UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ – UFOPA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

SILVINHO CAMPOS AMORIM

ESTUDO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS BÁSICAS PELOS MÉTODOS TRADICIONAL E DINÂMICO NO 8^0 ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

SANTARÉM – PA
2015

SILVINHO CAMPOS AMORIM

ESTUDO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS BÁSICAS PELOS MÉTODOS TRADICIONAL E DINÂMICO NO 8^0 ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Matemática em Rede Nacional – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA, Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sebastian Mancuso.

SANTARÉM – PA
2015

SILVINHO CAMPOS AMORIM

ESTUDO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS BÁSICAS PELOS MÉTODOS TRADICIONAL E DINÂMICO NO 8^0 ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação Matemática em Rede Nacional – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA, Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

____
Prof. Dr.
Banca Avaliadora – UFOPA

____
Prof. Dr.
Banca Avaliadora – UFOPA

____
Prof. Dr. Sebastian Mancuso
Orientador – UFOPA

SANTARÉM – PA
2015

DEDICATÓRIA

Esta dissertação é dedicada a professores, alunos, diretores e a todos que tive a oportunidade de me relacionar nesse período de militância e formação na minha vida discente e docente.

AGRADECIMENTOS

A Deus.

Ao Professor Doutor Sebastian Mancuso, orientador desta dissertação, por ter confiado em nossa capacidade de desenvolver este trabalho.

Aos meus pais, esposa e filhos.

Aos companheiros do curso de Mestrado Profmat (turma 2012).

A todos os amigos residentes em Itaituba e em Santarém que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta etapa da minha formação acadêmica.

Em especial, ao Professor Itamar Santos de Araújo, ao professor Sérgio Silva de Sousa, ao senhor Deusley Aguiar de Sousa e à senhora Joaquina Aguiar de Sousa (Quinora).

RESUMO

Introdução: O ensino da Matemática, apesar de ainda apresentar-se nos moldes do ensino tradicional, já se percebe que ele vem deixando de ser visto e tido como aquele que apenas reprova, que faz o aluno evadir-se da escola por causa dele. Esta pesquisa abordou sobre estudo das construções geométricas básicas pelos métodos tradicional e dinâmico no 8º. Ano do Ensino Fundamental. Trata- se de uma pesquisa de natureza altamente bibliográfica. **Objetivo:** O objetivo deste estudo foi apresentar algumas atividades didático-metodológicas permitidas pelo auxílio do software Geogebra e de forma tradicional em função do processo de ensino-aprendizagem da Geometria Euclidiana, com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. **Resultados**: A pesquisa revelou que a geometria dinâmica é capaz de ampliar o gosto do aluno pelo conhecimento, ajudando-o na compreensão da ideia de que a matemática deve estar contemplada em todos os lugares, nas mais variadas formas e em todas as suas dimensões. **Conclusão**: O estudo mostrou que é possível organizar momentos que contemplem diferentes ferramentas e metodologias para o ensino de geometria no espaço escolar e que colaborem no efetivo aprendizado e desenvoltura dos alunos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Geometria Tradicional e Dinâmica. 8º. Ano do Ensino Fundamental.

ABSTRACT

Introduction: The teaching of mathematics, although still present in the mold of traditional education, already realizes that he has left to be seen and considered only one who reproves, which makes the student evade school because of it. This study addressed on study of basic geometric constructions by traditional and dynamic methods in the 8th. Year of elementary school. Treatment is a highly nature research literature**. Objective:** The aim of this study was to present some didactic-methodological activities permitted by the help of Geogebra software and traditional way due to the process of teaching and learning of Euclidean geometry, with 8th graders of elementary school. **Results:** The survey revealed that the dynamic geometry is able to expand like the student the knowledge, helping him to understand the idea that mathematics should be contemplated everywhere, in many forms and in all its dimensions. **Conclusion:** The study showed that it is possible to organize moments that include different tools and methodologies for teaching geometry at school and to collaborate in the effective learning and resourcefulness of the students.

Keywords: Teaching of Mathematics. Traditional and Dynamic Geometry. 8. Year of elementary school.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nessa nova era, o ensino da Matemática, apesar de ainda apresentar-se nos moldes do ensino tradicional, já se percebe que ele vem deixando de ser visto e tido como aquele que apenas reprova, que faz o aluno evadir-se da escola por causa dele e, principalmente, por causar traumas ao ensino-aprendizagem nessa esfera que envolve cálculos, raciocínios lógicos e coerentes no ambiente de sala de aula. Isso está sendo visto de outra maneira porque os educadores contam, hoje, com diversos softwares educacionais disponíveis no mercado, possibilitando o enriquecimento de suas aulas e tornando-as mais dinâmicas e atrativas.

A falta de motivação e interesse dos alunos pela Matemática é um dos principais problemas que fazem com que o rendimento escolar nessa disciplina seja desastroso nos três níveis de ensino. Isto ocorre porque, na maioria das vezes, as aulas são monótonas, sem relações com o cotidiano do aluno nem com outras áreas do conhecimento, e nada desafiadoras. Conforme Dante (1991), um dos principais objetivos do ensino da Matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar-lhe situações-problema que o envolvem, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las.

Na realidade prática de sala de aula, a posição do professor nesse ambiente educativo é mostrar aos alunos que a disciplina de Matemática é uma ciência repleta de maravilhas e curiosidades que ajuda as pessoas a observar e entender melhor o mundo no qual se vive. Além disso, é interessante fazer com que o aluno descubra que a Matemática fez, faz e sempre fará parte da vida de todas as civilizações, uma vez que praticamente tudo o que se toca ou se vê está relacionado, de uma forma ou de outra, com ela.

No ensino da Matemática, é possível observar que a maioria dos alunos apresenta reações distintas, às vezes raciocínios estranhos e pensamentos contraditórios. Mas, quando abordada de forma adequada, essa disciplina passa a ser de grande valia para o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, do jeito de pensar para que ele possa tomar decisões acertadas. Daí surgirem as dificuldades do professor apresentar atividades que prendam a atenção dos alunos na sala de aula, principalmente quando se trata da disciplina matemática, que é considerada pela maioria muito difícil.

Nesse sentido, a proposta maior deste estudo é apresentar algumas atividades didático-metodológicas permitidas pelo auxílio do software Geogebra e de forma tradicional em função do processo de ensino-aprendizagem da Geometria Euclidiana, com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Especificamente, o estudo desenvolve um trabalho colocando em pauta o desenho geométrico, as esferas da geometria e o *Software* Geogebra; apresenta a construção de conceitos e construções geométricas utilizando o método tradicional (régua e compasso) e o método dinâmico (software Geogebra); evidencia os materiais e métodos utilizados na pesquisa e, finalmente, coloca em evidência uma proposta motivadora para o ensino da geometria dinâmica levando em consideração a realidade do aluno.

Buscando diminuir uma série de dificuldades enfrentadas pelo aluno do 8º. Ano do Ensino Fundamental, este trabalho apresenta algumas atividades utilizando as construções geométricas de maneira tradicional (usando régua e compasso) e a forma dinâmica através do uso do software Geogebra, buscando com isso uma maior interação entre alunos e conteúdos, para que na prática de sala de aula, esses alunos possam dialogar com as suas próprias experiências.

Para isso, a pesquisa foi dividida em 04 (quatro) capítulos, sendo que o primeiro apresenta referenciais teóricos voltados para o conjunto da geometria; o segundo mostra a construção de conceitos relacionada à geometria tradicional e ao *software* Geogebra; o terceiro coloca em pauta os materiais e métodos que fizeram parte do estudo, e o quarto capítulo propõe ações motivadoras para o ensino da geometria dinâmica no 8º. Ano do Ensino Fundamental na própria esfera da Matemática.

CAPÍTULO I

REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo tem como proposta adentrar na esfera da geometria evidenciando que, assim como a matemática, ela foi inventada há muitos anos atrás em função de necessidades sociais e sua relevância ganhou destaque em várias obras de autores inteirados no assunto. Nesse aspecto, Boyer (1996, p. 4) diz que “Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria possuía raízes mais antigas”. E ainda segundo D’Ambrósio (1996, p. 41) modelos geométricos eram utilizados “para construções de igrejas, que deram origem ao gótico, e para a pintura religiosa...”. Para isso, a geometria é um ramo da matemática que se apresenta de diversas formas, e que cotidianamente pode ser visualizada em diversos lugares e objetos.

1.1 ORIGEM DO DESENHO GEOMÉTRICO

Como linguagem de comunicação e expressão, a arte do desenho antecede em muito a da escrita. O que é a escrita se não a combinação de pequenos símbolos desenhados? Através de gravuras traçadas nas paredes das cavernas, o homem pré-histórico registrou fatos relacionados com o seu cotidiano, deixando indicadores importantes para os pesquisadores modernos estudarem os ancestrais de nossa espécie. Enfim, arte do desenho é algo inerente ao homem. Não se sabe quando, ou onde, alguém formulou pela primeira vez, em forma de desenho, um problema que pretendia resolver – talvez tivesse sido um “projeto” de moradia ou templo, ou algo semelhante.

Mas esse passo representou um avanço fundamental na capacidade de raciocínio abstrato, pois esse desenho representava algo que ainda não existia que ainda viria a concretizar-se. Essa ferramenta, gradativamente aprimorada, foi muito importante para o desenvolvimento de civilizações, como a dos **babilônios** e a dos **egípcios,** as quais, como sabemos, realizaram verdadeiras façanhas arquitetônicas (BOYER, 1996).

Porém, outra civilização, que não hesitava em absorver elementos de outra cultura, aprendeu depressa como passar a frente de seus predecessores; em tudo que tocavam, davam mais vida. Eram os **gregos.** Em todas as áreas do pensamento humano em que se propuseram a trabalhar realizaram feitos que marcaram definitivamente a história da humanidade. A partir disso, é importante ressaltar que o desenho geométrico, em pleno século XXI, vem refletindo expressivamente na prática educativa, estando atrelado à vida cotidiana das pessoas que convivem com ele, muitas vezes sem saber.

1.2 RELATO SOBRE GEOMETRIA

A palavra "geometria" vem do grego geometrein (geo, "terra", e metrein, "medida"); originalmente geometria era a ciência de medição da terra. O historiador Herodotus (século 5 a.C.), credita ao povo egípcio pelo início do estudo da geometria, porém outras civilizações antigas (babilônios, hindu e chineses) também possuíam muito conhecimento da geometria. Os Elementos de Euclides é um tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escrito pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C. Os 4 primeiros livros, que hoje pode ser pensando como capítulos, tratam da Geometria Plana conhecida da época, enquanto os demais tratam da teoria dos números, dos incomensuráveis e da geometria espacial.

A ***geometria euclidiana*** ocupa-se do estudo das formas e das ligações algébricas conectadas a elas. A *geometria euclidiana (plana)* fundamenta-se na ideia intuitiva de ponto, sendo que a partir dele formam-se as ideias de retas e planos. As retas e os planos nada mais são que um conjunto de pontos, sem limitar-se a um fim, ou seja, são infinitos em ambas as direções.

Dentro do contexto da *geometria plana*, estudam-se as formas geométricas planas tais como quadrado, triângulo, retângulo, losango, círculo, trapézio, paralelogramo, ou seja, polígonos regulares e irregulares, todas as suas propriedades e todas as relações existentes entre eles. Construções geométricas são à base da evolução humana. Podem-se observá-las nas ruas, nas residências, nas plantas de casas etc.

Na verdade, as construções geométricas são as ferramentas de diversos profissionais, tais como o pedreiro, o arquiteto, o engenheiro, o marceneiro e tantos outros indivíduos que se utilizam da geometria plana para realizar os seus trabalhos no cotidiano. Sendo assim, pode-se afirmar a importância sem igual do trabalho não só de Euclides, mas de todos os matemáticos que, ao longo do tempo, foram descobrindo e aperfeiçoando esses elementos da matemática tão úteis à vida das pessoas.

1.3 RELATO SOBRE A GEOMETRIA TRADICIONAL

Sabe-se que nesse novo século ainda é bastante expressivo o nível de insatisfação com o aprendizado de Matemática e, em particular, com o aprendizado da Geometria. Neste caso, observa-se que os próprios alunos sentem-se insatisfeitos pelo pouco conhecimento que possuem à respeito evidenciado, por exemplo, nos concursos que precisam realizar. O ensino tradicional apresenta a geometria somente através de modelos prontos, sem a preocupação de proporcionar, ao aluno, um momento em que ele construa o seu próprio conhecimento para a efetivação de um ensino-aprendizagem diferenciado e de qualidade.

Segundo Freire (1996), esse modelo é chamado de "ensino bancário" onde os conhecimentos são transmitidos aos alunos de cima para baixo. A geometria permite o uso de muitas metodologias para o seu ensino, seja através do uso de tecnologias, cujo Software Geogebra é um exemplo bem prático, o uso de jogos, oficinas com materiais manipuláveis, entre outros.

Um ponto interessante, e bastante curioso, é que o uso de materiais concretos no ensino da geometria permite que, através da manipulação de objetos, o aluno vá compreendendo e fixando os conceitos e construindo o seu conhecimento. Esta construção está diretamente ligada ao que Oliveira (1997) chama de processo de internalização, ou seja, é a construção de um conhecimento de fora pra dentro que, quando internalizado, torna-se "apreendido" pelo aluno de forma a utilizar esse conhecimento como se fosse produzido por ele e não apreendido por meio da explicação do professor e dos símbolos utilizados como ferramentas.

Outro ponto importante a ser evidenciado é que a dificuldade no aprendizado da Matemática reside, principalmente, na sua forma tradicional de ensino, e o ensino da Geometria está inserido nesse contexto, dissociado da realidade do cotidiano de seus alunos. Assim, a aprendizagem é obtida através da reprodução do exposto e, dessa forma, o aluno demonstra que aprendeu o conteúdo se puder reproduzi-lo corretamente.

Esse ensino tradicional, que envolve também a geometria, é bastante questionado ainda neste novo século, já que se vive uma era de grandes avanços, seja no campo da neurociência, da programação neurolinguística ou de paradigmas educacionais. Isto gerou revolucionários métodos de ensino enquanto prática educativa. Tal questionamento diz respeito ao conhecimento assimilado onde o aprendizado é medido, em grande parte, pela capacidade de reproduzir corretamente o que foi ensinado e não está associado necessariamente à sua compreensão. Isto pode ser inferido nas avaliações efetivadas que se preocupam simplesmente com a reprodução mecânica.

Aqui se reforça a necessidade de realçar e discutir propostas e alternativas a esta forma tradicional de ensino de Matemática, pois sua prática concebida no âmbito desse modelo formal ainda é uma das principais causas das dificuldades do aluno aprender Matemática, em pleno século XXI, em especial alunos das séries iniciais e do Ensino Fundamental. Esse tipo de ensino se torna muito difícil para os alunos desses níveis de ensino, porque se apresenta desprovido de significados; não tem uma relação direta e significativa com a sua prática cotidiana, desvinculando-se da construção do conhecimento que, na realidade, deveria ser produzida pelo próprio aluno desse novo século.

1.4 RELATO SOBRE A GEOMETRIA DINÂMICA

Quando se fala de geometria dinâmica, torna-se bastante curioso e de suma relevância para o foco deste estudo, porque se começa a sair dos moldes tradicionais e passa-se a infiltrar-se em outra forma de ensino e de aprendizagem como exigência desse novo século que se está vivenciando. Sabe-se que com a evolução das tecnologias, da informática e dos novos conceitos no ensino da geometria, surgem oportunidades e possibilidades de empregar outros recursos tecnológicos para o ensino, motivando ainda mais os alunos e propiciando uma melhora no processo de ensino-aprendizagem.

Diante dessas oportunidades e possibilidades, já vem sendo muito usado na área da Matemática, há alguns anos, um novo termo com propostas inovadoras: a ***Geometria Dinâmica.*** Esse tipo de geometria vem sendo visto e tido como uma nova proposta dentro do ensino da Matemática, no sentido de explorar os mesmos conceitos da geometria clássica, porém, através de um *software* interativo.

Para Bellemain (2001), a Geometria Dinâmica nasceu em meados da penúltima década do século XX com a problemática da implementação da geometria no computador, sofrendo grande influência das técnicas de modelagem e representação da informática. Nesse aspecto, ela originou-se da necessidade de definir, aproveitando as potencialidades do computador, um novo sistema de representação dos objetos da geometria. Para esse autor, a Geometria Dinâmica permite uma aproximação das propriedades perceptivas dessas representações das propriedades formais dos objetos representados.

Nesse sentido, as representações gráficas das figuras geométricas são criados pelo usuário e, a partir delas, construções com régua e compasso eletrônicos são realizados. Isso é de suma importância porque esses elementos podem ser manipulados com precisão, deslocando-se na tela e trazendo atrelados a si os elementos construídos a partir deles, ou seja, não alterando a posição relativa entre os mesmos. Nessa mudança automática de posição está o dinamismo, cuja grande vantagem é preservar as relações entre os elementos da figura. Por isso, é no dinamismo que está a chave da *Geometria Dinâmica.*

A característica dinâmica aparece pela possibilidade de se passar de um desenho a outro pelo deslocamento quase continuo dos objetos livres. Com o dinamismo, as propriedades geométricas da figura aparecem como propriedades mecânicas dos desenhos. A percepção age sobre as características dinâmicas dos desenhos geométricos.

O nome “Geometria Dinâmica” (GD) hoje é largamente utilizado para especificar a Geometria implementada em computador, a qual permite que objetos sejam movidos mantendo-se todos os vínculos estabelecidos inicialmente na construção. Este nome pode ser mais bem entendido como oposição à geometria tradicional de régua e compasso, que é “estática”, pois após o aluno realizar uma construção, se ele desejar analisá-la com alguns dos objetos em outra disposição terá que construir um novo desenho (ISOTANI, 2005).

“O dinamismo é obtido através de manipulação direta sobre as representações que se apresentam na tela do computador”. Por exemplo: em geometria são os elementos de um desenho que são manipuláveis; no estudo de funções são objetos manipuláveis que descrevem relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis” (GRAVINA & SANTAROSA, 1998).

Observa-se pelas definições que o consenso e a possibilidade de movimentação dos entes matemáticos sem que estes percam suas propriedades, facilitando desta forma a possibilidade de analise de situações antes nem imagináveis, apenas fazendo o uso de régua e compasso. Dentre os muitos softwares de geometria dinâmica daremos ênfase ao Geogebra.

1.5 *SOFTWARE* GEOGEBRA EM SUAS DIMENSÕES

Quando se trata de uso de recursos tecnológicos digitais no ambiente escolar, em pleno século XXI, constitui uma linha de ação que precisa de fortalecimentos na medida em que existe uma considerável distância entre os grandes avanços tecnológicos na produção de softwares educacionais livres ou proprietários e a aceitação, compreensão e utilização desses recursos na prática educativa. Com isso, o professor de matemática precisa envolver o uso de métodos que são relevantes para o processo de ensino-aprendizagem, na estruturação do indivíduo como profissional do ensino.

O uso de métodos inovadores deve ser considerado prioridade do professor consciente de sua realidade prática de sala de aula. Diante dessa realidade, professor e aluno são os protagonistas quando se envolve o GeoGebra no ensino da geometria. Isto reforça a ideia de que esta tecnologia, deve estar presente em todas as escolas da rede pública de ensino, bastando apenas os professores façam uso dela de forma precisa, adequada e dinâmica, para aproximar o aluno de um aprendizado diferenciado e de qualidade.

Sabe-se que o software GeoGebra é um programa gratuito e de fácil instalação, e no estudo da geometria dinâmica, esse recurso digital deve ser utilizado pelo professor de Matemática com maior significado, no sentido de organizar as suas atividades para que o processo de ensino-aprendizagem se efetive com a maior qualidade possível. E o professor deve estar sempre em sintonia com o que está ensinando aos seus alunos, fazendo do GeoGebra uma ferramenta que proporcione grandes descobertas e questionamentos, em detrimento de conteúdos e conhecimentos adquiridos. Por isso, Freire (1998, p. 25) diz que:

> Ensinar não é transferir conhecimentos, conteúdos, nem formar a ação pela qual um sujeito criador da forma, estilo ou alma a um corpo indeciso e acomodado. Não há docência sem discência, as duas se explicam e seus sujeitos, apesar das diferenças que os conotam, não reduzem a condição de objetos, um do outro. Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender. Ensinar é criar possibilidades para a produção do conhecimento.

Com base nesse pressuposto de Freire (1998), toca-se nas dificuldades enfrentadas pelo professor na sua prática de sala de aula. Isso é possível e mais viável se o professor se utilizar do GeoGebra como uma metodologia diferenciada e o uso de uma ferramenta em que o aluno possa ter a liberdade de ver a Matemática em pleno movimento, garantindo com isso a possibilidade de perceber a importância e a essência dessa disciplina. Por isso, Antunes (2000, p.14) assegura que:

> Em um mundo que ameaça massificar-se, é preciso descobrir técnicas de ensino que desenvolvam a criatividade individual e estimulem o convívio social, preparando para a vida e que tornem o ato mais prazeroso e participativo, nas quais o aluno de simplesmente assistir à aula.

Diante dessa descoberta, entende-se que falta ao professor nas suas aulas de Matemática é descobrir maneiras e utilizar mecanismos inovadores para prender a atenção do aluno para o ensino-aprendizagem com significado. Isso é possível na medida em que o professor passa a fazer uso do software GeoGebra no estudo dos conteúdos programáticos recomendados para as turmas do 8º. Ano do Ensino Fundamental, para que eles possam construir os seus próprios conhecimentos.

Nessa construção de conhecimentos, Almeida (1996, p. 162) afirma que:

> O professor tem um importante papel como agente promotor do processo de aprendizagem do aluno, que constrói o conhecimento num ambiente que o desafia e o motiva, para a exploração, a reflexão, a depuração de ideias e a descoberta de novos conceitos.

Dessa forma, o uso das tecnologias para o aprendizado de Matemática leva o professor a acreditar que o software torna-se um fator de suma relevância para um aprendizado de qualidade. Além disso, a utilização de programas oferece um leque de possibilidades para a exploração de conceitos e ideias matemáticas e, principalmente, para a construção de verdadeiros conhecimentos voltados para a geometria.

CAPÍTULO II

CONSTRUINDO CONCEITOS: GEOMETRIA TRADICIONAL E DINÂMICA

2.1 BREVE ESTUDO DA GEOMETRIA PLANA E CONSTRUÇÕES PELO MÉTODO TRADICIONAL

Neste capítulo, serão exibidos alguns conceitos, definições, postulados e teoremas os quais fundamentaram os passos possíveis utilizados na construção por régua e compasso.

As construções geométricas utilizando uma régua não graduada e um compasso devem seguir algumas regras básicas:

Conhecendo-se dois pontos distintos, é possível traçar uma reta utilizando a régua. Com o compasso, é possível traçar uma circunferência com centro em um ponto conhecido e que passa por um segundo ponto determinado. É permitido obter pontos que podem ser construídos através de uma sequência finita de operações: intersecções de retas, intersecções de circunferências e intersecções diretas com circunferências. Com esses pontos obtidos, podemos traçar novas retas e novas circunferências e assim sucessivamente.

A construção com estes instrumentos tem sido a marca registrada da Geometria desde o aparecimento dos elementos de Euclides em torno de 300 a.C.

Os matemáticos da Grécia Antiga já tinham um grande interesse por estas construções, o traçado de construções era conhecido como um jogo, que tinha suas regras, e era considerado como um dos jogos mais fascinantes e absorventes daquela época. Com o uso da régua e compasso, os gregos realizaram uma grande quantidade de construções geométricas e solucionaram diversos problemas geométricos, tais como: construção de retas paralelas a uma reta dada, a bissecção de um ângulo, a bissecção de um segmento, a construção de circunferência e arco, a construção de uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado, entre outras.

Apesar da resolução de diversos problemas geométricos.

2.1.1 O conceito do Lugar geométrico: LG

Definição

Uma figura é denominada **lugar geométrico** dos pontos que possuem uma propriedade φ quando, e somente quando:

- **Todos os pontos** dessa figura possuem a propriedade φ;
- **Somente os pontos** dessa figura possuem a propriedade φ.

2.1.2 Circunferência: LG 1

Definição

Dado um ponto **P** e um número real positivo **r** chama-se circunferência de centro em **P** e raio **r** ao lugar geométrico dos pontos do plano que estão à distância **r** de **P**.

2.1.3 Mediatriz: LG 2

Conceito

Dado um segmento $\overline{AB}$, você é capaz de imaginar um ponto P cuja distância até A seja igual à distância até B, isto é, PA = PB?

É claro que sim! Basta pensar num triângulo isósceles PAB, onde é a base.

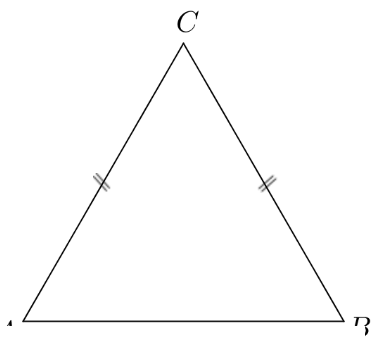


Fig. 1: Triângulo Isósceles

Quando um ponto P está à **igual distância** de dois pontos A e B, dizemos que P é **equidistante** de A e B.

Dados dois pontos A e B, quantos pontos equidistantes de A e B você e capaz de imaginar? Muitos?

Sim, são muitos. Na realidade, são **infinitos** os pontos que equidista de A e B.

Basta imaginar uma infinidade de triângulos isósceles construídos sobre a base. Todo vértice P, de um desses triângulos PAB, é um ponto equidistante de A e B:

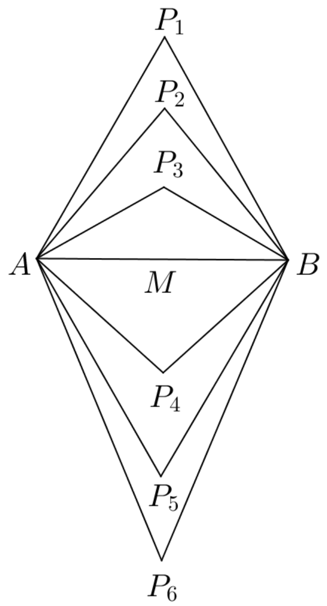


Fig. 2 Mediatriz 2

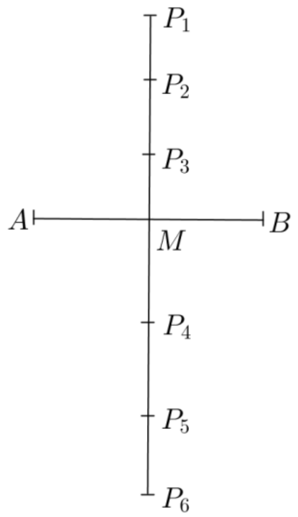


Fig. 3 Mediatriz 3

A importante propriedade de todos os infinitos pontos equidistante de A e B é que a reunião deles resulta numa reta notável: **a mediatriz de.**

Essa propriedade dos pontos da mediatriz de um segmento AB a eleva à categoria de **lugar geométrico,** pelo seguinte:

- Todo ponto da mediatriz de equidista de A e B;
- Somente os pontos da mediatriz de AB equidistam de A e B.

Com isso, podemos fazer o seguinte enunciado:

LG 2 O lugar geométrico dos pontos equidistante de dois pontos A e B dados é a **mediatriz** do segmento AB.

Sempre que um ponto procurado for equidistante de dois pontos **A** e **B** dados, esse ponto pertencerá á mediatriz **AB.**

Construção da mediatriz

Sabemos que dois pontos distintos determinam uma reta. Portanto, para podermos traçar a mediatriz de um segmento AB, só precisamos conhecer dois pontos da mesma. Como todo ponto equidistante de A e B pertence a essa mediatriz, vamos obter dois pontos distintos, P e Q, que sejam equidistantes de A e B. Veja como:

1.°) Com centro em A e raio **r** qualquer, convenientemente grande, traçamos uma circunferência

2.°) Com centro B e o mesmo raio **r**, traçamos a circunferência .

3.°) Os pontos P e Q de intersecção dessas circunferências são equidistantes de A e B. A mediatriz é, então, a reta conduzida por P e Q.

2.1.2 Determinação do ponto médio de um segmento

O ponto médio de um segmento AB é um ponto equidistante de A e B. Essa é a razão pela qual esse ponto pertence à mediatriz de Assim, para determinar o ponto médio de um segmento de reta, basta traçar a mediatriz desse segmento. O ponto de intersecção é o ponto médio.

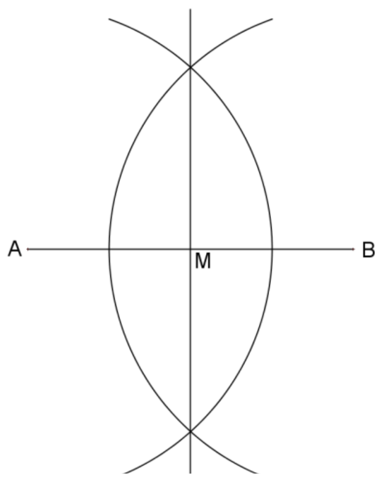


Fig. 4 Traçado da Mediatriz

2.1.4 Retas paralelas: LG 3

Em primeiro lugar, é muito importante que você tenha sempre em mente o que é distância de um ponto a uma reta, como já vimos anteriormente: **é a medida do segmento traçado do ponto até a reta, perpendicularmente à mesma.**

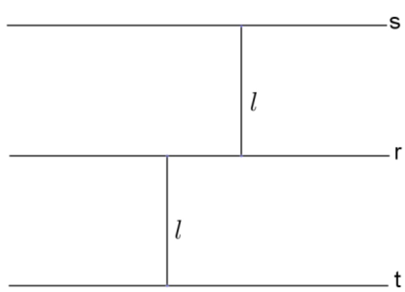


Fig. 5 : Retas Paralelas

A figura constituída pelas **duas retas,** s e t**,** como já vimos, é um lugar geométrico, pois:

- Todo ponto de **s** ou **t** distam de **r;**
- Somente os pontos de s e t distam de **r.**

A partir disso, podemos enunciar o nosso terceiro lugar geométrico.

LG 3

O lugar geométrico dos pontos cujas distancias a uma reta **r** dada são iguais a constitui um par de retas paralelas a **r.**

Obs: **Sempre** que um ponto procurado estiver a uma distância de uma reta dada, esse ponto pertencerá a uma das paralelas distantes dessa RETA.

Bissetriz: LG 4

Supondo que seja dado um ângulo AÔB, imagine todos os pontos que sejam equidistantes dos lados desse ângulo.

Reunindo todos os infinitos pontos, sendo que **cada um** equidista dos lados de um ângulo, obtém-se uma semirreta notável. É a **bissetriz** do ângulo.

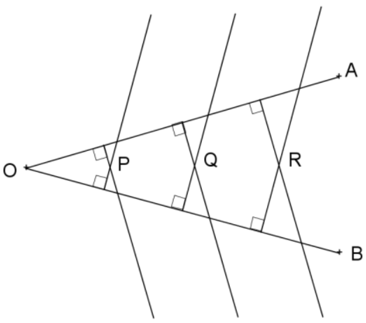


Fig. 6 : Bissetriz 1

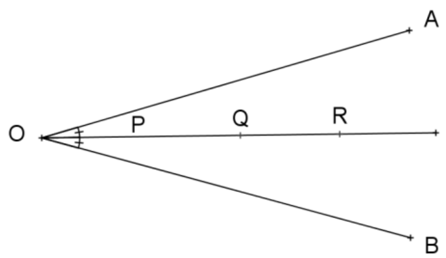


Fig. 7: Bissetriz 2

Em vez de um ângulo, considere agora duas retas concorrentes, **a** e **b** Imagine pontos equidistantes de **a** e **b** “espalhados” por todos os lados.

A reunião de todos os pontos, sendo **cada um** equidistante das retas concorrentes **a** e **b,** constitui as bissetrizes dos quatro ângulos formados por essas retas. Observe com atenção: essas bissetrizes formam duas novas retas, as quais são perpendiculares entre si.

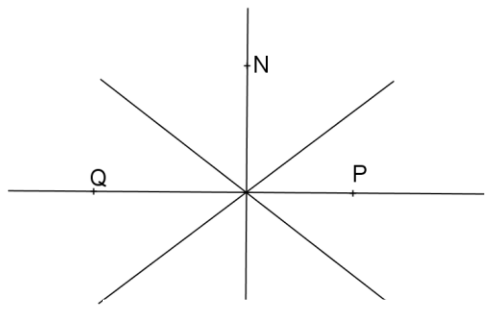


Fig. 8: Bissetriz 3

Com isso, a bissetriz também ganha o status de lugar geométrico, pois:

- todo ponto pertencente à bissetriz de qualquer dos ângulos das retas **a** e **b** é equidistante essas retas;
- somente os pontos da bissetriz de qualquer dos ângulos das retas **a** e **b** são equidistantes dessas retas.

Assim, podemos enunciar um novo lugar geométrico.

2.1.5 LG 4

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas concorrentes, **a** e **b,** constitui um par de retas perpendiculares, as quais contêm as bissetrizes dos ângulos determinados por **a** e **b.**

Sempre que um ponto procurado dor equidistante de duas concorrentes dadas, esse ponto pertencerá à bissetriz de um dos ângulos formados por essas retas.

Construção da bissetriz

Seja dado um ângulo. Para construir sua bissetriz, fazemos o seguinte:

1.°) Com centro no vértice do ângulo e raio qualquer, convenientemente grande, descreve-se um arco de circunferência , o qual intercepta os lados nos pontos A e B.

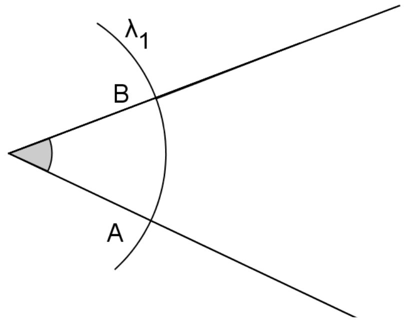


Fig. 9: Traçado 1 da Bissetriz

2.°) Com centro em A e depois em B, e com um mesmo raio **r** qualquer, descrevem-se os arcos de circunferência , os quais interceptam-se no ponto P.

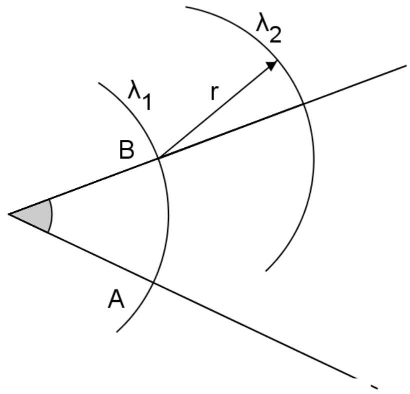


Fig. 10: Traçado 2 da Bissetriz

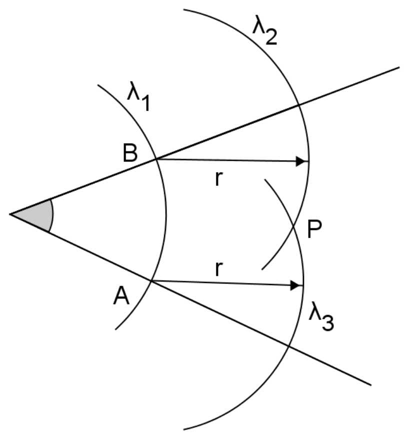


Fig. 11: Traçado 3 da Bissetriz

A bissetriz é a semirreta que tem origem no vértice do ângulo e passa por P.

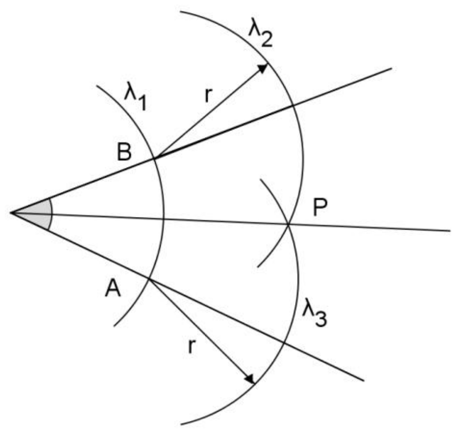


Fig. 12: Traçado Final da Bissetriz

Observações:

- Os raios dos arcos têm que ser iguais, mas não necessariamente iguais ao de , embora, de um modo geral, pode se fazer a construção com um só raio para os três arcos. O importante é que se obtenha o ponto P suficientemente afastado do vértice.
- Para traçar as bissetrizes dos quatro ângulos formados por duas retas concorrentes (LG 4), basta construí as bissetrizes de dois ângulos adjacentes quaisquer e prolongá-las pelo vértice.

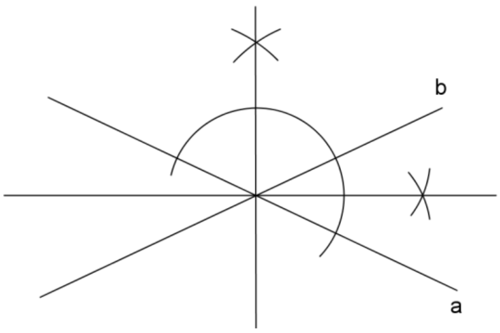


Fig. 13: Bissetrizes

Construção de ângulos notáveis

Vamos estudar a construção de ângulos para os quais está “vetado” o uso de transferidor até para colocá-los no papel. Esses ângulos são construtíveis através de régua e compasso.

A família 90°, 45°, 22°30’...

Traçando por um ponto P de uma reta r, uma reta s qualquer perpendicular a r, constrói-se um ângulo de 90°. Traçando a bissetriz do ângulo reto, obtém-se o ângulo de 45°. Traçando a bissetriz do ângulo de 45°, constrói-se o ângulo de 22°30’. Procedendo assim, pode se construir uma infinidade de ângulos, mas apenas os dois primeiros nos são realmente importantes.

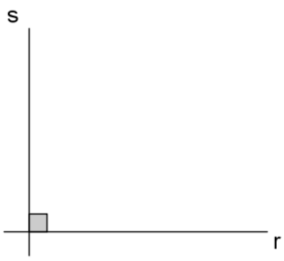


Fig. 14: Ângulo Reto

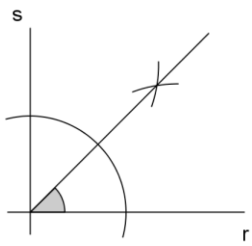


Fig. 15: Ângulo de 45º

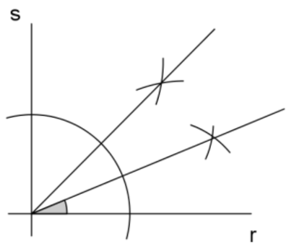


Fig. 16: Ângulo de 22,5º

Observação: É comum também se usar o ângulo de 135°. Note, porém, que esse ângulo surge naturalmente quando se constrói o de 45°, pois 135° é o suplemento de 45°.

A família 60°, 30°, 15°...

Uma vez construído o ângulo de 60°, temos que o de 30°, o de 15°, etc.. são obtidos por sucessivos traçados de bissetrizes.

A construção do ângulo de 60° é feita em função da construção de triângulo equilátero de lado qualquer.

Tomando sobre uma reta r o ponto A para vértice do triângulo. Tem-se então:

1°) Com centro em A e raio qualquer, convenientemente grande, traça-se o arco de circunferência , que intercepta r em B.

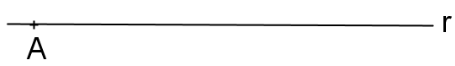


Fig. 17: Reta Suporte do ângulo de 60º

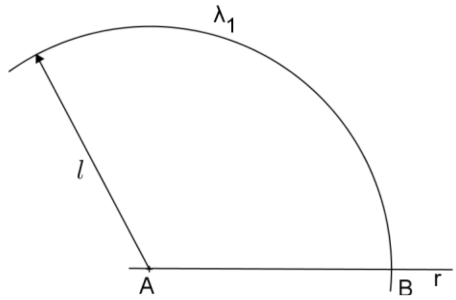


Fig. 18: Traço 1 do ângulo de 60º

2°) Com centro em B e mesmo raio , traça-se o arco de circunferência , o qual intercepta no ponto C. O ângulo BÂC mede 60°.

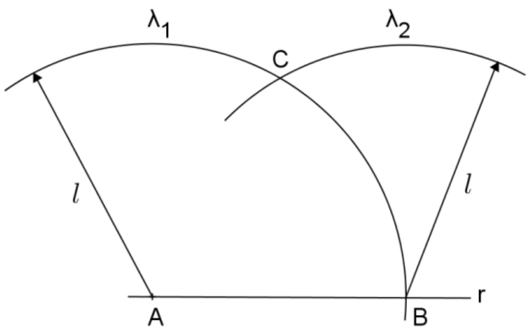


Fig. 19: Traço 2 do ângulo de 60º

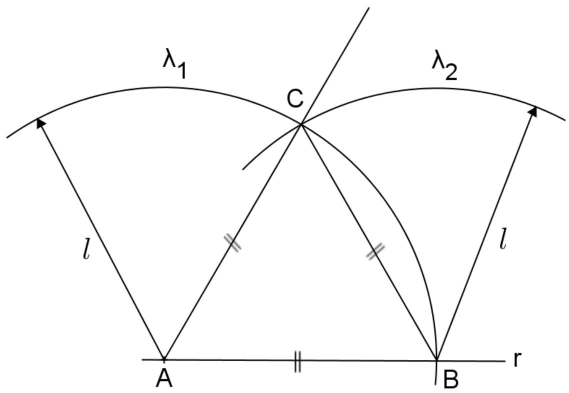


Fig. 20: Traço 3 do ângulo de 60º

A justificativa é imediata, pois o triângulo ABC é equilátero de lado . Logo, BÂC = 60°.

Observação: Também são usados os ângulos de 120° e o de 150°, os quais são suplementos de 60° e 30°, respectivamente.

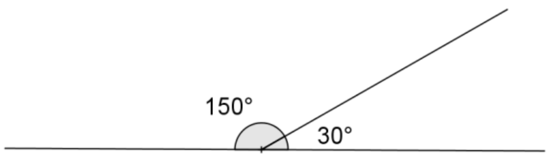


Fig. 21: Ângulos Suplementares 1

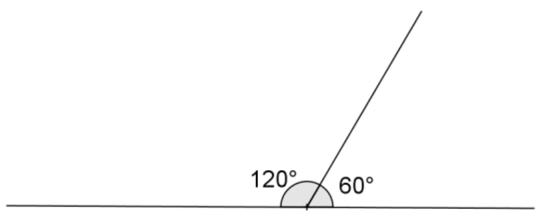


Fig. 22: Ângulos Suplementares 2

2.1.6 Arco capaz LG 5

LG 5

O lugar geométrico dos pontos que enxergam um segmento AB segundo um ângulo de medida α constante é o par de **arcos capazes** do ângulo α descrito sobre.

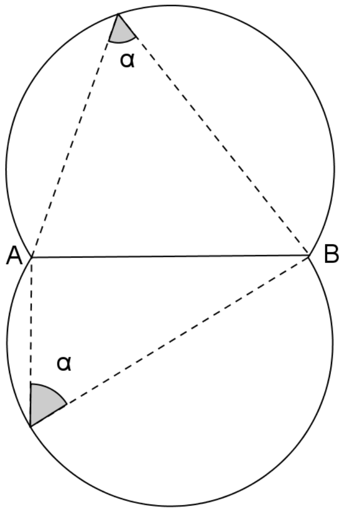


Fig. 23: Arco Capaz

Construção do arco capaz LG 5

Sejam dados um segmento AB e um ângulo α. Vamos construir um arco capaz do ângulo α sobre . Estando o primeiro construído, o outro, como veremos, é imediato.

Resolução:

É importante notar que o problema se resolve com a determinação do centro O do arco, pois em seguida tomamos ou como raios. Vamos supor o problema resolvido. A construção será feita em função do ângulo de segmentos . Sendo **t** a reta que contem o lado do ângulo de segmento temos duas propriedades para o centro O:

Então, para construir o arco capaz, faz-se o seguinte:

1.°) Por B, traça-se uma reta **t**, que faz o ângulo α com

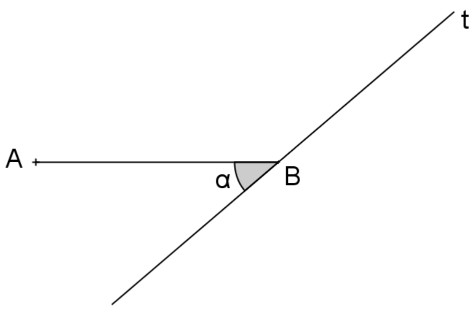


Fig. 24: Traço 1 do Arco Capaz

2.°) traça-se a reta **s** perpendicular a **t** em B.

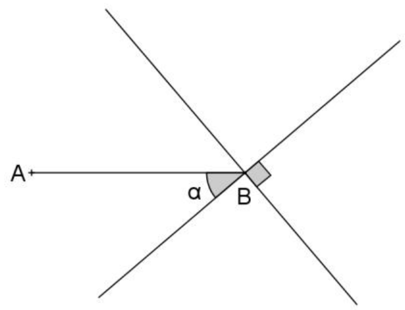


Fig. 25: Traço 2 do Arco Capaz

3.°) Traça-se a mediatriz de .

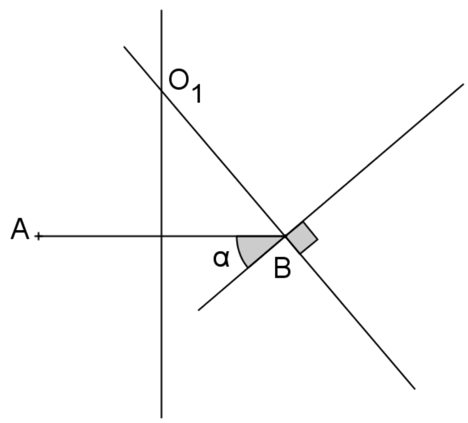


Fig. 26: Traço 3 do Arco Capaz

4.°) Com centro em O e raio , traça-se o arco capaz.

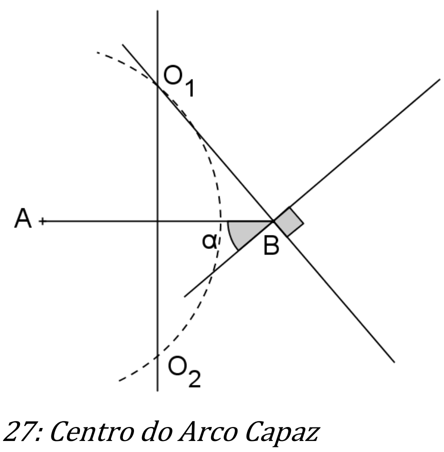


Fig. 27: Centro do Arco Capaz

Uma vez construído o primeiro arco, para obter o centro O_2 do segundo, basta fazer centro em A e com o mesmo raio do primeiro arco traçar o arco de circunferência, o qual intercepta a **mediatriz** de em O_2.

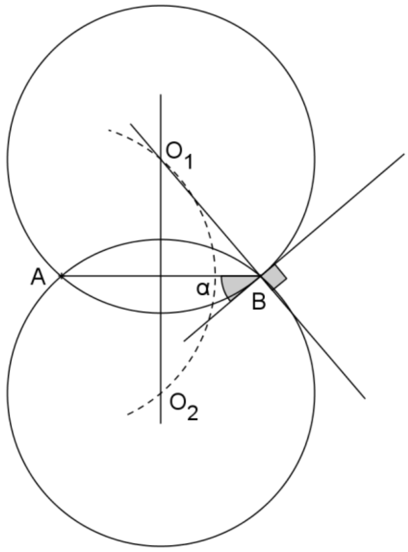


Fig. 28: Arcos Capazes

Arco capaz de 90°

Um arco capaz de 90° é uma semicircunferência. Por essa razão, a sua construção é extremamente simples, pois o centro do arco é o ponto médio do segmento AB.

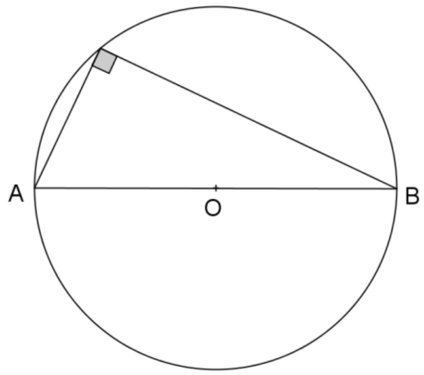


Fig. 29: Arco Capaz de 90º

A circunferência de diâmetro é a reunião dos dois arcos capazes de 90°.

Observação: Convém notar que para α **agudo** o arco capaz é maior que a semicircunferência; para α **reto** é a própria semicircunferência e para α obtuso é menor que a semicircunferência.

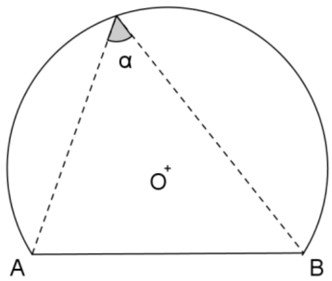


Fig. 30: Arco Capaz do Ângulo Agudo

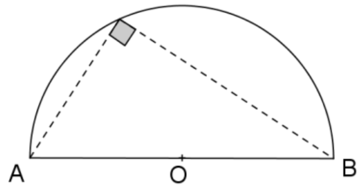


Fig. 31: Ângulo Capaz do Ângulo Reto

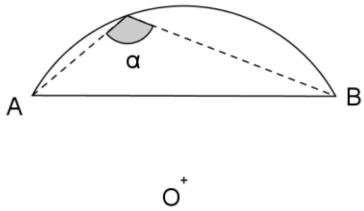


Fig. 32: Ângulo Capaz do Ângulo Obtuso

2.2 SOFTWARE GEOGEBRA E SUA APLICABILIDADE

Geogebra é um programa livre de geometria dinâmica criada por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula, com inicio do projeto em 2001 na University of Salzburg e tem continuado o desenvolvimento na Florida Atlantic University.

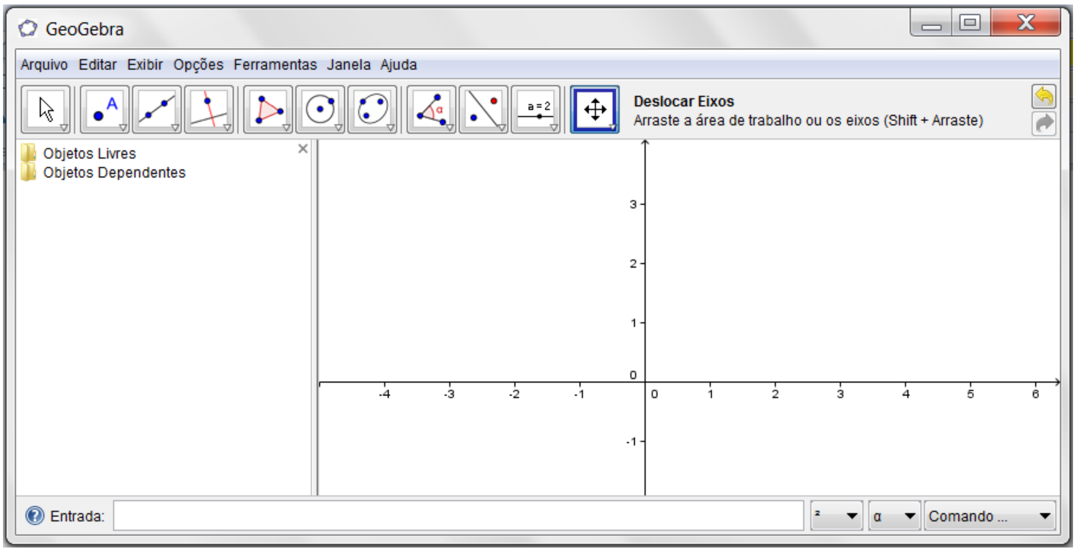
Por ser um software livre, os colaboradores podem fazer alterações em seus códigos fontes da maneira que necessitarem, melhorando, aprimorando atualizando ferramentas nele disponível ou acrescentando novas ferramentas, com o compromisso de disponibilizarem tais melhoramentos de maneira livre também.

2.2.1 Elementos e ferramentas do Geogebra

De acordo com a introdução, apresentam-se atividades com a possibilidade de melhorar o ensino de Geometria plana, com uso do Geogebra, aplicado nas séries finais do Ensino Fundamental, focando principalmente os elementos básicos da geometria Euclidiana e alguns lugares geométricos.

A figura abaixo contém os principais ícones do Software Geogebra usados nas construções Geométricas.

Fig. 33: Interface do Geogebra.



Os ícones abaixo serão chamados de janelas, numerados da esquerda para direita, de 1 a 11. Cada janela possui várias ferramentas. Para poder visualizar essas ferramentas, basta clicar na parte inferior do ícone. Fazendo isto, o programa abrirá as opções referentes a esta janela.

Fig. 34: Barra de ferramentas.

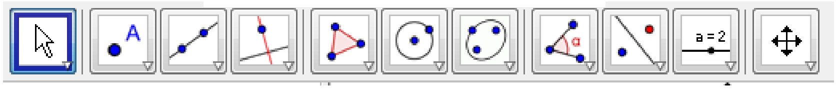
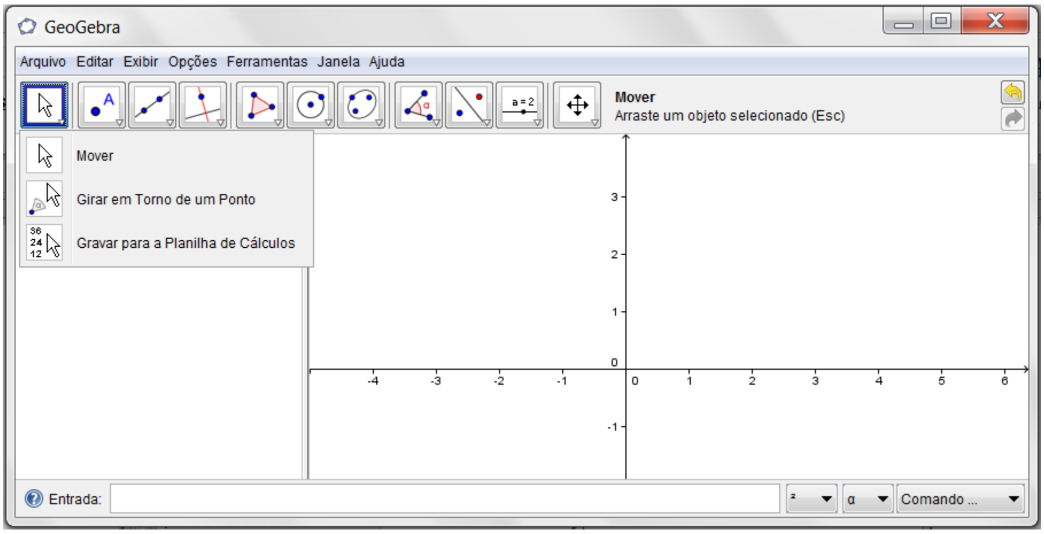


Fig. 35: Menu janela 1: plano cartesiano.

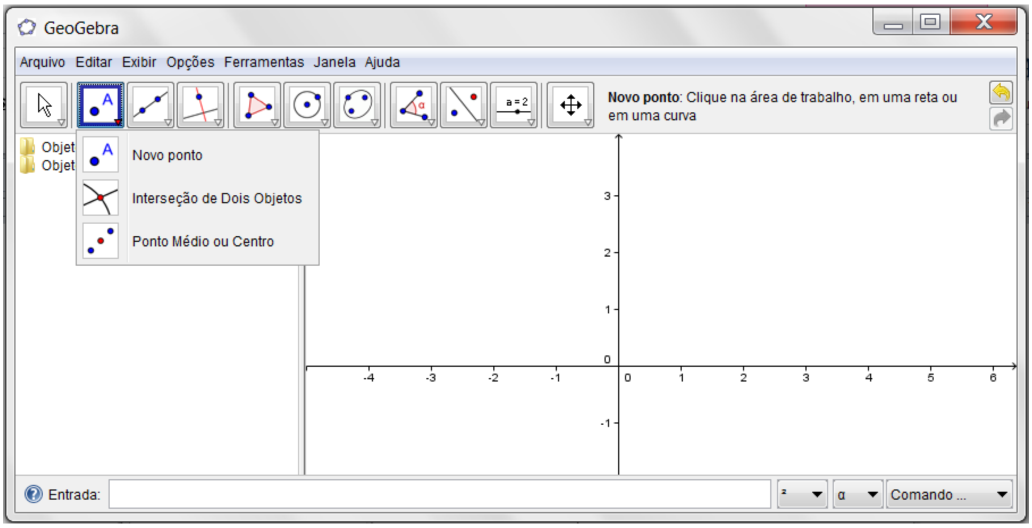


Mover: com esta ferramenta pode se selecionar, mover e manipular objetos.

Girar em torno de um ponto: com esta ferramenta pode se girar objetos em torno de um ponto.

Gravar para a planilha de cálculo: após selecionar diversos objetos na janela de visualização, é possível transportar as informações para planilha de cálculo.

Fig. 36 – Menu janela 2: traçado de pontos.

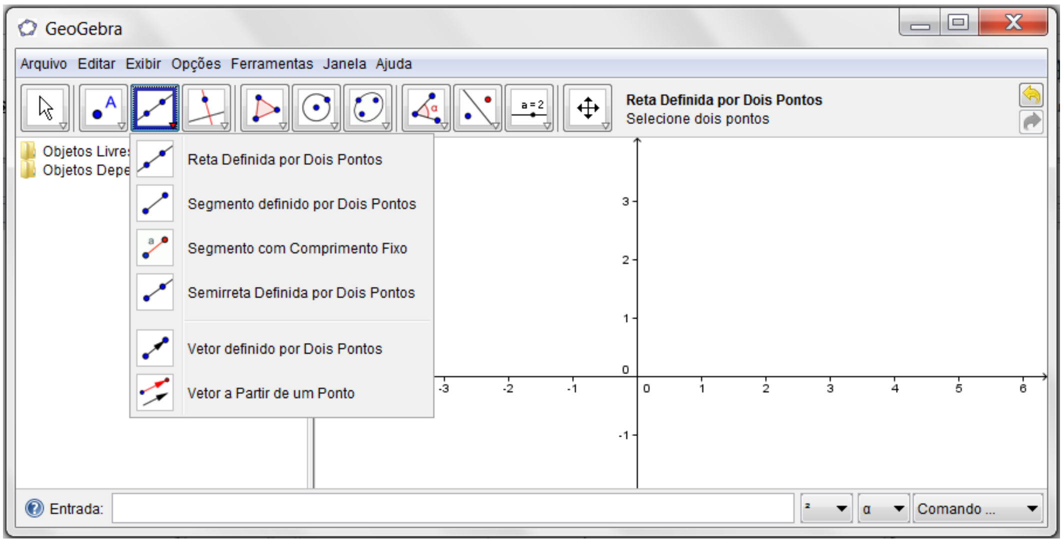


Novo ponto: cria um ponto em um espaço livre, em um objeto ou em uma interseção.

Interseção de dois objetos: com esta opção pode se explicitar os pontos de interseção entre dois objetos.

Ponto médio ou centro: esta ferramenta cria o ponto médio entre dois pontos.

Fig. 37 – Menu janela 3: reta, segmentos, vetores.



Reta definida por dois pontos: ativando esta ferramenta, pode se criar uma reta que passa por dois pontos.

Segmento definido por dois pontos: esta ferramenta cria o segmento de reta que une dois pontos.

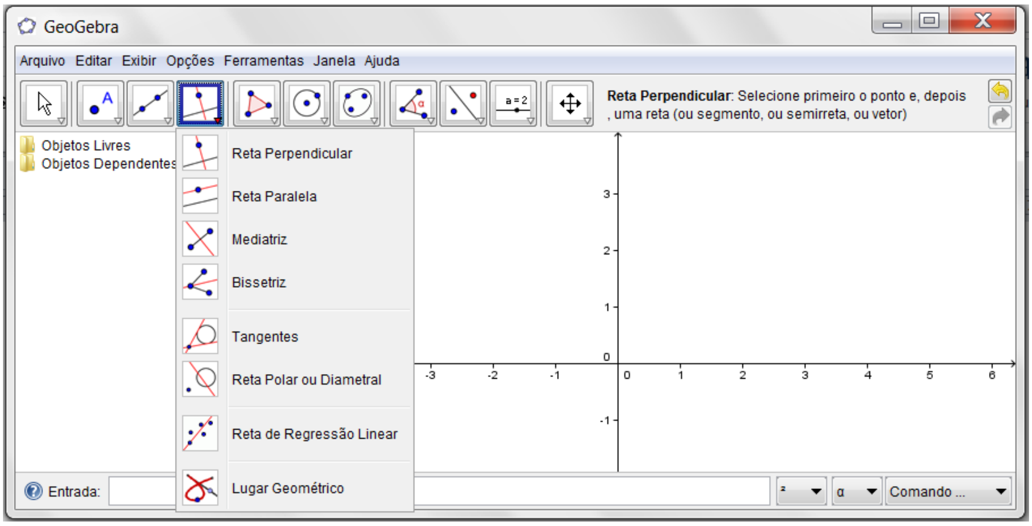
Segmento com comprimento fixo: cria o segmento de reta com comprimento definido.

Semirreta definida por dois pontos: cria uma semirreta definida por dois pontos.

Vetor definido por dois pontos: cria um vetor a partir de dois pontos.

Vetor a partir de um ponto: cria um vetor paralelo a outro vetor.

Fig. 38 – Menu janela 4: perpendicular e paralela.



Reta perpendicular: com esta ferramenta, pode se construir uma reta perpendicular a uma reta, semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono.

Reta paralela: com esta ferramenta, pode se construir uma reta paralela a uma reta, semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono.

Mediatriz: com esta ferramenta constrói a reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento.

Bissetriz: com esta ferramenta, pode se construir a bissetriz de um ângulo.

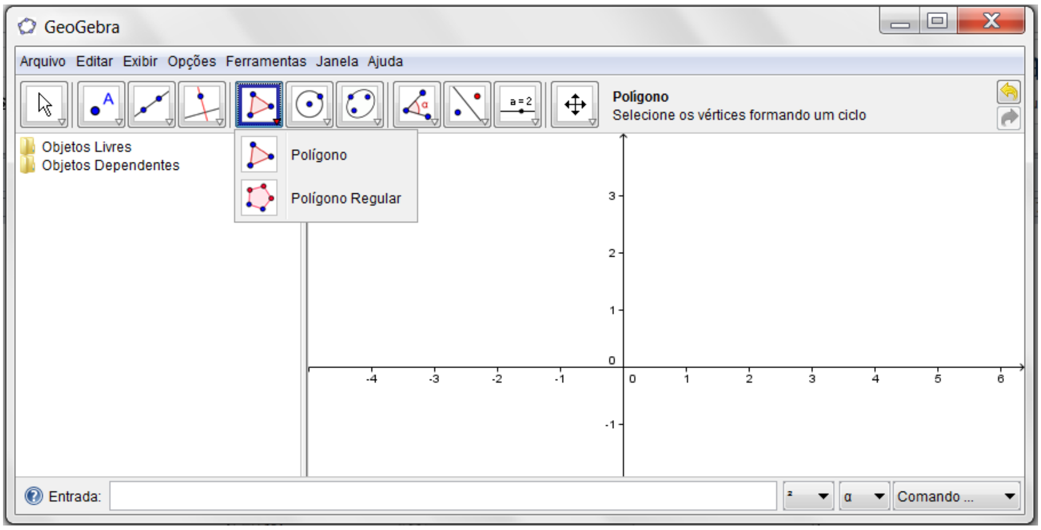
Tangentes: com esta ferramenta, pode se construir as retas tangentes a uma circunferência, cônica ou função, a partir de um ponto.

Reta polar ou diametral: com esta ferramenta, pode se construir a reta diametral relativa a uma circunferência ou qualquer uma das curvas cônicas.

Reta de regressão linear: com esta ferramenta, pode se encontrar a reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos.

Lugar geométrico: esta ferramenta constrói automaticamente o lugar geométrico descrito pelo movimento de um objeto (ponto, reta, etc..) ao longo de uma trajetória.

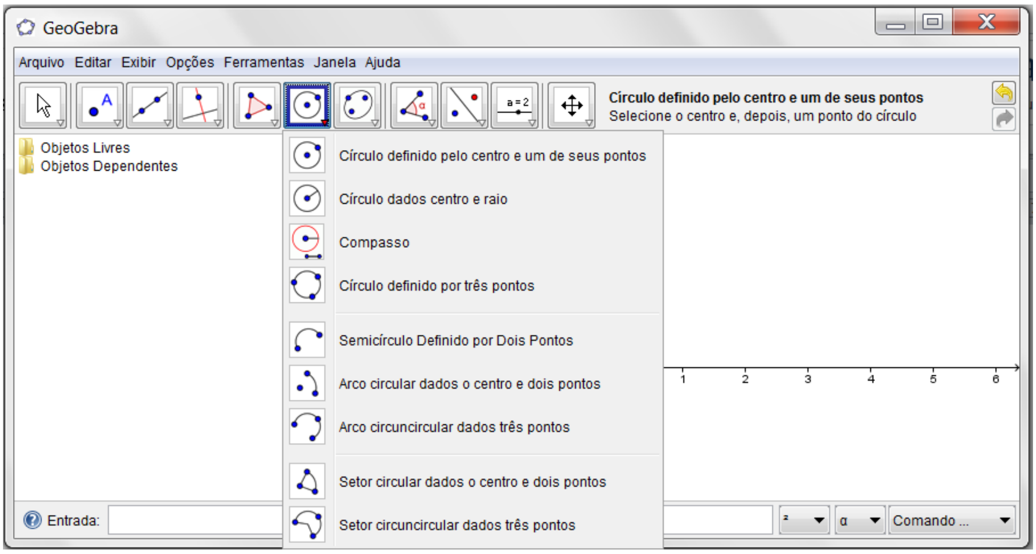
Fig. 39 – Menu janela 5: traçado de polígonos.



Polígono: com esta ferramenta, pode se construir um polígono de N lados.

Polígono regular: com esta ferramenta, pode se construir um polígono regular a partir de um lado e a quantidade de vértices (ou lados) que deverá ser digitado na caixa que aparecerá.

Fig. 40 – Menu janela 6: traçado de circunferências.



Círculo definido pelo centro e um dos seus pontos: esta ferramenta constrói um círculo a partir de dois pontos.

Círculo dados centro e raio: esta ferramenta constrói um círculo a partir do centro e com comprimento do raio definido.

Compasso: esta ferramenta permite fazer transporte de medidas, ou seja, faz a função de um compasso.

Círculo definido por três pontos: esta ferramenta constrói um círculo a partir de três pontos.

Semicírculo definido por dois pontos: esta ferramenta constrói um semicírculo a partir de dois pontos.

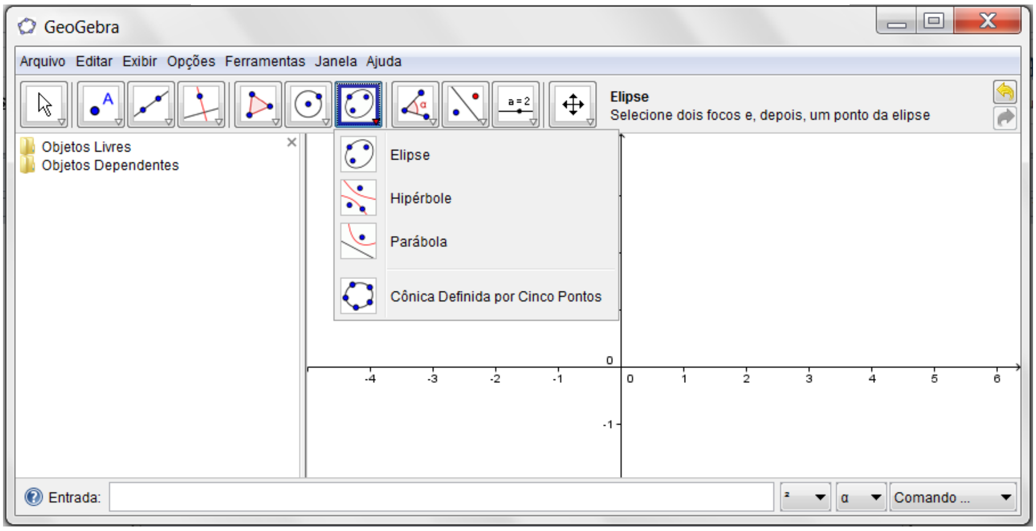
Arco circular dados o centro e dois pontos: esta ferramenta constrói um arco circular a partir do centro e dois pontos.

Arco circular dados três pontos: esta ferramenta constrói um arco circular a partir de três pontos.

Setor circular dados o centro e dois pontos: esta ferramenta constrói um setor circular a partir do centro e dois pontos.

Setor circuncircular dados três pontos: esta ferramenta constrói um setor a partir de três pontos da circunferência.

Fig. 41 – Menu janela 7: traçado de cônicas.



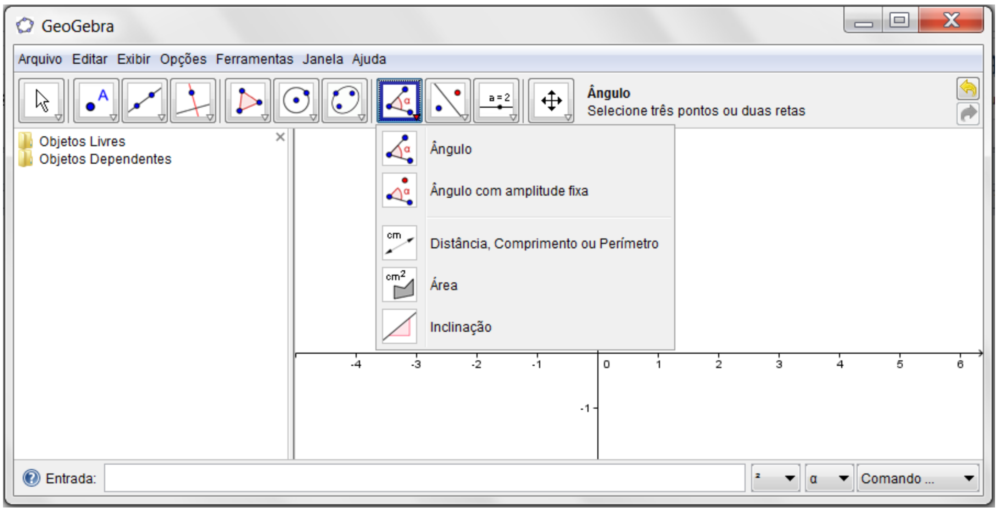
Elipse: esta ferramenta constrói uma elipse usando três pontos, sendo dois focos e um terceiro ponto na curva.

Hipérbole: esta ferramenta constrói uma hipérbole usando três pontos, sendo dois focos e um terceiro ponto na curva.

Parábola: esta ferramenta constrói uma parábola usando um ponto e uma reta diretriz.

Cônica definida por cinco pontos: esta ferramenta constrói uma cônica (parábola, elipse ou hipérbole) a partir de cinco pontos.

Fig. 42 – Menu janela 8: ângulos, perímetro e área..



Ângulo: com esta ferramenta, é possível marcar e medir um ângulo definido por três pontos, onde o segundo ponto clicado é o vértice dele.

Ângulo com amplitude fixa: com esta ferramenta, a partir de dois pontos pode- se construir um ângulo com amplitude fixa.

Distância, comprimento ou perímetro: esta ferramenta mostra na janela de visualização o comprimento de um segmento ou distância entre 2 pontos.

Área: esta ferramenta mostra a área da região limitada por uma poligonal, circunferência ou elipse.

Inclinação: esta ferramenta mostra a inclinação de uma reta. Se a reta for construída a partir de dois pontos, o comando exibirá um triângulo retângulo com hipotenusa sobre a reta e com vértice em um dos pontos.

Fig. 43 – Menu janela 9: reflexão e translação.

Reflexão com relação a uma reta: esta ferramenta constrói o reflexo (simetria axial) de um objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) em relação a uma reta.

Reflexão com relação a um ponto: esta ferramenta constrói o reflexo (simetria central) de um objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) em relação a um ponto.

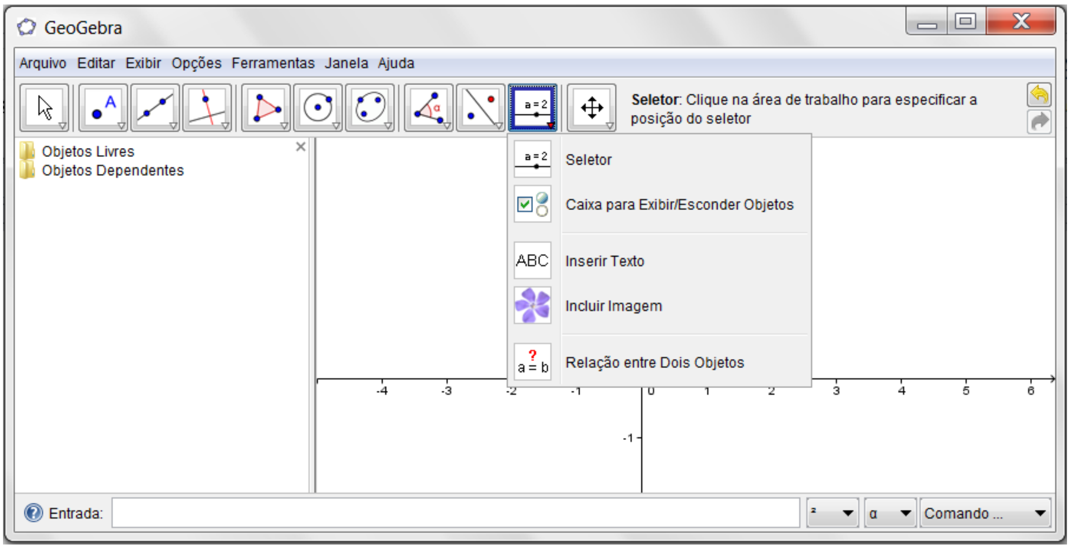
Inversão: esta ferramenta constrói o reflexo de um ponto sobre uma circunferência.

Girar em torno de um ponto por um ângulo: esta ferramenta constrói o reflexo (simetria rotacional) de um objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) ao redor de um ponto, por um ângulo determinado.

Transladar objeto por um vetor: esta ferramenta constrói o reflexo (simetria translacional) de um objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) a partir do vetor.

Ampliar ou reduzir objetos dados centro e fator de homotetia: esta ferramenta constrói o homotético de um objeto (ponto, círculo, reta, polígono etc.), a partir de um ponto e um fator (número que é a razão e semelhança).

Fig. 44 – Menu janela 10: inserir texto, imagem.



Seletor: um seletor é um pequeno segmento com um ponto que se movimenta sobre ele.

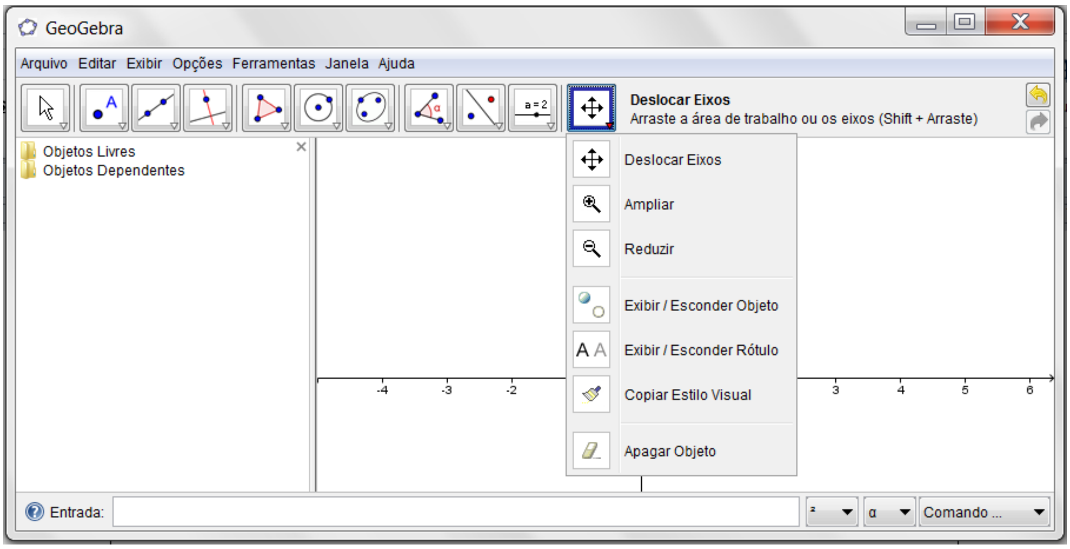
Caixa para exibir/esconder objetos: Esta ferramenta permite que você escolha quais são os objetos que quer mostrar, quando ela está ativada.

Inserir texto: com esta ferramenta, pode se inserir qualquer texto na área gráfica.

Incluir imagem: com esta ferramenta, pode se inserir figuras na área gráfica.

Relação entre dois objetos: esta ferramenta identifica algumas relações entre dois objetos: se um objeto pertence a outro, se são paralelos, se são iguais etc.

Fig. 45 – Menu janela 11: deslocando eixos.



Deslocar eixos: com esta ferramenta, pode se mover o sistema de eixos, bem como todos os objetos nele contidos.

Ampliar: com esta ferramenta, pode se ampliar as figuras que estão na área gráfica, como se estivesse aumentando o *zoom*.

Reduzir: com esta ferramenta pode se reduzir as figuras que estão na área gráfica, como se estivesse diminuindo o *zoom*.

Exibir/esconder objeto: com esta ferramenta, pode se ocultar objetos.

Exibir/esconder rótulo: com esta ferramenta, pode se ocultar os rótulos dos objetos. Pode se também exibir os rótulos que estão ocultos.

Copiar estilo visual: com esta ferramenta, pode se copiar um estilo visual de um objeto para outro: pontilhado, cor, tamanho, etc..

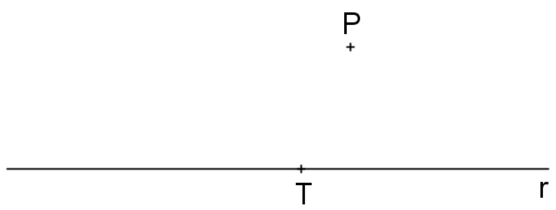
Apagar objeto: com esta ferramenta, pode se apagar objetos, tanto na área gráfica quanto na janela de Álgebra.

Note que cada ícone tem um desenho e um nome para ajudá-lo a lembrar do que a ferramenta faz.

2.2.2 Atividades

Nesta seção apresentam-se algumas atividades que colocarão em prática os traçados dos lugares geométricos levando-se em consideração os métodos tradicional e dinâmico:

1 - Dado uma reta r, um ponto T de r e um ponto P não pertencente a r, determine o centro da circunferência que passa por P e tangencia r no ponto T.



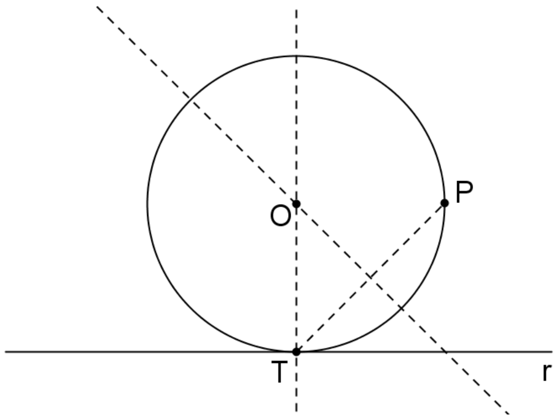
I) Solução forma Euclidiana

Trace um segmento de reta ligando os pontos P e T;

Trace a mediatriz do segmento PT;

Trace uma reta perpendicular à reta r passando pelo ponto T;

O ponto O, interseção das retas traçadas, é o centro da circunferência procurada.



II) Solução da forma dinâmica

Fig. 46: Traçado de uma reta qualquer e o ponto fora da mesma.

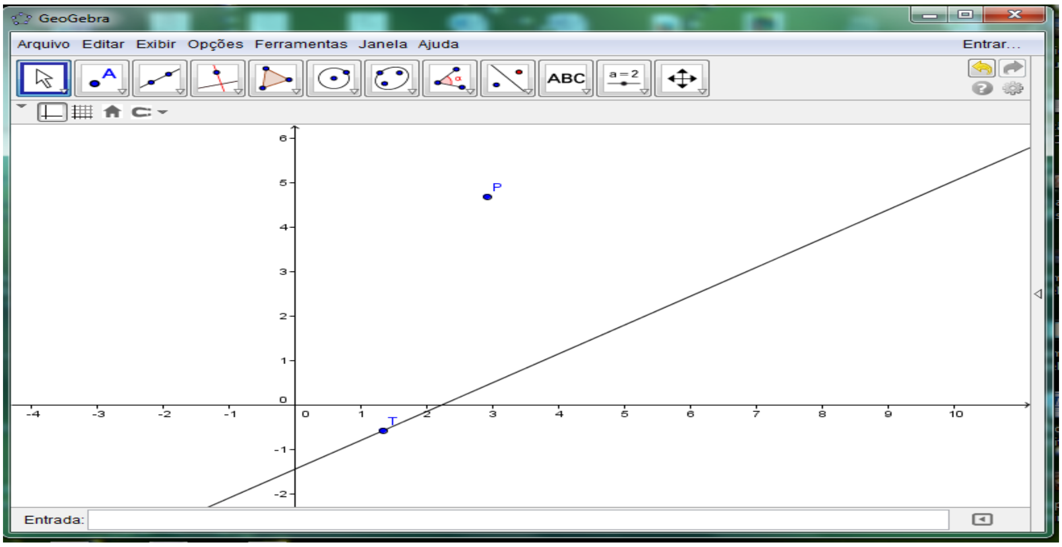


Fig. 47: Traçado do segmento PT.

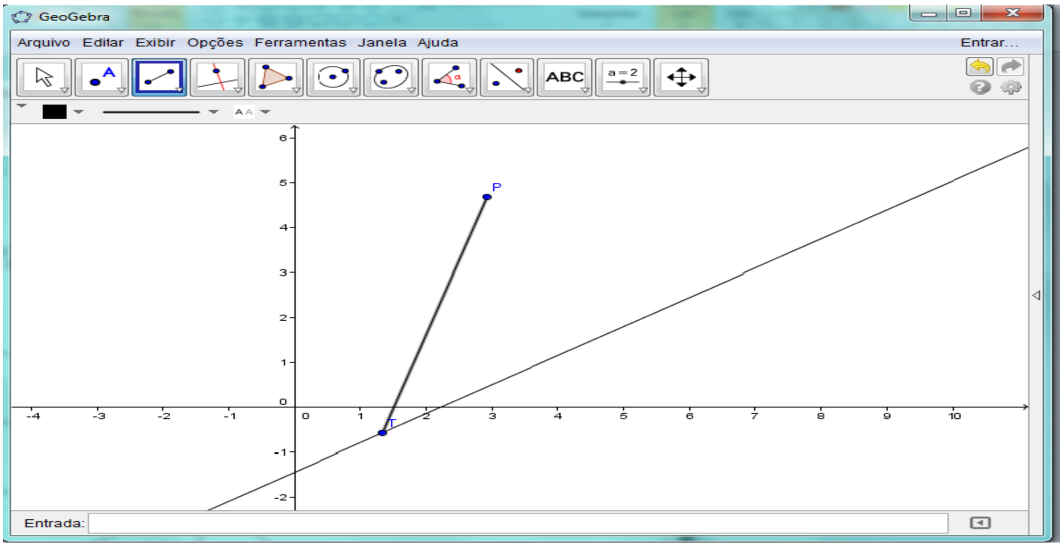


Fig. 48: Traçado da mediatriz do segmento PT.

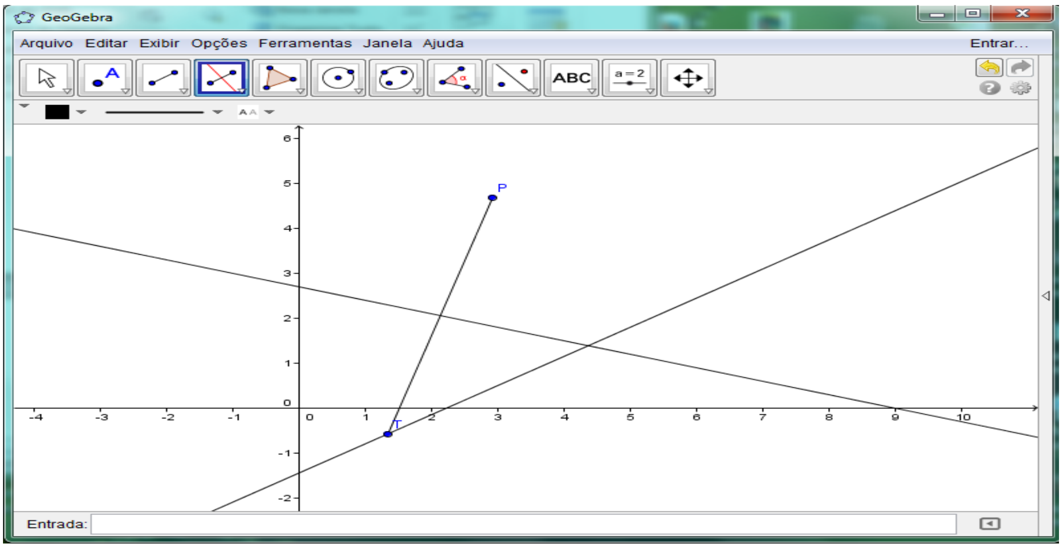


Fig. 49: Traçado da reta perpendicular passando pelo ponto T.

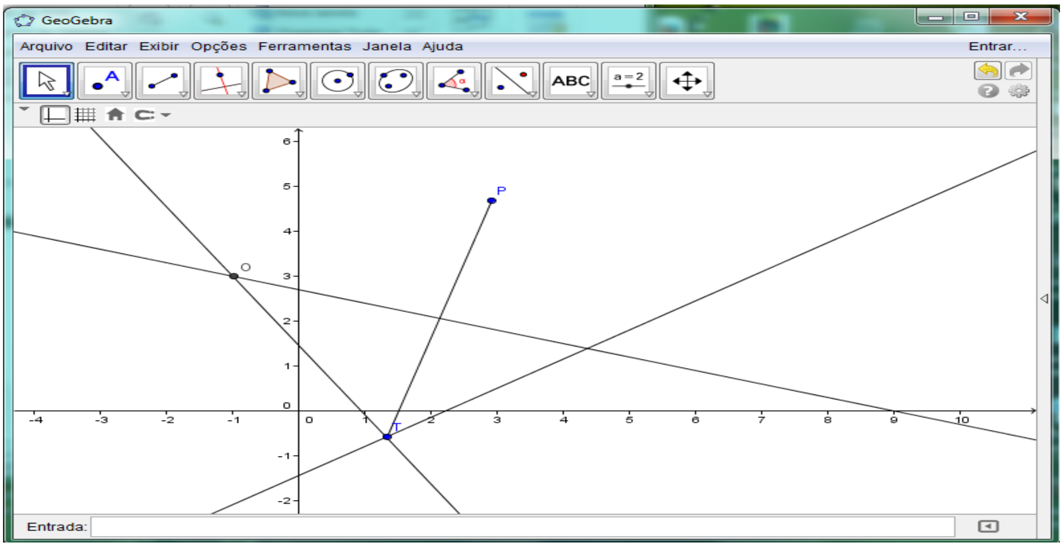
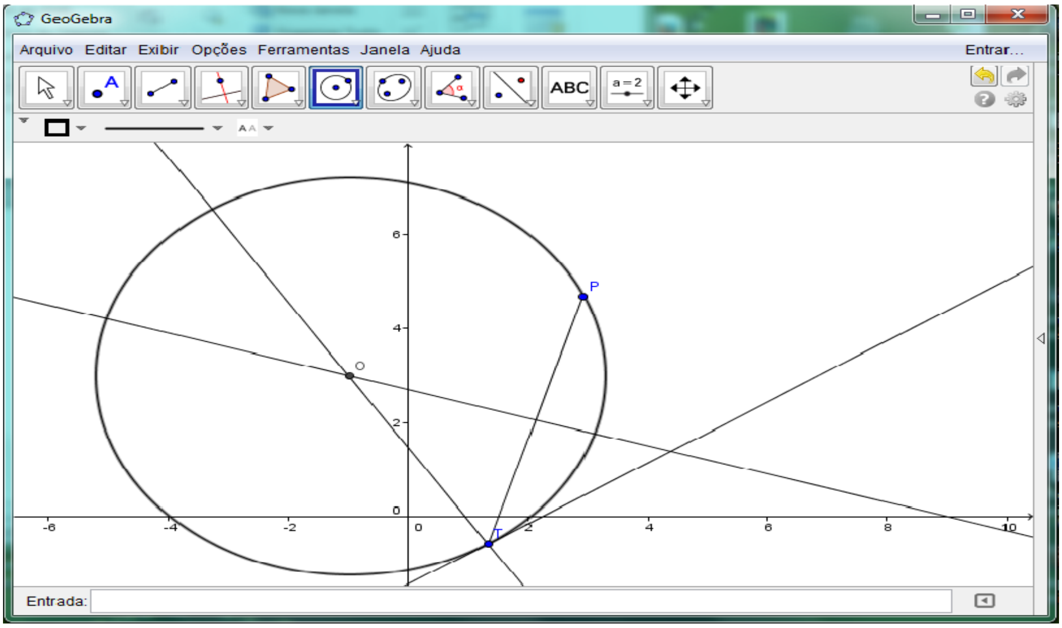
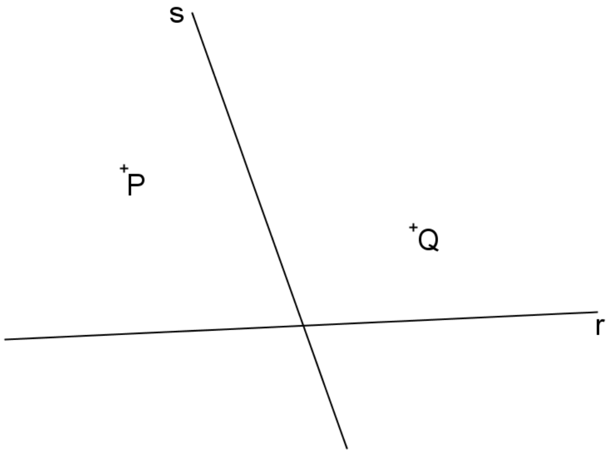


Fig. 50: Traçado da circunferência com centro em O passando pelos pontos P e T



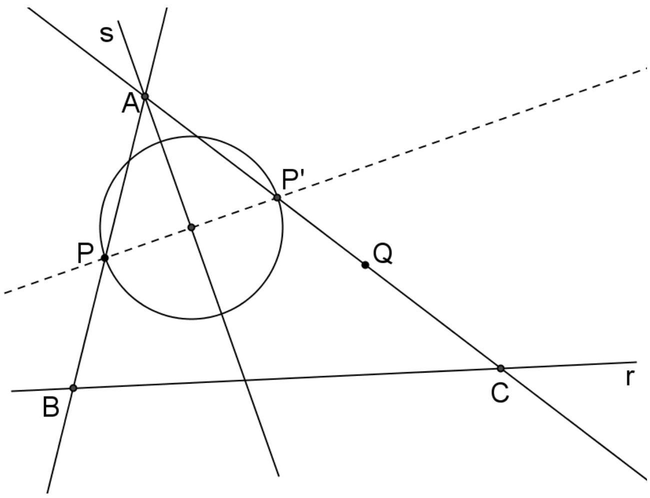
2 - Construa um triângulo ABC, sendo dados um ponto P do lado $\overline{AB}$, um ponto Q do lado $\overline{AC}$, A reta r suporte do lado $\overline{BC}$ e a reta s que contêm a bissetriz do ângulo Â.



I) Solução forma Euclidiana

Por reflexão, em relação a reta s, determina-se o ponto P'. traçando – se uma reta passando por P' e Q obtém –se os pontos A e C obtidos pela interseção desta reta com as retas r e s.
Traçando – se uma reta por A e P, obtém – se o ponto B pela interseção desta reta com a reta r. Determinando assim os vértices do triangulo procurado.

I- Solução forma Euclidiana



II - Solução da forma dinâmica

Fig. 51: Traçado de duas retas concorrentes com dois pontos P e Q fora delas.

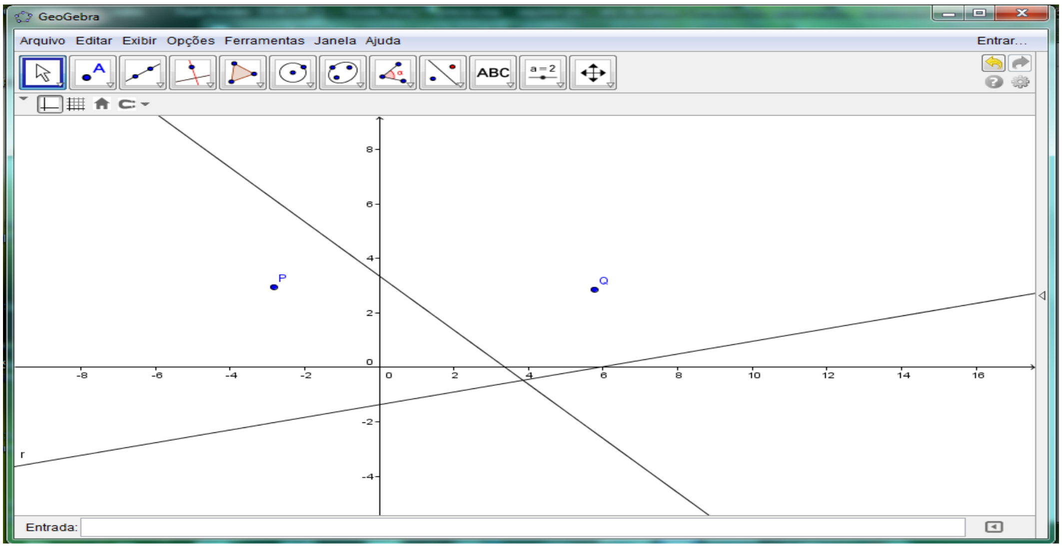


Fig. 52: Traçado do simétrico do ponto P em relação a reta.

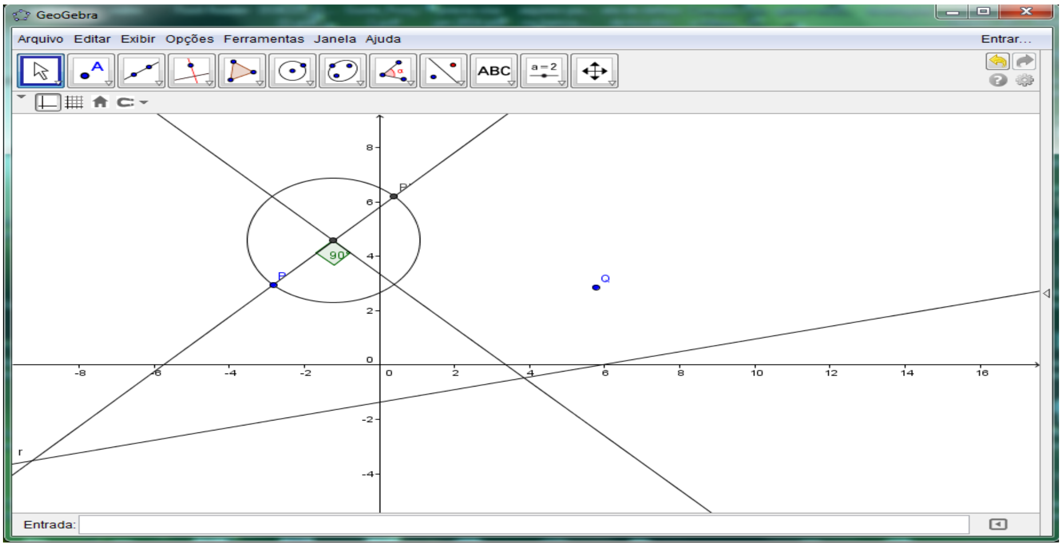


Fig. 53: Traçado da reta passando pelo ponto P' e pelo ponto Q.

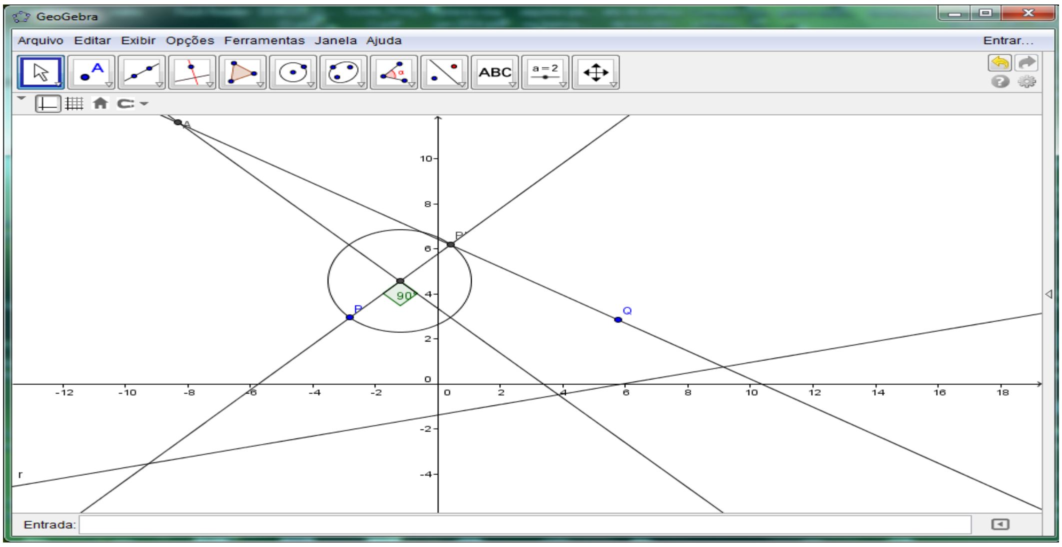
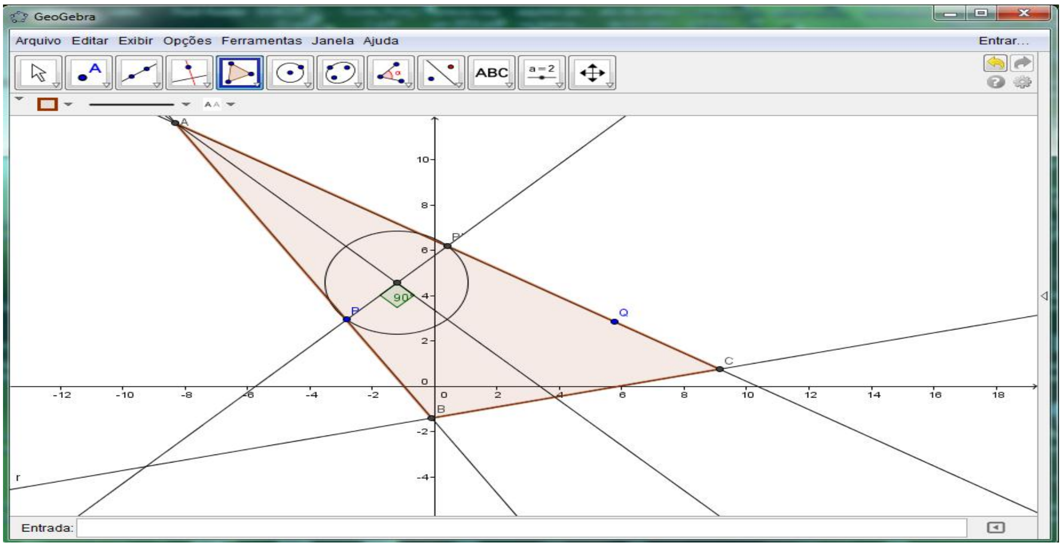
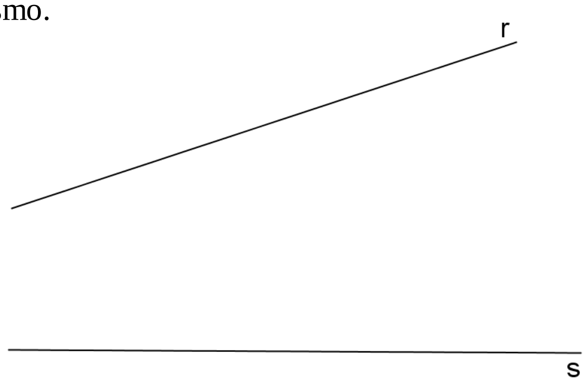


Fig. 54: Traçado da reta passando pelo ponto A e pelo ponto P.



3 - Determine a bissetriz do ângulo formado pelas retas r e s, não paralelas, sem recorrer ao vértice do mesmo.

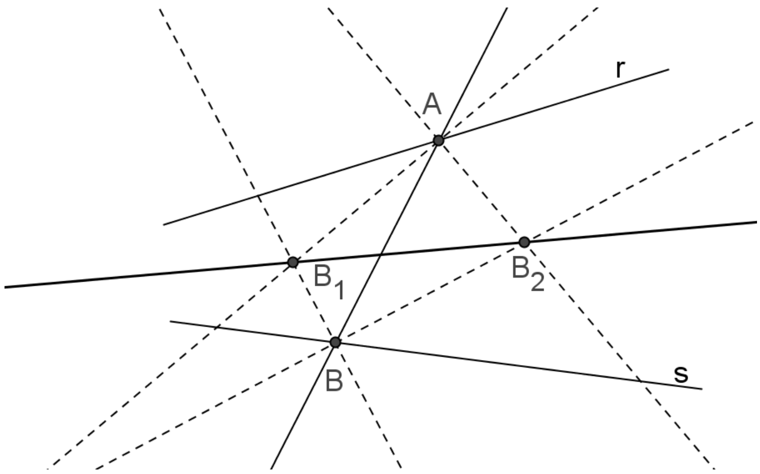


Trace uma reta qualquer determinando os pontos A e B sobre as retas r e s, respectivamente;

Trace as bissetrizes dos ângulos formados por essa reta e as retas r e s;

As interseções dessas bissetrizes determinam os pontos B_1 e B_2 pertencentes à bissetriz procurada.

I- Solução forma Euclidiana



II- Solução da forma dinâmica

Fig. 55: Traçado de duas retas concorrentes quaisquer.

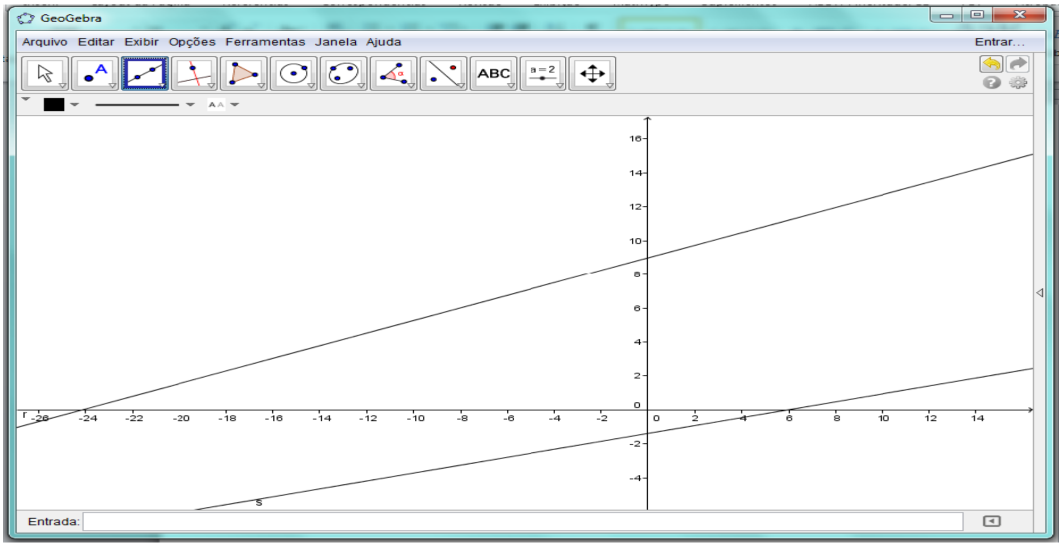


Fig. 56: Traçado da reta transversal.

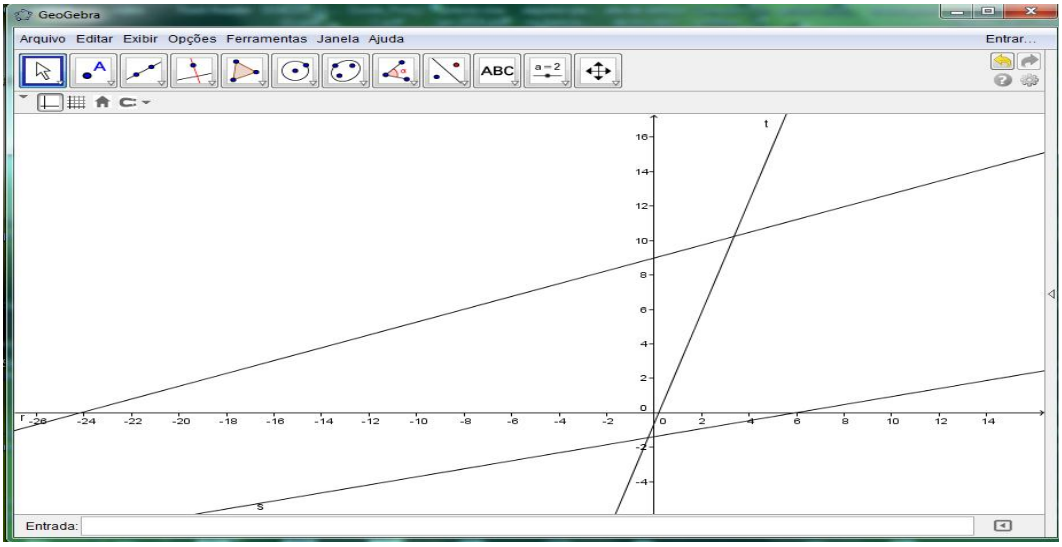


Fig. 57: Traçado das bissetrizes do ângulos formado pela reta transversal.

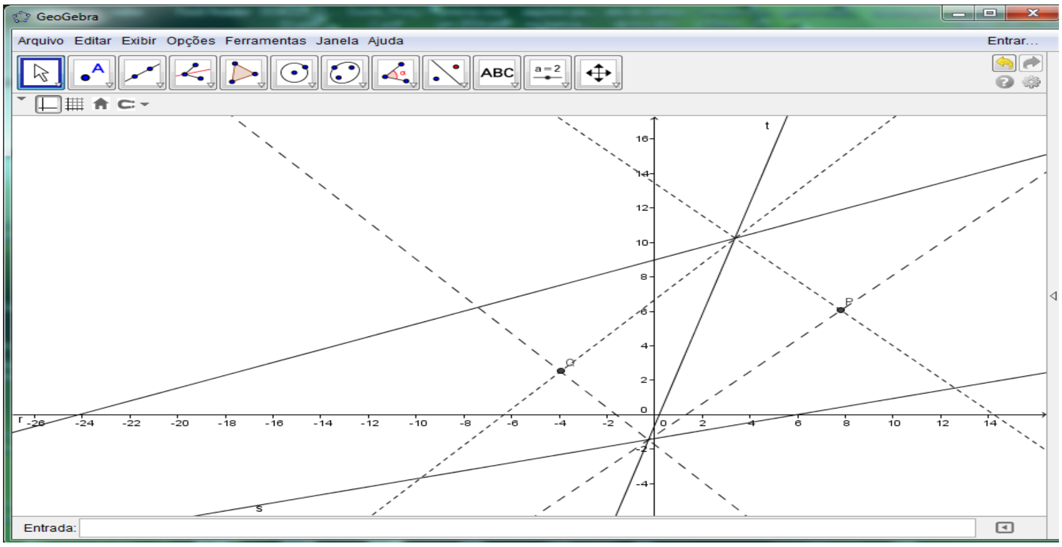
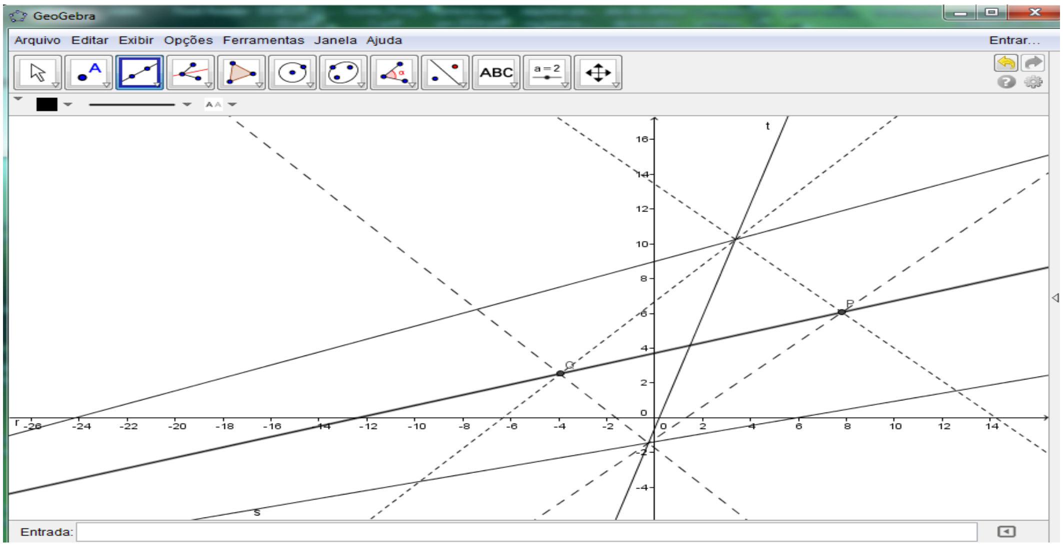


Fig. 58: Traçado da bissetriz pelos pontos P e Q.



CAPÍTULO 3

MATERIAIS E MÉTODOS

Sabe-se que a metodologia está atrelada à arte de dirigir o espírito da investigação da verdade que, por sua vez, evidencia todos os meios possíveis e dispostos consequentemente para atingir determinados objetivos.

Nesse sentido, Cervo e Bervian (2010, p. 11) relatam que:

> A metodologia científica é um instrumento de trabalho que serve no estudo e aprendizagem dos mais diferentes conteúdos científicos, em que os autores se propõem a esquematizar, de forma simples e lógica, todos os passos de um trabalho científico.

Com base nessa afirmação, a importância da metodologia nos trabalhos científicos é poder contribuir para o andamento das investigações de determinada pesquisa, onde a primeira figura como núcleo de determinadas disciplinas e, principalmente, como instrumental científico e metodológico básico para possíveis estudos dessa natureza.

3.1 TIPOS DE ESTUDO

O estudo tratou de uma pesquisa bibliográfica. Para o processo de sua execução, foi preciso compreender a essência dos fenômenos que envolveram o tema proposto.

Nesse sentido, Marconi e Lakatos (2007, p. 71) asseguram que:

> A pesquisa bibliográfica, ou fontes secundárias, abrange toda bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo, desde publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses, material cartográfico etc., até meios de comunicação orais: rádio, gravações em fita magnética e audiovisuais: filme e televisão. Sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito ou firmado sobre determinado assunto, inclusive conferências seguidas de debates que tenham sido transcritos por alguma forma, quer publicadas quer gravadas.

Analisa-se que a pesquisa bibliográfica significa auxiliar o pesquisador em um determinado tema proposto que, juntamente com outros autores, objetiva explicar e reforçar o assunto direcionado à pesquisa. Tal assunto pode ser encontrado em qualquer meio de comunicação, no sentido de contribuir com o pesquisador, colocando-o frente às discussões que servirão de base para a concretização de seu trabalho de pesquisa.

3.2 LOCAL/CONTEXTO

A pesquisa foi realizada no município de Itaituba-Pará, tendo como foco alguns artigos interessantes e de relevância para este estudo, levando em consideração o estudo das construções geométricas básicas pelos métodos tradicional e dinâmico no 8^0 ano do Ensino Fundamental.

Nesse sentido, o local/contexto de uma pesquisa revela claramente “onde será feito o estudo, sem perder de vista os seus aspectos definidores” (TEIXEIRA, 2003, p. 135).

Entende-se que o local/contexto é indispensável em qualquer pesquisa de cunho científico, pois é nesse ambiente que os informantes estarão disponíveis ao repasse de informações aos pesquisadores para que a temática em questão tenha respostas o suficiente para as suas possíveis soluções.

3.3. FONTES DE INFORMAÇÃO

Quanto às fontes de informações, foi realizado um estudo no qual foram buscadas informações sobre as contribuições do assunto abordado, em livros, revistas e em alguns artigos já publicados, como forma de reforçar a revisão bibliográfica feita mediante leituras sistemáticas, com seus respectivos fichamentos, de modo a ressaltar os pontos pertinentes ao assunto em questão abordado pelos autores.

3.4 TÉCNICAS DE COLETA DAS INFORMAÇÕES.

A coleta dos dados foi realizada pelo próprio pesquisador, a partir da observação indireta “já que esta se refere ao uso de indícios ou pistas como informações das quais se deduzem outras informações” (LUNA, 2003, p. 52). Por isso, entende-se que a realização da técnica de coleta de dados é necessária e de suma relevância para quaisquer pesquisas para que os objetivos de um determinado tema específico sejam alcançados. Daí a pesquisa ter se desenvolvido mediante a utilização dos conhecimentos disponíveis, técnicas e outros procedimentos que foram desde a adequada formulação do problema até a satisfatória apresentação dos dados e resultados. Mas vale ressaltar que aqui se tratou de uma pesquisa altamente bibliográfica.

CAPÍTULO 4

PROPOSTA MOTIVADORA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA DINÂMICA NO 8º. ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas propostas, alternativas e mecanismos viáveis de como mostrar o quanto a *Geometria Dinâmica* está presente na vida das pessoas. Fugindo do ensino tradicional, a *Geometria Dinâmica* pode se tornar muito mais interessante para o aluno, se começar a ser trabalhada de uma forma motivadora desde as séries iniciais. Aqui, a proposta está direcionada aos alunos do 8º. Ano do Ensino Fundamental.

4.1 DIMENSÃO DA PROPOSTA

Nessa era dos grandes avanços e da revolução dos aparatos tecnológicos, muitas vezes se pensa que a melhor forma de contribuir para analisar e transformar o processo de ensino e de aprendizagem em matemática seria descobrir uma fórmula mágica que acabasse com o desinteresse, a falta de concentração, a indisciplina e as dificuldades de aprendizagem.

Atualmente, com o estabelecimento da educação matemática como uma área forte de pesquisa, evidencia-se uma grande preocupação com o ensino da matemática em geral, mas que em decorrência de parte dessa preocupação, volta-se “um novo olhar” para o ensino da *Geometria Dinâmica*, pois vários tópicos geométricos, hoje, têm fundamentos na geometria das transformações e são ensinados aos alunos sem citá-los.

A dimensão da proposta reside no fato de a geometria oportunizar ao professor de Matemática para que ele ensine o conceito concretamente, de modo que os alunos possam perceber propriedades e características do conceito a ser aprendido, pois “muitos professores, por várias razões, não se esforçam em preparar atividades que propiciem uma aprendizagem efetiva, apoiando-se unicamente nos livros didáticos que a escola mal tem para oferecer” (IMENES E LELIIS, 2009, p. 13).

Diante dessa realidade exposta pelos autores, é importante que o professor esteja apto a fazer novas pesquisas, oferecer materiais didáticos de apoio, cultivar em cada aluno o interesse de participação, permitindo assim a interação ativa do educando em situações de aprendizagem, consequentemente a aula irá render mais, e também se tornará mais interessante, atrativa, prazerosa, onde os alunos, incentivados e orientados pelo professor, trabalhem de modo ativo, principalmente quando se prima pela interdisciplinaridade.

Torna-se curioso evidenciar que a transformação dos conceitos de figuras no Plano Euclidiano pode ser repassada de uma forma mais atrativa e interessante, com atividades ilustrativas para que se prenda a atenção dos alunos, tornando o processo de ensino e de aprendizagem mais fácil. A partir disso, o professor pode usar exemplos concretos que fazem parte do cotidiano do aluno para o ensino da geometria. Esses indicativos constituem uma proposta inovadora e motivadora para os professores que apresentam o interesse em novos métodos de ensino da Matemática.

4.2 A TÔNICA DA PROPOSTA

O valor do conhecimento matemático precisa ser resgatado em todo o seu potencial nessa era dos grandes avanços e significativas transformações. Nesse aspecto, a tônica do valor desse conhecimento é de responsabilidade do professor de Matemática, cabendo a ele a capacidade de entender as novas inteligências e saber fazer o acesso a essa disciplina com critérios que busquem e mostrem ao aluno o ensino articulado às suas atividades do cotidiano.

Nesse século pós-moderno, a tônica da atuação da escola está na formação dos estudantes, no objetivo de torná-los capazes de conviver com um mundo em profunda transformação, perceber as causas das mudanças e se posicionar diante delas. Isso pode ser gerado pela geometria, fazendo com que os alunos adquiram o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudá-los na vida, sendo o fato conhecido que em diversos períodos da história do ensino, a Geometria foi, sim, valorizada.

A geometria estudada na forma construtivista e interdisciplinar pode ainda prestar a multidisciplinaridade e viabilizar a atuação do próprio aluno na atividade de construir seus conhecimentos, temas e conteúdos, exercitando, assim, sua aprendizagem e explorar de forma significativa e atrativa temas transversais que edifiquem a sua formação como aluno-cidadão.

Um ponto interessante desta proposta é fazer com que o professor de matemática ministre as suas aulas com atividades lúdicas por proporcionar o método de ensino pela descoberta. Isso pode ser dito por que o aluno manipula um material antes de ser desafiado a *descobrir, construir*, um conhecimento, e a aula passa a ter um procedimento indutivo. Para isso, o aluno tenta imaginar qual a relação existente entre o material concreto e o conteúdo abordado.

Apoiado em Piaget (1976), todo ser humano normal está, sim, capacitado a aprender matemática, ultrapassando o simples ato de decorar fórmulas e fazer exercícios. As experiências mostram que o método da descoberta serve muito bem para o ensino da

Matemática. Além disso, ressalta-se que a aprendizagem geométrica deve centrar-se em procedimentos de observação, representações e construções de figuras bem como o manuseio de instrumentos de medidas que permitam aos alunos fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras. Por isso, o estudo do espaço e das formas privilegiará a observação e a compreensão de relações geométricas para resolver problemas, em detrimento da simples memorização de fatos e de um vocábulo específico.

4.3 BENEFÍCIOS E APLICAÇÕES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Sabe-se que a Geometria Dinâmica possui seus benefícios e aplicações quando trabalhada de forma adequada e sistematizada, principalmente quando leva em consideração a realidade do cotidiano do aluno, e que ele perceba o verdadeiro significado de seu dinamismo, pois segundo King & Schattchneider (2007), os principais benefícios e aplicações no ensino-aprendizagem utilizando a *Geometria Dinâmica* são:

- Precisão de construção;
- Capacidade de visualização das relações geométrica;
- Possibilidade de exploração das construções e descobertas de relações e propriedades geométricas;
- Prova de teoremas de forma experimental;
- Geração de transformações;

Diante desses principais benefícios e aplicações mencionadas pelos autores, é importante destacar que o uso da Geometria Dinâmica traz possibilidades viáveis de mudança no Ensino Fundamental, apesar de ainda receber pouca atenção nos três níveis de ensino (fundamental, médio e superior).

4.3.1 Precisão de Construção

Em se tratando de precisão de construção, é interessante observar que, quando os pesquisadores começaram a explorar a dimensão conceitual da *Geometria Dinâmica*, o principal objetivo era a criação de programas onde os instrumentos tradicionais de traçado pudessem ser substituídos.

Nesse aspecto, desenhos precisos seriam criados no próprio computador, mas que seriam retornados para o papel por meio de impressão. A determinação exata de pontos de interseção entre retas e outros elementos geométricos não dependeria das habilidades manuais do usuário, e sim das características do sistema em uso.

Nesse novo século, a *Geometria Dinâmica* amplia seus horizontes, porém permanece o fator inicial de precisão. Desenhos que demandam inúmeros traçados e tornam-se cansativos de fazer no papel com régua, lápis e compasso, são de fácil criação no computador. No entanto, algumas limitações, como a capacidade de processamento da máquina, a resolução do monitor ou da impressora, ainda persistem. Também se podem criar as limitações complexas que se referem às ambiguidades de soluções não triviais, exigindo uma fundamentação matemática superior e abrangente.

4.3.2 Capacidade de Visualização das Relações Geométricas

Em se tratando da capacidade de visualização das relações geométrica, é importante evidenciar que, há alguns anos atrás, alguns estudiosos apresentaram um conceito inovador: o design de interfaces voltado para o aprendiz. Foi o momento de os pesquisadores em interfaces homem-computador buscarem soluções mais competentes pelo próprio processo de interação. Os recursos de visualização presentes na *Geometria Dinâmica* constituem, nesse sentido, um bom produto dessa abordagem. Por isso, a visualização auxilia no raciocínio intuitivo, representando uma primeira etapa para a compreensão de conceitos e a prova de teoremas.

4.3.3 Possibilidade de Exploração das Construções e Descobertas de Relações e Propriedades Geométricas

Garry (2007) diz que a natureza interativa e as qualidades dinâmicas do *software* levam os estudantes a proporem suas próprias hipóteses e testarem-nas eficientemente. O retorno que os alunos podem obter por utilizarem um *software* de *Geometria Dinâmica* é eficiente e empolgante. Com isso, os estudantes podem adquirir uma melhor percepção e compreensão visual da matemática que eles estão investigando.

Um ponto interessante é que, na *Geometria Dinâmica,* o aprendizado não se baseia em um processo de cópia. Nem as definições de teoremas, nem os resultados de problemas e provas devem ser assimilados pelo método comportamentalista tradicionais, onde o professor explica, o aprendiz anota, e o conhecimento vai sendo supostamente depositado na massa encefálica. Por isso, justifica-se o uso de uma abordagem construtivista pela natureza da informação que é assimilado através da exploração e da descoberta.

4.3.4 Prova de Teoremas de Forma Experimental

Considerando a prova de teoremas de forma experimental, Munzer (2006) assegura que proponentes da visualização matemática auxiliada por computador argumentam que a visualização pode ajudar a construir a intuição necessária tanto para a proposição de teoremas, quanto para a compreensão e a criação de novas provas. Com isso, críticos acreditam que a tradicional construção imaculada da prova de teoremas matemáticos corre o risco de ser corroída pela perigosa falta de rigor. A aceitação, ou não, da visualização como uma parte legítima da investigação matemática, tem implicações não apenas para os matemáticos, mas para a comunidade inteira de expressão visual.

Na verdade, a representação visual pode iludir as pessoas. No entanto, na *Geometria Dinâmica*, a possibilidade de enxergar a mesma configuração de diversas maneiras, facilita a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos. Relações geométricas sutis, não óbvias numa representação estática, são reveladas pela exploração e pela visualização da "nova geometria". Por isso, a verificação de propriedades e a checagem automática de teoremas também são características de algumas implementações da *Geometria Dinâmica*.

4.3.5 Geração de Transformações

Quanto à geração de *Geometria Dinâmica,* muitos programas permitem o trabalho facilitado de várias transformações pontuais, tais como: translação, rotação, escala, reflexão e homotetia. Pela sua capacidade de realizar transformações em figuras geométricas, programas de *Geometria Dinâmica* são ideais para o estudo de isometrias, similaridades e outras funções. Animando figuras e traçando lugares geométricos de pontos pré-definidos, estes aplicativos também podem explicar problemas e propriedades normalmente não abordadas na literatura por sua inerente dificuldade.

4.4 AVALIAÇÃO DA PROPOSTA

Toda proposta educativa quando tem as suas ações traduzidas para o bem-estar social dos alunos em função de um ensino-aprendizagem diferenciado e com qualidade tem seus reflexos voltados para os benefícios próprios. Com isso, a discussão sobre vantagens e desvantagens pedagógicas entre as duas formas de se “fazer” geometria pode ser conduzida sob diferentes pontos de vista.

Considerando as vantagens desta proposta direcionada aos alunos do 8º. Ano do Ensino Fundamental, o uso da *Geometria Dinâmica* traz excelentes possibilidades de mudança em uma área que vem sendo negligenciada no ensino. Na verdade, o ensino da Geometria recebe pouca atenção, não apenas no Ensino Fundamental, mas no Médio e no Ensino Superior e, frequentemente, ela é ensinada de forma mecânica, sem a preocupação de destacar os conceitos envolvidos.

Como forma de superar e resolver esses contratempos, os PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) surgiram com a proposta de que o ensino fosse articulado de forma interdisciplinar, integrando as mais diversas áreas do conhecimento. Sabe-se que no ensino tradicional, o aluno apenas “ouve”, não sendo incentivado a ter uma postura investigativa (ativa) e nem sendo desafiado a construir seu próprio conhecimento. O professor apenas enuncia conceitos, definições e propriedades que, muitas vezes, são memorizados e futuramente reproduzidos pelo aluno sem sua devida compreensão.

Dessa forma, a proposta motivadora para o ensino da *Geometria Dinâmica* com alunos do 8º. Ano do Ensino Fundamental destaca como principais benefícios e aplicações de um sistema computacional nessa modalidade geométrica: a prova de teorema, a precisão e visualização, as explorações e descobertas, as transformações e lugares geométricos. Nessa proposta, o professor e o alunos devem ser os protagonistas do processo de ensino-aprendizagem, onde devem construir seus conhecimentos de forma coletiva, integrada e que todos possam dialogar com as suas próprias experiências.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo foi desenvolvido a partir da temática que envolveu estudo das construções geométricas básicas pelos métodos tradicional e dinâmico no 8º. Ano do Ensino Fundamental. Durante a realização deste trabalho, foi possível perceber ainda mais sobre a importância de se trabalhar a geometria dinâmica com alunos desse nível de ensino, principalmente se o professor levar em consideração a realidade cotidiana dos seus alunos. Além disso, percebeu-se que é possível trabalhar a matemática do cotidiano desde as séries iniciais até o nível superior, sem deixar de lado o ponto principal que é de auxiliar no aprendizado ou reforçar uma ideia que faça parte da vida do aluno.

O estudo mostrou que a geometria dinâmica é capaz de ampliar o gosto do aluno pelo conhecimento, ajudando-o na compreensão da ideia de que a matemática deve estar contemplada em todos os lugares, nas mais variadas formas e em todas as suas dimensões. Para isso, é importante se trabalhar a mesma com os alunos fazendo com que os mesmos possam construir o seu próprio conhecimento sem interferência do professor, como forma de não influenciar o resultado final.

Como aprendizado ficou que o professor de Matemática pode orientar os alunos sobre a geometria tradicional, para que eles tenham conhecimento a respeito dessa modalidade geométrica. Mas é na geometria dinâmica que o professor deve ter a sua pretensão maior, mostrando que com pequenas ações, planejamento e comprometimento dos educadores, é possível organizar momentos que contemplem diferentes ferramentas e metodologias para o ensino de geometria no espaço escolar e que colaborem no efetivo aprendizado e desenvoltura dos alunos.

Como sugestões e recomendações deste estudo, é preciso que os professores de matemática participem de cursos de formação, frequentemente, para trabalhar mais ativamente, com competências e habilidades renovadas, e mais, que seja o momento propício para se repensar a escola, seus tempos, seus espaços, uma forma diferente de lidar com os conteúdos e com o mundo de informações interessantes nessa nova era em prol dos seus alunos. Isso é mais que um desafio para o professor em não pressionar o aluno em seu estudo.

Com base no estudo da geometria dinâmica, o professor de Matemática deve desafiar nas atividades práticas, as dificuldades dos alunos em aprendizagem para que tenha seus objetivos e suas metas alcançadas no final de cada nível de ensino. Isto se torna interessante, a partir do momento em que o profissional da educação passa a dialogar com o aluno sobre as experiências deste a as próprias. Assim, a interação promovida pelo uso da geometria dinâmica aproxima docente e discente promovendo vínculos sócio afetivos e, com isto a externalização das dificuldades cognitivas permitindo, desta maneira, um aprendizado mais eficaz.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. E. **A formação de recursos humanos em informática educativa propicia a mudança de postura do professor?** In: VALENTE, J. A. O professor no Ambiente Logo: formação e atuação. Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1996.

ANTUNES, Celso. **Manual de técnicas e dinâmica de Grupo de sensibilização de ludopedagogia**. Petrópolis: Vozes, 2000.

BELLEMAIN, Franck. **Geometria Dinâmica:** diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem. In: CD Rom do GRAPHICA (15º. Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico & IV International Conference on Graphics Engeneering for Arts and Design). São Paulo, nov. 2001.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Revista por Uta C. Merz – bach; tradução Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Algumas reflexões sobre educação matemática:** Temas & Debates. SBEM, nº 3, 1991.

_____. Tudo é matemática: ensino fundamental. São Paulo: Ática, 2005.

FREIRE, Paulo**. Pedagogia da Autonomia:** saber necessário à Prática Educativa. 17. ed. SP: Paz e Terra, 1996

GARRY, T. **Desenhos geométricos na sala de aula.** Washington: Mathematical Association of America, 2007.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. **Matemática e realidade.** 6.ed. São Paulo: Atual, 2009.

IMENES, Luiz Márcio e LELIIS, Marcelo. **Matemática.** São Paulo: Scipione, 2009.

KING, J.; SCHATTCHENNEIDER, D. **Ensino de Geometria Dinâmica:** ensino e aprendizagem. Washington: Mathematical Association of America, 2007.

MUNZER, T. **Visualização matemática:** palavras cruzadas na vertical. Washington: Mathematical Association of America, 2006.

OLIVEIRA, Martha Knol de. **Vygotsky aprendizado e desenvolvimento:** um processo sócio histórico. São Paulo: Scipione, 1997.

PUTNOKI, José Carlos. **Elementos de Geometria e desenho geométrico**. Vol. 1. São Paulo: Scipione, 1989.