que não eram os adequados para obter a solução correta. Nesta ilustração retirada de uma das provas, verifica-se que o aluno tentar resolver o item por meio de uma árvore de possibilidades, conteúdo que faz parte da análise combinatória. Tais soluções indicam que os alunos que cometem erros desta natureza não possuem habilidades para discernir quais conteúdos devem ser mobilizados para obter a solução dos problemas. Assim, possivelmente, este erro incide em um conhecimento equivocado.

Outra classe de erros presente aqui é a 4ª que versa sobre os erros relacionados à má interpretação, com 23,98%.

Figura 4.50 – Erro da 4ª classe no subitem c) do item 3


c) Explique por que, em qualquer quadriculado medimágico, a soma de todos os números é um múltiplo de 9.

Porque devido cada quadrinho horizontal
diminui e aumenta cinco número do número inicial
da 1º coluna e na vertical apenas três, que
somando todos sempre dará o resultado
um múltiplo 9 devido a Regra de 9.

Fonte: Corpus da pesquisa

A resposta escolhida para representar essa classe mostra que o aluno tenta explicar o que é requerido por meio dos padrões observados nos subitens anteriores, sendo este argumento motivado pelo fato de não saber calcular a média aritmética. Como observar os padrões foi um artificio suficiente para solucionar os itens anteriores, pensa que aqui também será útil. Esta é a razão para classificar estes erros como má interpretação, pois se o aluno interpretasse por meio da média aritmética, preenchendo todo o medimágico com incógnitas em função do valor central, constataria que a soma de fato é um múltiplo de 9.

No próximo capítulo, será estabelecida uma discussão dos resultados obtidos na análise efetuada no capítulo 4. Faz-se um apanhado geral dos dados quantitativos em relação as respostas corretas, em branco e erradas. Serão explicitadas as classes de erros que ocorreram com maior frequência nos itens. Ainda serão postos em destaque os tópicos de Aritmética, nos quais os alunos apresentaram maiores dificuldades.

5 Discussão dos Resultados

Esta é a última etapa desta pesquisa, compreendida como uma extensão da análise dada na seção anterior. Por meio da análise de erros aplicada como metodologia de pesquisa para identificar os conhecimentos dos alunos, foi possível perceber que apesar dos significativos esforços, ainda existe um extenso caminho a ser trilhado, para se poder alcançar os resultados satisfatórios no que tange o ensino de Matemática na Educação Básica no Oeste do Pará.

A análise do *corpus* mostra que os educandos não possuem domínio das habilidades mínimas exigidas para o nível escolar que se encontram, por exemplo, alunos no Ensino Médio com grande dificuldade de interpretar um problema aplicando conceitos matemáticos em situações contextualizadas. Muitas vezes o aluno é educado a apenas resolver equações ou repetir técnicas de resoluções que se resumem às manipulações algébricas, isso é muito comum no Ensino Fundamental 2, por exemplo, onde trabalha-se com expressões algébricas (fatorações diversas, simplificações, ...). Entretanto, as questões da OBMEP valorizam o raciocínio lógico e a criatividade em suas resoluções, o que acaba por revelar um grau de aprendizado e/ou capacidade de resolução de problemas do aluno.

Nessas concepções, entende-se que para os alunos terem um aproveitamento positivo no aprendizado, deveriam ser capazes de não apenas propor uma solução, porém, estarem aptos a questionar os argumentos empregados em seu raciocínio, pois um problema não está necessariamente resolvido quando se obtém a resposta, ainda que correta. A prova de que o problema está de fato resolvido é dada quando este compreende o que fez, sendo capaz de justificar por que as suas ações foram as adequadas.

Para solidificar essa discussão quanto aos resultados desta pesquisa, faz-se uso dos dados já expostos na tabela 4.2, com o propósito de deixar claras as interpretações aqui registradas.

Por meios dos resultados foi possível concluir que 94,74% das respostas analisadas estão erradas (considerando as em branco). Os erros revelam ineficiência na aprendizagem nos seguintes tópicos:

a) sistema de numeração, desconhecendo os algarismos do sistema de base 10;

b) contagem dos números naturais;

c) conceitos de números inteiros, paridade, primos;

d) operações básicas: Adição, subtração, multiplicação e divisão;

e) conceitos de múltiplos e divisões

f) média aritmética;

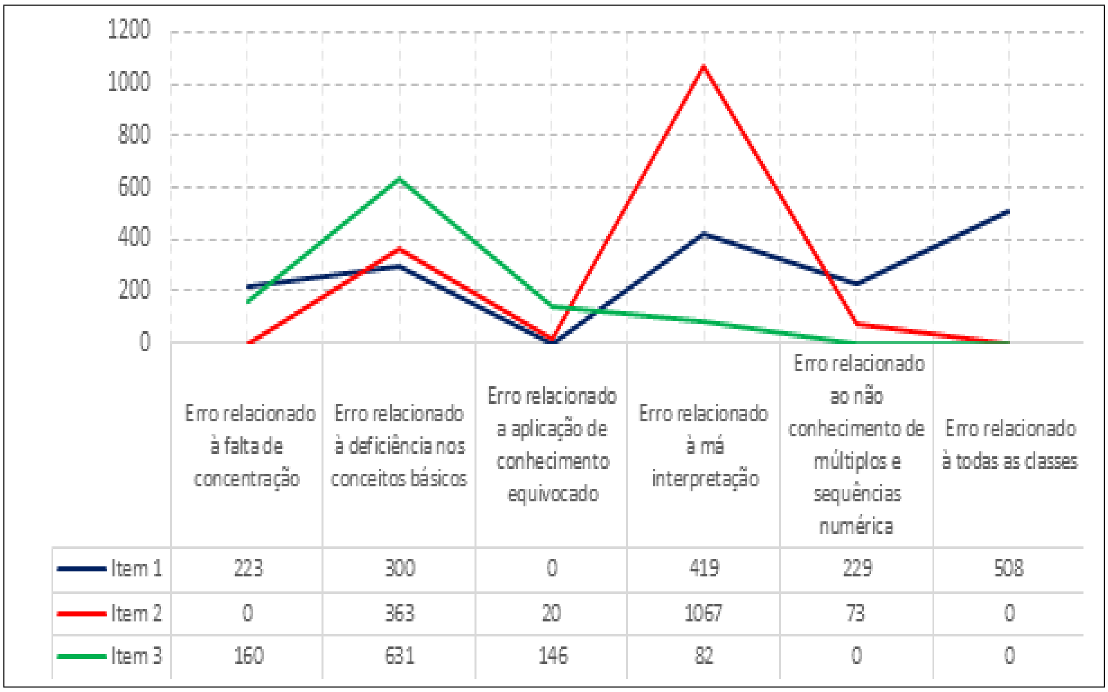
g) resolução de equação do primeiro grau.

Assim, põe-se em evidência um índice elevado de deficiência nos conceitos de Aritmética por parte dos envolvidos. Vê-se na tabela 4.2, que de um total de 5430 respostas analisadas apenas 286 foram corretas, em termos de percentual, corresponde a 5,27% das respostas.

Os resultados apresentados, incitam o seguinte questionamento: Os indicadores aqui obtidos refletem a qualidade da Educação Básica no Oeste do Pará? A respostas é que não há como afirmar de forma categórica, apenas com base no exposto, porém sem dúvida esta pesquisa sugere a necessidade de uma atenção especial, para o quê, de fato, os alunos estão assimilando. O objetivo não é encontrar "culpados", porém gerar reflexões sobre a condução nas aulas e as atividades lá empregadas para medir o grau de conhecimento.

Um resultado importante obtido aqui está retratado no gráfico abaixo expondo o comportamento dos níveis em cada classe de erro.

Figura 5.1 – Gráfico dos itens em relação às classes



Nota-se que o item 1 atinge seu ponto máximo na classe identificada por "erros relacionados à todas as classes", o que firma o parecer dado no parágrafo anterior, os alunos do 6º ano e 7º ano do Ensino Fundamental com déficit de aprendizagem que deveriam estar sanados desde anos anteriores. Como consequência gera-se "uma reação em cadeia" pois uma vez que estes conceitos não são dominados, prejudicam em muito a assimilação de novos conhecimentos, produzindo erros sobre erros.

No item 2, a classe com maior incidência de erros foi a que trata dos "erros relacionados à má interpretação". Fica evidente que os alunos do 8º ano e 9º ano do Ensino

Fundamental necessitam melhorar em termos de compreensão e interpretação, pois ao se deparar com problemas de forma geral, a primeira etapa a ser superada consiste em compreender o que está sendo exigido. Quando o aluno não é capaz de interpretar, torna-se impossível alcançar a solução.

Tal realidade pode ser resultado de um ensino mecânico (procedimentos que não produzem o pensamento crítico, discussão e interpretação, apenas repetição de técnicas), daí a importância de novas técnicas e métodos de ensino, sempre priorizando as situações contextualizadas.

Em relação ao item 3, a classe que obteve maior frequência foi “erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos”, ao debruça-se nas respostas deste nível, constatou-se que os alunos do Ensino Médio apresentam tantas dificuldades quanto os alunos do Ensino Fundamental. Os conceitos básicos são a base do conhecimento matemático, sem dominá-los os estudantes não conseguirão bons rendimentos nos demais conceitos. Destacam-se aqui erros na resolução de equações algébricas e cálculo da média aritmética. Os dados mostram que os alunos tentam resolver, porém não possuem conhecimentos suficientes, procuram justificativas em padrões observados ou em fatos que são verdadeiros, porém sem relação com o exigido, por exemplo, no subitem c), muitos alunos responderam:

a) porque o medimágico é 3x3;
b) porque 9 é inteiro;
c) porque 9 é ímpar;
d) porque 9 é múltiplo dele mesmo;
e) a soma dos valores nos subitens a) e b) é múltiplo de 9, então será para qualquer medimágico.

Finaliza-se essa discussão ressaltando a importância de se trabalhar os erros dos alunos em sala de aula. Aqui a análise de erros foi usada como metodologia de pesquisa para destacar os principais erros de Aritmética cometidos pelos alunos. Encerra-se com o pensamento de Brownell (1942 apud KRULIK, 1987, p. 66), “Em vez de ser protegida contra o erro, a criança deveria ser exposta ao erro muitas vezes, ser encorajada a detectar e a demonstrar o que está errando, e por quê”.

6 Considerações Finais

Nesta produção, foi feito um levantamento dos principais erros de Aritmética cometidos pelos alunos da Educação Básica na Região Oeste do estado do Pará, abrangendo 32 cidades. Tal levantamento foi empregado em uma população de 4377 alunos, isso corresponde à 13131 resposta, pois cada aluno deveria resolver três subitens.

Em virtude desta população ser extensa, estabeleceu-se um plano de amostragem, que permitiu aos resultados terem um nível de confiança de 95%, com margem de erro de 3%. Assim, à amostra selecionada (por procedimentos aleatórios), foi de 1812 alunos, perfazendo um total de 5436 respostas analisadas.

A pesquisa realizada nessa dissertação foi classificada com Teoria Fundamentada em Dados (*Grounded Theory*), por essa razão, às categorias de respostas e às classes de erros, foram estipuladas na pesquisa conforme às respostas presentes no *corpus*. No todo foram listadas 58 categorias de respostas e 6 classes de erros, distribuídas nos três itens.

No processo de análise dos dados, notou-se que o percentual de respostas erradas estava em entorno de 80% do total dos dados da amostra. Sendo os principais erros relacionados à má interpretação, e os erros relacionados à deficiência nos conceitos básico. Para se ter clareza destes erros, recomenda-se ver o capítulo 5 e a tabela 4.1.

Do *corpus* da pesquisa foram retirados 31 exemplos de respostas que ilustraram às classes de erros, e deram origem às discussões acerca do procedimento empregado pelo aluno que o conduziu ao erro. Tais discussões são hipóteses, como tal podem ou não serem verdadeiras, no entanto, faz-se o máximo para que estas reflitam o raciocínio do aluno. Lembrando que tais interpretações não são únicas, existem várias possibilidades que podem ter conduzido o aluno ao erro.

Considera-se que este levantamento tem impacto direto na forma como os professores encaram o “erro”, ou seja, que estes possam mudar (se for o caso) a forma de trabalhar os “erros” dos alunos. Uma vez que a prática hoje estabelecida pela influência e formação, os leva a tratar os erros apenas como um mecanismo de punição ou atribuição de nota.

Neste aspecto, esta produção traz efeitos extremamente essenciais para os educadores e educandos da Educação Básica, não apenas no campo da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento, uma vez que os procedimentos adotados aqui podem servir de suporte para investigações nas variadas ciências.

Quando se iniciou esta produção havia por objetivo revelar os principais erros cometidos pelos alunos em Aritmética, tal objetivo foi alcançado e os erros foram elencados. Como fruto desta análise ainda foi possível:

a) categorizar e classificar os erros;

b) relacionar entre o Ensino Fundamental e o Ensino Médio as principais dificuldades detectadas;

c) revelar algumas falhas de aprendizagem (classe conhecimento equivocado);

d) apresentar hipóteses para compreender o pensamento do aluno ao propor as soluções;

e) produzir um plano de amostragem capaz de generalizar os resultados com nível de confiança de 95%, e margem de erro de 3%.

Com base no exposto compreende-se que a pesquisa obteve sucesso no que se propôs em realizar, ainda que os resultados mostrem que o grau de conhecimento em relação os conceitos de Aritmética estejam abaixo do ideal.

A pesquisa ainda produziu um avanço para o autor enquanto professor da Educação Básica, pois foi possível constatar que as respostas dos alunos, estão carregadas de conhecimentos. Em embora, tais conhecimentos nem sempre sejam os apropriados para solucionar o que é exigido. Isto produz o pensamento de desenvolver estratégias que utilizem os erros em favor da compreensão dos temas ensinados.

Algo importante a destacar é que esta pesquisa se mostra de maneira geral no contexto do Oeste do Pará, abrangendo 32 cidades desta região, trazendo dados de grandes, médias e pequenas cidades. Nos apêndices A, B e C, estão registradas as categorias dos erros por cidades. Recomenda-se ao leitor que veja os dados e produza suas próprias conclusões, observando em quais níveis e itens os erros por cidades foram mais frequentes. Aos leitores do Oeste do Pará, faz-se o convite para que vejam as categorias de erros do seu município.

Deixa-se tal apuração por conta do leitor, pois não é o intuito nesta primeira abordagem acerca da análise de erros, relacionar as respostas por cidades, porém é inegável que esta é uma maneira interessante de tratar os dados em um próximo trabalho, ou ainda, esta produção pode dá origem a novas pesquisas a nível de municípios.

Por meio do desencadeamento do trabalho, percebeu-se que às produções escrita dos alunos ao responderem os problemas têm muito a serem exploradas, pois ao conduzir a análise de erros como metodologia de pesquisa, e destinar uma atenção especial as respostas, foi possível estabelecer hipóteses para compreender o pensamento do aluno. Em muitas respostas se percebe, que a ausência de conhecimento leva o aluno a buscar no próprio enunciado a solução.

Através da análise do *corpus* da pesquisa, ainda foi possível revelar algumas concepções concernentes ao processo educacional. Nota-se que à análise de erros permite um olhar diferenciado para aprendizagem e para o ensino, tanto para o professor como para o aluno. Quando os erros são trabalhados é permitido aos alunos e aos professores permutarem as posições, pois uma maneira de interagir nessa metodologia equivale a tanto o professor como o aluno se debruçarem nos erros.

Acredita-se que essa postura dará ao aluno uma visão diferenciada com relação a sua solução, uma vez que este buscará compreender o fato que culminou no erro. Em contrapartida, quando o professor delegar importância a resposta errada do aluno, termina por descobrir em que ponto deve dispensar maior atenção durante às aulas para suprimir o erro exposto.

Em termos educacionais, esse levantamento se atrela as demais obras científicas existentes no país que pretendem contribuir para melhoraria da Educação Básica, principalmente em relação à aprendizagem de Matemática. Lista-se a seguir os resultados que deseja-se alcançar com a divulgação desta comunicação:

a) melhorar os índices de desempenho em Matemática;

b) contribuir para o ensino e aprendizagem na Educação Básica;

c) rever praticas pedagógicas usando o método de análise de erros;

d) instigar professores a usar a metodologia de análise de erros em suas aulas para detectar falhas de aprendizagem dos alunos;

e) incentivar outras pesquisas (projetos, artigos, monografias, dissertações, etc.) usando a análise de erros.

Chega-se a confirmação que à análise de erro usada como metodologia de pesquisa pode contribuir para aprendizagem, construindo e reconstruindo o conhecimento detido pelos alunos. Ressalta-se que tudo o que foi abordado até o momento nesta produção não encerra o assunto, muito pelo contrário, estabelece novas hipóteses, que devem ser discutidas e exploradas, sempre centrando o objetivo em elevar o grau de conhecimento dos educandos.

Ao término desta dissertação, surgiram novos questionamentos em relação as atitudes dos alunos:

a) Eles possuem preocupação com à interpretação dos problemas propostos em sala de aula?

b) Ao receberem suas atividades corrigidas, eles verificam onde erraram, ou apenas observam a nota?

c) Qual posicionamento desejam mostrar, quando discordam do enunciado do problema sem justificativa?

d) Possuem o hábito de questionar a veracidade de suas próprias soluções?

e) Quando erram um problema, preferem esconder o erro, ou procuram ajuda para compreender o que não está certo?

Às respostas para essas perguntas, apenas os professores e os alunos podem dar. Trabalhar o tema da análise de erros nos aspectos dessas interrogações, requer uma abordagem em uma visão mais especifica, não apenas a análise de erros com metodologia de pesquisa, porém, também como metodologia de ensino, com interações diretas entre o professor e o aluno.

Finaliza-se com o pensamento de Cury (2007, p. 17), "Considero que a análise de erros – ou a análise da produção escrita, seja ela representativa de acertos ou de erros – é uma tendência em Educação Matemática".

Referências

BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1979. Citado na página 45.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. São Paulo, SP, BR: Edições 70, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 42, 43 e 57.

BINELLO, D. S. Gestão escola em matemática: Uma experiência a partir de uma escola de ensino fundamental da rede municipal. *Universidade Federal de Santa Maria*, Rio Grande do Sul, 2014. Disponível em: <repositorio.ufsm.br/bitstream/.../TCCE_GE_EaD_2014_BINELLO_DOMINGAS.pdf?...> Acesso em: 09 ago 2017. Citado na página 37.

BORBA, M. d. C.; ARAÚJO, J. d. L. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. [S.l.]: 4 a. ed. rev. ampl. - Belo Horizonte, Autêntica, 2012. Citado na página 50.

BRASIL, I. B. d. G. e. E. Pib dos municípios. Portal do IBGE, 2014. Disponível em: <ftp://ftp.ibge.gov.br/Pib_Municipios/2014/base/base_de_dados_2010_2014.xls>. Acesso em: 15 out 2017. Citado na página 51.

BRASIL, I. B. d. G. e. E. Estimativas da população residente no brasil e unidades da federação com data de referência em 1º de julho de 2016. Portal do IBGE, 2016. Disponível em: <ftp://ftp.ibge.gov.br/Estimativas_de_Populacao/Estimativas_2016/estimativa_dou_2016_20160913.pdf>. Acesso em: 15 out 2017. Citado na página 51.

BRASIL, M. *Apresentação*. [S.l.], 2017. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>. Acesso em: 21 set. 2017. Citado na página 29.

BRASIL, M. Revista obmep 12 anos. *Portal da OBMEP*, 2017. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/images/Revista_OBMEP_12_anos.pdf>. Acesso em: 14 jul. 2017. Citado na página 33.

BRASIL, M. d. E. Ministro apresenta resultados gerais do enem 2016 e celebra êxito na realização do exame. *Portal do MEC*, 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=44111>. Acesso em: 20 fev 2017. Citado na página 36.

BRASIL, S. d. E. F. Parâmetros curriculares nacionais - matemática. *Brasília: MEC/SEF*, 1998. Citado 5 vezes nas páginas 35, 38, 41, 62 e 73.

BRASIL, S. d. E. M. e. T. Parâmetros curriculares nacionais - parte iii ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. *Brasília: MEC/SEMT*, 2002. Citado na página 85.

BROUSSEAU, G. *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. [S.l.]: Recherches em Didactique des Mathématiques, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983. Citado na página 26.

BROWNELL, W. A. *"Problem Solving". Em The Psychology of Learning*. [S.l.]: 41º livro do ano da National Society for the Study of Education. Chicago, 1942. Citado na página 97.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística básica*. [S.l.]: 6 a. edição, São Paulo, Saraiva, 2010. Citado na página 53.

CALDAS, C. C. S.; VIANA, C. S. *As Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas públicas na Formação de Professores e Alunos*. [S.l.]: Revista Margens Interdisciplina, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

CENCI, D. *Avaliação em Matemática: Concepções de professores da educação básica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013. Citado na página 45.

COSTA, R. Q. G. d. *Análise da prova da primeira fase da OBMEP como subsídio para orientar a prática docente*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2015. Citado na página 50.

CRESPO, A. A. *Estatística fácil*. [S.l.]: 17 a. edição, São Paulo, Saraiva, 2002. Citado na página 53.

CRUZ, E. d. S. *A noção de variável em livros didáticos de ensino fundamental: Um estudo sobre a ótica da organização praxeológica*. Dissertação (Mestrado) — PUC - São Paulo, 2005. Citado na página 41.

CURY, H. N. *Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática*. [S.l.]: Zetetiké, volume 3, 1995. Citado na página 45.

CURY, H. N. *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. [S.l.]: Autêntica, 2007. Citado 10 vezes nas páginas 25, 26, 42, 43, 44, 45, 49, 50, 53 e 102.

ESTEBAN, M. T. *O que sabe quem erra?: reflexões sobre a avaliação e fracasso escolar*. [S.l.]: DP & A Editora, 2001. Citado na página 50.

FELTES, R. Z. *Análise de erros em potenciação e radiciação: um estudo com alunos de ensino fundamental e médio*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 50.

FIORAVANÇO, W. B. A (des)motivação do corpo discente e os fatores que a determinam no contexto escolar. *REI: Revista de Educação Ideau - vol 5 - N. 11*, 2010. Disponível em: <http://www.ideau.com.br/getulio/restrito/upload/revistasartigos/171_1.pdf>. Acesso em: 28 set 2017. Citado na página 41.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos*. [S.l.]: 3 ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 50.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. [S.l.]: 5. ed. São Paulo, Editora Atlas, 2010. Citado na página 49.

GRANDO, R. C. O jogo na educação: Aspectos didáticos-metodológicos do jogo na educação matemática. *Blog: Ensinar Matemática de maneira divertiva*, 2010. Disponível em: <http://descobertamat.blogspot.com.br/2010/12/o-jogo-na-educacao-aspectos-didaticos.html>. Acesso em: 28 set 2017. Citado na página 39.

GROSSNICKLE, F. E.; BRUECKNER, L. J. *O ensino de aritmética pela compreensão*. [S.l.]: Editora Fundo de Cultura - Rio de Janeiro, 1965. Citado na página 39.

HAYDT, R. C. Avaliação do processo ensino-aprendizagem. *Editora Ática, 6a. edição*, 2008. Citado na página 34.

KAMII, C. *A criança e o número: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos*. [S.l.]: Trad. Regina A. de Assis. Campinas- SP: Papirus, 1982. Citado na página 40.

KRULIK, S. *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar*. [S.l.]: Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo, São Paulo, Atual Editora, 1987. Citado na página 97.

LIBÂNEO, J. C. *didática*. [S.l.]: Cortez Editora, 2017. Citado na página 34.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Pespectivas em aritmética e algebra para o século XXI*. [S.l.]: 7 a. ed. São Paulo: Papirus, 2006. Citado na página 39.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. [S.l.]: Cortez editora, 22 a. edição, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 50.

LUFT, C. P.; BARBOSA, F. d. A.; PEREIRA, M. da C. *Minidicionário Luft*. [S.l.]: Autora Àtica, 2000. Citado na página 44.

MOORE, D. S. *A estatística básica e sua prática*. [S.l.]: Tradução e revisão, Rio de Janeiro, LTC, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 55.

MORAES, R. *Uma tempestade de luz: a compreenssão possibilitada pela análise textual discursiva*. [S.l.]: Ciência e Educaç ao, 2003. Citado na página 42.

MORENO, A. C. Brasil cai em ranking mundial de educação em ciências, leitura e matemática. *Portal G1*, 2016. Disponível em: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/brasil-cai-em-ranking-mundial-de-educacao-em-ciencias-leitura-e-matematica.ghtml>. Acesso em: 09 nov 2017. Citado na página 25.

MORRETO, V. P. *Prova um momento privilegiado de estudos e não um acerto de contas*. [S.l.]: DP&A Editora, RJ, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 50.

NUNES, T. et al. *Educação Matemática: Números e Operações numéricas*. [S.l.]: 2 a. ed. São Paulo: Cotez, 2009. Citado na página 38.

PALHARES, O. O ensino e a aprendizagem da matemática na perspectiva piagetiana. *Schèmer, Revista eletronica de psicologia, vol I*, 2008. Disponível em: <http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/scheme/article/view/554>. Acesso em: 20 set 2017. Citado na página 40.

PARÁ, G. d. E. d. Econômia. Portal Estado do Pará, 2010. Disponível em: <http://www.pa.gov.br/O_Para/economia.asp>. Acesso em: 15 out 2017. Citado na página 52.

PARÁ, G. d. E. d. O estado do pará. Portal Estado do Pará, 2010. Disponível em: <http://www.pa.gov.br/O_Para/opara.asp>. Acesso em: 15 out 2017. Citado na página 50.

PINTO, L. V. *Ideologia e Desenvolvimento Nacional.* [S.l.]: Rio de Janeiro: ISBE, 1956. Citado na página 37.

PRIETO, A. C. S. *Mais que um dilema matemático: Como realmente ajudar seus alunos a aprender Matemática?* Planeta e educação, 2006. Disponível em: <http://www.planetaeducacao.com.br/portal/impressao.asp?artigo=522>. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.

ROCHA, E. A. R.; SANTANA, C. d. C. Dificuldade no ensino e aprendizagem de aritmética e algébra nas escolas públicas. *Universidade estadual do Sudoeste da Bahia*, 2011. Disponível em: <ww2.uesb.br/cursos/matematica/matematicavca/wp-content/uploads/DIFICULDADES-NO-ENSINO-E-APRENDIZAGEM.pdf>. Acesso em: 28 set 2017. Citado na página 42.

SANTANA, N. A. d. S. Pensamento aritmético e sua importância para o ensino de matemática. *PUC, Minas Gerais*, 2016. Disponível em: <http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/PENSAMENTO-ARITM%C3%89TICO-E-SUA-IMPORT%C3%82NCIA-PARA-O-ENSINO-DE-MATEM%C3%81TICA.pdf>. Acesso em: 20 set 2017. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.

SANTOS, M. A. *Aprendendo por meio da análise de erros dos nossos alunos: Uma investigação sobre a resolução de matemática financeira.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Tocantis, 2016. Citado na página 50.

SCHIRLO, A. C.; MEZA, E. d. S. Obmep: Projeto de política pública para a inclusão social de estudantes com talento em matemática. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ISSN 2178-034X*, 2013. Disponível em: <http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1893_769_ID.pdf>. Acesso em: 21 set. 2017. Citado na página 30.

SILVA, M. C. N.; BURIASCO, L. R. C. Produção escrita em matemática: Algumas reflexões. *Ceminário internacional de pesquisa em educação matemática*, Águas de Lindóias, São Paulo, SBEM - Anais, 2006. Citado na página 44.

SILVA, R. N. Álgebra e aritmética no ensino fundamental: Um estudo de como ensiná-las de forma integrada e com base em significados. *UCB - Trabalho de Conclusão de Curso*, 2007. Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/RondineleNunesdaSilva.pdf>. Acesso em: 20 set 2017. Citado na página 41.

SOUZA, J. R. d. *Provébios & máximas: Colentânea de provébios, máximas, sentenças e aforismos em 7 idiomas.* [S.l.]: Rio de Janeiro: Lucena, 2001. Citado na página 44.

TRIVIÑOS, A. N. S. *Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação.* [S.l.]: Editora Atlas SA, 1987. Citado na página 44.

TYLER, R. *Princípios Básicos do Currículo e ensino.* [S.l.]: Trad. Leonel Vallandro, Porto Alegre: Editora Globo, 1974. Citado na página 34.

WIKIPÉDIA, C. da. József kürschák. *Wikipédia, a enciclopédia livre1*, 2013. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/J%C3%B3zsef_K%C3%BCrsch%C3%A1k>. Acesso em: 09 nov 2017. Citado na página 29.

Apêndices

APÊNDICE A – Quantidade de respostas por cidade no nível 1

Dados da Análise dos erros por cidades do subitem a) do nível 1

Código	**Categorias de respostas**	**Frequência**
A1	Faz corretamente a contagem dos pulos	70
A2	Faz contagem correta de ao menos um	168
A3	Não compreende o enunciado	190
A4	Erra ao fazer a contagem	166
A5	Contando cada casa como um pulo	30
	Branco no subitem a)	54
Total		678

Cidade	A1	A2	A3	A4	A5	Branco	Total
Alenquer	2	5	11	8		2	28
Almeirim		3		4		2	9
Altamira	11	8	6	8	2	2	37
Anapú	3		4		1		8
Aveiro	1	2		8			11
Belterra	2	6		3		1	12
Brasil Novo		3	5	1	1	1	11
Castelo dos Sonhos				4		1	5
Curuá		1		7		3	11
Faro	2			2			4
Itaituba	6	13	15			7	41
Jacareacanga	1	1		1		1	4
Juruti	3	9	17	15		6	50
Medicilândia	1	7		5			13
Mojuí dos Campos	2	2	2	5	1		12
Monte Alegre	2	15	17	5	3	3	45
Óbidos	2	15	9	9		2	37
Oriximiná	2	8	6	15		2	33
Pacajá	1	5	8	8	3		25
Placas	2	4	1	4		3	14
Porto de Moz				3		1	4
Prainha		4	10	9		4	27
Rurópolis	3	3	2	1	5		14
Santarém	18	40	64	32	13	12	179
Senador José P.	2	4	1				7
Terra Santa		3		7			10
Trairão	2	2	1				5
Uruará		2	6	1		1	10
Vitória do Xingu	2	3	5	1	1		12
Total	70	168	190	166	30	54	678

Dados da Análise dos erros por cidades do subitem b) do nível 1

Código	**Categorias de respostas**	**Frequência**
B1	Resposta errada sem raciocínio	413
B2	Inicia o raciocínio correto, não faz uso do MMC	85
B3	Serão apenas dois pulos	55
B4	Encontra a solução, mas não expressa o raciocínio	17
B5	Contagem separada, porém, errada	49
	Branco no subitem b)	59
Total		678

Cidade	B1	B2	B3	B4	B5	Branco	Total
Alenquer	16	3			5	4	28
Almeirim	6	1			1	1	9
Altamira	22	10	3			2	37
Anapú	4	3			1		8
Aveiro		2	4	4		1	11
Belterra	6	2	1		2	1	12
Brasil Novo		1		8		2	11
Castelo dos Sonhos	5						5
Curuá	5				3	3	11
Faro	1	2			1		4
Itaituba	24	7	5	1		4	41
Jacareacanga	2	1				1	4
Juruti	31	3	3		9	4	50
Medicilândia	11	1				1	13
Mojuí dos Campos	11		1				12
Monte Alegre	34	6	3			2	45
Óbidos	14	3	5		11	4	37
Oriximiná	16	4			7	6	33
Pacajá	20	2				3	25
Placas	10		2			2	14
Porto de Moz		2				2	4
Prainha	19		1		6	1	27
Rurópolis	4	3	4	2		1	14
Santarém	125	25	18	1		10	179
Senador José P.	6			1			7
Terra Santa	5	1	2		2		10
Trairão	5						5
Uruará	5	2	2			1	10
Vitória do Xingu	6	1	1		1	3	12
TOTAL	413	85	55	17	49	59	678

Dados da Análise dos erros por cidades do subitem c) do nível 1

Código	**Categorias de respostas**	**Frequência**
C1	Solução não expressa um pensamento	80
C2	Porque o número de pulos é diferente	141
C3	Porque os números de casas são diferentes	88
C4	Saíram em direções diferentes	32
C5	Reescreve o enunciado	13
C6	Aluno se baseia nos itens anteriores	124
C7	Porque as crianças não param de pular	115
C8	Não concorda com o enunciado	2
	Branco no subitem c)	83
Total		678

Cidade	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	Branco	Total
Alenquer		10			1	6	7		4	28
Almeirim		7				1			1	9
Altamira	2	9	4	4		7	5	1	5	37
Anapú	3	4							1	8
Aveiro	1	1	2			4	2		1	11
Belterra		5					5		2	12
Brasil Novo	1	1	4			2	1	1	1	11
Castelo dos Sonhos	1		1	2		1				5
Curuá		5					4		2	11
Faro		3					1			4
Itaituba	9	2	8			6	10		6	41
Jacareacanga			1	1					2	4
Juruti	7	10				16	10		7	50
Medicilândia	2		5			2			4	13
Mojuí dos Campos		1	8			2			1	12
Monte Alegre	9	6	5	2	1	5	11		6	45
Óbidos	1	13				10	6		7	37
Oriximiná	4	13				5	7		4	33
Pacajá	2	5	4			6	6		2	25
Placas	4	3	4			1			2	14
Porto de Moz	2	1							1	4
Prainha	4	8				7	7		1	27
Rurópolis	3	1	5	1		1	1		2	14
Santarém	19	22	32	19	8	38	27		14	179
Senador José P.		1	2		2	2				7
Terra Santa	1	1					2		6	10
Trairão	2	2							1	5
Uruará	2	4				2	2			10
Vitória do Xingu	1	3	3	3	1		1			12
Total	80	141	88	32	13	124	115	2	83	678

APÊNDICE B – Quantidade de respostas por cidade no nível 2

Código	Categorias de respostas do subitem a) no nível 2	Frequência
A1	Não compreende o conceito de múltiplo 34	34
A2	Em função de A e B 84	84
A3	Atribui valores para A e B, erra as operações 47	47
A4	Errada sem justificativa 218	218
A5	Algarismo com mais de um digito 93	93
A6	Algarismo Romanos 11	11
A7	Tenta fazer contas com as incógnitas 10	10
	Branco no subitem a 131	131
Total		628

Cidade	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Branco	Total
Alenquer		8	2	8	6			6	30
Almeirim		1	1	5	1	1		3	12
Altamira	3	4	2	13	2			15	39
Anapú	4			2			1	4	11
Aveiro		2	2	3			1	1	9
Belterra	1	3		5		1		1	11
Brasil Novo				2	3			4	9
Cachoeira da Serra				1				1	2
Castelo dos Sonhos				1	2				3
Curuá		3	2	2	3			2	12
Curuai				1	2			1	4
Faro		1	1	1					3
Itaituba	2		8	11	9			1	31
Jacareacanga		1		4			2		7
Juruti		5	4	17	3			12	41
Medicilândia				5				8	13
Mojuí dos Campos					5			3	8
Monte Alegre	11	10		9	4		3	5	42
Novo Progresso	1			1	6			3	11
Óbidos		8	2	12	11	1		3	37
Oriximiná		1	9	16		1	1	3	31
Pacajá	1	3	2	2	5			8	21
Placas				2	4			4	10
Porto de Moz							2	3	5
Prainha		3	3	16	2			5	29
Rurópolis				5		3		1	9
Santarém	9	29	4	57	22	4		25	150
Senador José P.	2			2	1			3	8
Terra Santa				8				1	9
Trairão		1	2					2	5
Uruará		1			2				3
Vitória do Xingú			3	7				3	13
TOTAL	34	84	47	218	93	11	10	131	628

Código	**Categorias de respostas do subitem b) no nível 2**	**Frequência**
B1	No item a) o aluno escolhe um valor para A e B, e aqui o repete	21
B2	Resposta errada sem justificativa	391
B3	Resposta em função de A e B	72
B4	Lista todos os algarismos	14
B5	Acertou ao menos um possível valor de B	12
B6	Algarismo com mais de um digito	11
	Branco no subitem b	107
Total		628

Cidade	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Branco	Total
Alenquer		20	5			1	4	30
Almerin		7	3				2	12
Altamira		20	2		4		13	39
Anapú	2	7					2	11
Aveiro		8					1	9
Belterra		10					1	11
Brasil Novo		6					3	9
Cachoeira da Serra		1	1					2
Castelo dos Sonhos				1	2			3
Curuá		5	4			1	2	12
Curuai		1		1	1		1	4
Faro		2	1					3
Itaituba		21	4	4			2	31
Jacareacanga	1	4	2					7
Juruti	2	25	7				7	41
Medicilândia		6	1	2			4	13
Mojuí dos Campos		4	3				1	8
Monte Alegre	4	27	5			1	5	42
Novo Progresso		6					5	11
Óbidos	1	32	3				1	37
Oriximiná	8	20	2				1	31
Pacajá		10	5				6	21
Placas		6					4	10
Porto de Moz				4			1	5
Prainha		22	3			2	2	29
Rurópolis	1	7					1	9
Santarém	1	90	19	2	4	6	28	150
Senador José P.		5					3	8
Terra Santa		8					1	9
Trairão	1						4	5
Uruará		1	2					3
Vitória do Xingú		10			1		2	13
Total	21	391	72	14	12	11	107	628

Código	**Categorias de respostas do subitem c)**	**Frequência**
C1	Atribuir valores, faz a multiplicação errada	8
C2	Resposta sem justificativa	420
C3	Resposta em função de A e B	64
C4	Tomou o maior dos algarismos e efetuou a multiplicação	3
C5	36 porque ele é múltiplo dele	6
C6	Discorda do enunciado	4
	Branco no subitem c	123
Total		628

Cidade	C1	C2	C3	C4	C5	C6	Branco	
Alenquer		21	6				3	30
Almeirim		8					4	12
Altamira		20	1	1			17	39
Anapú		7	1				3	11
Aveiro	1	7					1	9
Belterra		9					2	11
Brasil Novo		6					3	9
Cachoeira da Serra	1						1	2
Castelo dos Sonhos		3						3
Curuá		5	5				2	12
Curuai		2	1				1	4
Faro		1	2					3
Itaituba		22	7			1	1	31
Jacareacanga		4	1			1	1	7
Juruti		27	8				6	41
Medicilândia		5	2				6	13
Mojuí dos Campos		5	1				2	8
Monte Alegre	4	27		1	3		7	42
Novo Progresso		6	1				4	11
Óbidos		33	1				3	37
Oriximiná		26	5					31
Pacajá		14	1				6	21
Placas		6					4	10
Porto de Moz		2	1		1	1		5
Prainha		24					5	29
Rurópolis		7			1		1	9
Santarém	2	101	17	1			29	150
Senador José P.		5					3	8
Terra Santa		6	2				1	9
Trairão		2			1		2	5
Uruará		2	1					3
Vitória do Xingú		7				1	5	13
TOTAL	8	420	64	3	6	4	123	628

APÊNDICE C – Quantidade de respostas por cidade no nível 3

Código	Categorias de respostas do subitem a) no nível 3	Frequência
A1	Correto, resolve observando o padrão	73
A2	Correto, justifica que obteve o resultado pela média aritmética	11
A3	Consegue estabelecer o padrão, porém se perde na solução	56
A4	Acerta parte dos valores	50
A5	Errado sem justificativa	243
A6	Usa os conhecimentos de média, porém erra nas	3
A7	Faz contas, mas não consegue resolver	37
	Branco no subitem a)	31
Total		504

Cidade	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Branco	Total
Alenquer					3				3
Almeirim					4				4
Altamira	10			2	12		3	1	28
Anapú									0
Aveiro	1			10					11
Belterra	2	1					6		9
Brasil Novo							7		7
Castelo dos Sonhos	1		2				1		4
Curuá			3				7		10
Faro	2		1		2				5
Itaituba	1		1				8	2	12
Jacareacanga									0
Juruti			6		23			2	31
Medicilândia	2				9			2	13
Mojuí dos Campos					11			2	13
Monte Alegre		2	8		20	1		1	32
Novo Progresso	2		3		2			3	10
Óbidos	3		8		13	1	3	2	30
Oriximiná	7		6	3	27			3	46
Pacajá	1		1		12			2	16
Placas									0
Porto de Moz									0
Prainha			7		8			2	17
Rurópolis			2		2				4
Santarém	38	8	1	35	80	1	2	4	169
Senador José P.			1		2				3
Terra Santa	2		2		4			3	11
Trairão									0
Uruará	1		3		5			2	11
Vitória do Xingu			1		4				5
Total	73	11	56	50	243	3	37	31	504

Código	**Categorias de respostas no subitem b) no nível 3**	**Frequência**
B1	Aluno confundi o conceito de média com regra de três simples	10
B2	Faz contas com os valores	38
B3	Acerta, mas não justifica	39
B4	Preenche "todos" corretos, mas, esquece de encontrar valor para x	54
B5	Preenche corretamente, não utiliza a média aritmética	73
B6	Usa corretamente o conceito de média e encontra a solução	5
B7	Errado sem justificativa	136
B8	Tenta observar um padrão observando o exemplo, mais falha	50
	Branco no subitem b)	99
Total		504

Cidade	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	Branco	Total
Alenquer		1			2					3
Almeirim				1	1		1		1	4
Altamira		4	1	3	7	1		6	6	28
Anapú										0
Aveiro	1		4					5	1	11
Belterra		1			1	1	3	2	1	9
Brasil Novo		2	1				1	3		7
Castelo dos Sonhos					3			1		4
Curuá				2	2		4	1	1	10
Faro					1		3		1	5
Itaituba		2	1	2	1		2	3	1	12
Jacareacanga										0
Juruti				4	1		21		5	31
Medicilândia	1			1	2			6	3	13
Mojuí dos Campos			3				6		4	13
Monte Alegre	1	1	9					14	7	32
Novo Progresso		1	2				2	1	4	10
Óbidos		2			5	1	14		8	30
Oriximiná	2	9		13	9		1		12	46
Pacajá		2	3				10		1	16
Placas										0
Porto de Moz										0
Prainha				2	2		8		5	17
Rurópolis		1	1			1	1			4
Santarém	5	10	11	21	36	1	53	7	25	169
Senador José P.			1	1					1	3
Terra Santa				4			2		5	11
Trairão										0
Uruará		1	2				3		5	11
Vitória do Xingu		1					1	1	2	5
Total	10	38	39	54	73	5	136	50	99	504

Código	Categorias de respostas	Frequência
C1	O resultado se dar pelo fato de o quadriculado ser 3X3	124
C2	O resultado se dar pelo fato de alguns números serem primos	24
C3	Afirma que 9 é múltiplo de todo número real	110
C4	Aluno cria uma árvore de possibilidades com os algarismos	2
C5	Repete o que estar no enunciado do problema	80
C6	Discorda do enunciado	2
	Branco no subitem c)	162
Total		504

Cidade	C1	C2	C3	C4	C5	C6	Branco	Total
Alenquer	1		1				1	3
Almeirim	1		1				2	4
Altamira	4	1	8		6		9	28
Anapú								0
Aveiro	1		4		3		3	11
Belterra	4		2				3	9
Brasil Novo			2		1		4	7
Castelo dos Sonhos	1		2				1	4
Curuá			5				5	10
Faro	1				2		2	5
Itaituba	5	1			1		5	12
Jacareacanga								0
Juruti	7		7		9		8	31
Medicilândia	3		2		5		3	13
Mojuí dos Campos	1		7		1		4	13
Monte Alegre	5		9		6		12	32
Novo Progresso	3				1		6	10
Óbidos	5		6		5		14	30
Oriximiná	9		11		11		15	46
Pacajá	7		1		4		4	16
Placas								0
Porto de Moz								0
Prainha	3		3		2		9	17
Rurópolis	2				2			4
Santarém	51	21	36	2	19	2	38	169
Senador José P.	1						2	3
Terra Santa	4		1				6	11
Trairão								0
Uruará	4	1	2		2		2	11
Vitória do Xingú	1						4	5
Total	124	24	110	2	80	2	162	504

Anexos

ANEXO A – Ofício solicitando as provas da 2ª fase da 12ª OBMEP

Ofício 001/2016

À coordenação local da OBMEP
Coordenador: Professor Mario Tanaka Filho
Assunto: Solicitação das provas da 2ª fase da 12ªOBMEP

De: Mestrando do PROFMAT
Michael Machado de Moraes – Matricula: 2016203002

Saudações prezado coordenador, através deste venho respeitosamente solicitar as provas da 2ª fase da 12ª OBMEP realizada no dia 10 de setembro de 2016 no Oeste do Pará. As mesmas serão devolvidas a esta coordenação daqui há 1,5 anos (a partir da data deste documento). A justificativa para tal solicitação se dar em razão da minha dissertação de mestrado, cujo tema será "Análise de Erros em Problemas de Aritmética: Uma abordagem na 2ª fase da OBMEP no Oeste do Pará".

Ainda peço autorização para fazer uma análise nas respostas dos alunos, identificando os erros cometidos e registrando eventuais erros ao corpo da dissertação.

Sem mais para o momento, externo estima e apreço pelo trabalho desta coordenação.

Santarém, Pará, 21 de novembro de 2016

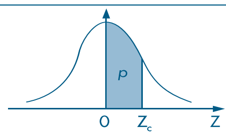
Michael Machado de Moraes
Mestrando do PROFMAT

ANEXO B – Tabelas de valores para intervalos e níveis de confiança

Tabela III — Distribuição Normal Padrão

$Z \sim N(0,\ 1)$

Corpo da tabela dá a probabilidade p, tal que $p = P(0 < Z < Z_c)$



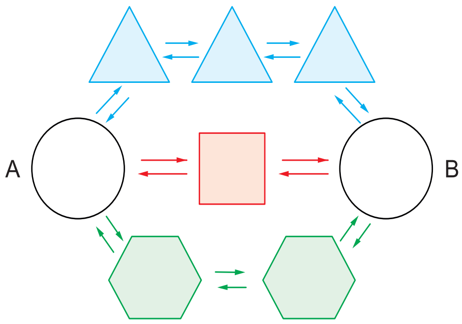
parte inteira e primeira decimal de Z_c	Segunda decimal de Z_c: 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	parte inteira e primeira decimal de Z_c
	p = 0										
0,0	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586	0,0
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535	0,1
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409	0,2
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173	0,3
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793	0,4
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240	0,5
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490	0,6
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524	0,7
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327	0,8
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891	0,9
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214	1,0
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298	1,1
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147	1,2
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774	1,3
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189	1,4
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408	1,5
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449	1,6
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327	1,7
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062	1,8
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670	1,9
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169	2,0
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574	2,1
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899	2,2
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158	2,3
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361	2,4
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520	2,5
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643	2,6
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736	2,7
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807	2,8
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861	2,9
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900	3,0
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929	3,1
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950	3,2
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965	3,3
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976	3,4
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983	3,5
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989	3,6
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992	3,7
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995	3,8
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997	3,9
4,0	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49998	49998	49998	49998	4,0
4,5	49999	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	4,5

ANEXO C – Solução do item 1

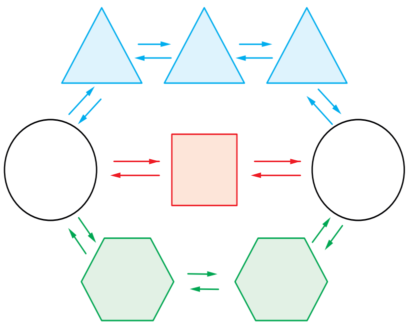
NÍVEL 1 *Respostas sem justificativa não serão consideradas*

12ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2016
Somando novos talentos para o Brasil

3. Na brincadeira do *vai e volta*, Xavier, Yara e Zezé começam juntos na casa A e pulam, simultaneamente, de casa em casa, indo de A para B ou voltando de B para A várias vezes. Xavier faz o caminho pelas casas triangulares, Yara pela casa quadrada e Zezé pelas casas hexagonais. Cada uma das crianças só retorna pelo caminho em que veio depois de chegar à casa A ou à casa B.



a) Em que casa cada uma das crianças estará após pular exatamente dez vezes?
Use a letra X para marcar a casa em que estará Xavier, a letra Y para marcar a casa em que estará Yara, e a letra Z para marcar a casa em que estará Zezé.



Correção Regional | Correção Nacional

b) Após iniciar a brincadeira, quantos pulos cada uma delas dará até se encontrarem novamente na casa A?

Correção Regional | Correção Nacional

c) Explique por que as crianças nunca se encontrarão na casa B.

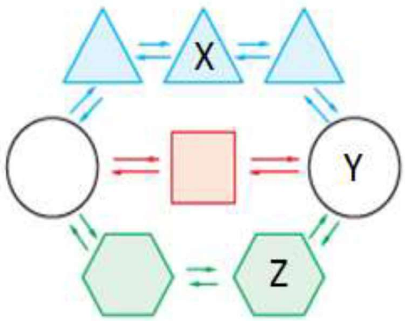
Correção Regional | Correção Nacional

TOTAL Correção Regional | Correção Nacional

N1Q3 – Solução

item a)

Basta acompanhar o movimento realizado pelas crianças até completarem 10 pulos. O resultado final é:



item b)

Xavier estará na casa A de 8 em 8 pulos, Yara estará em A de 4 em 4 pulos e Zezé estará em A de 6 em 6 pulos. Como o mínimo múltiplo comum de 4, 6 e 8 é 24, após 24 pulos os três estarão em A pela primeira vez após o início da brincadeira.

item c)

Vamos analisar os possíveis encontros em B.

Xavier estará em B após 4 pulos, em seguida, após o 12.º pulo, depois após o 20.º pulo e assim por diante, isto é, de 8 em 8 pulos após os primeiros 4 pulos. Ou seja, Xavier estará na casa B imediatamente após (4 + múltiplos de 8) pulos.

Yara estará em B após realizar os pulos 2, 6, 10, etc., isto é, de 4 em 4 pulos após os dois primeiros. Assim, Yara estará na casa B imediatamente após (2 + múltiplos de 4) pulos.

Zezé estará em B imediatamente após os pulos 3, 9, 15, ..., isto é, de 6 em 6 pulos após os 3 primeiros pulos, ou seja, após (3 + múltiplos de 6) pulos.

Assim, eles nunca se encontrarão em B, pois Xavier e Yara estarão na casa B após um número par de pulos, enquanto Zezé estará em B após um número ímpar de pulos.

Na verdade a argumentação acima mostra que Xavier e Yara, Xavier e Zezé ou Yara e Zezé nunca se encontrarão na casa B, quanto mais os três.

ANEXO D – Solução do item 2

12ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2016
Somando novos talentos para o Brasil

Respostas sem justificativa não serão consideradas

NÍVEL 2

4. Na figura, as letras A e B representam os possíveis algarismos que tornam o produto dos números 2A5 e 13B um múltiplo de 36.

a) Em todos os possíveis resultados para o produto desses números, o algarismo das unidades é o mesmo. Qual é esse algarismo?

Correção Regional | Correção Nacional

b) Quais são os possíveis valores de B?

Correção Regional | Correção Nacional

c) Qual é o maior valor possível para esse produto?

Correção Regional | Correção Nacional

TOTAL Correção Regional | Correção Nacional

N2Q4 – Solução

item a)

Como o algarismo das unidades do número 2A5 é 5, os possíveis algarismos das unidades para o produto dos números 2A5 e 13B é 0 ou 5. Como esse produto é múltiplo de 36, que é par, o produto também é par. Logo, seu último algarismo não pode ser 5, logo, é 0.

item b)

Como 2A5 é ímpar e o produto dos números 2A5 e 13B é par, segue que 13B deve ser par; porém, como o produto também é múltiplo de 4 (já que é múltiplo de 36), e como o fator 2A5 não é múltiplo de 4, segue que o fator 13B tem de ser um múltiplo de 4, isto é, o número 3B tem de ser múltiplo de 4. Logo, as únicas possibilidades para B são os algarismos 2 ou 6, já que 30, 34 e 38 não são divisíveis por 4.

item c)

De acordo com o item b), devemos analisar o que ocorre em dois casos: quando B = 2 ou quando B = 6.

Se B é o algarismo 2, 13B = 132, que é múltiplo de 2, 3 e 4, mas não é múltiplo de 9. Logo, o produto de 2A5 e 132 também é múltiplo de 2, 3 e 4, e, para ser múltiplo de 9, o fator 2A5 tem de ser um múltiplo de 3. Logo, pelo critério de divisibilidade por 3, o algarismo A tem de ser tal que a soma 2 + A + 5 seja múltiplo de 3. Temos então as possibilidades 2, 5 e 8 para o algarismo A.

Se B é o algarismo 6, 13B = 136, que é múltiplo de 2 e 4, mas não é múltiplo de 3 nem de 9. Logo, o produto de 2A5 e 136 também é múltiplo de 2 e 4, e, para ser múltiplo de 3 e 9, o fator 2A5 tem de ser múltiplo de 9. Logo, o algarismo A tem de ser tal que a soma 2 + A + 5 seja um múltiplo de 9. Neste caso, temos somente a possibilidade de A ser o algarismo 2.

Resumindo, todas as possibilidades para o produto dos números 2A5 e 13B ser um múltiplo de 36 são:

- 225 x 132 = 29700
- 255 x 132 = 33660
- 285 x 132 = 37620
- 225 x 136 = 30600

O maior desses números é 37620.

Outra solução:

Uma vez que B = 6 ou B = 2, podemos obter o maior valor possível de 2A5 x 13B, testando os valores de A, do maior para o menor.

Se A = 9 e B = 6, 295 x 136 = 40120 não é múltiplo de 36.

Se A = 9 e B = 2, 295 x 132 = 38940 não é múltiplo de 36.

Se A = 8 e B = 6, 285 x 136 = 38760 não é múltiplo de 36.

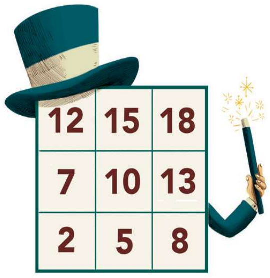
Se A = 8 e B = 2, 285 x 132 = 37620 é múltiplo de 36 e, portanto, esse é o maior valor possível para o produto.

ANEXO E – Solução do item 3

NÍVEL 3 *Respostas sem justificativa não serão consideradas*

12ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS OBMEP 2016
Somando novos talentos para o Brasil

1. Um quadriculado 3x3 preenchido com números inteiros é chamado de ***medimágico*** quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.



a) Preencha o quadriculado abaixo para que ele seja medimágico.

3		19
8		

Correção Regional | Correção Nacional

b) O quadriculado medimágico abaixo tem os números 7, 9 e 20 nas posições indicadas. Qual é o valor de x?

	7	
9	x	
		20

Correção Regional | Correção Nacional

c) Explique por que, em qualquer quadriculado medimágico, a soma de todos os números é um múltiplo de 9.

Correção Regional | Correção Nacional

TOTAL Correção Regional | Correção Nacional

SOLUÇÕES OBMEP 2ª. FASE 2016 NÍVEL 3

N3Q1 – Solução

item a)

Para facilitar, colocamos letras nas casas vazias:

3	a	19
8	c	d
b	e	f

O número a deve ser a média dos números 3 e 19:

$$a = \frac{3+19}{2} = 11$$

3	11	19
8	c	d
13	e	f

O número 8 deve ser a média entre 3 e b, ou seja,

$$8 = \frac{3+b}{2}$$

Logo, b = 13.

O número c deve ser a média entre 19 e 13: $c = \frac{19+13}{2} = 16$

Analogamente,

$$\begin{cases} \frac{d+8}{2} = 16 \Rightarrow d + 8 = 32 \Rightarrow d = 24 \\ \frac{e+11}{2} = 16 \Rightarrow e + 11 = 32 \Rightarrow e = 21 \\ \frac{f+3}{2} = 16 \Rightarrow f + 3 = 32 \Rightarrow f = 29 \end{cases}$$

Portanto, o preenchimento final do quadriculado medimágico é:

3	11	19
8	16	24
13	21	29

item b)

Primeiramente, colocamos letras nas casas vazias, de acordo com a figura abaixo:

Calculando as médias, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{y+20}{2} = x \Rightarrow y + 20 = 2x \Rightarrow y = 2x - 20 \\ \frac{z+7}{2} = x \Rightarrow z + 7 = 2x \Rightarrow z = 2x - 7 \\ \frac{w+9}{2} = x \Rightarrow w + 9 = 2x \Rightarrow w = 2x - 9 \end{cases}$$

y	7	v
9	x	w
t	z	20

Isso nos permite também calcular v e t em função de x:

$$\begin{cases} \frac{v+20}{2} = 2x - 9 \Rightarrow v + 20 = 4x - 18 \Rightarrow v = 4x - 38 \\ \\ \frac{t+2x-20}{2} = 9 \Rightarrow t + 2x - 20 = 18 \Rightarrow t = 38 - 2x \end{cases}$$

2x-20	7	4x-38
9	x	2x-9
38-2x	2x-7	20

Segue, da terceira linha do quadriculado acima, que:

$$\frac{38 - 2x + 20}{2} = 2x - 7 \Rightarrow 58 - 2x = 4x - 14 \Rightarrow 72 = 6x \Rightarrow x = 12$$

Utilizando esse valor encontrado de *x*, os outros valores podem ser facilmente calculados e o preenchimento final do quadriculado medimágico, nesse caso, é:

4	7	10
9	12	15
14	17	20

item c)

Consideremos agora um quadrado medimágico qualquer, como o da figura abaixo

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$\Rightarrow \begin{cases} a + i = 2e \\ b + h = 2e \\ c + g = 2e \\ d + f = 2e \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c + d + e + f + g + h + i = 2e + 2e + 2e + 2e + e = 9e$$

Como o número representado pela letra e é um número inteiro, a soma de todos é múltipla de 9.

Conclusão: em qualquer quadriculado medimágico a soma de todos os seus números é igual a 9 vezes o termo central.