UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ – UFOPA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MELISSA SANTOS DE OLIVEIRA

INTRODUÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Santarém (PA)
2015

MELISSA SANTOS DE OLIVEIRA

INTRODUÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação *Matemática em Rede Nacional* – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Aldenize Ruela Xavier

Santarém (PA)

2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado Bibliotecas – SIBI/UFOPA

O48i Oliveira, Melissa Santos de
Introdução de funções polinomiais através da resolução de problemas no 1º ano do ensino médio / Melissa Santos de Oliveira. – Santarém, 2015.
45 f.

Orientadora Aldenize Ruela Xavier.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática. Santarém, 2015.

1. Funções (Matemática). 2. Funções polinomiais – problemas, questões, exercícios. 3. Matemática – Ensino Médio. I. Xavier, Aldenize Ruela, *orient*. II. Título.

CDD: 23 ed. 515

Bibliotecário - Documentalista: Mayco Ferreira Chaves – CRB/2 1357

Melissa Santos de Oliveira

INTRODUÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação *Matemática em Rede Nacional* – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof.ª Dra. Aldenize Ruela Xavier
Orientadora – UFOPA

Prof. Dr. José Antônio Oliveira Aquino
Examinador Interno – UFOPA

Prof. Dr. Renato Borges Guerra
Examinador Externo – UFPA

Santarém (PA)
2015

Ao meu marido e filhos, pelo amor, compreensão e apoio incondicional que fizeram-me atingir o meu objetivo.

AGRADECIMENTOS

À minha família, por compreender minha ausência, por não me deixar desistir nos momentos difíceis, por acreditar em meu potencial e me apoiar em todos os momentos.

À minha orientadora Profª. Dra. Aldenize Ruela Xavier, pela amizade, atenção e sugestões durante nossos encontros, e também pelo profissionalismo com que conduziu as orientações.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão desse curso, muito obrigada.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta para a introdução de funções polinomiais utilizando a metodologia de resolução de problemas considerando as dificuldades em relação à compreensão e aprendizagem desse assunto. São apresentadas algumas definições de problema matemático e os tipos de aprendizagem matemática, segundo Huete e Bravo (2007). É feito um breve relato sobre a origem do conceito de função. São apresentadas sequências de atividades compostas por situações problema em que são explorados os principais conceitos presentes no estudo de funções afim e quadrática. Para auxiliar na elaboração das atividades foi utilizado como fonte de pesquisa o livro A Arte de Resolver Problemas de autoria de George Polya (1887-1985).

Palavras-chave: Ensino de funções. Resolução de problemas.

ABSTRACT

This work aims at presenting a proposal of the introduction of polynomial functions by the use of the problems solving methodology considering the difficulties regarding the understanding and learning of the subject. Some mathematical problem definitions and the types of mathematical learning are presented according Huete and Bravo (2007). A brief report about the origin of the concept of functions is also made. Sequence of activities composed by problem situations in which the main concepts present in the study of affine and quadratic functions are explored. To assist in the preparation of activities a book called How to Solve It George Polya (1887-1985) was used.

Keywords: Teaching functions. Problem solving.

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A matemática sempre teve grande importância em nossas vidas, seja em casa, controlando os gastos domésticos; durante as compras, comparando os preços dos produtos; no trabalho, medindo o tempo para entregar um relatório; na escola, fazendo cálculos. Foi pensando nesses cálculos feitos na escola que surgiu a necessidade de elaborar uma proposta para que a matemática não seja vista apenas como uma disciplina difícil e que serve para fazer cálculos somente.

Huete e Bravo traduzem muito bem nosso objetivo como educadores no livro "O Ensino da Matemática. Fundamentos Teóricos e Bases Psicopedagógicas", 2007, p.15, quando tratam o pensamento matemático como um processo em que é possível aumentar o entendimento daquilo que nos rodeia. Enquanto Polya (1995, p.4) sugere que o aluno precisa não só compreender o problema, mas precisa desejar resolvê-lo. Já os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio nos diz:

> A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver.

Minha experiência no magistério lecionando em turmas do ensino médio me fez perceber a dificuldade dos alunos em aprender função. Para eles, é algo muito abstrato, longe da realidade, sem aplicação na vida, no cotidiano, ou seja, sem importância. É mais um assunto da matemática a ser "decorado", "repetido" de acordo com o que o professor ensina.

No segundo capítulo, a evolução do conceito de função será apresentada. Percebemos que os alunos não conseguem associar a ideia de dependência entre variáveis. O assunto é trabalhado de forma tão mecânica e sem aplicações práticas que o conceito de função fica sem sentido. Essa lacuna na aprendizagem do conceito de função se arrasta até o Ensino Superior.

No capítulo 3 será conceituado Problema Matemático, serão apresentados os quatro tipos de aprendizagem matemática: memorização, aprendizagem algorítmica, aprendizagem de conceitos e resolução de problemas; e será feita uma breve análise de três livros didáticos quanto ao tipo de aprendizagem no assunto Função Afim.

No quarto capítulo, as quatro fases da Resolução de Problemas, segundo George Polya, serão apresentadas como nosso aporte teórico.

A metodologia que será apresentada nos quinto e sexto capítulos tem por objetivo introduzir o assunto função através de atividades contextualizadas que serão resolvidas através da resolução de problemas. No capítulo 5, trataremos da função afim e no capítulo 6, da função quadrática.

As atividades foram elaboradas sempre com a preocupação de fazer do aluno parte do processo ensino aprendizagem, com linguagem simples e com perguntas que gradativamente façam o aluno perceber a regularidade que ocorrem nas funções.

Outra preocupação é fazer das atividades uma rotina nas aulas de matemática, sem trazer ansiedade e, até mesmo, medo do assunto.

Acreditamos que, dessa forma, o aluno possa aprender naturalmente sem se deparar logo no primeiro momento com fórmulas e definições prontas. Assim, a disciplina que amedronta a maioria dos alunos poderá ser prazerosa e compreendida por qualquer pessoa.

Por fim, no último capítulo 7, serão feitas as considerações finais a respeito da proposta metodológica.

2. O CONCEITO DE FUNÇÃO

Função é um assunto trabalhado nas escolas desde o Ensino Fundamental, mas, na maioria das vezes de forma conceitual e algorítmica. Resultado disso? Alunos que logo “esquecem” o que é uma função. Eles não conseguem associar a ideia de dependência entre variáveis. O assunto é trabalhado de forma tão mecânica e sem aplicações práticas que o conceito de função fica sem sentido. Essa lacuna na aprendizagem do conceito de função se arrasta até o Ensino Superior.

É necessário entender que o conceito de função demorou muito tempo até chegar ao que é apresentado hoje nos livros didáticos. Por isso, neste capítulo será apresentada a evolução desse conceito.

2.1 A ORIGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO

O conceito de função está presente em vários ramos da ciência e sua origem teve início na tentativa de cientistas e filósofos de estudar e descrever fenômenos naturais. O que hoje pode parecer simples é o resultado de uma lenta e longa evolução histórica iniciada na Antiguidade.

Na Grécia Clássica, as explicações para os fenômenos naturais eram baseadas sobretudo em mitos. A partir da fundação da primeira escola filosófica grega por Tales de Mileto, por volta de 600 a.C os filósofos e cientistas procuraram dar explicações mais racionais para os eventos que ocorriam no mundo que os cercava.

Galileu Galilei (1564-1642), considerado o fundador da ciência moderna, chamou a atenção das autoridades da Igreja ao questionar publicamente dois grandes pilares da filosofia cristã: o homem como centro do universo e a física de Aristóteles como modelo para a ciência. Galileu adotou e ensinou a teoria heliocêntrica nas Universidades de Pisa e de Pádua e, nesta época, seus experimentos mostraram que o peso de um corpo não exerce influência na velocidade da queda livre, contrariando Aristóteles, que afirmava que corpos mais pesados caem com velocidade maior. Estas novidades, que não eram bem-vindas, levaram Galileu ao isolamento, período em que escreveu As duas novas ciências. Nesta obra sobre dinâmica e resistência dos materiais, entre outros resultados, enunciou a lei da queda dos corpos no vácuo: o espaço percorrido por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo levado para percorrer este espaço. Esta lei, assim como a 3ª Lei de Kepler, traz em seu enunciado claramente o conceito de função. Ambos os cientistas iniciaram uma nova era para a ciência, que, a partir deles, passou a ser fundamentada na experimentação e no uso da matemática.

René Descartes (1596-1650), mais tarde, usou as primeiras letras do alfabeto para quantidades conhecidas e as últimas letras para as desconhecidas, como fazemos até hoje.

Descartes escreveu sua única obra matemática, La Géométrie, como um apêndice do Discours de la méthode, publicado em 1637, onde expõe suas ideias científicas e filosóficas.

Em La Géometrie, Descartes, assim como Viète, utilizou a álgebra como ferramenta para a resolução de problemas geométricos. As grandes inovações foram a associação de curvas a equações algébricas e o uso de um sistema de coordenadas para relacionar as variáveis envolvidas naquelas equações, procedimentos que deram origem ao que chamamos hoje de geometria analítica.

Os principais objetos de estudo do século XVII eram as curvas e seus conceitos associados. As variáveis associadas a uma curva eram geométricas, e, em 1673, Leibniz utilizou pela primeira vez a palavra “função” para indicar quantidades que variavam ao longo de uma curva, por exemplo, a tangente.

Em 1718, Bernoulli definiu função da seguinte maneira: Chamamos aqui Função de uma grandeza variável, uma quantidade composta de qualquer maneira desta grandeza variável e de constantes.

Esta “expressão analítica” aparece na definição de função dada por Leonhard Euler (1707-1783) em seu clássico Introductio in Analysin Infinitorum, de 1748, primeira obra em que o conceito de função desempenha um papel central. Após definir o significado de quantidade constante e quantidade variável, Euler enunciou, em 1748: “uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta quantidade variável e números ou quantidades constantes”.

Euler é responsável pela introdução, em 1734, da notação f(x) para designar uma função que depende da variável x.

Em 1797, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) definiu função: Chamamos função de uma ou várias quantidades toda expressão para cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, envolvidas ou não com outras quantidades que consideramos como sendo dadas e valores invariáveis, enquanto as quantidades da função podem assumir todos os valores possíveis. ... Designaremos em geral pela letra f ou F, colocada antes da variável, toda função desta variável, isto é, toda quantidade que depende desta variável e que varia com ela segundo uma lei dada (ibid.). Podemos observar tanto na definição de Lagrange como na de Euler (1755) a presença da ideia de função como relação entre quantidades variáveis.

A definição de função dada por Gustav Lejeune Dirichlet (1804-1859) é a seguinte: Suponhamos que a e b são dois valores dados e x é a quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores localizados entre a e b. Se para cada x corresponde um único y, de modo que, enquanto x percorre o intervalo de a até b, y=f(x) varia gradualmente da mesma forma, então y é chamada função contínua de x para este intervalo. Além disso, não é absolutamente necessário que y dependa de x no intervalo inteiro de acordo com a mesma lei; sem dúvida, não é necessário pensar somente em relações que possam ser expressas através de operações matemáticas.

Dirichlet foi o primeiro a estabelecer o conceito de função como uma relação arbitrária entre as variáveis, independente de fórmulas algébricas.

A interpretação do conceito de função como transformação, onde cada elemento x é transformado no elemento f(x), foi dada por George Boole (1815-1864): Qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo x é chamada uma função de x e pode ser representada sob a forma geral abreviada f(x). ... Nestes mesmos princípios de notação, se em alguma função transformarmos x em 1, o resultado será expresso pela forma f(1); se na mesma função transformarmos x em 0, o resultado será expresso pela forma f(0).

Podemos verificar através deste breve histórico que o conceito de função passou por diversas mudanças e que sua construção foi bastante lenta. Identificamos também algumas representações na evolução do conceito de função através de sua história: função como relação entre quantidades variáveis, como expressão analítica, como relação entre conjuntos e como transformação.

3. O QUE É UM PROBLEMA MATEMÁTICO E OS TIPOS DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo será conceituado Problema Matemático, serão apresentados os quatro tipos de aprendizagem matemática e como três livros didáticos apresentam o assunto Função Afim de acordo com o tipo de aprendizagem matemática. Acredita-se que é importante fazer essa abordagem antes das atividades utilizando Resolução de Problemas serem propostas.

3.1 PROBLEMA MATEMÁTICO

Um problema é uma determinada questão ou um determinado assunto que requer uma solução. Para as ciências matemáticas, um problema é uma questão sobre objetos e estruturas que requer uma explicação e demonstração. Por outras palavras, um problema matemático consiste na busca de uma determinada entidade matemática que permita satisfazer as condições do problema.

De acordo com Ell e Pedroso (2012, p.6):

> Pode-se definir problema como uma questão em busca de uma solução. No entanto, um problema matemático pode ter solução como não, algumas vezes possui diversas soluções. Muitos problemas estão em aberto, ou seja, sem solução conhecida.

Enquanto, Backes (2008, p.11) nos dá a seguinte definição:

> Um problema matemático é toda situação requerendo a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo, e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado. O fundamental é que o resolvedor tenha de inventar estratégias e criar ideias; ou seja: pode até ocorrer que o resolvedor conheça o objetivo a chegar, mas só estará enfrentando um problema se ele ainda não tem os meios para atingir tal objetivo.

Neste trabalho, foi utilizada a definição de Backes como referência para as atividades.

Quando anunciamos numa sala de aula: agora vamos resolver problemas! A reclamação é inevitável. Os alunos alimentam um "não gostar" de matemática desde as séries iniciais. Mas, esse "não gostar" dura até o momento em que começam a entender aonde e como chegar à solução de tal problema, são as estratégias.

Talvez iniciar um assunto novo com conceitos e/ou definições abstratas ajudem nesse "não gostar". É difícil associar o abstrato com situações do dia a dia. Os alunos sentem-se mais confortáveis quando se deparam com situações cotidianas, nas quais podem opinar e apresentar exemplos.

Huete e Bravo traduzem muito bem nosso objetivo como educadores no livro "O Ensino da Matemática. Fundamentos Teóricos e Bases Psicopedagógicas", 2007, p.15:

> O pensamento matemático é um processo em que é possível aumentar o entendimento daquilo que nos rodeia, afirmação passível de transferir para a disciplina acadêmica da matemática, não tanto como corpo de informação e técnicas, mas como método para fazer a mente trabalhar.
> Esta é a proposição do seu objetivo, o qual justificaria nossa presença como docente caso conseguíssemos garantir nos aluno sua própria capacidade de pensar, de realizar perguntas com fundamento, de não se bloquear com certas conjeturas das quais é difícil esquivar-se, mas não impossível.

Ter a teoria na cabeça, não garante o surgimento do pensamento matemático. Os conhecimentos adquiridos durante os anos de estudo, juntamente com a capacidade de questionar e decidir o melhor caminho para chegar num resultado correto, isso sim, é o pensamento matemático. Lembrando que, o melhor caminho para um pode não ser para o outro, não importa, existem inúmeras maneiras matematicamente corretas de chegar num objetivo comum.

3.2 TIPOS DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Iremos entender como se dá a aprendizagem para depois propor os caminhos a serem percorridos para ter um pensamento matemático. Huete e Bravo (2007) dividem a aprendizagem matemática em quatro tipos:

- ✓ Memorização.
- ✓ Aprendizagem algorítmica.
- ✓ Aprendizagem de conceitos.
- ✓ Resolução de problemas.

3.2.1 Memorização

A memorização foi considerada durante muito tempo o meio mais eficiente para a aprendizagem dos estudantes.

Precisamos ressaltar que todos nós pensamos de formas diferentes e, consequentemente, a memorização ocorre de maneiras e em tempos diferentes. Não podemos ligar a memorização somente ao processo mecânico, pois a repetição ativa a memorização por um curto período de tempo. Podemos evitar isso, organizando os conceitos, fazendo uma ligação lógica entre eles, utilizando a ajuda de esquemas. Um último fator, que intervém de maneira positiva na memorização, é o fracionamento do tempo em períodos mais curtos e espaçados.

3.2.2 Aprendizagem Algorítmica

A aprendizagem algorítmica necessita da compreensão correta do conceito matemático envolvido. Por exemplo, nas séries iniciais durante o ensino da multiplicação que é ensinada como a soma de n parcelas, depois que a criança entende o conceito da multiplicação e depara-se com multiplicações muito grandes onde a soma de n parcelas torna-se trabalhosa, é a hora de ser apresentado o algoritmo da multiplicação. Este deve ser tratado como uma forma de facilitar o cálculo e não apenas mais uma fórmula a ser decorada. Nesse momento, percebe-se o quanto é importante não apenas apresentar o algoritmo pronto, mas o conceito envolvido por trás dele. Caso contrário, os algoritmos não terão significado algum e, consequentemente, trarão cálculos errados por serem feitos apenas de forma mecanizada. Como percebemos frequentemente em sala-de-aula alunos fazendo “4x4=8”, deixando clara a falta de compreensão da multiplicação.

3.2.3 Aprendizagem de Conceitos

A abstração da matemática torna o aprendizado dos conceitos ainda mais difícil para a maioria. É necessário partir de exemplos práticos ou resolução de problemas para o melhor entendimento dos conceitos. Fazendo uma construção hierárquica de alguns conceitos sobre a base de outros.

3.2.4 Resolução de Problemas

Na aprendizagem através da resolução de problemas devemos combinar conhecimentos prévios, reflexão, habilidades e situações da vida real para que o aluno ao resolver diversos problemas possa assimilar o conceito que está sendo proposto durante a aprendizagem.

A utilização de problemas envolvendo a realidade dos alunos é fundamental. Caso contrário, estes rapidamente perderão o interesse na resolução das situações propostas. Huete (p.77, 2006), destaca que dada a importância atribuída a essa aprendizagem, avaliamos que os problemas apresentados não sejam, exclusivamente, uma mera aplicação de um algoritmo.

3.3 TIPOS DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA ENCONTRADAS EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS

Foi feita uma análise em três livros didáticos, utilizados em escolas públicas em Santarém, para verificar a existência ou não dos tipos de aprendizagem durante a abordagem do assunto Função Afim. Os livros são:

Livro 1: Tudo é matemática, Luiz Roberto Dante, 8ª série, São Paulo, 2008.
Livro 2: Matemática Volume Único, Gelson Iezzi, São Paulo, 2011.
Livro 3: Conexões com a matemática, Juliane Matsubara, Volume 1, São Paulo, 2010.

3.3.1 Avaliação de livros didáticos quanto à memorização

Foi percebido no Livro 1, a apresentação de definições e vários exemplos, seguidos de exercícios com letras de a até j, levando o aluno fazer a memorização. Já nos Livros 2 e 3, foram encontradas definições e vários exercícios, seguidos de um tópico Exercícios complementares com a finalidade de aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, contribuindo para a aprendizagem algorítmica. No Livro 3, foi encontrada a seção Resumo do capítulo (Figura 1), mais uma forma de sistematizar e memorizar os conceitos aprendidos durante o capítulo.

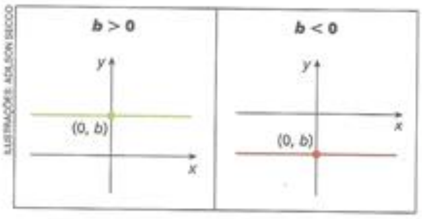
Resumo do capítulo

A função afim

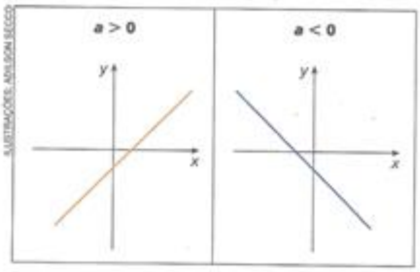
- Toda função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ do tipo $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é uma **função afim**.
  - Se $a = 0$, a função $f(x) = b$ é chamada **função constante**.
  - Se $a \neq 0$, a função $f(x) = ax + b$ é chamada **função polinomial do 1º grau**.
  - Se $a \neq 0$ e $b = 0$, a função $f(x) = ax$ é chamada **função linear**.
  - Se $a = 1$ e $b = 0$, a função $f(x) = x$ é chamada **função identidade**.

O gráfico da função afim

- O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta.
  - O coeficiente a é chamado de **coeficiente angular** da reta.
  - O termo constante b é chamado de **coeficiente linear** da reta.
- O gráfico de uma função constante é uma **reta paralela** ao eixo x.

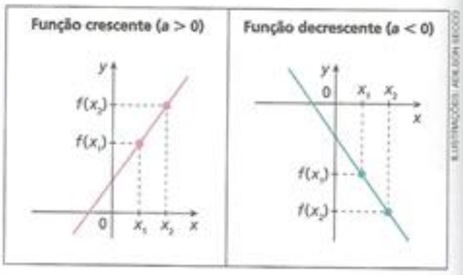


- O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma **reta oblíqua** aos eixos x e y.



- O **zero** de uma função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$ é dado por $x = -\frac{b}{a}$ e corresponde à raiz da equação $ax + b = 0$. No gráfico, o zero é a abscissa do ponto em que a reta intercepta o eixo x.
- Dada uma função afim $f(x) = ax + b$, a reta que a representa intercepta o eixo y no ponto $(0, b)$.

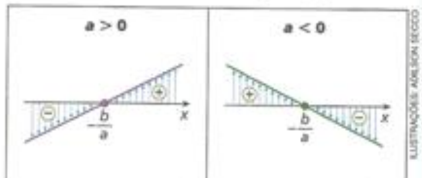
- Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$:
  - f é **crescente** quando $a > 0$;
  - f é **decrescente** quando $a < 0$.



Inequações

- Sendo f e g funções na variável real x, chamamos de **inequação-produto** as sentenças expressas por:
  - $f(x) \cdot g(x) > 0$
  - $f(x) \cdot g(x) < 0$
  - $f(x) \cdot g(x) \geq 0$
  - $f(x) \cdot g(x) \leq 0$
- Sendo f e g funções na variável real x, com $g(x) \neq 0$, chamamos de **inequação-quociente** as sentenças expressas por:
  - $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$
  - $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$
  - $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$
  - $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$
- Para resolver inequações-produto e inequações-quociente que envolvem funções afins, precisamos estudar o sinal das funções.

Sinais da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$:



$a > 0$	$a < 0$
$f(x) = 0$, para $x = -\frac{b}{a}$	$f(x) = 0$, para $x = -\frac{b}{a}$
$f(x) > 0$, para $x > -\frac{b}{a}$	$f(x) > 0$, para $x < -\frac{b}{a}$
$f(x) < 0$, para $x < -\frac{b}{a}$	$f(x) < 0$, para $x > -\frac{b}{a}$

- Inequações apresentadas por duas desigualdades ou por meio de um sistema de inequações são chamadas **inequações simultâneas**.

Figura 1: Resumo do capítulo encontrado no livro 3.

3.3.2 Avaliação de livros didáticos quanto a Aprendizagem Algorítmica

Nos três livros existem questões do tipo “Determine”, “Calcule”, “Construa”, “Obtenha”, indicando que o aluno deve aprender o algoritmo. Exercícios realizados de forma mecânica, conforme mostra a figura 2.

Construa em seu caderno os gráficos das funções determinadas pelas equações indicadas a seguir. Depois responda: Quais dessas funções são exemplos de função afim e como são os seus gráficos?

a) $y = x + 2$ b) $y = -2x$ c) $y = 2^x$

Os matemáticos já provaram que, quando temos uma função afim, o seu gráfico é sempre uma reta não perpendicular ao eixo **x**. Como dois pontos determinam uma reta, basta marcar apenas dois pontos para traçá-la.

Figura 2: Exemplo de exercício encontrado no livro 1

O interessante nesse exercício para construir gráficos é que o autor tem a preocupação de fazer o aluno perceber que o gráfico da função afim sempre será uma reta e que, com apenas dois pontos, podemos definir essa reta. Fazendo do exercício realizado de forma mecânica, “como no exemplo”, um exercício que traz uma análise conceitual e generalizações.

3.3.3 Avaliação de livros didáticos quanto a Aprendizagem de Conceitos

O livro 1 inicia o assunto com a(o) Definição e/ou Conceito, seguido de exemplos do tipo “Construa”, “Calcule”, “Indique” e exercícios. Os livros 2 e 3 iniciam o assunto com a apresentação de um exemplo contextualizado para depois definir o que é Função Afim, o que facilita o entendimento da definição.

3.3.4 Avaliação de livros didáticos quanto a Resolução de Problemas

Dos três livros avaliados, apenas o livro 1 inicia o assunto diretamente com a definição, os outros iniciam com resolução de problemas. Quanto à quantidade de problemas apresentados em cada livro: o livro 1 propõe 20 exercícios, destes 8 são problemas; o livro 2 propõe 41 exercícios, destes 16 são problemas; o livro 3 propõe 56 exercícios, destes 16 são problemas.

3.4 AVALIAÇÃO GERAL DOS LIVROS

TABELA1: Avaliação geral dos livros didáticos

	Livro 1	Livro 2	Livro 3
Memorização	X	X	X
Aprendizagem Algorítmica	X	X	X
Aprendizagem de Conceitos	X	X	X
Resolução de Problemas	X	X	X

Foi verificado que nos três livros analisados foram encontrados os quatro tipos de aprendizagem matemática, o que muda é a ordem em que são apresentados.

O livro 1 apresenta o assunto utilizando nessa ordem: Aprendizagem de Conceitos, Aprendizagem Algorítmica, Memorização e Resolução de Problemas. Apesar de não iniciar o assunto com Resolução de Problemas, apresenta 8 problemas no decorrer do capítulo Função Afim.

Já os livros 2 e 3, apresentam o assunto utilizando nessa ordem: Resolução de Problemas, Aprendizagem de Conceitos, Aprendizagem Algorítmica e Memorização. Além de iniciar o capítulo com problemas, no decorrer dos exercícios apresentam mais 16 a serem resolvidos, conforme a Figura 3.

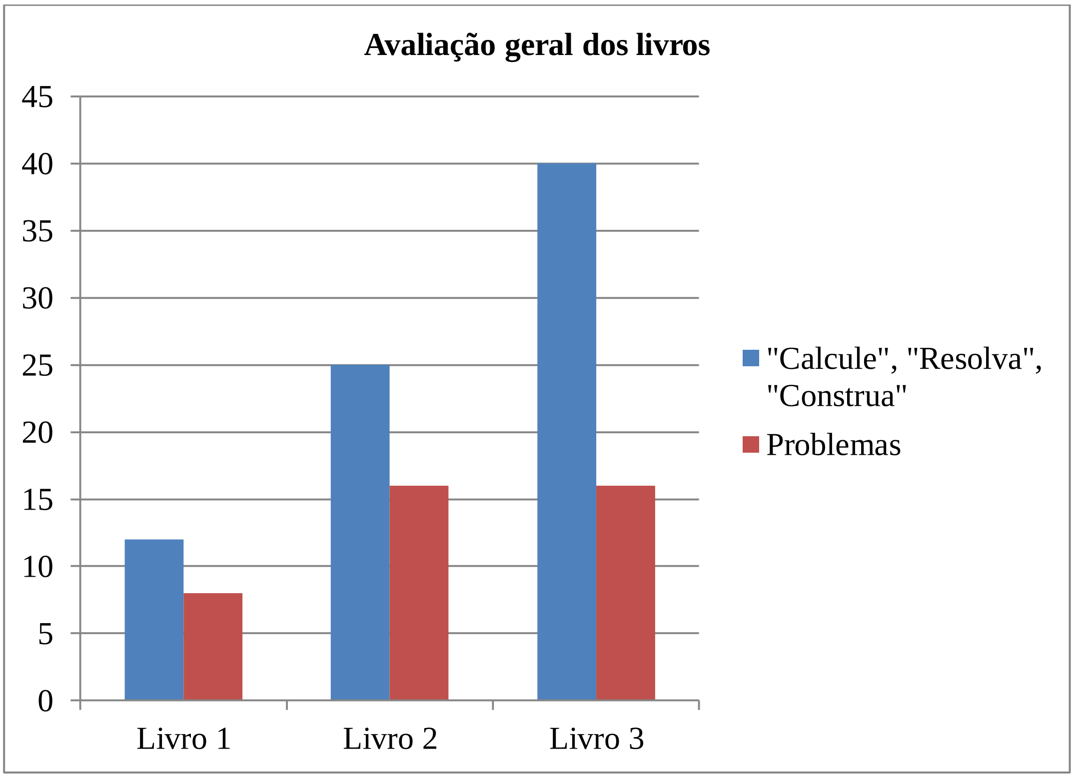


Figura 3: Avaliação geral dos livros

De acordo com a metodologia de Resolução de Problemas, os livros 2 e 3 são os que satisfazem melhor a proposta de ensino.

Ensinar conteúdos novos é uma questão complexa, pois estamos lidando com diversos saberes. Cada aluno traz consigo uma carga de conhecimento, capacidades e motivações para aprender únicas. Apresentar uma definição matemática no início do assunto traz diversas interpretações, já que ele nunca viu nada parecido antes. Ao trabalhar exemplos para resolver problemas do “mesmo tipo” dos exemplos, estaremos contribuindo para o amadurecimento do conhecimento matemático? Estaremos subestimando a inteligência de nossos alunos? Mas, trabalhar exemplos em um nível de conhecimento e, durante a resolução de problemas, aumentar a complexidade, com certeza, iremos ouvir: professor(a), o(a) senhor(a) não ensinou isso!

Por tudo isso, foi feita a conceituação de problema matemático e a análise dos livros de acordo com a aprendizagem matemática. Sentiu-se a necessidade de entender, primeiramente como o assunto é mostrado nos livros, quais aprendizagens são trabalhadas, para depois, serem elaboradas as atividades.

O que iremos propor são abordagens sobre funções através de resolução de problemas, utilizando como base as quatro fases da resolução de problemas, segundo George Polya

(1897-1985). Em seguida, apresentar aos alunos a definição matemática. Acreditamos que, dessa maneira, será mais fácil o entendimento matemático das funções.

4. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO GEORGE POLYA

A atividade de resolver problemas teve seu início com os filósofos gregos que a praticavam como uma forma de exercitar o pensamento filosófico. Sócrates afirmava que para resolver um problema bastava fazer uma sequência lógica de perguntas. Ou seja, a resolução de problemas já é objeto de estudo há muito tempo.

Polya (1897-1985) em seu livro A Arte de Resolver Problemas divide a resolução de problemas em quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto, com o intuito de organizar o processo. Como a metodologia a ser trabalhada é Resolução de Problemas escolheu-se Polya como aporte teórico por acreditar na sua significativa contribuição para a aprendizagem matemática.

4.1 QUEM FOI GEORGE POLYA?

George Polya (1897–1985) foi um dos matemáticos mais importantes do século XX. Nascido na Hungria, ele passou a maior parte do seu tempo pesquisando na universidade de Stanford nos Estados Unidos devido à situação política da Europa na época da Segunda Guerra Mundial. Pesquisou em vários ramos da matemática, como probabilidade e equações diferenciais parciais; sua maior contribuição, no entanto, está relacionada à heurística de resolução de problemas matemáticos com várias publicações relacionadas ao assunto, em especial How To Solve It que vendeu mais de um milhão de cópias em 1957.

Polya é um dos matemáticos do nosso século que considera a Matemática uma “ciência observacional” na qual a observação e a analogia desempenham um papel fundamental; afirma também a semelhança do processo criativo na Matemática e nas ciências naturais. Muitas de suas ideias são razoáveis até os dias atuais, servindo de alicerce para trabalhos de outros pesquisadores contemporâneos.

É importante enfatizar que Polya nunca pretendeu que sua divisão correspondesse à uma sequência de etapas a serem percorridas uma depois da outra, sem que nunca seja conveniente ou necessário voltar atrás.

4.2 AS QUATRO FASES DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Com a finalidade de agrupar melhor as indagações e sugestões, Polya dividiu o seu processo de resolução de um problema matemático em quatro etapas.

4.2.1 Compreensão do problema

O autor coloca como algo muito importante em relação à compreensão do problema, ele relata que é uma tolice se tentar responder uma pergunta sem saber qual o seu significado. Pode-se perceber que, já nesta primeira etapa, ele se preocupava com uma aprendizagem que pudesse vir a ser significativa.

Para compreender melhor o problema podemos realizar algumas perguntas como: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Também se devem considerar, sob vários pontos de vista, as partes que se julgarem importantes no problema. Devemos verificar se o problema pode ser representado através de uma figura e se é possível satisfazer as condições.

4.2.2 Estabelecimento de um plano

Para Polya, deve-se muitas vezes iniciar com um plano para a resolução do problema a partir da seguinte pergunta: Conhece algum problema correlato? Pensar num possível problema que já foi resolvido com a mesma incógnita, ou informação, e que possa vir a ser utilizada.

Caso não seja encontrado nada que nos ajude, devemos verificar se é possível fazer uma reformulação no enunciado. Essa reformulação pode levar a um problema auxiliar adequado.

4.2.3 Execução do plano

O plano é apenas um roteiro geral. É preciso ter certeza de todos os detalhes que estão ali inseridos de modo que não reste nenhuma dúvida na qual possa estar escondido algum erro. A execução do plano é uma tarefa fácil, mas é necessário ter paciência e certeza de que cada passo executado está correto.

4.2.4 Retrospecto

Esta é uma etapa muito importante; executando-a teremos certeza de que resolvemos o problema de maneira correta, eliminando, assim, algum erro que possa ter ocorrido durante a execução do plano.

Para tanto, podemos realizar o seguinte questionamento: É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? Também será necessário verificar se poderemos utilizar o resultado obtido ou o método utilizado em algum outro problema e se há a possibilidade de encontrarmos a solução utilizando outra estratégia.

Tomando o método proposto por Polya como base para a elaboração das atividades, espera-se que o ensino de funções polinomiais se dê com mais facilidade, que os alunos consigam organizar as ideias e obter a solução do problema com uma melhor compreensão do assunto.

5. PROPOSTA METODOLÓGICA PARA INTRODUÇÃO DE FUNÇÃO AFIM OU FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU NO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

A matemática ensinada hoje nas escolas ainda é tradicional e longe da realidade das pessoas. Muitos livros didáticos já apresentam no início do capítulo Função Afim uma situação problema seguida da definição formal do conteúdo, exemplos e exercícios. Mas, a maioria dos professores ainda prefere trabalhar primeiramente a definição formal como é feito há muito tempo.

A metodologia que será apresentada nesse capítulo tem por objetivo facilitar o aprendizado da função afim através da resolução de problemas, utilizando uma sequência de atividades a serem aplicadas em uma turma com 40 alunos do 1º ano do ensino médio em uma escola de Santarém.

Com a finalidade de levar os alunos a um processo de construção do conhecimento, resolvendo problemas contextualizados que possam relacionar conhecimentos prévios dos alunos com a matemática, valorizando suas experiências de vida e deixando a definição formal como última etapa da metodologia, trazendo uma matemática mais atraente para a sala de aula.

Com essa proposta, espera-se que o aluno se identifique com as situações problema, sendo provocado a participar ativamente das aulas, aumente o interesse pela disciplina e melhore seu rendimento escolar.

Sobre a compreensão do problema, Polya (1995, p.4) sugere:

> O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isso nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante.

Estima-se que cada atividade dessa sequência seja trabalhada em 40 minutos para introduzir o assunto função afim. Acredita-se que o aluno possua conhecimento prévio do conceito de função, saiba localizar pontos no plano cartesiano e resolver equações simples com uma incógnita.

Os alunos devem sentar em duplas e ser informados que o assunto a ser estudado é Função Afim. Em seguida, serão propostas as atividades 1 e 2 que deverão ser resolvidas pelo professor juntamente com os alunos.

O professor, sempre que possível, deve fazer questionamentos, estimulando os alunos a responder as questões. Nesse momento, a oralidade e métodos diferenciados de resolução devem ser valorizados.

As primeiras perguntas da atividade têm por objetivo a compreensão do enunciado: "Qual é o salário mensal fixo desse segurança?", "Quanto ele recebe por cada noite de trabalho? Esse valor está incluído no salário mensal ou é um "dinheirinho" a mais?".

Com a certeza de que o enunciado foi compreendido, pode-se perguntar: "Qual será sua renda mensal em um mês que ele trabalhar 1 noite na casa noturna?", "E se forem 2 noites?", até chegar na pergunta da atividade "Qual será sua renda mensal em um mês que ele trabalhar 3 noites na casa noturna?", durante essas perguntas foram estabelecidos planos para a resolução, cada um, de forma oral, respondeu as perguntas. O professor deve estimular: "Como chegou nesse resultado?", "Que conta fez para chegar a essa conclusão?".

ATIVIDADE 1

Um segurança trabalha em uma empresa e recebe um salário mensal de R$780,00. Para aumentar sua renda, ele costuma fazer "extras" em uma casa noturna, onde recebe R$70,00 por noite de trabalho.

a) Qual é o salário mensal fixo desse segurança? ___________________________

b) Quanto ele recebe por cada noite de trabalho? Esse valor está incluído no salário mensal ou é um "dinheirinho" a mais? ____________________________

c) Qual será sua renda mensal em um mês que ele trabalhar 3 noites na casa noturna?____

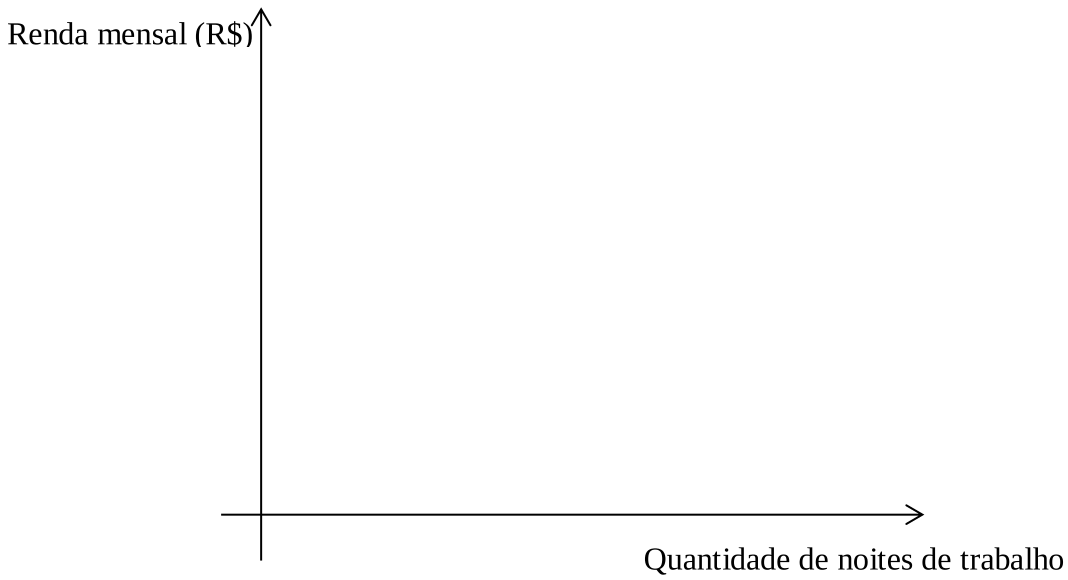
d) Em um determinado mês sua renda mensal foi R$1.270,00. Quantas noites ele trabalhou na casa noturna?____

e) Agora vamos preencher a tabela que relaciona a quantidade de noites na casa noturna com a renda mensal.

Quantidade de noites de trabalho	Renda mensal (R$)
1	
3	
	1.060,00
	1.200,00
8	
	1.480,00

f) Chamando a quantidade de noites trabalhadas na casa noturna de x e a renda mensal de y. Qual a fórmula matemática que indica a renda mensal (y) em função da quantidade de noites de trabalho (x)?_________________________

g) Marque no plano cartesiano os pontos obtidos na tabela da letra e observe o gráfico formado pelos pontos.



Podemos observar que, para cada quantidade de noites de trabalho (x), há uma certa renda mensal (y) paga ao segurança.

Como estamos tratando de assuntos pertinentes à vida cotidiana, a compreensão do problema proposto fica mais fácil e o estabelecimento de um plano para a resolução torna-se natural.

Polya (1995, p.8) descreve como deve se dá a execução do plano para a resolução de problemas:

> Conceber um plano, a ideia de resolução, não é fácil. Para conseguir isto é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo, mais uma coisa: boa sorte. Executar o plano é muito mais fácil; paciência é o de que mais se precisa.

Na sala de aula, é comum depois de achada a solução do problema, dá-lo como finalizado e, naturalmente, passa-se para o próximo problema ou próximo assunto. Ao invés disso, deve-se fazer o retrospecto, voltar ao início da atividade e verificar, juntamente com os alunos, como se chegou às respostas, que caminhos foram tomados.

Dessa forma, o conhecimento adquirido naquele problema será aperfeiçoado e consolidado.

Sobre o retrospecto, Polya (1995, p.10) conclui:

> Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução.

A atividade 2 deve ser resolvida com a mesma metodologia adotada na atividade 1. Espera-se que os alunos já estejam mais familiarizados com os questionamentos que serão feitos e compreendam o problema com mais facilidade.

Deve-se prestar atenção se o enunciado do problema está sendo compreendido pelos alunos. Em particular, na atividade 2 que envolve o assunto porcentagem, fazer questionamentos antes de iniciar a atividade para verificar se os alunos sabem calcular porcentagem. Caso necessário, fazer uma breve revisão sobre porcentagem.

ATIVIDADE 2

Um corretor de imóveis recebe mensalmente da empresa em que trabalha um salário composto de duas partes:

- Uma parte fixa de R$500,00;
- Outra parte variável, que corresponde a um adicional de 2% sobre o valor das vendas realizadas no mês.

a) Qual é o salário fixo desse corretor?___________________________________

b) Quanto ele recebe a mais no salário mensal?_____________________________

c) Em certo mês, as vendas foram R$300.000,00. Quanto o corretor recebeu de salário nesse mês?____

d) Em outro mês, as vendas foram R$80.000,00. Quanto o corretor recebeu de salário nesse mês?____

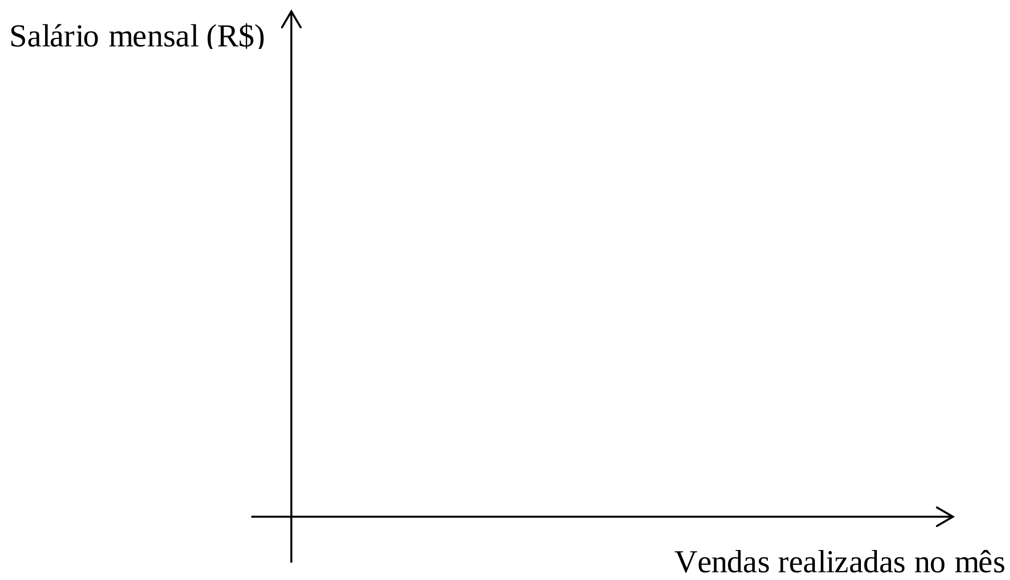
e) Em determinado mês, o corretor recebeu de salário R$2.500,00. Qual foi o valor das vendas nesse mês?____

f) Preencha a tabela com os valores que faltam relacionando as vendas realizadas no mês e o salário mensal do corretor.

Vendas realizadas no mês (R$)	Salário mensal (R$)
50.000,00	
70.000,00	
	2.300,00
	3.100,00
160.000,00	
	4.500,00

g) Chamando as vendas realizadas no mês de x e o salário mensal de y. Qual a fórmula matemática que indica o salário mensal (y) em função das vendas realizadas no mês (x)?____

h) Marque no plano cartesiano os pontos obtidos na tabela da letra f e observe o gráfico formado pelos pontos.



Podemos notar que, para cada total x de vendas no mês, há um certo salário mensal (y) pago ao corretor.

Assegurando que os alunos compreenderam o problema, a execução do plano será espontânea. Não deixar de, ao final da resolução, fazer o retrospecto dos passos realizados durante a atividade. Considerar os detalhes, procurando sempre tornar a resolução o mais simples possível.

E cada vez que fizer o retrospecto, é possível encontrar caminhos novos e interessantes do mesmo problema.

Ainda sentados em dupla, os alunos devem ser estimulados a resolver a próxima atividade sozinhos. Nesse momento, o professor, deve observar quais as dificuldades ainda presentes. Em seguida, solicitar as respostas de forma oral e, ao final da aula, deve resolver no quadro o problema, sempre lembrando que aquela solução não é a única. Com certeza, algum aluno utilizou caminhos diferentes para chegar ao resultado correto, caminhos estes que devem ser valorizados pelo professor.

ATIVIDADE 3 (AGORA É A SUA VEZ)

Uma pizzaria oferece serviço de entrega e cobra por isso uma taxa fixa de R$1,50 mais R$0,60 por quilômetro rodado no trajeto entre o estabelecimento e o local da entrega.

a) Qual é o valor fixo dessa entrega?______________________________________

b) Quanto a pizzaria cobra a mais para fazer a entrega?______________________

c) Qual será o valor do serviço de entrega se o local for a 13 km da pizzaria? E se o local for a 8,5 km?____

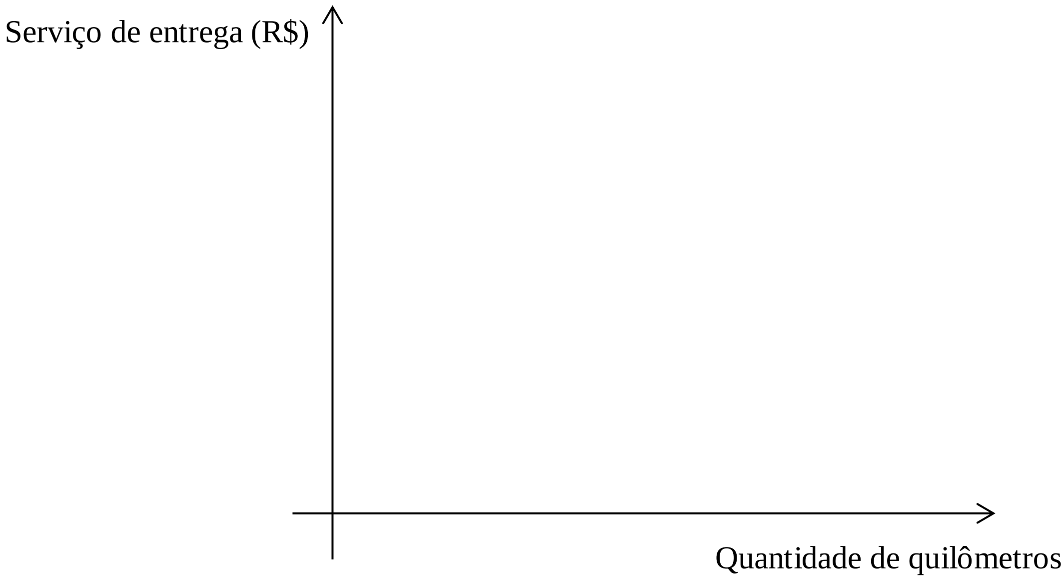
d) Em uma determinada entrega, a pizzaria cobrou R$4,50 pelo serviço, que distância era o local da entrega?____

e) Preencha a tabela com os valores que faltam relacionando a quantidade de quilômetros rodados no trajeto de entrega e o valor do serviço.

Quantidade de quilômetros	Valor do serviço de entrega (R$)
1	
3	
	5,70
	6,90
11	
	9,30

f) Chamando a quantidade de quilômetros rodados de x e o valor do serviço de entrega de y. Qual a fórmula matemática que indica o valor do serviço de entrega (y) em função dos quilômetros rodados (x)?

g) Marque no plano cartesiano os pontos obtidos na tabela da letra e e observe o gráfico formado pelos pontos.



Podemos observar que, para cada quilômetro rodado (x), há uma certa quantia paga pelo serviço de entrega (y).

A terceira atividade com o subtítulo “Agora é sua vez”, tem o mesmo molde das duas anteriores para que os alunos sintam-se entusiasmados e consigam resolver sozinhos o problema.

Nessa atividade não deve haver surpresas ou desafios durante a resolução. O aluno deve sentir-se seguro e empolgado por estar resolvendo sem a ajuda do professor. Caso o professor perceba ainda alguma dificuldade em relação à resolução, fazer outras atividades semelhantes para melhor compreensão do assunto.

Depois das atividades, é o momento da formalização do assunto Função Afim. Será apresentada a definição: chama-se função polinomial do 1º grau ou função afim, a qualquer função f de IR em IR dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$, onde a e b são números reais dados e $a \neq 0$. Deve-se relacionar a forma da função afim com as encontradas nas atividades, escrevendo o valor de a e b.

Quanto ao gráfico, os alunos já devem ter concluído que será sempre uma reta. Cabe ao professor, formalizar essa informação e acrescentar que para $a > 0$, a função é crescente e para $a < 0$, a função é decrescente. É importante ainda, identificar a raiz da função como o ponto em que a reta intercepta o eixo x.

6. PROPOSTA METODOLÓGICA PARA INTRODUÇÃO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA OU FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU NO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Ainda no 9º ano do ensino fundamental (antiga 8ª série) os alunos são apresentados à função do 2º grau, mas assim como as outras funções, também é apresentada com a formalidade de definições, abstrações e muitas fórmulas prontas, longe da nossa realidade, contribuindo ainda mais para a falta de interesse dos alunos quando falamos em função.

A metodologia que será apresentada tem por objetivo facilitar o aprendizado da função quadrática através da resolução de problemas, utilizando uma sequência de atividades a serem aplicadas em turmas do 1º ano do ensino médio.

Para aplicação das atividades os alunos devem ter conhecimentos prévios de geometria, como cálculo de perímetros e áreas, e saber resolver equações do 1º e 2º graus. Esses conhecimentos serão necessários durante as atividades propostas. E, assim como no capítulo anterior, a resolução de problemas será o ponto de partida para a introdução do assunto função quadrática.

Seguindo o mesmo caminho da função afim, os alunos devem sentar em duplas e ser informados que o assunto a ser estudado é função quadrática. Em seguida, serão propostas as atividades 1 e 2 que deverão ser resolvidas pelo professor juntamente com os alunos. Estima-se que cada atividade dessa sequência seja trabalhada em 40 minutos para introduzir o assunto função quadrática.

Vale lembrar que o aluno sente-se mais seguro quando tem uma rotina de atividades, sem surpresas. Em especial, tratando-se da disciplina matemática, quanto menos surpresas, menos ansiedade e nervosismo.

No capítulo anterior, descrevemos a resolução de problemas segundo Polya que a divide em quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Nas atividades propostas, as primeiras perguntas têm por objetivo atender a primeira fase da resolução de problemas que é a compreensão do problema. Quando é perguntado na atividade 1: “Quanto mede cada lado desse retângulo?”, espera-se que o aluno somente com a observação da figura possa compreender que cada lado mede $x+3$ e $x+1$. As questões seguintes: “Escreva uma função que represente o perímetro (P) dessa região” e “Escreva uma função que represente a área (A) dessa região” são feitas com intuito de ter a certeza de que o aluno compreendeu o enunciado e tem domínio dos conhecimentos prévios necessários para chegar à solução correta.

Sobre a compreensão do problema, Polya (1995, p.24) sugere:

> Familiarização.
>
> Por onde começar? Comece pelo enunciado do problema.
>
> Que posso fazer? Visualize o problema como um todo, com tanta clareza e nitidez quanto possível.
>
> Qual a vantagem de assim proceder? É preciso compreender o problema, familiarizar-se com ele, gravar na mente o seu objetivo. A atenção concedida ao problema pode também estimular a memória e propiciar a recordação de pontos relevantes.

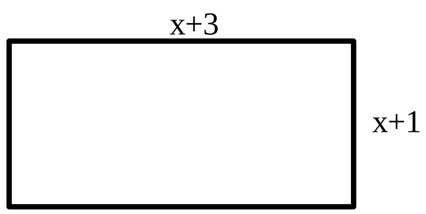
A partir da pergunta “Qual das funções é do 1º grau e qual é do 2º grau?”, é necessário o estabelecimento de um plano e Polya (1995, p.26) orienta:

> Procure contatos com seus conhecimentos anteriormente adquiridos. Tente pensar naquilo que já serviu de auxílio em situações semelhantes. Tente reconhecer alguma coisa de familiar no que examina e perceber algo de útil naquilo que reconhecer.

Ao identificar corretamente as funções do 1º e do 2º graus, o aluno já terá em mente como deve proceder em cada situação para executar o plano e resolverá os demais itens da atividade.

ATIVIDADE 1

Examine a região retangular a seguir.



a) Quanto mede cada lado desse retângulo? ______________________________

b) Escreva uma função que represente o perímetro (P) dessa região.

____

c) Escreva uma função que represente a área (A) dessa região.

____

d) Qual das funções é do 1º grau e qual é do 2º grau?

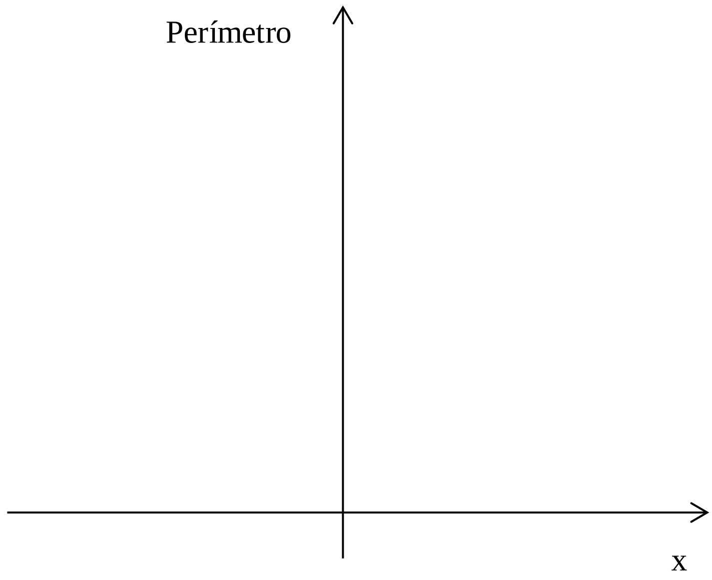
e) Resolva a equação do perímetro e determine a medida dos lados, sabendo que seu perímetro é 16 cm.

f) Verifique se o valor do x encontrado no item anterior satisfaz a equação da área, sabendo que sua área é 15 cm^2.

g) Utilizando a função que representa o perímetro (P), preencha a tabela que relaciona o valor do x com o perímetro.

Valor do x	Perímetro (P)
-2	
-1	
0	
1	
2	

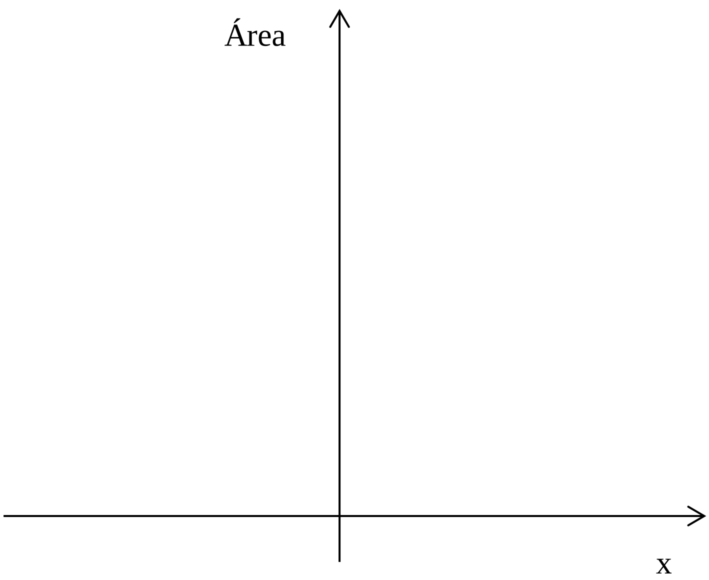
h) Marque no plano cartesiano os pontos obtidos na tabela do item anterior e observe o gráfico formado pelos pontos.



i) Utilizando a função que representa a área (A), preencha a tabela que relaciona o valor do x com a área.

Valor do x	Área (A)
-4	
-3	
-2	
-1	
0	

j) Marque no plano cartesiano os pontos obtidos na tabela do item anterior e observe o gráfico formado pelos pontos.



k) Observando o item anterior, qual ou quais os pontos em que o gráfico intercepta o eixo x?

l) Em relação ao gráfico da letra j, qual é o menor valor que essa função pode assumir? Qual é o ponto mínimo?

Passando uma reta perpendicular ao ponto $x = -2$, podemos notar a simetria entre os dois lados do gráfico.

Ao final da atividade 1 deve-se fazer o retrospecto juntamente com os alunos, considerar os detalhes da resolução desde o início, verificar se não ficou alguma dúvida. Espera-se que os alunos exponham o que perceberam na atividade, uma observação importante é em relação aos gráficos: reta e parábola, da função afim e da função quadrática, respectivamente.

A atividade 2 deve ser apresentada da mesma maneira aos alunos, como foi durante a introdução da função afim e durante a atividade 1 desse capítulo. Nesse momento, os alunos devem estar mais animados, empolgados em resolver uma atividade que não tem surpresas e que faz parte do seu cotidiano.

O professor deve resolver a atividade 2 junto com os alunos, estimulando a compreensão do problemas através de algumas perguntas, como: “Qual é o seu time de futebol?”, “Quantos times de futebol existem no Brasil”, “Considerando que num campeonato todos os times jogam contra todos, quantos jogos teríamos se 4 times estivessem disputando?”, “E se fossem 5?”, “E se fossem 6?”, “Como chegaram nesse resultado?”.

Ao perguntar “Como chegaram nesse resultado?”, vários caminhos de resolução irão aparecer, é o estabelecimento de um plano. O professor deve valorizar as estratégias, mas deve encaminhar para a resolução mais simples e fácil de ser compreendida.

ATIVIDADE 2

Um campeonato de futebol vai ser disputado por 10 clubes pelo sistema em que todos jogam contra todos em dois turnos.

a) Faça uma tabela de todos os jogos que acontecerão nesse campeonato com 10 clubes de futebol fictícios. Quantos jogos serão realizados?

b) Se o campeonato fosse realizado por 20 clubes, como é o Campeonato Brasileiro, quantos jogos seriam realizados?

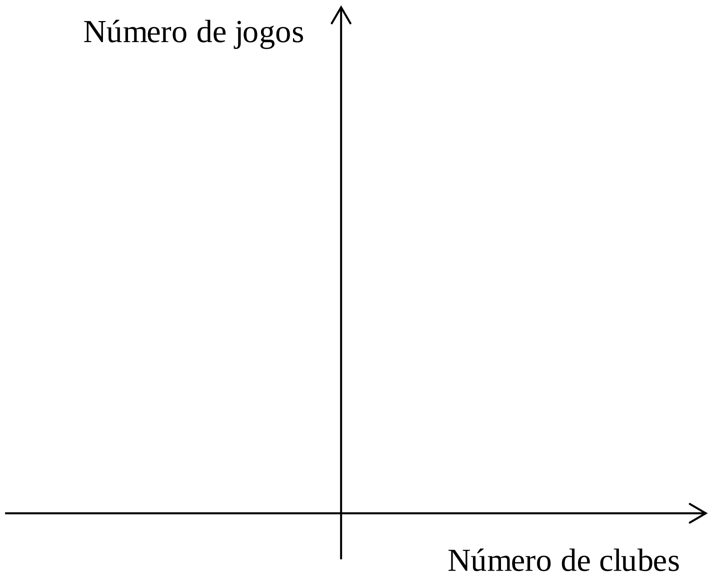
c) Seguindo o mesmo raciocínio dos itens anteriores, qual o número de jogos (y) que seriam realizados por x clubes de futebol?

d) Vamos preencher a tabela que relaciona o número de jogos (y) com o número de clubes (x).

Número de clubes (x)	Número de jogos (y)
0	
1	
2	

3	
4	

e) Marque no plano cartesiano os pontos obtidos na tabela da letra d e observe o gráfico formado pelos pontos.



f) Observando o item anterior, qual ou quais os pontos em que o gráfico intercepta o eixo x?

____

g) Em relação ao gráfico da letra e, qual é o intervalo que contém o menor valor que essa função pode assumir? Aproximadamente, qual é o menor valor de x?

____

Passando uma reta perpendicular ao ponto encontrado na letra g, podemos notar a simetria entre os dois lados do gráfico.

Polya (1995, p.26) descreve bem o que acontece na atividade 2 quanto à execução do plano:

> Por onde começar? Comece da ideia feliz que o levou à resolução. Principie quando se sentir seguro de que dominou a conexão principal e confiante em que pode proporcionar os detalhes menores que faltam.

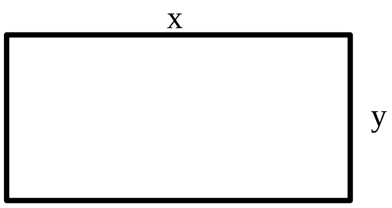
As perguntas feitas aos alunos antes da atividade faz com que a execução do plano fique mais clara. A ideia para o cálculo da quantidade de jogos deverá ser generalizada pelos alunos naturalmente.

Ao final da atividade 2 fazer o retrospecto, considerar os detalhes da resolução, procurar as respostas mais longas e complicadas apresentadas pelos alunos e tentar abreviar, tornar mais clara e simples para que possam utilizar o mesmo raciocínio em problemas semelhantes.

A mesma metodologia deve ser usada para a atividade 3, alunos sentados em duplas e estimulados a resolverem sozinhos. O professor, por sua vez, deve observar as duplas, perceber as dificuldades, as lacunas de conhecimento que ainda existem e tentar sanar as dúvidas resolvendo no quadro ao final da aula.

ATIVIDADE 3 (AGORA É A SUA VEZ)

Pedro pretende cercar uma região retangular em sua chácara para criar galinhas. Para isso, ele comprou 80 metros de tela e pretende usá-la de modo a obter a maior área possível para o galinheiro.



a) Quais os lados desse retângulo?

____

b) Escreva uma função que represente o perímetro (P) dessa região. Em seguida, escreva quanto vale o lado y em função de x.

____

c) Utilizando o resultado do item anterior, escreva uma função que represente a área (A) dessa região.

____

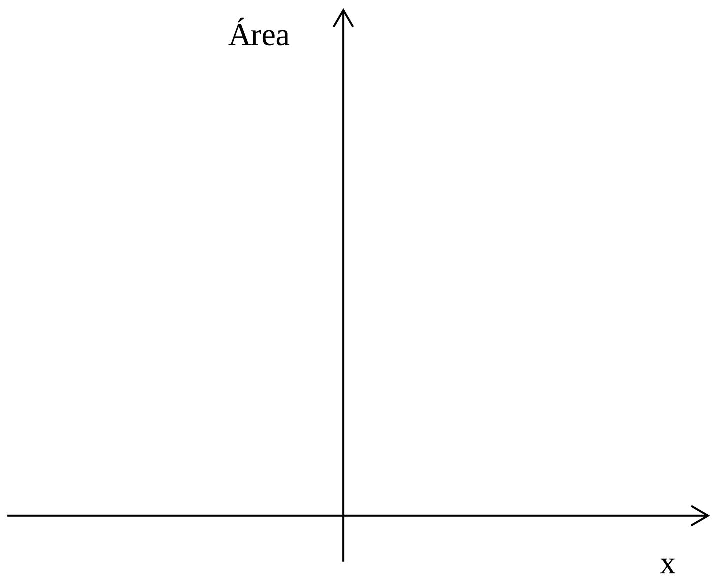
d) A função perímetro (P) é do 1º grau ou do 2º grau? E a função área (A) é do 1º ou do 2º grau?

____

e) Vamos preencher a tabela que relaciona o valor do x com a área.

Valor do x	Área (A)
-20	
0	
20	
40	
60	

f) Marque no plano cartesiano os pontos obtidos na tabela do item anterior e observe o gráfico formado pelos pontos.



g) Observando o item anterior, qual ou quais os pontos em que o gráfico intercepta o eixo x?

____

h) Em relação ao gráfico, qual é o maior valor que a área pode assumir? Qual é o ponto máximo?

____

Passando uma reta perpendicular ao ponto $x = 20$, podemos notar a simetria entre os dois lados do gráfico.

Após a atividade 3 na fase do retrospecto, discutir com os alunos a resolução no quadro para que todos possam dar sua opinião e socializar as diferentes ideias que surgiram durante a execução. O professor deve sempre lembrar aos alunos que existem inúmeros caminhos possíveis para se chegar ao resultado correto. Sobre o retrospecto, Polya (1995, p.27) esclarece:

> Qual a vantagem em assim proceder? É possível que encontre uma outra resolução melhor, que descubra fatos novos e interessantes. De qualquer maneira, se adquirir o hábito de verificar e examinar desse modo as suas resoluções, obterá alguns conhecimentos bem ordenados e prontos a serem utilizados e assim desenvolverá a sua capacidade de resolver problemas.

Depois de resolvidas as três atividades e cumpridas as quatro fases da resolução de problemas, acredita-se ser o momento certo para a formalização do assunto função quadrática. Será apresentada a definição: chama-se função polinomial do 2º grau ou função quadrática, a qualquer função f de IR em IR dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais dados e $a \neq 0$. Deve-se relacionar a forma da função quadrática com as encontradas nas atividades, escrevendo o valor de a, b e c.

Em relação ao gráfico, os alunos já devem ter concluído que será sempre uma curva. Cabe ao professor, formalizar essa informação: o gráfico da função quadrática é uma parábola, sendo que, para $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima, e para $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Ainda sobre o gráfico, concluir que para $a > 0$, a função tem ponto mínimo, e para $a < 0$, a função tem ponto máximo.

Quanto às raízes, a função quadrática pode interceptar o eixo x em um único ponto, em dois pontos, ou pode não interceptá-lo, dependendo do discriminante que será estudado posteriormente.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho consistiu em elaborar uma proposta para introdução das funções polinomiais. Tal ideia surgiu ao perceber que a matemática tradicional ensinada nas escolas, em especial, no ensino médio, não atrai os alunos e dificulta o aprendizado.

Para isso, utilizamos a metodologia de resolução de problemas para a exploração dos principais conceitos de função sem o uso de definições ou fórmulas.

Nas atividades são feitas perguntas para que o aluno compreenda o enunciado; depois, as perguntas têm a finalidade de generalização da situação proposta, por exemplo na atividade 1: "Qual será sua renda mensal em um mês que ele trabalhar 1 noite na casa noturna?", "E se forem 2 noites?", "Qual será sua renda mensal em um mês que ele trabalhar 3 noites na casa noturna?", "Chamando a quantidade de noites trabalhadas na casa noturna de x e a renda mensal de y. Qual a fórmula matemática que indica a renda mensal (y) em função da quantidade de noites de trabalho (x)?". Assim, esperamos que o aluno perceba a regularidade que existe nas funções e possa responder, generalizando.

Durante as atividades também será possível construir gráficos, perceber as raízes e, em relação à função quadrática, localizar os pontos mínimos ou máximos sem o peso do uso de várias fórmulas.

Acreditamos que a proposta trata o conceito de função de maneira prazerosa para que ao final das três atividades o professor possa apresentar a definição e conceitos formais da matemática sem traumas aos alunos.

Vale lembrar que nossa proposta metodológica é apenas para introduzir o conceito de funções polinomiais, não esgotando o assunto que ainda deverá ser aprofundado pelo professor.

Ao pensarmos nessa proposta, consideramos que cada vez mais os alunos questionam para que servem os assuntos estudados na matemática, nesse sentido, procuramos apresentar atividades do dia-a-dia, de fácil compreensão e que podem ser adaptadas de acordo com a realidade de cada escola. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio fala sobre isso:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

No final da elaboração das atividades, percebemos que é possível utilizar a metodologia de resolução de problemas em muitos outros assuntos da matemática para facilitar a aprendizagem com situações rotineiras que podem ser adaptadas se necessário.

Esperamos que essa pesquisa possa contribuir para que o ensino da matemática nas escolas seja visto de outra maneira, que os alunos possam melhorar seu rendimento escolar e que os professores estejam dispostos a experimentar uma nova metodologia para o fortalecimento da educação matemática.

REFERÊNCIAS

BACKES, Lucas Henrique. **Resolução de problemas: uma alternativa para o ensino de funções, 100 problemas propostos.** 2008. 90 f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a matemática, vol.1.** São Paulo: Moderna, 2010.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio.** Brasília: MEC, 2000.

COSTA, Susana dos Santos da. **Função afim: resolução de problemas – mídias.** 2010. 94 f. Monografia (Especialização em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática: ensino fundamental (8ª série).** São Paulo: Ática, 2005.

ELL, Laertt José; PEDROSO, Sandra Mara Dias. **Alternativas para resolver problemas matemáticos.** Paraná, 2012.

HUETE, Juan Carlos Sánchez; BRAVO, José A. Fernández. **O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas.** Tradução: Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: volume único (ensino médio).** São Paulo: Atual, 2011.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações, vol.1.** 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto matemático.** Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.