Universidade Federal do Oeste do Pará

Pró-reitoria de Pesquisa, Pós-graduação e Inovação Tecnológica

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Helliton Maia Sousa

A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática

Santarém

2015

Helliton Maia Sousa

A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Oeste do Pará como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino da Matemática.

Orientador: Profa. D.ra Aldenize Ruela Xavier

Santarém

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/UFOPA

S725r Sousa, Helliton Maia
A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática / Helliton Maia Sousa.- Santarém, 2015.
57 f. : il.

Orientador: Prof.ª Dr.ª Aldenize Ruela Xavier
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Santarém, 2015.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Proporcionalidade. 3. Raciocínio lógico. I. Xavier, Aldenize, orient. II. Título.

CDD: 23 ed. 510.7

Bibliotecário-Documentalista: Cátia H.F. Favacho – CRB/2 823

Helliton Maia Sousa

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação *Matemática em Rede Nacional* – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof.ª Dra. Aldenize Ruela Xavier
Orientadora – UFOPA

Prof. MSc. Hamilton Cunha de Carvalho
Examinador Interno – UFOPA

Prof. Dr. Damião Pedro Meira Filho
Examinador Externo – IFPA

Santarém (PA)
2015

Dedico este trabalho às pessoas que se sentem orgulosas pela minha conquista. Minha mãe Maria Clemilde Maia Sousa e minha família Rosenita(esposa), Paula Gisele, Vitória e Raquel(filhas).

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a meus amigos do curso em especial Sidcley Mota Marinho, aos meus professores entre eles Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz coordenador do curso e a CAPES pelo apoio e incentivo. Para finalizar, agradeço a Deus o meu criador e pai. Fiel em todas as suas promessas o qual tem cuidado de mim desde o dia em que nasci.

Resumo

Este trabalho trata de um dos assuntos mais difundidos na cultura de qualquer sociedade: a proporcionalidade. E mostra o interesse em se aplicar certos conceitos da matemática pura ao processo pedagógico do ensino da matemática. Para tanto, utilizamos a resolução de problemas uma ferramenta eficaz ao ensino. O trabalho está dividido em três capítulos, sendo que: no primeiro é defendido a importância da resolução de problemas. Mostrando que ela é desencadeadora de conhecimento e que ao desenvolver o raciocínio lógico proporciona uma aprendizagem sólida e segura em matemática, diferente do ensino baseado em simples repetições de comandos. O capítulo ainda apresenta as quatro etapas de resolução de um problema idealizadas pelo matemático George Polya e o contexto da pesquisa, proporcionalidade um conhecimento básico, abrangente, útil e funcional. O primeiro capítulo finaliza com uma breve reflexão sobre a prática de ensinar. No segundo capítulo, tratamos de questões de proporcionalidade e dos diversos métodos de resolução. Onde, por meio de exemplos genéricos e práticos, são apresentadas, além da teoria, algumas situações envolvendo proporcionalidade. O último capítulo relata o processo de desenvolvimento e avaliação (nos âmbitos: quantitativo e qualitativo) de quatro atividades realizadas em sala de aula. Os resultados das avaliações mostram contribuições significativas ao ensino da matemática.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Proporcionalidade. Ensino da matemática.

Abstract

This work deals with one of the most widespread issues in the culture of any society: proportionality. And shows interest in applying certain concepts of mathematics pure to the teaching of mathematics teaching process. Therefore, we use the resolution problems an effective tool for teaching. The work is divided into three chapters, where: the first is advocated the importance of problem solving. Showing she is a trigger of knowledge and to develop logical reasoning provides a solid and safe learning in mathematics, different-based education in simple repetitions of commands. The chapter also presents the four-step resolution a problem devised by mathematician George Polya and the research context, proportionality basic knowledge, comprehensive, useful and functional. The first chapter ends with a brief reflection on the practice of teaching. In the second chapter, we treat issues of proportionality and the various methods of resolution. Where, by generic and practical examples are shown in addition to the theory, some situations involving proportionality. The last chapter describes the development process and evaluation (in the fields: quantitative and qualitative) four activities in room class. Evaluation results show significant contributions to the teaching of mathematics.

Keywords: Troubleshooting. Proportionality. Mathematics teaching.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

A matemática é "(...) a ciência que investiga relações entre entidades definidas abstrata e logicamente" (FERREIRA, 2000, p. 1102). Ela tem, genericamente, duas principais divisões. A primeira, chamada matemática pura "(...) é aquela que, como a álgebra, a geometria, a topologia, estuda as propriedades das grandezas em abstrato (...)" Id., 2000, p. 1102. A segunda, chamada matemática aplicada "(...) considera as grandezas em determinados campos ou assuntos (...)" Ibid., p. 1102.

Dito de outro modo, a matemática pura estuda as relações lógicas entre as grandezas sem visar, portanto, sua aplicabilidade em algum domínio do conhecimento; ao passo que, a matemática aplicada objetiva aplicar os conceitos abstraídos da matemática pura em algum domínio do conhecimento, tais como: economia, estatística, contabilidade, engenharia, além de outros.

Esta pesquisa está inserida no âmbito da Educação Matemática. Ela visa a aplicação de alguns conceitos da matemática pura ao processo pedagógico do ensino da matemática. Esses conceitos estão relacionados a proporcionalidade e o objetivo a que se propõe é que, após a aplicação: os alunos sejam capazes de identificar situações de proporcionalidade direta, proporcionalidade inversa, as de não proporcionalidade e que ao se depararem com problemas de proporcionalidade não estejam condicionados ao uso restrito da regra de três (uso da qual o aluno faz de forma mecânica).

A pesquisa se orienta, ainda, na tendência de que: a resolução de problemas é uma ferramenta extremamente eficaz ao ensino da matemática, pois desenvolve o raciocínio lógico dos educandos.

Dessa maneira, ou seja, os educandos portando de um raciocínio lógico mais desenvolvido, poderão aprender a matemática em profundidade, indo além da simples superficialidade. Serão, consequentemente, portadores de um conhecimento matemático mais sólido e eficaz. Domínio que não se conquista por meio de decoreba de fórmulas sem uma aplicabilidade consciente[1].

Vale salientar ainda que, à medida que o raciocínio lógico de um indivíduo se tornar mais desenvolvido. Isso terá reflexos não somente no ensino da matemática, mas, na vida do mesmo como um todo. Isso porque, o raciocínio lógico permeia todas e quaisquer atividades subjetivas, práticas e diárias do indivíduo na sociedade.

O corpo do trabalho foi dividido em três capítulos.

---

[1] Chamamos aqui de aplicabilidade consciente ao fato de se fazer algo sabendo, verdadeiramente, o que se está fazendo.

No primeiro capítulo tratamos da resolução de problemas em matemática e fizemos uma breve reflexão sobre a prática de ensinar.

No segundo capítulo, tratamos de questões de proporcionalidade e dos diversos métodos de resolução.

E, por fim, no terceiro é último capítulo, foi relatado todo o processo de avaliação realizado em sala de aula, assim como, foi feita a avaliação dos resultados.

Ao término desta pesquisa esperamos ter trazido alguma contribuição, para que o ensino da matemática se torne mais eficaz e prazeroso. E forme, consequentemente, muitos novos cientistas pesquisadores na área da matemática.

1 A resolução de problemas de matemática

"É através de situações e de problemas a resolver que um conceito adquire sentido."
Gérard Vergnaud

1.1 Importância da resolução de problemas

É fato que, nas escolas, por muito tempo a ênfase do ensino da matemática esteve nas técnicas operatórias e na compreensão dos algoritmos em si e pouca atenção foi dada à compreensão dos conceitos matemáticos e suas consequentes propriedades envolvidas. Este tipo de ensino contribui para que muitos alunos se desmotivem e gradativamente, percam o gosto e o interesse em aprender matemática.

Em sala de aula constata-se o uso exagerado de regras e resolução por meio de procedimento padronizado, desinteressante para professores e alunos. Empregando-se problemas rotineiros e que não desenvolvem a criatividade e autonomia em matemática, assim o trabalho do professor acaba se resumindo em ensinar a realizar cálculos. Aprender matemática requer aprender muito mais do que procedimentos de cálculo. Mais do que destreza no fazer contas e habilidades nas técnicas operatórias, espera-se que os alunos compreendam o que fazem e construam os conceitos envolvidos ou consolidem os já existentes. É nesse sentido que se defende a resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática.

Durante muito tempo, e até hoje em muitas escolas, problemas matemáticos foram (são) utilizados como uma forma de treinar o uso de algoritmos. Assim, a resolução de problemas quando incorporada à prática escolar, aparece como item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem por meio de listagem de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha, da técnica ou formas de resolução memorizadas pelos alunos.

A resolução de problemas deve desencadear a atividade matemática. Um problema não é um exercício ao qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. O problema coloca o aluno em uma situação de questionamento e o leva a pensar por si próprio. Diante da afirmação anterior podemos entender que: se o aluno não for levado a pensar matematicamente e desenvolver uma estratégia de resolução, isto é, não precise identificar o conceito ou conceitos matemáticos que o resolva, o suposto problema é na verdade um exercício, ou seja, fazer contas.

Buscando distinguir um problema matemático de um exercício matemático podemos citar:

> Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operação para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la (BRASIL, 1998).

Entre os vários tipos de problemas podemos destacar os problemas heurísticos os quais requerem a descoberta de informações desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo e não podem ser resolvidos pela aplicação automática de uma fórmula. Para este tipo de problema se faz necessário a criação de um plano de uma estratégia de resolução. O fundamental é que o resolvedor conheça o objetivo a chegar, mas só enfrentará um problema se ela ainda não tem os meios para atingir tal objetivo.

Portanto se o aluno for instigar a interpretar a proposta do enunciado da questão, estruturar algumas ou todas as situações apresentadas, desenvolver estratégias de resolução incluindo a verificação das mesmas e do resultado terá certamente em mãos um problema matemático. Em contrapartida um exercício matemático se resume em uma atividade de treinamento no uso de algum conhecimento matemático já conhecido pelo resolvedor, como aplicação de um algoritmo conhecido, de uma fórmula conhecida. Um exercício exige apenas a aplicação de um procedimento sem a necessidade de criar estratégias para resolvê-lo. É bem verdade que a questão de ser um problema ou um exercício depende de quem estar a resolver.

Deve-se destacar que a proposição de problemas deve estar vinculada aos objetivos didáticos, à realidade escolar e à extra-escolar do aluno. Trata-se, portanto, de trabalhá-los em sala de aula através do desejo dos alunos de resolvê-los.

Para que esse desejo ocorra, o problema evidentemente precisa ser interessante e que após ser resolvido possa também ser explorado. Deste modo, professores e alunos desenvolvem o gosto pela matemática se os problemas desafiarem a curiosidade, estimularem a pesquisa e motivarem a busca por novas estratégias, como consequência isso permitirá o desenvolvimento de capacidades, tais como o pensar, raciocinar, questionar, criar estratégias e compartilhar ideias para encontrar uma solução ao problema. De acordo com Dante:

> A resolução de problemas não deve se constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com a mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver o mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos alunos diante de um problema novo (DANTE, 2007, p.59).

Para se resolver e encaminhar a resolução de um problema, segundo Polya (2006), um grande matemático e pesquisador do tema, quatro etapas principais podem ser empregadas:

- Compreensão do problema

  Para compreender um problema é necessário estimular o aluno a fazer perguntas: o que é solicitado? quais são os dados? quais são as condições? é possível satisfazer as condições? elas são suficientes ou não para determinar a solução? faltam dados? que relações posso estabelecer para encontrar os dados omitidos? que fórmulas e/ou algoritmos posso utilizar? Neste processo de compreensão do problema, muitas vezes se torna necessário construir figuras para esquematizar a situação proposta, destacando valores, correspondência e uso da notação matemática.

- Construção de uma estratégia de resolução

  É importante estimular o aluno a buscar conexões entre os dados e o que é solicitado, estimulando também, que pensem em situações similares, a fim de que possam estabelecer um plano de resolução, definindo prioridades e, se necessário, investigações complementares para resolver o problema.

- Execução de uma estratégia escolhida

  Esta etapa é o momento de executar o plano idealizado. Se as etapas anteriores foram bem desenvolvidas, esta será, provavelmente a etapa mais fácil do processo de resolução de um problema. Para que o aluno seja bem-sucedido, este deve ser estimulado a realizar cada procedimento com muita atenção, estando atento a cada ação desenvolvida, verificando cada passo. O aluno também deve ser encorajado a mostrar que cada procedimento realizado está correto, proporcionando ao mesmo tempo o seu aprendizado e a comunicação da sua produção.

- Revisão da solução

  É o momento em que também se aprende, pois propicia uma refinação e uma abstração da solução do problema. A refinação tem por objetivo verificar os procedimentos utilizados, procurando simplificá-los, isto é, procurar resolver o problema de forma mais simples. A finalidade da abstração é refletir sobre o processo realizado procurando desvendar a consistência do problema e do método empregado para resolvê-lo, de modo a favorecer uma transposição do aprendizado adquirido neste trabalho para a resolução de outros problemas.

A importância da resolução de problemas está no fato de possibilitar aos alunos mobilizarem conhecimentos e desenvolverem a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance dentro e fora da sala de aula. Desta forma, os alunos podem ampliar seus conhecimentos referentes a conceitos e procedimentos matemáticos.

> É possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar o raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem no seu dia a dia, na escola ou fora dela (DANTE, 2007, p. 11-12).

Despertar no aluno o gosto pela resolução de problemas não é tarefa fácil, muitos são os momentos nos quais podem ocorrer dificuldades, obstáculos e erros. Porém, sendo o problema interessante o professor terá de início, ao seu favor, a atenção do aluno e isso contribuirá para uma melhor aprendizagem uma vez que a falta desta tem sido um dos fatores principais para o insucesso escolar. Por isso, quanto a esse aspecto, podemos dizer que todo professor quando começa a trabalhar com resolução de problemas que exigem habilidades matemáticas deve ter objetivos concretos que favoreçam seus alunos na produção de determinadas transformações, isto é, que eles adquiram certos conhecimentos e capacidades. O ensino, os métodos didáticos empregados, devem estar em função destes objetivos.

Em sala de aula, o professor pode trabalhar com as tentativas e os erros dos alunos, observando o caminho usado para chegar à solução do problema. Essa observação servirá para compreender o raciocínio dos educandos e preparar as discussões em torno da resolução desses problemas, com intuito de conceber processos de resoluções diferentes dos já aprendidos.

Sabendo que o trabalho com a resolução de problemas sempre envolvem aspectos mais amplos da construção dos conhecimentos escolares, a começar pelo fato destes conhecimentos estarem inseridos em contextos. A seleção que o professor fizer sobre os contextos, a delimitação das aproximações que eles terão com o universo de experiências vividas pelos alunos, será fundamental para determinar o grau de envolvimento destes com as questões que lhes forem propostas. Na próxima seção será apresentado o contexto em que se pretende trabalhar.

1.2 O contexto proporcionalidade

Tendo em vista o exposto logo acima e a necessidade da escolha de um conteúdo para se trabalhar achou-se que o contexto proporcionalidade teria uma boa aproximação com o universo de experiências vividas pelos alunos. Pois é um assunto básico, a maior parte das situações-problemas do dia a dia são as que envolve as quatro operações e proporcionalidade, e ao mesmo tempo abrangente pois tem aplicações em muitas áreas do conhecimento onde podemos citar entre outras na Química, Geografia, Física, Engenharia civil. Para se ter uma ideia da importância da proporcionalidade na vida escolar do aluno, praticamente todo o conteúdo de Física do ensino médio é regido por relações de proporcionalidade. Um fator que também deve ser considerado é a forma como vem sendo tratado e ensinado pele maioria dos livros didáticos e professores. A regra de três simples e composta, por exemplo, é abordada dentro do processo de ensino-aprendizagem de forma mecânica e assim desprovida de sentido para o aluno.

> A conceituação matemática fundamenta-se em uma série de objetos e relações que não são apenas numéricas. Pensemos, por exemplo, nas situações de proporção, que são muito importante na matemática: nelas não há somente números, há também relações entre grandezas de mesma

> natureza e de naturezas diferentes, e tudo isso não é só puramente numérico (VERGNAUD, 2012, p. 15).

Profissionais dos mais variados ramos da sociedade se utilizam desse conceito, alguns sem o conhecimento formal no caso de um simples pedreiro na elaboração do orçamento de uma construção outros com bastante conhecimento teórico no caso o engenheiro ou até mesmo o médico na administração de um remédio. Por esses e outros motivos se considera que é importante ensiná-lo demonstrando que é um conhecimento útil e funcional, e esse é um ponto importante pois muitos alunos vêm a matemática divorciada da vida prática e até mesmo do mundo real. No entanto é um recurso utilizado durante toda nossa vida e em todas as profissões. Os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem para o terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental o estudo da proporcionalidade. Apresentando um dos objetivos a serem atingidos:

> Do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: observar a variação entre grandezas, estabelecendo relações entre elas e construir estratégias de soluções para resolver situações que envolvam proporcionalidade (BRASIL, 1998).

Ainda dentro deste assunto os Parâmetros Curriculares Nacionais descrevem que é fundamental a proposição de situações-problema que possibilitem o desenvolvimento do sentido numérico e os significados das operações.“Assim, é desejável explorar no terceiro ciclo problemas que levem os alunos a fazer predições por meio de questões que envolvam aspectos qualitativos e quantitativos . O número encontrado deveria ser maior? ou menor? Quanto menor? Essa resposta faz sentido?(BRASIL, 1998)”. Nesse sentido de questionamento entra o questionamento do professor a si mesmo quanto a sua prática. E isso é o que será tratado a seguir por meio de uma reflexão.

1.3 Reflexão sobre a prática de ensinar

Ensinar e aprender matemática é sempre um desafio para professores e alunos. A arte de ensinar exige senso crítico, pensar certo que é a reflexão. Isso na verdade é mais importante que a prática pois a prática sem a reflexão produz um saber ingênuo, sem rigor metódico, que não satisfaz a curiosidade crítica do aluno (epistemologia). Esse senso crítico, esse pensar certo não é dom, é fruto do esforço que o professor (aprendiz de educador) obtém. No entanto, a prática, embora sendo de um leigo, pode se tornar crítica quando melhorada pela reflexão. Nesse sentido, a ingenuidade é superada pela rigorosidade. É necessário que o estado de curiosidade ingênua do educador mude para a curiosidade epistemológica. “Não podemos fazer uma teoria de aprendizagem da matemática apenas com o cálculo numérico, por isso é necessário trabalhar uma boa noção epistemológica da matemática (VERGNAUD, 2012).”

Se o fumo faz mal a saúde de alguém, não significa parar de fumar, porém, o crescimento do risco faz parar. O aumento do perigo produz novas opções ao ponto de chegar-se a novos compromissos. Essa reflexão e pensar certo chega a sair do campo racional para o emocional, pois quando o elemento identifica o certo e o errado, passa a ter raiva do errado a chamada justa raiva.

Quando perguntado sobre o porquê da matemática continuar sendo um problema para boa parte dos alunos. Responde:

> Porque a matemática é objetivamente difícil e porque ela não é muito bem-ensinada, sobretudo no ensino médio. No ensino fundamental, as crianças entendem suficientemente bem, mas no ensino médio há um formalismo matemático com álgebra, com os teoremas geométricos que são muito difíceis. As crianças não conseguem compreender esse " conhecimento puro", pois é um pouco estranho para elas. (VERGNAUD, 2012, p. 15)

Dewey (1959 apud SANTOS, 2005, p. 95) define três importantes atividades necessárias para a ação reflexiva:

- A abertura de espírito: Remete-se ao desejo ativo de se ouvir mais de uma opinião, de se buscar alternativas e de se admitir a possibilidade do erro.
- Responsabilidade: Requer a ponderação cuidadosa das consequencias que uma determinada ação possa ter na vida pessoal, social e política dos alunos.
- Empenhamento: Predisposição para enfrentar a atividade com curiosidade, honestidade, energia, capacidade de renovação e luta contra a rotina.

2 Questões de proporcionalidades

As seguintes anotações foram extraídas quase que em sua totalidade de Lima et al. (2006), salvo as poucas alterações. Preferimos abordar os trabalhos de Lima uma vez que o mesmo é uma referência nacional para o ensino da Matemática.

"A arte de fazer matemática consiste em achar aquele caso especial no qual haja todos os germes de uma generalização."
David Hilbert

2.1 Métodos de resolução:

Quando constatada uma relação de proporcionalidade três métodos podem ser empregados para resolver um problema. Então vejamos:

2.1.1 O método direto

Esse método é aplicado somente quando os valores apresentado no problema são pequenos ou de fácil manipulação mental garantindo assim uma resposta rápida e direta. Por exemplo: se $2\,kg$ de trigo custa $R\$\,4,00$ quanto se deve pagar por $5\,kg$ de trigo? A resposta nesse caso é imediata pois, como 5 são duas vezes e meia 2. A resposta é $R\$\,10,00$, pois 10 são duas vezes e meia 4.

2.1.2 Redução a unidade

No exemplo acima a redução a unidade consiste em achar primeiro quanto se deve pagar por $1\,kg$ de trigo. Se $2\,kg$ de trigo custa $R\$\,4,00$ logo $1\,kg$ custará 4 dividido por 2 que é igual a 2 e portanto $5\,kg$ custará 5 vezes 2 que dá $R\$\,10,00$. Esquematicamente:

$$\begin{tikzcd} kg & R\$ \\ 2 \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, "\div 2"'] & 4 \arrow[d, bend left, "\div 2"] \\ 1 \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, "\times 5"'] & 2 \arrow[d, bend left, "\times 5"] \\ 5 \arrow[r, dash] & 10 \end{tikzcd}$$

2.1.3 Proporção

Ainda no problema acima seja v o valor que se dever pagar por $5\,kg$ de trigo. Então escrevemos a proporção v está para $5\,kg$ assim como $R\$\,4,00$ está para $2\,kg$. Ou seja:

$$\frac{v}{5} = \frac{4}{2} \Longleftrightarrow 2v = 20 \Longleftrightarrow v = 10$$

Portanto a resposta é $R\$\,10,00$.

2.2 Conceito de proporcionalidade direta

Sejam x e y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é proporcional a x quando:

1. As grandezas x e y acham-se de tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y.
2. Quanto maior for x, maior será y.
3. Se a um valor x_0 corresponde y_0 e c é um número qualquer, então o valor de y que corresponde a $c \cdot x_0$ é $c \cdot y_0$. Simbolicamente: se $x_0 \mapsto y_0$ então $c \cdot x_0 \mapsto c \cdot y_0$.

2.3 Conceito de proporcionalidade inversa

Sejam x e y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é inversamente proporcional a x quando:

1. As grandezas x e y acham-se de tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y.
2. Quanto maior for x, menor será y.
3. Se a um valor x_0 corresponde y_0 e c é um número diferente de zero, então o valor de y que corresponde a $c \cdot x_0$ é $\frac{1}{c} \cdot y_0$. Simbolicamente: se $x_0 \mapsto y_0$ então $c \cdot x_0 \mapsto \frac{1}{c} \cdot y_0$.

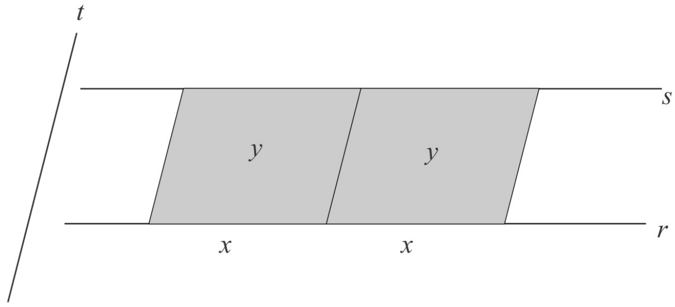
2.4 Relação de proporcionalidade direta

Exemplo 1 *Na Figura 1, temos duas retas paralelas r, s e uma reta t que não é paralela a r (nem a s).*

A cada número positivo x façamos corresponder o número y que mede a área do paralelogramo que tem um lado de comprimento x sobre a reta r,s e um lado paralelo a t. A correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade. A figura ilustra o fato de que:

$$2x \mapsto 2y$$

Figura 1 – Área do paralelogramo em função de um lado



Fonte: Lima et al. (2006)

e indica por que $nx \mapsto ny$.

Dada uma proporcionalidade $x \mapsto y$, *o número* k, *que indica o valor de* y *correspondente a* $x = 1$, *chama-se o* $fator$ *de proporcionalidade.*

Simbolicamente: $1 \mapsto k$. *Então em virtude do item 3º da definição (conceito de proporcionalidade direta) para cada* c, *ao valor* $c = c \cdot 1$ *corresponde* $c \cdot k$. *Usando a letra* x *em vez de* c, *temos* $x \mapsto kx$.

Resumindo: *quando* $x \mapsto y$ *é uma proporcionalidade, existe um número* k *(*$fator$ *de proporcionalidade), tal que:*

$$y = k \cdot x$$

2.4.1 Regra de três

Um tipo de processo matemático útil e milenar, é a chamada *regra de três*. Na regra de três tem-se uma proporcionalidade $x \mapsto y$, e consideram-se valores específicos $x' \mapsto y'$, $x'' \mapsto y''$ da mesma supõe-se que são conhecidos três dos números x', y', x'', y'' e pede-se o quarto desses números.

Sabendo que $y' = k \cdot x'$ e $y'' = k \cdot x''$ vem:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''}$$

Esta proporção nos permite obter um dos números x', y', x'', y'' quando os outros três são conhecidos sem conhecer o fator de proporcionalidade k. Por sua vez, o método da redução à unidade consiste em determinar primeiro o fator k e em seguida calcular $y'' = k \cdot x''$. Como esquematicamente se pode observar:

$$\begin{tikzcd}
X & Y \\
x' \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, "\div x'"'] & y' \arrow[d, bend left, "\div x'"] \\
1 \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, "\times x''"'] & \frac{y'}{x'} \arrow[d, bend left, "\times x''"] \\
x'' \arrow[r, dash] & \frac{y'}{x'} \cdot x''
\end{tikzcd}$$

Ou seja:

$$y'' = \frac{y'}{x'} \cdot x'' \Rightarrow y'' = k \cdot x''$$

Observação 1 *Ao procurar resolver um problema por regra de três é necessário certificar-se primeiro que de fato se tem uma proporcionalidade. Não basta que valha a regra "quanto maior for x, maior será y".*

2.5 Grandeza proporcional a várias outras

Exemplo 2 *Na Figura 2, temos duas semirretas, OA e OB. Sobre elas, nesta ordem, tomamos os segmentos OX, de comprimento x, e OY, de comprimento y, os quais determinam um paralelogramo, cuja área indicaremos com w. Assim, w é função de x e y, o que representaremos assim: $w = f(x, y)$.*

A figura indica que se mantivermos Y fixo e tomarmos OX' de comprimento $2x$, obteremos um paralelogramo, cuja área é $2w$. Ou ainda:

$f(2 \cdot x, y) = 2 \cdot f(x, y)$. A mesma observação mostra que se n é qualquer número natural então $f(n \cdot x, y) = n \cdot f(x, y)$. Isto significa que, mantendo y fixo, a área $w = f(x, y)$ é proporcional a x. De modo análogo se vê que $f(x, n \cdot y) = n \cdot f(x, y)$, ou seja: mantendo x fixo, a área $w = f(x, y)$ é proporcional a y.

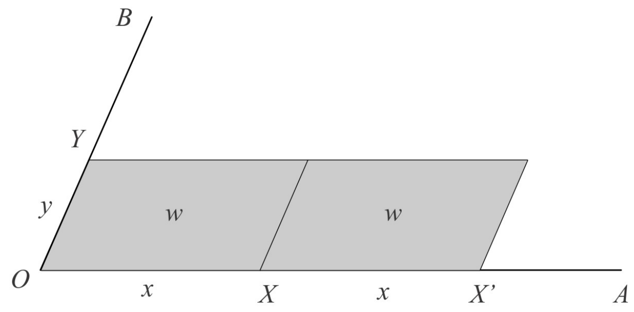
O Teorema Fundamental da Proporcionalidade assegura que $f(c \cdot x, y) = c \cdot f(x, y)$ e $f(x, d \cdot y) = d \cdot f(x, y)$ quaisquer que sejam os números c, d, inteiros ou não. Segue-se então que:

$$w = f(x, y) = f(x \cdot 1, y \cdot 1) = x \cdot f(1, y \cdot 1) = xy \cdot f(1, 1) = k \cdot xy$$

$$w = k \cdot xy$$

Onde $k = f(1, 1)$ é a área de um paralelogramo de lados iguais 1 construído sobre essas semirretas.

Figura 2 – Área do paralelogramo em função dos dois lados x e y

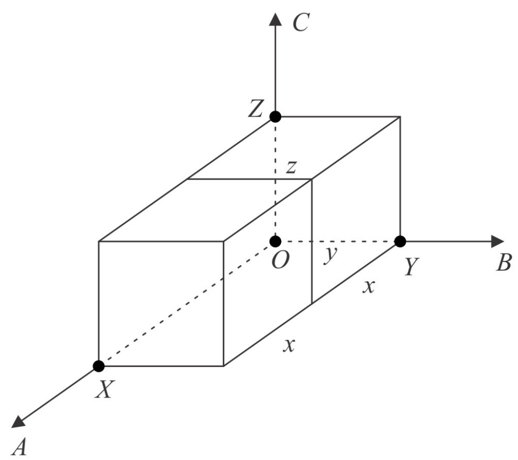


Fonte: Lima et al. (2006)

Exemplo 3 *Analogamente, se tomarmos três semirretas não-colineares OA, OB e OC (com a mesma origem) e tomarmos sobre elas, nesta ordem, os segmentos OX, OY e OZ, de comprimentos x, y e z respectivamente, eles serão as arestas de um paralelepípedo cujo volume indicaremos com $V = V(x, y, z)$ pois ele é função das três variáveis x, y e z. A Figura 3 mostra que se mantivermos y e z fixos e dobrarmos x, o volume dobra: $V(2 \cdot x.y, z) = 2 \cdot V(x, y, z)$. Mais geralmente, para qualquer número natural n tem-se $V(n \cdot x, y, z) = n \cdot V(x, y, z)$.*

Da mesma forma se verifica que $V(x, n \cdot y, z) = n \cdot V(x, y, z)$ e $V(x, y, n \cdot z) = n \cdot V(x, y, z)$. Segue-se daí que $V(c \cdot x, y, z) = c \cdot V(x, y, z)$, $V(x, c \cdot y, z) = c \cdot V(x, y, z)$ e $V(x, y, c \cdot z) = c \cdot V(x, y, z)$ mesmo que o número c não seja inteiro.

Figura 3 – Volume do paralelepípedo em função das arestas x, y e z



Fonte: Lima et al. (2006)

Podemos então escrever:

$$V(x,y,z) = V(x \cdot 1, y, z) = x \cdot V(1, y \cdot 1, z) = xy \cdot V(1,1,z \cdot 1) = xyz \cdot V(1,1,1) = k \cdot xyz$$

Ou de forma mais simples:

$$V = k \cdot xyz$$

onde o fator de proporcionalidade $k = V(1,1,1)$ é o volume do paralelepípedo que tem arestas de comprimento 1, três das quais, com origem O, estão sobre as semi-retas OA, OB, e OC.

Conclusão: w é proporcional a x, y e z quando é proporcional ao produto xyz, ou seja, quando $w = k \cdot xyz$, sendo k o valor de w que corresponde a $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$.

Observação 2 *Sabendo que w é proporcional a x, y, z, podemos escrever $w = k \cdot xyz$. Digamos que conhecemos w' correspondente aos valores conhecidos x', y', z' e se peça w'' correspondente aos valores conhecidos x'', y'', z''. Podemos encontrar w'' fazendo uso da regra de três, que no caso fica:*

$$\frac{w''}{w'} = \frac{p''}{p'}$$

Pois fazendo $p' = x' \cdot y' \cdot z'$, $p'' = x'' \cdot y'' \cdot z''$ e sabendo que:

$$w'' = k \cdot x'' \cdot y'' \cdot z'' \text{ e } w' = k \cdot x' \cdot y' \cdot z'$$

Considerando também que os valores apresentados são todos diferentes de zero podemos escrever:

$$\frac{w''}{w'} = \frac{k \cdot x'' \cdot y'' \cdot z''}{k \cdot x' \cdot y' \cdot z'} = \frac{x'' \cdot y'' \cdot z''}{x' \cdot y' \cdot z'} = \frac{p''}{p'}$$

Sob o ponto de vista metodológico se crer que é mais conveniente reduzir, desta maneira, os problemas de regra de três compostas a problemas de regra de três simples. E ainda porque o nome regra de três não caberia, nesse caso poderia até ser chamado de regra de sete; pois são conhecidos sete valores $w', x', y', z', x'', y'', z''$; mas não de regra de três.

2.6 Relação de proporcionalidade inversa

Sendo constatada uma proporcionalidade inversa $x \mapsto y$ e sendo k o valor de y que corresponde a $x = 1$, ou seja:

$$\text{se } 1 \mapsto k \text{, então o valor de } y \text{ que corresponde a } x = x \cdot 1 \text{ é } \frac{1}{x} \cdot k = \frac{k}{x}.$$

Na notação funcional: se $y = f(x)$, com y inversamente proporcional a x então:

$$f(x) = f(x \cdot 1) = \frac{1}{x} \cdot f(1) = \frac{1}{x} \cdot k = \frac{k}{x}$$

.

Resumindo: quando y é inversamente proporcional a x, existe uma constante k (o fator de proporcionalidade) tal que:

$$y = \frac{k}{x}$$

.

Exemplo 4 *Suponha que uma pizza seja fatiada em p pedaços iguais de m gramas cada. A relação $p \mapsto m$ é uma proporcionalidade inversa. Digamos, por exemplo, que a pizza foi fatiada em 4 pedaços iguais de $240\,g$ cada. Podemos concluir, esquematicamente, que certamente teremos:*

$$\begin{tikzcd}
P & M \\
4 \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, "\times 2"'] & 240 \arrow[d, bend left, "\div 2"] \\
8 \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, "\times \frac{3}{2}"'] & 120 \arrow[d, bend left, "\div \frac{3}{2}"] \\
12 \arrow[r, dash] & 80
\end{tikzcd}$$

$$4\,pedaços \mapsto de\,240g,\ 8\,pedaços \mapsto de\,120g,\ 12\,pedaços \mapsto de\,80g$$

Assim para esse problema temos o modelo matemático, proporcionalidade inversa:

$$m = \frac{k}{p}$$

onde o fator de proporcionalidade k representa a massa total da pizza.

Observação 3 *A igualdade $y = \frac{k}{x} = k \cdot \frac{1}{x}$ significa que y é inversamente proporcional a x se, e somente se, y é diretamente proporcional a $\frac{1}{x}$.*

Como no caso da proporcionalidade direta temos também regra de três inversa. Nela é dada uma grandeza y inversamente proporcional a grandeza x e são considerados valores particulares x' e x'' de x, aos quais correspondem respectivamente os valores y' e y'' de y. Tem-se portanto: $y' = \frac{k}{x'}$ e $y'' = \frac{k}{x''}$ o que permite escrever:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{x'}{x''}$$

A regra de três inversa consiste em supor conhecidos três dos valores x', x'', y', y'' a partir dos quais se calcula o quarto deles usando a proporção apresentada logo acima.

Observação 4 *Para resolver problemas de regra de três diretas ou inversas se costuma usar uma técnica baseada em sentido de setas assim, para situação acima, teríamos o seguinte esquema:*

$$\downarrow \frac{y''}{y'} \quad \frac{x''}{x'} \uparrow \Longrightarrow \downarrow \frac{y''}{y'} = \frac{x'}{x''} \downarrow$$

Com a seguinte explicação: as duas primeiras setas escrevemos com sentidos contrários porque x e y são inversamente proporcionais e depois deixamos as setas no mesmo sentido e resolvemos a proporção. Com certeza o aluno entenderá o que deve ser feito mas não entenderá o porquê desses dois processos. Nesse sentido se vê que a técnica funciona, isto é, conduz a um resultado correto pois já tínhamos visto que, se $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade inversa, podemos escrever:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{x'}{x''}$$

mas em contrapartida o aluno estará apenas repetindo um comando sem ter a mínima ideia porque está procedendo assim.

2.7 Grandezas direta ou inversamente proporcionais a várias outras

A lei da atração universal, de Newton, diz que "a matéria atrai a matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado da distância". Assim, se dois corpos com massas m_1 e m_2 acham-se situados a uma distância d um do outro então, segundo Newton, eles se atraem segundo uma força cuja intensidade f é (diretamente) proporcional a m_1 e m_2 e inversamente proporcional a d^2. Isto significa, como veremos agora, que:

$$f = f(m_1, m_2, d) = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

onde a constante k depende do sistema de unidades utilizado.

Mais geralmente, seja $w = f(x, y, z, u, v)$ uma grandeza diretamente proporcional ás grandezas x, y, z e inversamente proporcional a u e v. Isto quer dizer que

$$f(c \cdot x, y, z, u, v) = c \cdot f(x, y, z, u, v)$$

e

$$f(x, y, z, c \cdot u, v) = \frac{1}{c} \cdot f(x, y, z, u, v)$$

valendo relações análogas para y e z no lugar de x e v no lugar de u. Como se tem $f(x, y, z, u, v) = f(x \cdot 1, y \cdot 1, z \cdot 1, u \cdot 1, v \cdot 1)$ segue-se daí que

$$f(x, y, z, u, v) = xyz \cdot f(1, 1, 1, u \cdot 1, v \cdot 1) = \frac{xyz}{uv} \cdot f(1, 1, 1, 1, 1)$$

. Logo

$$f(x, y, z, u, v) = k \cdot \frac{xyz}{uv},$$

onde $k = f(1, 1, 1, 1, 1)$ é o fator de proporcionalidade.

Resumindo: Se $w = f(x, y, z, u, v)$ é diretamente proporcional a x, y, z e inversamente proporcional a u, v então w é diretamente proporcional a $\frac{xyz}{uv}$. Esta observação permite reduzir os chamados problemas de regra três compostas mista a problemas de regra de três simples e direta (os quais são realmente regra de três, não regra de quatro, cinco ou seis).

Vejamos como fica a resolução do problema abaixo levando em conta a consideração feita no resumo acima:

Exemplo 5 *Dois pintores trabalhando* 6 *horas por dia conseguem pintar um muro de* $2\,m$ *altura e* $50\,m$ *de comprimento em* 8 *dias, quando é aplicada* 3 *demão de tinta. Quantos pintores devem ser contratados para pintar um muro de* $3\,m$ *de altura,* $75\,m$ *de comprimento, trabalhando* 4 *horas por dia, em* 12 *dias e sendo aplicada* 4 *demão de tinta?*

Neste problema, a grandeza número de pintores p é diretamente proporcional as grandezas comprimento c, altura a, número de demão m e inversamente proporcional as grandezas horas diárias de trabalho h e número de dias disponíveis d. Portanto podemos escrever:

$$p = k \cdot \frac{acm}{hd}$$

substituindo os valores temos

$$2 = k \cdot \frac{2 \cdot 50 \cdot 3}{6 \cdot 8} \Rightarrow k = \frac{8}{25}$$

portanto

$$p = \frac{8}{25} \cdot \frac{3 \cdot 75 \cdot 4}{4 \cdot 12} \Rightarrow p = 6\,pintores.$$

Observação 5 *Há diversos processos mnemônicos para resolver problemas de regra de três composta. Todos eles tendem a ser esquecidos. A fórmula $w = k \cdot \frac{x \cdot y \cdot z}{u \cdot v}$ (ou suas análogas) apresenta a vantagem de que seus componentes desenpenham papéis naturais: x, y, z no numerador porque w lhes é diretamente proporcional; u, v no denominador porque w é inversamente proporcional a seus valores.*

O problema do exemplo 5 pode ser resolvido por meio de uma regra de três simples. Sabendo que p é diretamente proporcional a $\frac{a \cdot c \cdot m}{h \cdot d}$ e que $p = 2$ quando $a = 2$, $c = 50$, $m = 3$, $h = 6$ e $d = 8$. Noutras palavras, sabendo que $p = 2$ quando $\frac{a \cdot c \cdot m}{h \cdot d} = \frac{25}{4}$. Queremos calcular p quando $a = 3$, $c = 75$, $m = 4$, $h = 4$ e $d = 12$, ou seja, quando $\frac{a \cdot c \cdot m}{h \cdot d} = \frac{75}{4}$. Observando que para sair de $\frac{25}{4}$ para $\frac{75}{4}$ se basta multiplicar a primeira fração por três. A regra de três poderia ser resolvida usando o esquema abaixo, assim:

$$
\begin{tikzcd}
\frac{acm}{hd} & P \\
\frac{25}{4} \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, "\times 3"'] & 2 \arrow[d, bend left, "\times 3"] \\
\frac{75}{4} \arrow[r, dash] & 6
\end{tikzcd}
$$

Resposta: Será necessário contratar 6 pintores. Sendo que poderiamos também encontrarmos p escrevendo e resolvendo a proporção:

$$\frac{p}{2} = \frac{\frac{75}{4}}{\frac{25}{4}} = 3 \Rightarrow p = 6\,pintores$$

3 Aplicação de atividades em sala de aula e avaliação de resultado

3.1 Descrição

3.1.1 Descrição das atividades

Devido as circunstâncias do momento; os participantes das atividades eram alunos do 1º ano do ensino médio em período de recuperação e tinham uma carga horária a cumprir: três encontros com $3h/a$ cada, isto é, cada encontro com a duração de 135 minutos, $3h/a$ de $45\,min$; foram desenvolvidas apenas quatro atividades. A atividade 1 (avaliação diagnóstica), onde foi apresentado dez problemas para que os alunos podessem resolver e assim se ter a noção do real estado em que eles se encontravam em questões de proporcionalidade, e a atividade 2, onde foi apresentado os conceitos de proporcionalidade direta e inversa e em seguida entregue dez problemas (os mesmos da avaliação diagnóstica) para que eles identificassem grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não proporcional.

Foram desenvolvidas no primeiro encontro 28/01/15, a primeira em $2h/a$ e a segunda em $1h/a$. Por sua vez a atividade 3, na qual foram discutidos (solucionados) seis problemas, foi executada em 29/01/15 nas $3h/a$ e a 4ª atividade (avaliação pós), resolução de dez problemas, foi realizadas em 04/02/15.

Antes de iniciar a atividade 3, ou seja, antes de começar a resolver os seis problemas com os alunos foi feita uma revisão relativa a atividade 2, pois os resultados demonstraram que os mesmos tiveram um pouco de dificuldade nessa atividade, os problemas das avaliações diagnóstica e pós eram semelhantes em relação ao nível de dificuldade, tanto no enunciado como na maneira de resolução. Os objetivos em cada atividade e no geral serão apresentados a seguir.

3.1.2 Objetivos

Da atividade 1: Verificar o desempenho, o método e a estratégia dos alunos na resolução dos problemas. Pré-supondo ao mesmo tempo que os alunos já haviam estudado esse assunto pelo menos duas vezes: uma no 7º ano e outra no próprio ano em curso, teve-se a curiosidade de encontrar indícios de: como o assunto pode ter sido apresentado aos alunos.

Da atividade 2: Apresentar o conceito de proporcionalidade(direta e inversa) segundo Lima et al. (2006). Dando assim condições para que os alunos pudessem identificar (relacionando a grandeza sobre a qual incide a pergunta com as demais grandezas do problema) grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não proporcional.

Da atividade 3: Apresentar o modo como as grandezas, diretamente e inversamente proporcionais, estão relacionadas matematicamente segundo Lima et al. (2006) e resolver seis problemas seguindo as relações apresentadas. Mostrar em que consiste o princípio do método regra de três.

Da atividade 4: Coletar informações, mediante os resultados da avaliação pós, para que se possa comparar e analisar com os resultados da avaliação diagnóstica e assim verificar a aprendizagem ocorrida.

Considerando o conjunto das quatro atividades esperamos atingir quatro objetivos a serem dominados pelos alunos:

- Identificar as situações que são regidas por proporcionalidade e as que não são.
- Escrever a equação adequada e determinar o fator de proporcionalidade relacionado ao problema.
- Usando o fator de proporcionalidade encontrado. Determinar a solução do problema.
- Construir corretamente a regra de três, nos casos em que os alunos optarem por esse método.

3.1.3 Justificativa da escolha

Por fazer parte do conteúdo estudado pelos alunos do 1º ano do ensino médio e tendo ao mesmo tempo a curiosidade de se ter um vislumbre do modo como o assunto foi "ensinado", sendo um conhecimento útil tanto na sala de aula com fora dela, pela aproximação que o conteúdo tem com o universo de experiências dos alunos e sendo também abrangente é que foi adotada a presente sequência de atividades e a referida turma na qual será aplicada a sequência.

3.2 Avaliação prévia

Acreditamos que, após a aplicação das atividades, os alunos terão mais facilidade para lidar com problemas relacionados a proporcionalidade. Conhecendo os conceitos e as relações de proporcionalidade, que provavelmente será algo novo para eles, se sentirão mais seguros diante da resolução de um problema. Sendo capazes de alcançar os objetivos propostos. No início é bem provável que os alunos reclamem por uma maneira mais fácil de resolução pois é de se esperar que eles tenham dificuldades para resolver as equações relativas aos problemas.

3.3 Metodologia de aplicação

3.3.1 O contexto

A sequência foi aplicada em uma turma de 1º ano do ensino médio do Colégio Estadual de Ensino Médio Álvaro Adolfo da Silveira localizado na avenida Marechal Rondon S/N no bairro Santa Clara. Um colégio tradicional de Santarém, inaugurado em 1º de maio de 1963, foi a primeira escola estadual de Santarém. Possui um diretor(a), três vices diretores que se reversam nos três horários de funcionamento e um corpo de 200 funcionários entre professores, técnicos educacionais, técnicos em administração, apoio e vigias. O colégio se mantém através dos recursos do Governo Federal e Estadual repassados em dois programas, PDDE-FNDE(Programa Dinheiro Direto na Escola-Fundo Nacional de Desenvolvimento do Estudante). O colégio possui, atualmente, 5329 alunos regularmente matriculados dividido em Ensino Médio Regular com a terceira série expandida, sistema Modular de Ensino- SOME, Educação de Jovens e Adultos- EJA, Educação Especial. O colégio possui ainda 18 salas de aulas funcionando nos três turnos, com alunos mistos na faixa etária de 14 a 16 anos no turno do dia e a partir dos 17 anos no turno da noite.

3.3.2 Participantes

Um grupo de 12 alunos voluntários das turmas de 1º ano do ensino médio e em situação de recuperação final. Estes com idade entre 14 e 16 anos.

3.3.3 Condução

Houve 3 encontros, dois no mês de janeiro de 2015 dia 28, 29 e um em fevereiro no dia 4 do mesmo ano.

No dia 28 foram desenvolvidas as duas primeiras atividades, para a atividade 1 foram disponibilizadas $2h/a$, nesta o autor do trabalho foi apresentado ao grupo pelo professor das turmas sendo em seguida explicado, pelo mestrando, como seriam desenvolvidas as atividades em continuação foi aplicada a avaliação diagnóstica, a atividade 2 foi desenvolvida em $1h/a$ nela foi apresentado dois conceitos, o de proporcionalidade direta e o de proporcionalidade inversa. Após ter sido explicado o significado de cada um dos três itens presente nos dois conceitos deu-se início à resolução dos problemas. Essa atividade foi realizada de forma individual por parte dos alunos, além da explicação dos três itens os alunos receberam uma cópia dos dois conceitos. A resolução se deu da seguinte maneira: para cada problema havia três campos para marcação e segundo a identificação feita pelo aluno ele então marcaria um dos campos grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais ou grandezas não proporcionais. O autor enfatizou que os três itens deveriam ser constatados caso as grandezas fossem direta ou inversamente proporcionais. Isso porque, as grandezas não proporcionais cumprem, em muitas situações, os dois primeiros itens.

Na Atividade 3 ocorrida dia 29 foi apresentado o modo como as grandezas, por meio das variáveis que representam os seus valores, estão relacionadas e depois foi feita a resolução das seis questões propostas. Todas as seis questões foram solucionadas seguindo as relações apresentada, sendo que algumas das questões foram resolvidas por regra de três, para esta atividade foram utilizadas as $3h/a$.

Por fim, no dia 4, foi desenvolvida a atividade 4 a qual se constituiu na resolução individual de dez problemas, sendo dado além dos dez problemas uma lista contendo as indagações iniciais segundo Polya (2006), essas indagações eram referentes a primeira etapa de Polya, ou seja, indagações relativas à compreensão do problema.

O autor do trabalho foi o condutor de todas as atividades sendo que em todas elas o professor da turma estava presente e na atividade 3 interagiu, ora dando explicações a mais ora enfatizando o que o autor havia falado.

3.3.4 Instrumentos de coleta de dados

Não houve outros instrumentos de coleta de dados além da aplicação das atividades.

3.3.5 Método de coleta de dados

A coleta de dados foi anotada manualmente. Além disso apenas foi fotografado os alunos realizando as avaliações diagnóstica e pós.

3.4 Análise de resultados

3.4.1 Método de análise

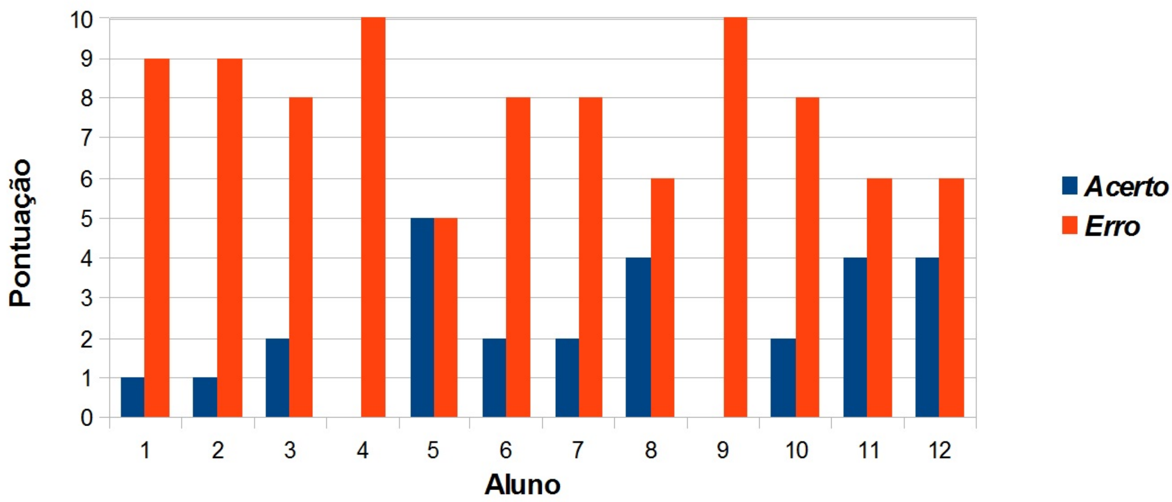
O instrumento e o método de coleta de dados foram organizados e considerados de modo a dar condições para se fazer duas análises, uma quantitativa e outra qualitativa. Na quantitativa analisou-se, comparando por meio de gráfico o número de acertos com o número de erros, os resultados da Atividade 1 - Avaliação Diagnóstica, da Atividade 2 (identificação das grandezas), Atividade 4 - Avaliação Pós e de forma comparativa, entre número de acertos e número de acertos, analisou-se a atividade 1 com a atividade 4. Para a análise qualitativa considerou-se as soluções apresentadas na Avaliação diagnóstica e na Avaliação Pós por um dos componentes do grupo.

3.4.2 Resultados

3.4.2.1 Resultados quantitativos

Os dados coletado da Atividade 1 - Avaliação Diagnóstica permitiram a construção do seguinte gráfico Figura 4. Onde se percebe claramente o baixo nível de entendimento do assunto em questão. Uma vez que: dois alunos o 4 e 9 eraram todos os problemas, dois alunos o 1 e o 2 acertaram apenas um problema, quatro alunos o 3, 6, 7 e o 10 acertaram dois dos problemas, três alunos o 8, 11 e o 12 resolveram corretamente quatro dos dez problemas e apenas um aluno o 5 resolveu cinco dos dez problemas propostos.

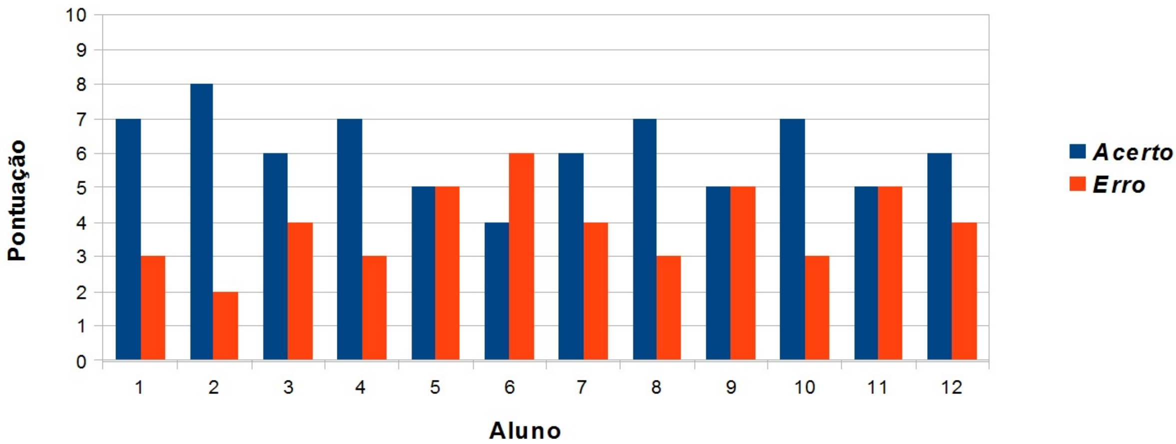
Figura 4 – Avaliação Diagnóstica



Fonte: produzido pelo autor.

Na Atividade 2 onde os alunos deveriam identificar as grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não proporcional a partir dos dois conceitos dado. Houve um certo desempenho pois, somente um aluno o 6 ficou com número de acertos menor que o número de erros. No entanto, considerando que essa é uma parte principal pois refere-se a parte da compreensão do problema, não devemos aceitar o resultado de forma satisfatória pois como se pode observar pela Figura 5, há um curto distanciamento entre número de acertos e números de erros. Como os cálculos envolvidos nos problemas de proporcionalidade não são difíceis pois, na maioria dos casos, remetem as quatro operações. É de fundamental importância que os dados relacionais do problema, no caso a identificação das grandezas é um desses dados, seja totalmente compreendido uma vez que é parte fundamental e indispensável na condução da resolução correta desse tipo de problema.

Figura 5 – Identificação das grandezas



Fonte: produzido pelo autor.

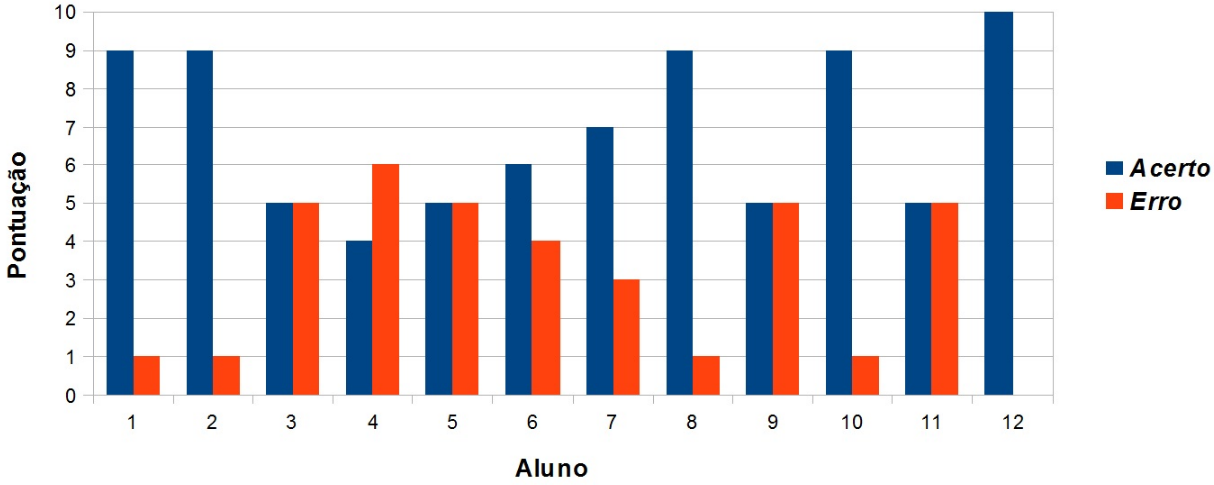
As informações extraídas da Atividade 4 - Avaliação Pós e apresentada pela Figura 6 mostra que, em termos quantitativos, os alunos tiveram um desempenho maior em relação aos resultados apontado pela Figura 4. É importante lembrar que antes de ser desenvolvida a atividade 3 foi revisada a atividade 2 onde os alunos tiveram a oportunidade de tirar suas dúvidas analisando os pontos onde tinham errado. Pois, se não fosse assim, e tendo como base as informações já prestadas pela Figura 5 não se teria argumento suficiente para mostrar tais resultados.

Na Figura 7 onde estão contidos os resultados das duas avaliações (Diagnóstica e Pós). Observa-se, com exerção do aluno 5 (que aparentemente não teve nenhum progresso) e do 4 (o qual ficou com pontuação abaixo da linha de aprovação), que de fato houve um salto significativo em termos quantitativos, número de problemas resolvidos corretamente.

3.4.2.2 Resultados qualitativos

Para a análise qualitativa observaremos as resoluções de um dos componentes do grupo nas duas avaliações (Diagnóstica e Pós). E desse modo procurar identificar quais aspectos da aprendizagem foram desenvolvidos. A observação foi realizada comparando as resoluções na avaliação Diagnóstica e na avaliação Pós e seguindo a seguinte ordem para comparação: Primeiro os problemas com duas grandezas diretamente proporcionais, depois os com duas grandezas inversamente proporcionais em seguida os que não envolvia grandezas proporcionais e por fim os que envolveram mais de duas grandezas. Os problemas

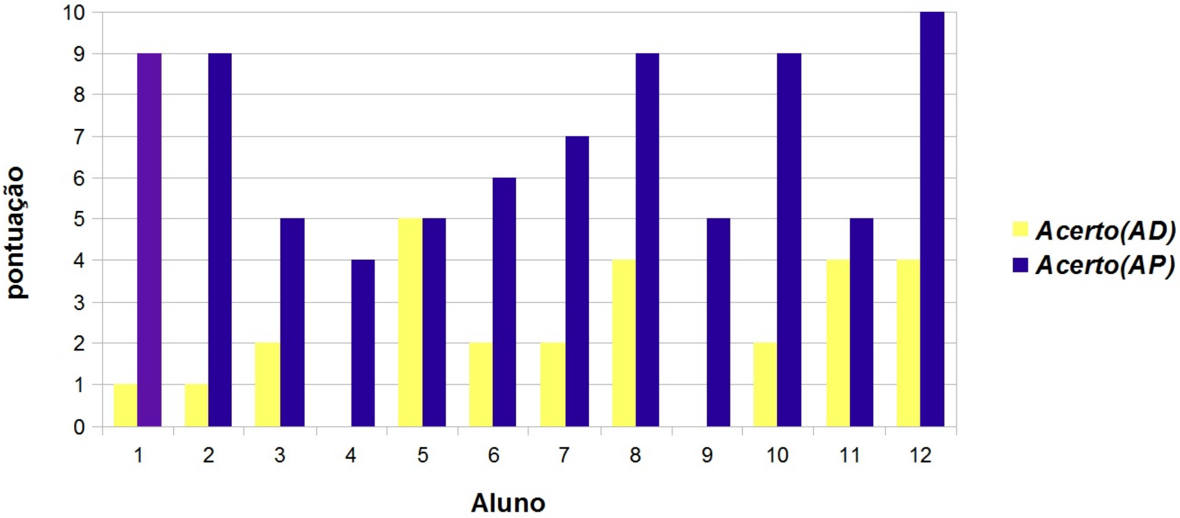
Figura 6 – Avaliação Pós



Fonte: produzido pelo autor.

serão identificados assim, por exemplo, problema 1 - AD (problema 1 da Avaliação Diagnóstica) e problema 3 - AP (problema 3 da Avaliação Pós).

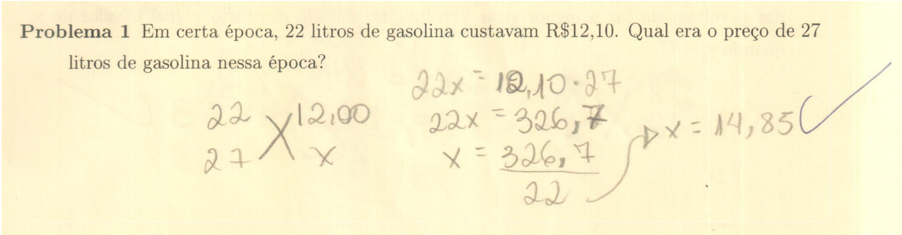
Figura 7 – Comparativo de acertos entre Avaliação Diagnóstica (AD) e Avaliação Pós (AP)



Fonte: produzido pelo autor.

No problema 1 - AD desconsiderando a falta dos dez centavos na construção da regra de três. Vimos que o aluno montou e resolveu corretamente a regra de três relativa ao problema. O problema 10 - AD tambem está correto.

Figura 8 – problema 1 - AD

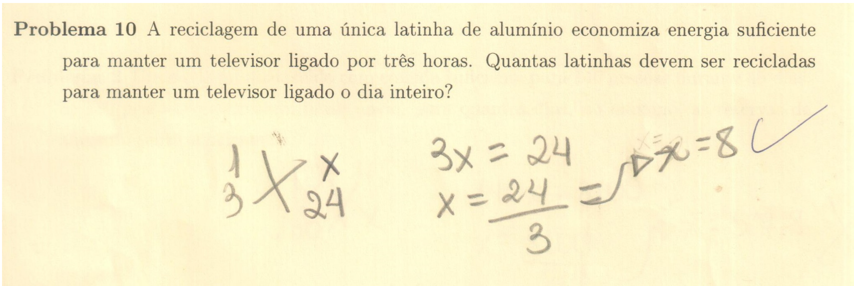

Problema 1 Em certa época, 22 litros de gasolina custavam R\$12,10. Qual era o preço de 27 litros de gasolina nessa época?

22 12,00
27 x

22x = 12,10 · 27
22x = 326,7
x = 326,7 / 22
x = 14,85

Fonte: produzido pelo autor.

Figura 9 – problema 10 - AD

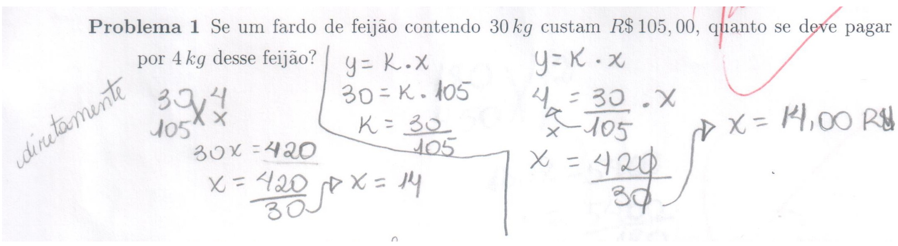

Problema 10 A reciclagem de uma única latinha de alumínio economiza energia suficiente para manter um televisor ligado por três horas. Quantas latinhas devem ser recicladas para manter um televisor ligado o dia inteiro?

1 x
3 24

3x = 24
x = 24 / 3
x = 8

Fonte: produzido pelo autor.

Figura 10 – problema 1 - AP


Problema 1 Se um fardo de feijão contendo 30 *kg* custam *R*\$ 105,00, quanto se deve pagar por 4 *kg* desse feijão?

diretamente

30 4
105 x
30x = 420
x = 420 / 30
x = 14

y = K.x
30 = K.105
K = 30 / 105

y = K.x
4 = 30 / 105 . x
x = 420 / 30
x = 14,00 R\$

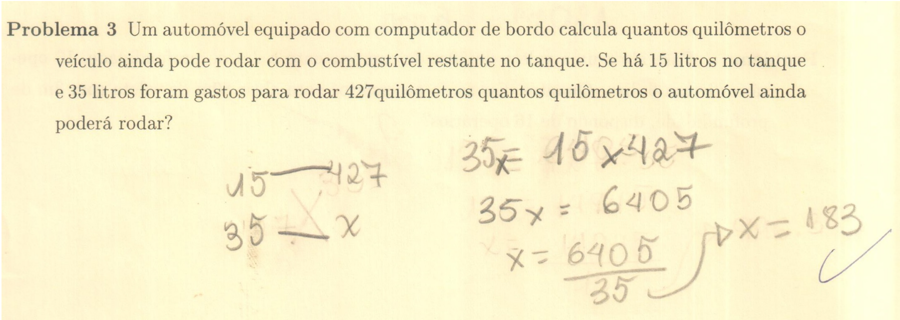
Fonte: produzido pelo autor.

Na resolução do problema 1 - AP temos duas observações a fazer: primeira, houve uma preocupação em identificar a relação entre as duas grandezas, o aluno escreveu ao lado diretamente. Segunda, o aluno resolveu o problema de duas maneiras uma usando a regra de três e outra usando a relação matemática. No caso as duas resoluções estão corretas.

Apesar da resposta final do problema 3 - AD está correta. Observamos que o aluno não conseguiu construir corretamente a regra de três, mesmo depois de fazer mais de uma tentativa como se pode ver pelos dados que foram parcialmente apagados. A resolução do problema 6 - AP está correta. A falta de outras anotações alem do uso da regra de três não dá condições para mais comentários, a multiplicação ao lado refere-se a outro problema.

No problema 2 - AD o aluno não construiu corretamente a regra de três. No

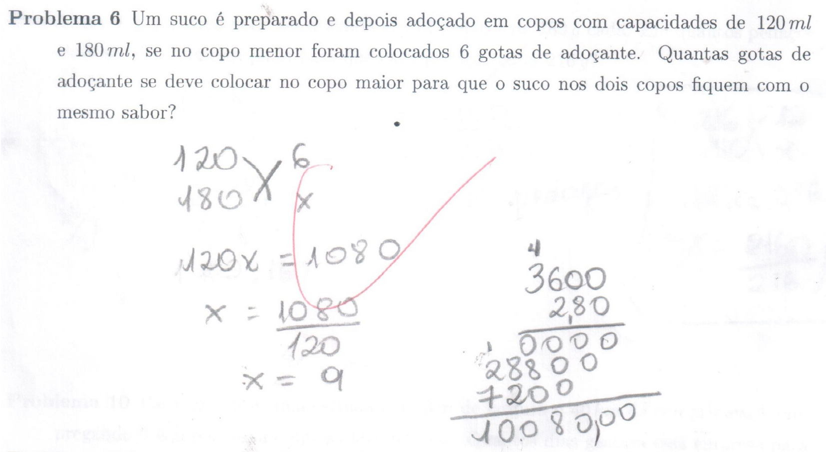
Figura 11 – problema 3 - AD



Problema 3 Um automóvel equipado com computador de bordo calcula quantos quilômetros o veículo ainda pode rodar com o combustível restante no tanque. Se há 15 litros no tanque e 35 litros foram gastos para rodar 427quilômetros quantos quilômetros o automóvel ainda poderá rodar?

Fonte: produzido pelo autor.

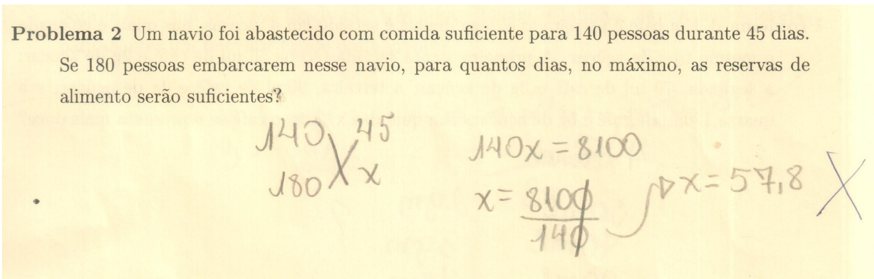
Figura 12 – problema 6 - AP



Problema 6 Um suco é preparado e depois adoçado em copos com capacidades de $120\,ml$ e $180\,ml$, se no copo menor foram colocados 6 gotas de adoçante. Quantas gotas de adoçante se deve colocar no copo maior para que o suco nos dois copos fiquem com o mesmo sabor?

Fonte: produzido pelo autor.

Figura 13 – problema 2 - AD



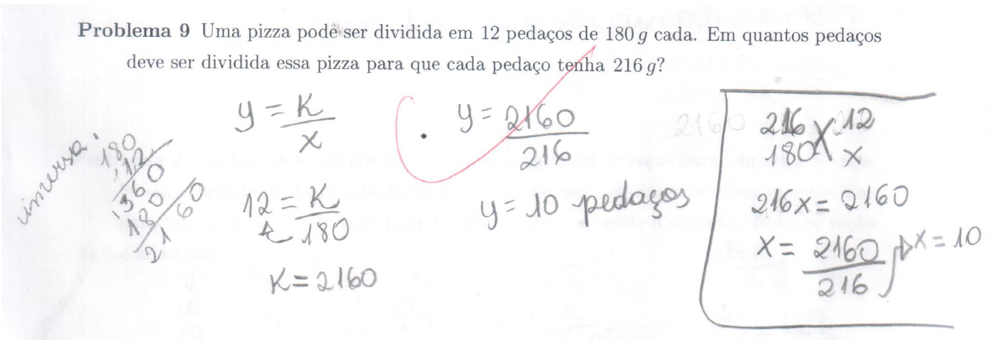
Problema 2 Um navio foi abastecido com comida suficiente para 140 pessoas durante 45 dias. Se 180 pessoas embarcarem nesse navio, para quantos dias, no máximo, as reservas de alimento serão suficientes?

Fonte: produzido pelo autor.

problema 9 - AP podemos observar que o aluno identificou corretamente a relação entre as duas grandezas, escreveu a relação matemática, determinou o fator de proporcionalidade e resolveu o problema de duas maneiras. Uma usando o fator de proporcionalidade e outra por regra de três.

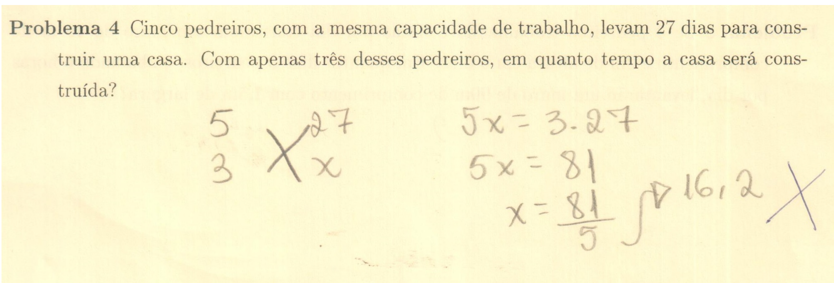
O problema 4 - AD mostra o mesmo erro cometido no problema 2 - AD e no

Figura 14 – problema 9 - AP



Fonte: produzido pelo autor.

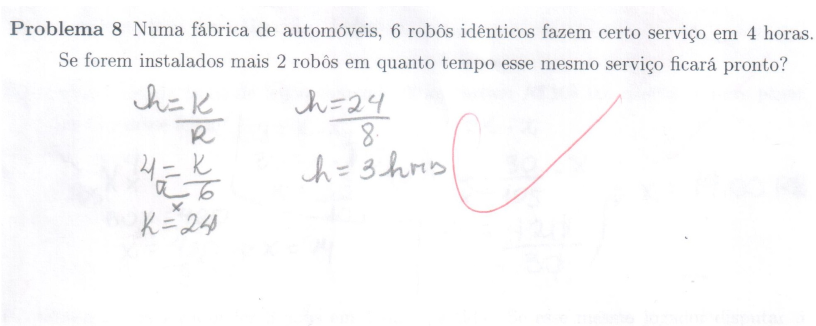
Figura 15 – problema 4 - AD



Fonte: produzido pelo autor.

problema 3 - AD, isto é, o aluno constrói a regra de três de forma errada por não levar em consideração a relação de proporcionalidade (direta ou inversa) entre as duas grandezas.

Figura 16 – problema 8 - AP

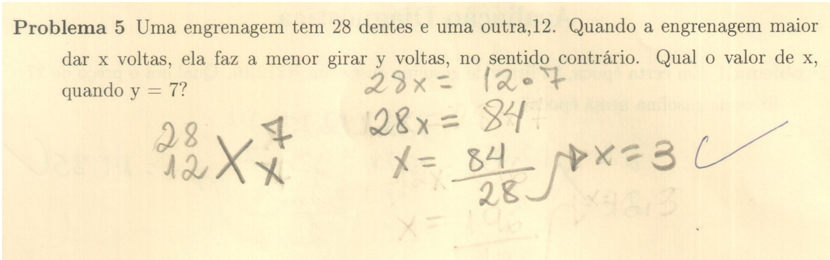


Fonte: produzido pelo autor.

Por outro lado no problema 8 - AP o aluno desenvolve uma resolução considerando os dados relacionais do problema. Ele escreve a relação matemática mostrando que identificou as duas grandezas como sendo inversamente proporcionais e resolve o problema corretamente.

No problema 5 - AD a resolução apresentada está correta mas, no que parece, a

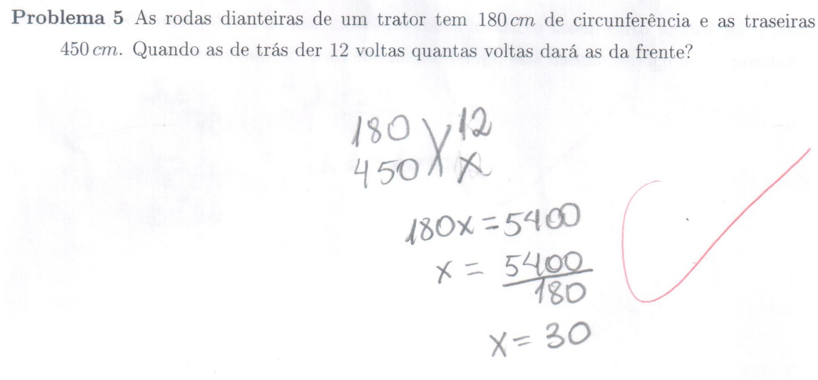
Figura 17 – problema 5 - AD


Problema 5 Uma engrenagem tem 28 dentes e uma outra,12. Quando a engrenagem maior dar x voltas, ela faz a menor girar y voltas, no sentido contrário. Qual o valor de x, quando y = 7?

Fonte: (JAKUBOVIC; LELLIS; CENTURIÓN, 2002).

solução foi do tipo tentativa e erro pois se vê entre os valores parcialmente apagados que havia um 7 no lugar do x e o resultado final $x = 16,3$ que o aluno deu como resultado de $\frac{196}{12}$ indicando que a regra de três tinha sido montada errada, é bem provável que o resultado com vírgula tenha sido o motivo do aluno reconsiderar a sua resolução.

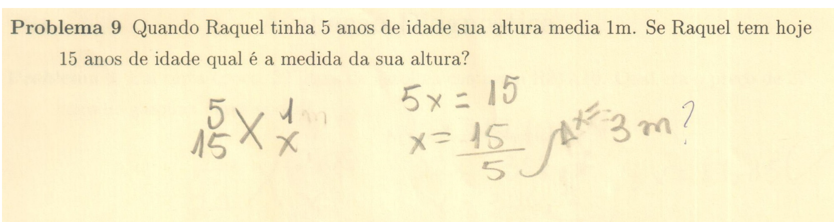
Figura 18 – problema 5 - AP


Problema 5 As rodas dianteiras de um trator tem $180\,cm$ de circunferência e as traseiras $450\,cm$. Quando as de trás der 12 voltas quantas voltas dará as da frente?

Fonte: produzido pelo autor.

Para encontrar a solução do problema 5 - AP o aluno usou a regra de três. No início a montagem da regra de três estava errada, pois se vê um 12 no lugar do x, mas depois ele corrigiu e as contas foram feitas a partir daí.

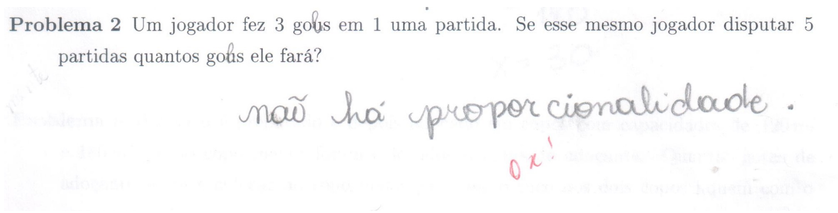
Figura 19 – problema 9 - AD


Problema 9 Quando Raquel tinha 5 anos de idade sua altura media 1m. Se Raquel tem hoje 15 anos de idade qual é a medida da sua altura?

Fonte: produzido pelo autor.

No problema 9 - AD o aluno não identificou a relação entre as grandezas. Que no caso não são proporcionais. No problema 2 - AP o aluno identificou a relação entre as grandezas do problema como não proporcionais e não desenvolveu nenhum cálculo.

Figura 20 – problema 2 - AP


Problema 2 Um jogador fez 3 gols em 1 uma partida. Se esse mesmo jogador disputar 5 partidas quantos gols ele fará?

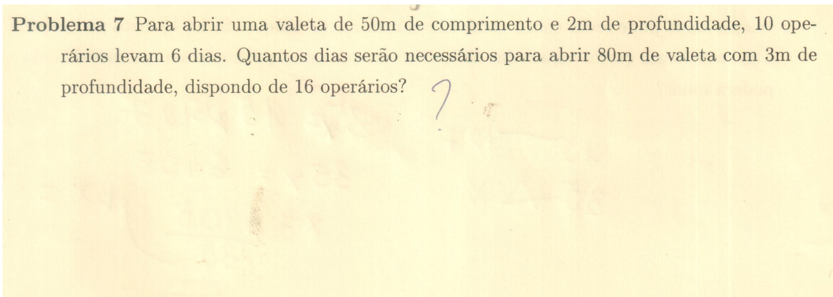
não há proporcionalidade.

ok!

Fonte: produzido pelo autor.

Para o problema 7 - AD e o problema 8 - AD, os quais envolvem mais de duas grandezas, o aluno não fez nenhum registro que se manifesta uma tentativa de resolução.

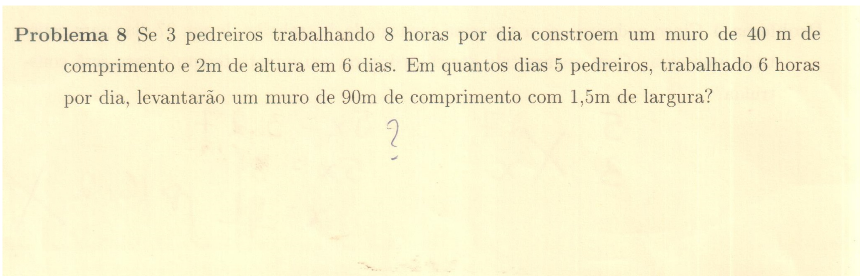
Figura 21 – problema 7 - AD


Problema 7 Para abrir uma valeta de 50m de comprimento e 2m de profundidade, 10 operários levam 6 dias. Quantos dias serão necessários para abrir 80m de valeta com 3m de profundidade, dispondo de 16 operários?

?

Fonte: produzido pelo autor.

Figura 22 – problema 8 - AD


Problema 8 Se 3 pedreiros trabalhando 8 horas por dia constroem um muro de 40 m de comprimento e 2m de altura em 6 dias. Em quantos dias 5 pedreiros, trabalhado 6 horas por dia, levantarão um muro de 90m de comprimento com 1,5m de largura?

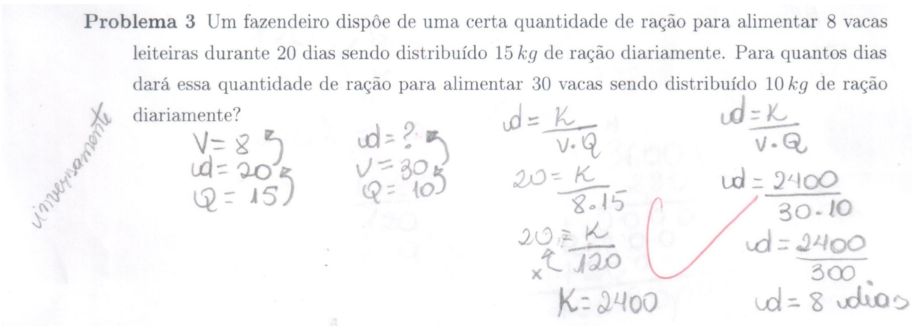
?

Fonte: produzido pelo autor.

Em contrapartida todos os problemas da Avaliação Pós, os quais envolviam mais de duas grandezas foram todos resolvidos. E desconsiderando o fato de que no problema 4 - AP o aluno usou o valor 30 no lugar de 3 para a varável t, o que acarretou a resposta $p = 0,6$ em vez de $p = 6$, todas as resoluções estão corretas.

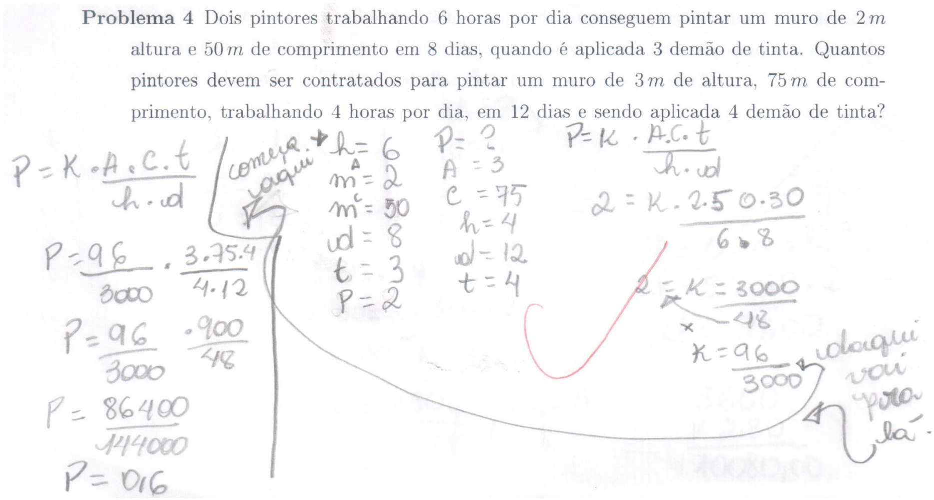
Um ponto importante observado na resolução dos problemas 3, 4, 7 e 10 é o fato de que, em todos eles o aluno escreveu a relação matemática correta. Isso por sua vez,

Figura 23 – problema 3 - AP



Fonte: produzido pelo autor.

Figura 24 – problema 4 - AP



Fonte: produzido pelo autor.

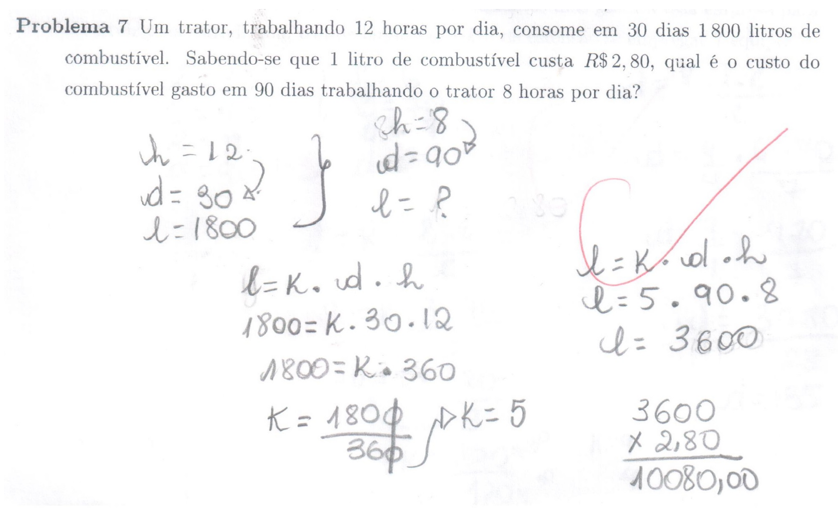
mostra que o aluno foi capaz de identificar corretamente relações de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa. Observamos também que o aluno escolheu de forma conveniente as letras (variáveis) para representar as grandezas de cada problema. Por exemplo, no problema 10-P ele usou l para representar a medida da largura, c para o comprimento, d para o número de dias e e para o número de equipes.

3.5 Avaliação geral e conclusões:

3.5.1 Comparação dos resultados da análise com a avaliação prévia e com os objetivos estabelecidos:

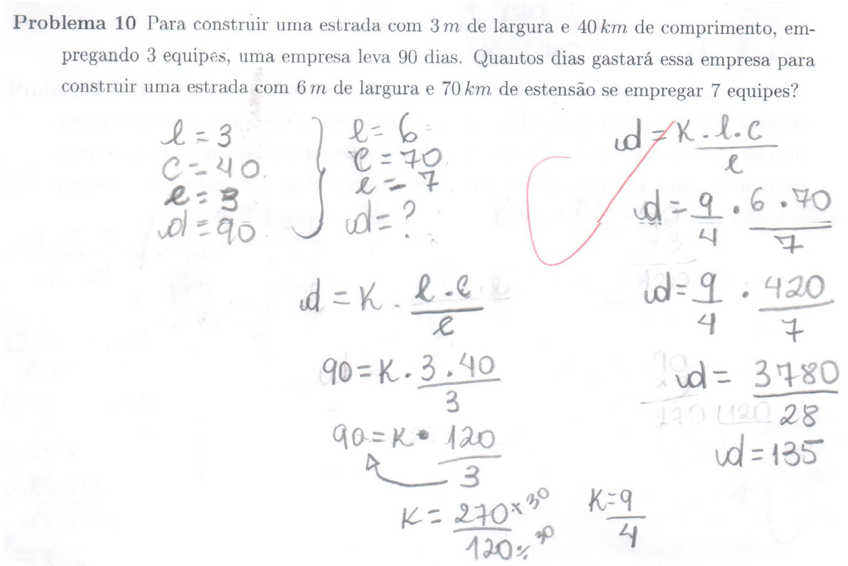
Os resultados quantitativos da análise mostrado na Figura 7 sugere que os objetivos propostos na avaliação prévia foram alcançados, ou seja, os de que os alunos teriam mais facilidade na resolução desse tipo de problema. Por outro lado os resultados qualitativos

Figura 25 – problema 7 - AP



Fonte: (IEZZI; HAZZAN; DEGENSZAJN, 2004).

Figura 26 – problema 10 - AP



Fonte: produzido pelo autor.

nos dá um pouco mais de confiança para afirmar: os objetivos estabelecidos foram atingidos. De fato, na Avaliação Diagnóstica nenhum aluno identificou, no caso, no problema 9 - AD, as grandezas do presente problema como não proporcionais. Já na Avaliação Pós apenas quatro alunos não identificaram, no caso, no problema 2 - AP, que as grandezas eram não proporcionais.

Chegou-se também a seguinte conclusão: Os alunos que utilizaram, em vários momentos, as relações matemáticas, apresentadas na seção questões de proporcionalidade, para resolver os problemas propostos, como foi o caso do aluno escolhido para a avaliação quantitativa, tiveram um desempenho superior em relação aos que utilizaram, com mais frequência, a regra de três simples ou a "regra de três composta".

A propósito, não foi identificado na Avaliação Diagnóstica nenhuma outra estratégia de resolução além do uso da proporção ou da regra de três. Assim somos levado a crer que o ensino ao qual os alunos tiveram a respeito de proporcionalidade não passou do uso mecânico, e portanto desprovido de sentido para eles, da regra de três.

3.5.2 Críticas e sugestões para a aplicação da atividade:

A sequência foi desenvolvida com um número pequeno de atividades, a duração de cada seção poderia ser menor, 2h/a cada uma em vez de $3h/a$ e para o desenvolvimento da atividade 3 as fórmulas $y = k \cdot x$ (para duas grandezas diretamente proporcionais) e $y = \dfrac{k}{x}$ (para duas grandezas inversamente proporcionais) foram apenas apresentadas. Então nossa sugestão ao se propor uma sequência de atividade abordando o presente tema é, em primeiro lugar que seja observado os três pontos mencionados, isto é, a sequência deve contemplar mais atividades, a duração de cada seção seja de $2h/a$ e que seja destinada uma atividade com o objetivo de se obter, a patir dos conceitos de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa, as duas fórmulas mensionadas anteriormente.

Uma outra sugestão é que, entre outras atividades a serem acrescidas haja uma que contemple o preenchimento de tabelas (no intuito de desenvolver o raciocínio multiplicativo).

Por ser um assunto pertencente ao conteúdo de estudo do 7º ano do ensino fundamental, as atividades podem, e devem ser aplicadas também nessa série. O próprio professor da turma, dentro do seu tempo destinado ao ensino deste assunto, pode desenvolver as atividades em suas aulas, em outras palavras, as atividades devem fazer parte do trabalho pedagógico do professor.

Considerações Finais

Neste trabalho abordamos o assunto proporcionalidade sob a ótica do ensino baseado na perspectiva da resolução de problemas. Vimos de início, por meio de uma pesquisa bibliográfica, qual a importância da resolução de problemas na proposta de ensino da matemática. Sabendo que ensinar não se traduz, necessariamente, em transferência direta de conhecimento fizemos uma breve reflexão sobre a arte de ensinar, apontando que ela exige senso crítico sobre a prática. Apresentamos os conceitos fundamentais de proporcionalidade (sem os quais seria difícil a apresentação e o desenvolvimento desse assunto), as relações advindas deles e alguns dos métodos usados na resolução de problemas envolvendo a proporcionalidade.

Com as orientações anteriores desenvolvemos e aplicamos as quatro atividades em sala de aula. Fizemos a análise dos resultados tendo por base três momentos, sendo que em dois deles consideramos dois aspectos, o quantitativo e o qualitativo.

Primeiro momento, Avaliação Diagnóstica. A partir dele, entendemos que os alunos não tinham, até então, assimilado tal conhecimento. Segundo momento, os alunos trabalharam a parte da identificação das grandezas. No terceiro momento, Avaliação Pós, presenciamos aspectos significativos de aprendizagem.

Ao término deste trabalho Chegou-se a conclusão de que o ensino da matemática é mais eficiente quando fundamentado, primeiramente, na compreensão dos conceitos e sendo ao mesmo tempo trabalhado dentro de um contexto concreto de aplicabilidade.

Os objetivos que tínhamos proposto foram alcançados. Uma vez que, os alunos identificaram e diferenciaram situações de proporcionalidade direta, inversa bem como as de não proporcionalidade. Nos problemas onde não empregaram a regra de três, escreveram a relação matemática e ao encontrar o fator de proporcionalidade reutilizaram a relação para determinar a solução do problema. Teve ainda casos onde o problema foi solucionado de duas maneiras.

Este trabalho representa o fruto do meu esforço e de minha preocupação em querer ser melhor no que faço, ensinar matemática. Ele certamente me será útil na vida profissional porque me permitiu descortinar um caminho seguro no ensino da matemática.

Referências

BRASIL, C. E. F. *Parâmetros curriculares Nacionais: Matemática*: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 17.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de matemática*. 12. ed. São Paulo: Editora Ática, 2007. (Educação). Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

DEWEY, J. *Como pensamos*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959. Citado na página 18.

FERREIRA, A. B. de H. *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*. 2a. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000. Citado na página 11.

IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. *Fundamento de Matemática Elementar*. 1a. ed. São Paulo: Atual Editora, 2004. Citado na página 42.

JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M.; CENTURIÓN, M. *Matemática na medica certa - 6a série*. 9a. ed. São Paulo: Editora Scipione, 2002. Citado na página 39.

LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas elementares*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (Coleção Professor de Matemática). Citado 6 vezes nas páginas 19, 21, 23, 30, 49 e 53.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 14, 32 e 54.

SANTOS, A. L. C. dos. *Didática para a licenciatura: subsídios para a didática de ensino*. 2. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2005. Citado na página 18.

VERGNAUD, G. Entrevista: a matemática além dos números. *Revista Pátio Ensino Médio*, n. 13, p. 14–17, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

Apêndices

APÊNDICE A – Atividades desenvolvidas em sala de aula

A.1 Atividade 1 - Avaliação Diagnóstica

A.1.1 Objetivo:

Verificar o desempenho, o método e a estratégia dos alunos na resolução dos problemas.

A.1.2 Material:

Questionário contendo dez problemas.

A.1.3 Tarefa:

Os alunos deverão resolver os problemas individualmente.

Problema 1 Em certa época, 22 litros de gasolina custavam $R\$ \, 12,10$. Qual era o preço de 27 litros de gasolina nessa época?

Problema 2 Um navio foi abastecido com comida suficiente para 140 pessoas durante 45 dias. Se 180 pessoas embarcarem nesse navio, para quantos dias, no máximo, as reservas de alimento serão suficientes?

Problema 3 Um automóvel equipado com computador de bordo calcula quantos quilômetros o veículo ainda pode rodar com o combustível restante no tanque. Se há 15 litros no tanque e 35 litros foram gastos para rodar 427 quilômetros quantos quilômetros o automóvel ainda poderá rodar?

Problema 4 Cinco pedreiros, com a mesma capacidade de trabalho, levam 27 dias para construir uma casa. Com apenas três desses pedreiros, em quanto tempo a casa será construída?

Problema 5 Uma engrenagem tem 28 dentes e uma outra,12. Quando a engrenagem maior dar x voltas, ela faz a menor girar y voltas, no sentido contrário. Qual o valor de x, quando $y = 7$?

Problema 6 Um café é preparado e, logo depois é servido em 4 xícaras, nas quais é colocado o mesmo tipo de açúcar. A primeira xícara servida recebe $50\,ml$ de café e

2g de açúcar; a segunda, 70 ml de café e 3g de açúcar; a terceira, 90 ml de café e 4g de açúcar; e a quarta,120ml de café e 5g de açúcar. Em qual das xícaras o café se apresenta mais doce?

Problema 7 Para abrir uma valeta de 50m de comprimento e 2m de profundidade, 10 operários levam 6 dias. Quantos dias serão necessários para abrir 80m de valeta com 3m de profundidade, dispondo de 16 operários?

Problema 8 Se 3 pedreiros trabalhando 8 horas por dia constroem um muro de 40 m de comprimento e 2m de altura em 6 dias. Em quantos dias 5 pedreiros, trabalhado 6 horas por dia, levantarão um muro de 90m de comprimento com $1,5$m de altura?

Problema 9 Quando Raquel tinha 5 anos de idade sua altura media 1m. Se Raquel tem hoje 15 anos de idade qual é a medida da sua altura?

Problema 10 A reciclagem de uma única latinha de alumínio economiza energia suficiente para manter um televisor ligado por três horas. Quantas latinhas devem ser recicladas para manter um televisor ligado o dia inteiro?

A.2 Atividade 2

A.2.1 Objetivo:

Apresentar o conceito de proporcionalidade (direta e inversa) segundo Lima et al. (2006). Dando assim condições para que os alunos possam identificar (relacionando a grandeza sobre a qual incide pergunta com as demais grandezas do problema) grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não proporcionais.

A.2.2 Material:

Questionário contendo dez problemas (os mesmos da avaliação diagnóstica).

A.2.3 Tarefa:

Responder individualmente os problemas identificando as grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não proporcional.

A.3 Conceito de proporcionalidade direta

Sejam x e y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é proporcional a x quando:

1. As grandezas x e y acham-se de tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y.
2. Quanto maior for x, maior será y.
3. Se a um valor x_0 corresponde y_0 e c é um número qualquer, então o valor de y que corresponde a $c \cdot x_0$ é $c \cdot y_0$. Simbolicamente: se $x_0 \Rightarrow y_0$ então $c \cdot x_0 \Rightarrow c \cdot y_0$.

A.4 Conceito de proporcionalidade inversa

Sejam x e y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é inversamente proporcional a x quando:

1. As grandezas x e y acham-se de tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y.
2. Quanto maior for x, menor será y.
3. Se a um valor x_0 corresponde y_0 e c é um número diferente de zero, então o valor de y que corresponde a $c \cdot x_0$ é $\frac{1}{c} \cdot y_0$. Simbolicamente: se $x_0 \Rightarrow y_0$ então $c \cdot x_0 \Rightarrow \frac{1}{c} \cdot y_0$.

Tendo em vista os dois conceitos acima responda os seguintes problemas.

Problema 1 Em certa época, 22 litros de gasolina custavam $R\$12,10$. Qual era o preço de 27 litros de gasolina nessa época?. Nesse problema preço a pagar e quantidade em litros de gasolina são grandezas:

A)( ) diretamente proporcionais.

B)( ) inversamente proporcionais.

C)( ) não proporcionais.

Problema 2 Um navio foi abastecido com comida suficiente para 140 pessoas durante 45 dias. Se 180 pessoas embarcarem nesse navio, para quantos dias, no máximo, as reservas de alimento serão suficientes: Nesse problema quantidade de dias para os quais a reserva de alimento dará e número de pessoas são grandezas:

A)( ) diretamente proporcionais.

B)( ) inversamente proporcionais.

C)( ) não proporcionais.

Problema 3 Um automóvel equipado com computador de bordo calcula quantos quilômetros o veículo ainda pode rodar com o combustível restante no tanque. Se há 15 litros no tanque e 35 litros foram gastos para rodar 427quilômetros quantos quilômetros o automóvel ainda poderá rodar? Nesse problema quantidade em quilômetros que o automóvel pode rodar e quantidade de combustível restante no tanque são grandezas:

A)( ) diretamente proporcionais.

B)( ) inversamente proporcionais.

C)( ) não proporcionais.

Problema 4 Cinco pedreiros, com a mesma capacidade de trabalho, levam 27 dias para construir uma casa. Com apenas três desses pedreiros, em quanto tempo a casa será construída?. Nesse problema quantidade de dias e número de pedreiros são grandezas:

A)( ) diretamente proporcionais.

B)( ) inversamente proporcionais.

C)( ) não proporcionais.

Problema 5 Uma engrenagem tem 28 dentes e uma outra,12. Quando a engrenagem maior dar x voltas, ela faz a menor girar y voltas, no sentido contrário. Qual o valor de x, quando $y = 7$?. Nesse problema número de voltas que a engrenagem dá e quantidade de dentes que ela tem são grandezas:

A)( ) diretamente proporcionais.

B)( ) inversamente proporcionais.

C)( ) não proporcionais.

Problema 6 Um café é preparado e, logo depois é servido em 4 xícaras, nas quais é colocado o mesmo tipo de açúcar. A primeira xícara servida recebe 50 ml de café e 2g de açúcar; a segunda, 70 ml de café e 3g de açúcar; a terceira, 90 ml de café e 4g de açúcar; e a quarta,120 ml de café e 5g de açúcar. Em qual das xícaras o café se representa mais doce?. Nesse problema quantidade de café em ml e quantidade de açúcar em g que cada xícara recebe são grandezas:

A)( ) diretamente proporcionais.

B)( ) inversamente proporcionais.

C)( ) não proporcionais.

Problema 7 Para abrir uma valeta de 50m de comprimento e 2m de profundidade, 10 operários levam 6 dias. Quantos dias serão necessários para abrir 80m de valeta com 3m de profundidade, dispondo de 16 operários? Nesse problema quantidade de dias e comprimento da valeta São grandezas:

A)( ) diretamente proporcionais.

B)( ) inversamente proporcionais.

C)( ) não proporcionais.

Ainda no Problema 7 quantidade de dias e profundidade da valeta são grandezas:

A)( ) diretamente proporcionais.

B)( ) inversamente proporcionais.

C)( ) não proporcionais.

Ainda no Problema 7 quantidade de dias e número de operários são grandezas:

A)( ) diretamente proporcionais.

B)( ) inversamente proporcionais.

C)( ) não proporcionais.

Problema 8 Se 3 pedreiros trabalhando 8 horas por dia constroem um muro de 40 m de comprimento e 2m de altura em 6 dias. Em quantos dias 5 pedreiros, trabalhado 6 horas por dia, levantarão um muro de 90m de comprimento com $1,5$m de altura? Nesse problema quantidade de dias e horas de trabalho por dia são grandezas:

A)( ) diretamente proporcionais.

B)( ) inversamente proporcionais.

C)( ) não proporcionais.

Problema 9 Quando Raquel tinha 5 anos de idade sua altura media 1m. Se Raquel tem hoje 15 anos de idade qual é a medida da sua altura?. Nesse problema idade e altura são grandezas:

A)( ) diretamente proporcionais.

B)( ) inversamente proporcionais.

C)( ) não proporcionais.

Problema 10 A reciclagem de uma única latinha de alumínio economiza energia suficiente para manter um televisor ligado por três horas. Quantas latinhas devem ser recicladas para manter um televisor ligado o dia inteiro?. Quantidade de latinhas e economia de energia em horas de televisor são grandezas:

A)( ) diretamente proporcionais.

B)( ) inversamente proporcionais.

C)( ) não proporcionais.

A.5 Atividade 3

A.5.1 Objetivo:

Apresentar o modo como as grandezas, diretamente e inversamente proporcionais, estão relacionadas matematicamente segundo Lima et al. (2006) e resolver seis problemas seguindo as relações apresentadas. Mostrar em que consiste o princípio do método conhecido como regra de três.

A.5.2 Material:

Questionário contendo seis problemas (alguns da avalição diagnóstica) e sugestões orais segundo Polya. (Que o condutor da atividade fará a si mesmo enquanto estiver resolvendo os problemas).

A.5.3 Tarefa:

O condutor da atividade solucionara os problemas encontrando primeiro a constante de proporcionalidade. Depois fará uso do método regra de três resolvendo alguns dos problemas sem a necessidade de encontrar a constante de proporcionalidade.

Problema 1 Cinco pedreiros, com a mesma capacidade de trabalho, levam 27 dias para construir uma casa. Com apenas três desses pedreiros, em quanto tempo a casa será construída?

Problema 2 Para abrir uma valeta de 50m de comprimento e 2m de profundidade, 10 operários levam 6 dias. Quantos dias serão necessários para abrir 80m de valeta com 3m de profundidade, dispondo de 16 operários?

Problema 3 Se 3 pedreiros trabalhando 8 horas por dia constroem um muro de 40 m de comprimento e 2m de altura em 6 dias. Em quantos dias 5 pedreiros, trabalhado 6 horas por dia, levantarão um muro de 90m de comprimento com $1,5$m de altura?

Problema 4 Em uma feira trocou-se 2kg de tomate por 5kg de batata. Quantos quilos de tomate são necessários para se trocar por 20kg de batata?

Problema 5 Sabe-se $8\,kg$ de café crú resultam em $6\,kg$ de café torrado. Quantos quilos de café crús devem ser levados ao forno para obtermos $24\,kg$ de café torrado?

Problema 6 Um reservatório de abastecimento de água fica completamente cheio em 2 horas quando são acionadas 3 bombas. Se uma das bombas não puder funcionar em quantas horas o reservatório ficará cheio?

A.6 Atividade 4 - Avaliação Pós

A.6.1 Objetivo:

Coletar informações para que se possa comparar e analisar com os resultados da avaliação diagnóstica e assim verificar a aprendizagem ocorrida.

A.6.2 Material:

Questionário contendo dez problemas com nível de dificuldade semelhante ou aos da avaliação diagnóstica e sugestões segundo Polya (2006).

A.6.3 Tarefa:

Os alunos devem resolver individualmente os problemas.

Lista de Problemas

Problema 1 Se um fardo de feijão contendo $30\,kg$ custam $R\$\,105,00$, quanto se deve pagar por $4\,kg$ desse feijão?

Problema 2 Um jogador fez 3 gols em 1 uma partida. Se esse mesmo jogador disputar 5 partidas quantos gols ele fará?

Problema 3 Um fazendeiro dispôe de uma certa quantidade de ração para alimentar 8 vacas leiteiras durante 20 dias sendo distribuído $15\,kg$ de ração diariamente. Para quantos dias dará essa quantidade de ração para alimentar 30 vacas sendo distribuído $10\,kg$ de ração diariamente?

Problema 4 Dois pintores trabalhando 6 horas por dia conseguem pintar um muro de $2\,m$ altura e $50\,m$ de comprimento em 8 dias, quando é aplicada 3 demão de tinta. Quantos pintores devem ser contratados para pintar um muro de $3\,m$ de altura, $75\,m$ de comprimento, trabalhando 4 horas por dia, em 12 dias e sendo aplicada 4 demão de tinta?

Problema 5 As rodas dianteiras de um trator tem $180\,cm$ de circunferência e as traseiras $450\,cm$. Quando as de trás der 12 voltas quantas voltas dará as da frente?

Problema 6 Um suco é preparado e depois adoçado em copos com capacidades de $120\,ml$ e $180\,ml$, se no copo menor foram colocados 6 gotas de adoçante. Quantas gotas de adoçante se deve colocar no copo maior para que o suco nos dois copos fiquem com o mesmo sabor?

Problema 7 Um trator, trabalhando 12 horas por dia, consome em 30 dias 1 800 litros de combustível. Sabendo-se que 1 litro de combustível custa $R\$ 2,80$, qual é o custo do combustível gasto em 90 dias trabalhando o trator 8 horas por dia?

Problema 8 Numa fábrica de automóveis, 6 robôs idênticos fazem certo serviço em 4 horas. Se forem instalados mais 2 robôs em quanto tempo esse mesmo serviço ficará pronto?

Problema 9 Uma pizza pode ser dividida em 12 pedaços de $180\,g$ cada. Em quantos pedaços deve ser dividida essa pizza para que cada pedaço tenha $216\,g$?

Problema 10 Para construir uma estrada com $3\,m$ de largura e $40\,km$ de comprimento, empregando 3 equipes, uma empresa leva 90 dias. Quantos dias gastará essa empresa para construir uma estrada com $6\,m$ de largura e $70\,km$ de extensão se empregar 7 equipes?

Lista de Indagações e Sugestões

Problema 1

- Quais são os dados do problema?
- Qual é a incógnita?
- Com esses dados a incógnita fica determinada?
- Essas informações são suficientes para determinar a incógnita?

Problema 2

- Quais são os dados do problema?
- Qual é incógnita?
- Essas informações são suficientes para determinar a incógnita?

Problema 3

- O que o problema requer?
- Que informação é dada?
- Com essas informações temos condições de dá a resposta?
- O que você pode afirmar, com certeza, a respeito do número de dias quando forem aumentado o número de vacas? diminuida a quantidade de ração diária?

Problema 4

- Quais são os dados do problema?
- Qual é a incógnita?
- Com essas informações temos condições de dá a resposta?
- Que relação podemos estabelecer entre a incógnita e o número de demãos? e com as outras grandezas?

Problema 5

- Quais são os dados do problema?
- Qual é a incógnita?
- Esses dados são suficientes para determinar a incógnita?
- Você arriscaria um palpite? Qual?

Problema 6

- Qual é a incógnita? (o que devemos responder?)
- Quais são os dados?
- Os dados são suficientes para encontrarmos a incógnita?

Problema 7

- O que é que se deve procurar saber?
- Quais são os dados?
- Os dados são suficientes para resolver o problema?
- Qual informação você gostaria de ter para resolver esse problema?
- O que diz a primeira parte do problema?

Problema 8

- O que o problema requer?
- Que informação é dada?

- Com essas informações temos condições de dá a resposta?
- O que você pode afirmar, com certeza, a respeito do número h de horas quando forem utilizadas mais robôs?

Problema 9

- Qual é a incógnita?
- Quais foram as informações dadas?
- Essas informações são suficientes para encontrarmos a resposta?

Problema 10

- Quais são os dados do problema?
- Qual é a incógnita?
- Que relação podemos estabelecer entre a incógnita e as demais grandezas do problema?
- Esses dados são suficientes para encontrarmos a incógnita?