



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ  
ICED - INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA  
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA- MNPEF**

**RONIEL DE LIMA BRELAZ**

**ENSINO DA FÍSICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA UTILIZANDO O MÉTODO  
DE MODELAGEM**

**SANTARÉM - PA**

**2019**

**RONIEL DE LIMA BRELAZ**

**ENSINO DA FÍSICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA UTILIZANDO O MÉTODO  
DE MODELAGEM**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Nacional Profissional no Ensino da Física (MNPEF) da Universidade Federal do Oeste do Pará- UFOPA, Instituto de Ciência e Educação, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Ensino da Física.

Orientador: Prof. Dr. Glauco Cohen Ferreira Pantoja

**SANTARÉM - PA**

**2019**

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**  
**Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/UFOPA**

---

B835e Brelaz, Roniel de Lima  
Ensino da física nas aulas de matemática utilizando o método de modelagem /  
Roniel de Lima Brelaz – Santarém, Pará, 2019.  
120 fls.;il:  
Inclui bibliografias.

Orientador: Glauco Cohen Ferreira Pantoja  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de  
Ciências da Educação, Curso de Mestrado Nacional Profissional no Ensino da Física  
(MNPEF) , Mestrado em Ensino da Física.

1. Matemática. 2. Física. 3. Modelagem. I. Pantoja, Glauco Cohen Ferreira,  
*orient.* II. Título.

CDD: 23 ed. 530.7

**RONIEL DE LIMA BRELAZ**

**ENSINO DA FÍSICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA UTILIZANDO O MÉTODO  
DE MODELAGEM**

Dissertação submetida ao programa de pós-graduação–  
Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física  
(MNPEF), da Universidade Federal do Oeste do Pará,  
Instituto de Ciências da Educação – ICED, como  
requisito parcial para obtenção do título de Mestre em  
Ensino de Ciências.

Data de aprovação: 18 de novembro de 2019

  
**Dr. JOSE RICARDO E SOUZA MAFRA, UFOPA**

Examinador Externo ao Programa

  
**Dr. EDNILSON SÉRGIO RAJALHO DE SOUZA, UFOPA**

Examinador Interno

  
**Dr. GLAUCO COHEN FERREIRA PANTOJA, UFOPA**

Presidente

  
**RONIEL DE LIMA BRELAZ**

Mestrando

Aos meus pais Maria Dália e Dagoberto, que me ensinaram valores que serviram para nortear minhas ações; a minha amada esposa Aldarlene Teixeira, companheira de todos os momentos e as minhas lindas filhas Keicy Louene, Tássila Valeska e Jennyfer Vanessa, que são a razão da minha felicidade.

## **AGRADECIMENTOS**

A minha mãe Maria Dália, que mesmo nas dificuldades sempre se esforçou ao máximo para eu ter acesso ao conhecimento. Ao meu pai Dagoberto Brelaz, que mesmo não tendo a oportunidade de estudar, sempre me incentivou em minha trajetória.

A minha querida esposa Aldarlene Teixeira, que sempre apoiou as minhas escolhas e acreditou que, mesmo com todas as minhas ocupações, eu chegaria ao fim de mais um projeto.

As minhas amadas filhas Keicy Louene, Tássila Valeska e Jennyfer Vanessa, que me deram força para eu me manter firme em meus propósitos.

Ao meu orientador, que contribuiu com sugestões, ajudando a fazer os ajustes necessários para esse trabalho ter esse formato e pela compreensão em determinados momentos.

A CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu concluísse esse curso.

“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina”.

Cora Coralina

## RESUMO

A Matemática e a Física são áreas do conhecimento que historicamente estão vinculadas. Entre muitos outros fatores, isso ocorre devido à primeira fornecer sustentação estruturante à segunda. No entanto, quando elas são trabalhadas como componentes curriculares, em cursos de graduação geralmente as aulas de Matemática são ministradas como se não houvesse nenhuma conexão com a Física. Partindo desse pressuposto, este trabalho tem o objetivo de utilizar uma estratégia de ensino para o aluno compreender fenômenos físicos a partir de temas da Matemática, relacionando o conhecimento aprendido nas aulas com mundo real, desse modo o ensino transpõe a barreira das quatro paredes que delimita a sala de aula tradicional. Essa estratégia de ensino foi fundamentada nas obras de Bunge e é denominada **método de modelagem**, e para viabilizar sua aplicação no processo ensino aprendizagem foi utilizada a teoria de aprendizagem de Lev Vygotsky. Para verificar a eficiência do método, ele foi aplicado em uma turma do primeiro semestre do curso de graduação em Bacharelado em Ciência e Tecnologia, no qual a Matemática e Física estão presentes em boa parte da grade curricular. A pesquisa teve uma abordagem qualitativa e foi delineada como estudo de caso, desse modo os dados coletados foram por meio de observações, entrevistas, relatórios e registros de vídeos e fotografias. A partir da análise dos dados foi possível verificar que os objetivos da pesquisa foram alcançados, o que corroborou a hipótese inicialmente levantada de que a proposta didática norteada pela modelagem matemática facilitaria a aprendizagem de Matemática e de Física. Esses resultados possibilitaram inferir que o ensino na perspectiva da modelagem possibilita os alunos não somente compreender fenômenos físicos, mas resolver problemas reais envolvendo a Física por meio de modelos. Com a realização da investigação foi construído um Produto Educacional para orientar professores que pretendam utilizar o método de modelagem em suas aulas.

**Palavra-chave:** Matemática. Física. Modelagem. Modelo. Método.



## ABSTRACT

Mathematics and physics are areas of knowledge historically linked. Among many other factors, this is because the former provides structural support to the latter. However, when they are worked as curriculum components, in undergraduate courses, mathematics classes are usually taught as if there were no connection to physics. Based on this assumption, this work aims to use a teaching strategy for the student to understand physical phenomena from mathematical themes, relating the knowledge learned in class with the real world, thus teaching crosses the barrier of four walls that delimits the traditional classroom. This teaching strategy was based on the works of Bunge and it is called **modeling method** and to enable its application in the teaching-learning process, Lev Vygotsky's theory of learning was used. To verify the efficiency of the method, it was applied in a class of the first semester of the undergraduate degree in Science and Technology, in which Mathematics and Physics are presented in much of the curriculum. The research took a qualitative approach and was designed as a case study, thus the data were collected through observations, interviews, reports and video and photo records. Through the data analysis it was possible to verify that the research objectives were reached, corroborating the hypothesis initially raised that the didactical proposal would facilitate learning of Physics and Mathematics. These results made it possible to infer that teaching from the perspective of modeling enables students not only to understand physical phenomena, but to solve real problems involving physics through models. From the research, an Educational Product was built to guide teachers who intend to use the modeling method in their classes.

**Keyword:** Mathematics. Physical. Modeling. Model. Method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Processo de modelagem.....	20
Figura 2 - Esquema do processo de modelagem matemática.....	20
Figura 3 - Trajetória de um pacote de mantimentos arremessado por um avião.....	24
Figura 4 - Eixo de coordenadas unidimensional .....	25
Figura 5 - Trajetória de um projétil no movimento oblíquo.....	30
Figura 6 - Componentes da velocidade no movimento oblíquo.....	31
Figura 7 - Esquema das etapas de uma modelagem .....	42
Figura 8 - Dinâmica da modelagem matemática.....	42
Figura 9 - Procedimentos de modelagem .....	43
Figura 10 - Embarcação usada para auxiliar as medições relativas à situação problema .....	51
Figura 11 - Instrumentos para a coleta de dados (medição) da situação problema.....	51
Figura 12 - Medição da temperatura dos líquidos nas garrafas através do LabQuest.....	52
Figura 13 - Tempo gasto no percurso entre a Praça José Gregório e a Praça do Pescador .....	54
Figura 14 - Fluxo do rio Tapajós em frente a orla de Santarém no perímetro da praça Monsenhor José Gregório e a praça do Pescador.....	55
Figura 15 - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET.....	58
Figura 16 - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET – ajuste polinomial para $t_0 = 0$ .....	59
Figura 17 - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET – ajuste polinomial para $t_0 = 10$ .....	59
Figura 18 - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET preparada - curva de ajuste linear .....	60
Figura 19 - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET preparada - curva de ajuste polinomial.....	60
Figura 20 - Resfriamento da água quente no interior de uma garrafa PET - ajuste exponencial .....	61
Figura 21 - Resfriamento da água quente no interior de uma garrafa PET - ajuste polinomial de ordem 2.....	61
Figura 22 - Resfriamento da água no interior da garrafa PET preparada - ajuste linear .....	62
Figura 23 - Resfriamento da água no interior da garrafa PET preparada - ajuste exponencial	62

Figura 24 - Resfriamento da água no interior da garrafa PET preparada - ajuste polinomial de ordem 2.....	63
Figura 25 - Reunião com a equipe A para estabelecer a situação problema .....	66
Figura 26 - Explicação da relação entre os modelos físicos e os modelos que representam os tipos de função.....	72
Figura 27 - Encontro das águas do Rio Amazonas e do Rio Tapajós em frente à cidade de Santarém .....	75
Figura 28 - Integrantes da equipe A no dia da apresentação da pesquisa .....	77
Figura 29 - Integrantes da equipe B no dia da apresentação .....	79

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Modelo conceitual e modelo teórico .....	17
Quadro 2 - Modelos físicos utilizados para exemplificar a relação de dependência entre grandezas .....	47
Quadro 3 - Dados coletados no movimento da embarcação da Praça Monsenhor José Gregório à Praça do pescador .....	53
Quadro 4 - Dados obtidos em direção perpendicular à orla de Santarém no sentido Rio Tapajós à orla .....	54
Quadro 5 - Dados do experimento relativo ao aquecimento e resfriamento da água na troca de calor com o meio ambiente obtido através do LabQuest.....	57

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivo Geral .....</b>	<b>14</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos Específicos.....</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Teoria e realidade: objetos modelo e modelo teórico .....</b>	<b>16</b>
<b>2.2</b>	<b>Processo de Modelagem na sala de aula .....</b>	<b>18</b>
<b>2.3</b>	<b>Teoria da aprendizagem sócio interacionista de Vygotsky.....</b>	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>CONTEÚDOS DE FÍSICA ABORDADOS .....</b>	<b>24</b>
<b>3.1</b>	<b>Cinemática.....</b>	<b>24</b>
3.1.1	Movimento retilíneo .....	25
3.1.2	Movimento Oblíquo .....	30
<b>3.2</b>	<b>Termodinâmica .....</b>	<b>34</b>
3.2.1	Temperatura e Calor .....	34
<b>3.3</b>	<b>Resfriamento de Newton.....</b>	<b>36</b>
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>38</b>
<b>4.1</b>	<b>Metodologia Didática .....</b>	<b>38</b>
4.1.1	Descrição do produto educacional.....	43
<b>4.2.</b>	<b>Metodologia Investigativa.....</b>	<b>44</b>
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO DO MÉTODO DE MODELAGEM.....</b>	<b>47</b>
<b>5.1</b>	<b>Modelos construídos e a solução dos problemas no processo de modelagem .....</b>	<b>53</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS .....</b>	<b>65</b>
<b>6.1</b>	<b>Diário de Bordo.....</b>	<b>65</b>
<b>6.2</b>	<b>Análise dos resultados .....</b>	<b>70</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>81</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>84</b>
	<b>APÊNDICE: PRODUTO EDUCACIONAL.....</b>	<b>85</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em muitos cursos de graduação das áreas de Ciências Exatas as disciplinas de Matemática e Física estão presentes. No entanto, em alguns casos, elas são ministradas como se não houvesse relação entre si. Mesmo em cursos como Licenciatura integrada em Física e Matemática ou Bacharelado em ciências e tecnologia (CTEC), percebe-se, muitas vezes, um distanciamento entre disciplinas que deveriam estar entrelaçadas.

Ultimamente, está sendo verificado que o método de ensino através de modelos vem contribuindo bastante para romper as barreiras que separam a Matemática das várias áreas do conhecimento, inclusive da Física. Para que o professor possa trabalhar com modelos, é importante que ele compreenda o significado do termo. De acordo com Bunge:

O termo “modelo” designa uma variedade de conceitos que é preciso distinguir. Nas ciências da natureza e do homem, parece haver dois sentidos principais: O modelo como representação esquemática de um objeto concreto e o modelo enquanto como teoria relativa a esta idealização. (BUNGE, 1974, p. 29,30)

Com relação ao primeiro sentido, o autor refere-se à representação, conceituação do fato, do fenômeno, o qual é denominado por ele de objeto modelo. Concernente ao segundo, refere-se a encaixar esse objeto modelo em um corpo de ideias, de forma que se possam estabelecer relações hipotéticas dedutíveis; a isto Bunge chama de modelo teórico. Bunge define esses dois sentidos de modelo da seguinte forma: “Um modelo teórico é um sistema hipotético-dedutivo que concerne a um objeto modelo, que é, por sua vez, uma representação conceitual esquemática de uma coisa ou uma situação real ou suposta como tal”. (BUNGE, 1974, p 16)

São nesses dois sentidos que iremos empregar o termo para modelar uma situação da realidade com intuito de desenvolver certas habilidades no aluno, como análise, reflexão, organização, problematização, formulação de hipótese e resolução de problemas.

A utilização de modelos vem se mostrando, por meio da modelagem, uma poderosa ferramenta no ensino da física relacionada à matemática. Segundo Bassanezi (2002, p. 16), este procedimento “[...]consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Partindo desse princípio, percebe-se a necessidade de utilizar situações que envolvam fenômenos físicos e estruturá-las em uma linguagem matemática, mostrando ao aluno a importância da matemática aplicada. Esse método tem a finalidade de facilitar o processo de aprendizagem e, ao mesmo tempo, abordar a interdisciplinaridade. Todavia, para o professor trabalhar com

modelos de forma significativa, é preciso que o aluno compreenda seu papel no processo de aprendizagem, pois este vai requerer uma postura investigativa, analítica e crítica.

Muitas vezes, a Matemática e a Física são trabalhadas em sala de aula sem nenhuma conexão com situações do mundo real. Isso faz transparecer que o conhecimento da sala e os fenômenos reais não possuem qualquer relação. Para Bassanezi (2002), por outro lado, a modelagem retira fronteiras entre essas disciplinas e pressupõe interdisciplinaridade. Em outras palavras, trata-se de aproximar a Física e a Matemática através da modelagem de fenômenos físicos.

Na região Oeste do Pará, há um sério problema de escassez de profissionais trabalhando com a disciplina de Física nas redes pública e privada. A disciplina costuma ser ministrada por licenciados em Matemática e não por licenciados em Física. Isto motivou a UFOPA a construir uma Licenciatura Integrada em Matemática e Física para sanar esta dificuldade, no entanto, há fortes discussões nas instâncias formais da universidade, além de relatos informais de professores e alunos de que, mesmo sendo áreas do conhecimento muito próximas, é pouco comum haver a solicitação de conceitos Físicos nas disciplinas de Matemática, embora nas disciplinas de Física o recrutamento de conceitos da Matemática seja não somente frequente, como necessário. Esta importância de contexto vai de encontro ao que é preconizado em documentos oficiais relativos à Educação Brasileira, sejam os Parâmetros Curriculares (PCN), as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) e bases, e mais recente a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Este trabalho sugere a Modelagem Matemática como forma de levar a Física para as aulas de Matemática (e, por consequência, a interdisciplinaridade entre as duas disciplinas).

Dessa forma, delimitou-se a reunir dados e informações com o propósito de responder ao seguinte problema de pesquisa: **“de que forma a matemática pode ser aplicada para auxiliar a compreensão de problemas físicos reais por alunos de cursos de graduação nos quais a grade curricular contém disciplinas envolvendo essas duas áreas do conhecimento”?** Iniciou-se o processo de investigação e construção do produto didático decorrente desta a partir da hipótese de que a Matemática pode ajudar o estudante compreender e interpretar os problemas reais, envolvendo fenômenos Físicos, quando se trabalha a partir da perspectiva da modelagem.

## 1.2 Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo geral utilizar o método de modelagem para o aluno compreender fenômenos físicos a partir de temas da Matemática, relacionando o conhecimento da sala de aula com mundo real e avaliar como a aplicação desse método auxilia o aluno no desenvolvimento de habilidades como interpretação, problematização, formulação de hipóteses sobre fenômenos físicos reais e utilização da linguagem matemática para resolvê-los.

## 1.3 Objetivos Específicos

- Relacionar a Matemática com Física através da modelagem;
- Descrever os procedimentos de modelagem utilizados pelos alunos na solução dos problemas reais;
- Representar os modelos construídos, por parte dos alunos, para solucionar o problema;
- Identificar os conhecimentos adquiridos pelos alunos no desenvolvimento da proposta didática;
- Construir um Produto Educacional que sirva de manual para o professor utilizar o método de modelagem em suas aulas.

No capítulo 2, será apresentado o referencial teórico discutindo as ideias dos principais autores a fundamentar a elaboração desse trabalho que propõe utilizar as aulas matemática para ensinar Física através da modelagem.

No Capítulo 3, será apresentado os temas de física que foram trabalhados com os alunos para subsidiar o processo de modelagem e o ensino de física através das aulas de matemática.

No capítulo 4, vai ser descrita a metodologia didática e investigativa utilizadas na elaboração da dissertação. Em relação à metodologia didática, foram descritos os procedimentos utilizados no processo de modelagem conforme Bassanezi (2002), e Biembengut e Hein (2011). Além disso, é feita uma descrição da elaboração do produto, no qual são retratados, com detalhes, os procedimentos de cada etapa no processo de modelagem. O capítulo finaliza com a metodologia investigativa, caracterizando a pesquisa quanto à classificação, a abordagem e o delineamento.



O capítulo 5 será composto pelo relato da aplicação do processo de modelagem que possibilitou a construção do produto educacional que possui a finalidade de orientar professores tencionando utilizar essa estratégia de ensino em suas aulas. A aplicação ocorreu em uma turma do primeiro semestre do curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia na Universidade Federal do Oeste do Pará, na qual o pesquisador atua como professor.

No capítulo 6, são apresentados os resultados obtidos a partir da análise dos dados coletados através de observação, entrevista, relatórios e registros fotográficos e em vídeos. Mediante esses dados, no capítulo é verificado se os resultados obtidos confirmam a hipótese levantada e se os objetivos da pesquisa foram alcançados. No último capítulo da dissertação, são feitas as considerações finais sobre o trabalho.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Para fundamentar este trabalho, foi utilizada a obra *Teoria e Realidade*, de Mario Bunge (1974), na qual ele descreve a construção de modelos com utilização da matemática para formulação de teorias científicas, representação de fenômenos e realização de previsões. Além do livro de Bunge, foi feita uma revisão literária sobre os trabalhos realizados por Rodney Bassanezi e Maria Salett Biembengut para compreender os procedimentos no processo de Modelagem matemática. Ou seja, a fundamentação epistemológica do fazer científico e do ato didático foi alinhavada com base nesses autores. .

Para dar o embasamento relacionado à análise do processo de aprendizagem presente no processo de modelagem, o produto educacional foi fundamentado na teoria da aprendizagem sócio interacionista de Lev Vygotsky.

### 2.1 Teoria e realidade: objetos modelo e modelo teórico

Bunge (1974) ressalta a importância do auxílio da linguagem matemática para formulação de teorias e a construção de sistemas hipotéticos dedutivos<sup>1</sup> que são possíveis de colocá-los à prova experimental. Ele acredita que através dos modelos é possível relacionar teoria e dados empíricos.

Na concepção de Bunge para ciências da natureza, o termo modelo diz respeito a dois conceitos, os de objeto modelo (modelo conceitual) e de modelo teórico. O primeiro é uma representação conceitual de uma parte da realidade<sup>2</sup> ou de fatos, que possuem certas peculiaridades; o segundo é o enxerto do objeto modelo em uma teoria geral. Nesse sentido, Bunge (1974) afirma:

A conquista conceitual da realidade começa, o que parece paradoxal, por idealizações. Extraem-se os traços comuns de indivíduos ostensivamente diferentes, agrupando-os em espécies (classes de equivalência). Fala-se assim do cobre e do homo sapiens. É o nascimento do objeto modelo ou modelo conceitual de uma coisa ou fato. (BUNGE, 1974, p. 13)

---

<sup>1</sup> Modelo Teórico, Segundo Bunge (1974)

<sup>2</sup> Na concepção de Bunge, a realidade existe independente da nossa existência ou nossa compreensão. Essa concepção está em acordo com a corrente filosófica do realismo ontológico. “a convicção de que o mundo existe independentemente de nós. Para Bunge, todas as operações da ciência, principalmente a formulação de teorias e o teste experimental das mesmas implicam essa crença e ficariam privadas de sentido sem ela” (CUPANI & PIETROCOLA, 2002, p. 101).

Dessa forma, é possível verificar que o objeto modelo é formulado a partir de propriedades comuns de grupo de objeto reais. Mas é importante ter em mente que, por mais extraordinário que seja o objeto modelo, não tem nenhuma funcionalidade real, ou seja, não é possível operacionalizá-los nem os testar, a não ser que seja inserido em uma teoria geral. Nesse aspecto Bunge afirma:

Um objeto modelo, mesmo sendo engenhoso, servirá para pouca coisa, a menos que seja encaixado em um corpo de ideias no seio do qual se possa lançar relações dedutivas.[...] Se esse corpo de ideias for coerente constituirá um modelo teórico de indivíduos concretos  $r$  do tipo  $R$ . Em outros termos, um modelo teórico de um objeto  $r$  suposto real é uma teoria específica com respeito a  $r$ , e esta teoria é constituída por uma teoria geral enriquecida de um objeto modelo  $m \in \underline{A}_r^*$ . (BUNGE, 1974, p. 23,24)

A teoria geral opera em qualquer parcela da realidade, mas é ineficaz, sem estar vinculada a um objeto modelo, na resolução de problemas, enquanto o modelo teórico, que é uma teoria específica, vem dar vida ao objeto modelo. Isto pode ser verificado na representação dos planetas no sistema solar, quando se elimina as características individuais deles e evidencia as comuns é obtido o objeto modelo ou modelo conceitual. Quando esse modelo é envolvido numa teoria geral como a gravitação é obtido o modelo teórico como mostra o quadro 1. Esse tipo de modelo é possível de ser testado, pode ter sua veracidade verificada e torna possível fazer previsões aproximadas de situações reais. Segundo Bunge:

[...] O que se pode submeter a provas empíricas são tais modelos teóricos: as teorias gerais despreocupadas com particulares permanecem incomprováveis, a menos que sejam enriquecidas com modelos de seus referentes. E os objetos modelos mantêm-se estéreis a não ser que sejam introduzidos ou desenvolvidos em alguma teoria. (BUNGE, 1974, p. 32)

**Quadro 1** - Modelo conceitual e modelo teórico

Sistema	Modelo conceitual	Modelo Teórico	Teoria Geral
Planetas	Sólido esférico girando em torno de seu eixo (movimento de rotação) e em torno do sol (movimento de translação)	Leis de Kepler	Mecânica Clássica Teoria da Gravitação

A concepção de modelos estabelecida no livro Teoria e Realidade vêm dar embasamento epistemológico para elaboração do produto educacional, pois a finalidade do

trabalho é verificar fenômenos físicos do mundo real e construir modelos que possam ser submetidos a provas empíricas para averiguar sua validação, em seguida através da interpretação possam ser feitas previsões. Apesar de os modelos, por serem idealizações, não representam completamente a realidade, é possível melhorá-los para obter modelos mais realistas. Isto posto, Bunge diz:

O objeto modelo e modelo teórico versam supostamente sobre objetos reais. Cabe ao experimento comprovar semelhante suposição da realidade. De qualquer modo, nenhum outro método, exceto o de modelagem e comprovação, mostrou-se bem-sucedido na apreensão da realidade (BUNGE, 1974, p.40)

Isso mostra a importância de recorrer a modelos para tentar aproximar o conhecimento da sala de aula com fenômenos físicos reais, relacionando teoria e experimentação para dar explicações. Esse deve ser o objetivo da ciência. Diante disso, BUNGE (1974) afirma que: “o objetivo em longo prazo da teorização científica não é sumariar a experiência, mas interpretar a realidade e, em particular explicar a parte da realidade” (p.80).

Essa afirmação de Bunge foi verificada por uma equipe de alunos ao analisarem a correnteza do rio Tapajós em frente à orla da cidade de Santarém. Eles perceberam, através da interpretação dos dados coletados, que a correnteza era influenciada, não apenas pelo curso do rio Tapajós, mas também, pelo rio Amazonas como mostrado no capítulo sobre análise dos resultados.

Para utilizar os modelos no ensino da Física, foram aplicados os procedimentos de modelagem matemática empregado por Bassanezi (2002) e Biembengut (2005). Eles mostram todos os procedimentos que devem ser seguidos do processo da identificação do problema físico real até a sua validação e possível previsão.

## **2.2 Processo de Modelagem na sala de aula**

A modelagem vem desempenhando um papel relevante no campo do ensino de ciências, pois relaciona o conhecimento da sala de aula com problemas da realidade de natureza biológica, química ou física. Nesse sentido, Bassanezi afirma:

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (BASSANEZI, 2002, p.24).

Esta estratégia de ensino, quando bem utilizada pelo professor, pode tornar as aulas mais atrativas e pode proporcionar uma aprendizagem significativa em virtude de utilizar situações reais para as quais é aceitável criar modelos passíveis de serem verificados e validados, possibilitando previsões do fenômeno analisado. Nesse sentido, ela vai ao encontro da finalidade dessa pesquisa, pois pretende relacionar a Matemática da Física. Neste aspecto, verifica-se a importância do processo de modelagem em cursos como, por exemplo, o Bacharelado em Ciência e Tecnologia, Licenciatura Integrada em Matemática e Física, e outros nos quais essas disciplinas estão presentes.

Para Bassanezi (2002), modelar é transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e interpretá-los. E, neste trabalho, utilizou-se a modelagem para criar modelos com finalidade de interpretar fenômenos físicos investigados pelos discentes, pois, segundo Biembengut e Hein (2011, p. 12): “Um modelo pode ser formulado em termos familiares, utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representação geométrica, equações algébricas, tabelas, programas computacionais etc”. Complementando esse ponto de vista, Bunge afirma:

Qualquer representação dos traços salientes de um processo pode denominar-se modelo do processo. Qualquer representação gráfica dos principais traços de um processo é um modelo visual deste. Diagramas de fluxos e retratos analógicos são duas espécies de modelos visuais ou gráficos. (BUNGE, 1974, p. 43).

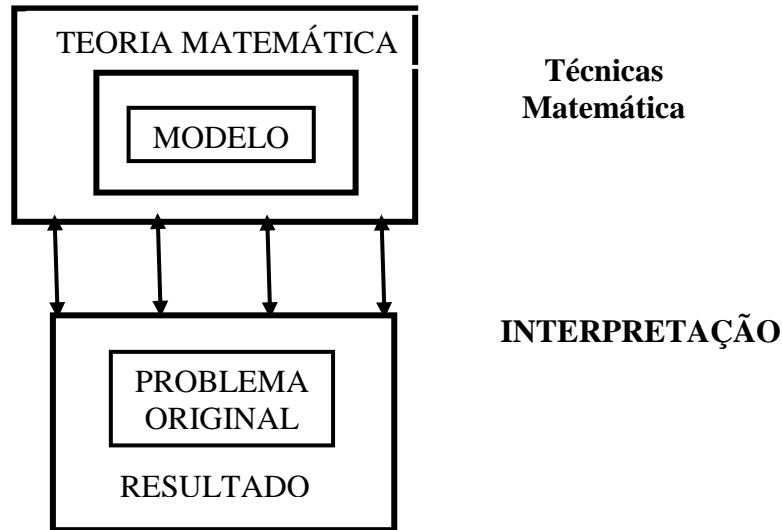
De acordo com essas afirmações, verifica-se que um modelo pode ser representado de diversas formas, não somente através de equações como muitos acreditam. Pois eles representam, de forma simplificada, uma parcela da realidade que pode ser interpretada dentro de uma teoria e verificada sua veracidade, ou seja, o modelo pode ser testado. Nesse sentido Bunge (1974, p 39) afirma: “Modelo significa uma interpretação de uma teoria abstrata sob a qual (interpretação) todas as afirmações da teoria são satisfeitas (verdade)”.

A modelagem possibilita o desenvolvimento de uma atividade intelectual unindo teoria e prática, voltada à compreensão do real, e que tem fins de promover ações para a transformação desta realidade (BASSANEZI, 2002). O primeiro objetivo da modelagem é a obtenção de modelos, sobre a qual Bassanezi afirma que:

A obtenção do modelo matemático pressupõe por assim dizer, a existência de um dicionário que interessa sem ambiguidades, os símbolos e operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado e vice-versa. Com isto, transpõe-se o problema de alguma realidade para a matemática onde será tratado através de teorias e técnicas próprias desta Ciência, pela mesma via de interpretação, no sentido contrário obtém-se o resultado dos estudos na linguagem original do problema. (BASSANEZI, 2002, p.25)

O pensamento de Bassanezi pode ser representado de maneira resumida através do diagrama exibido na Figura 1.

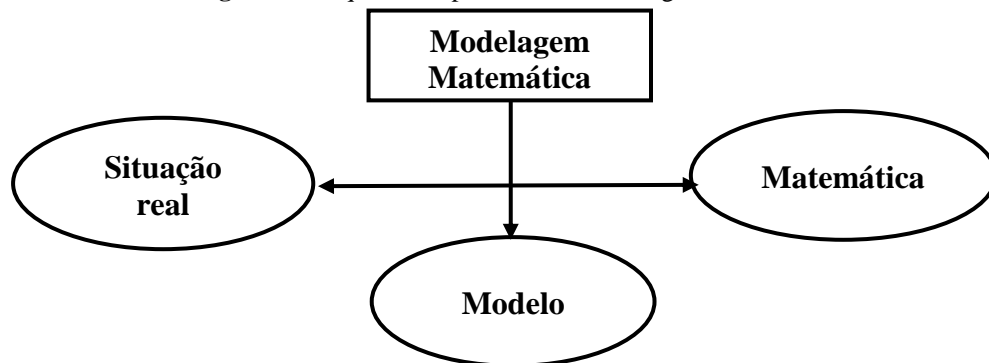
**Figura 1 - Processo de modelagem**



Fonte: Bassanezi (2002).

Complementando a ideia de Bassanezi sobre modelagem, Biembengut e Hein (2011, p.13), afirmam ser a matemática e a realidade dois conjuntos disjuntos interagentes por meio da modelagem. Esta forma de raciocínio devida a Biembengut está representada na Figura 2 e está de acordo com o pensamento de Bunge (1974), pois este afirma ser mediata, e não imediata, a relação de modelagem entre teoria e realidade, em outras palavras, a relação entre teoria e realidade é mediada por modelos.

**Figura 2 - Esquema do processo de modelagem matemática**



Fonte: Biembengut e Hein (2011).

Ciente do fato de a modelagem relacionar a matemática com a realidade<sup>3</sup>, esta pesquisa a utilizou como estratégia de ensino para resolver problemas relacionados a fenômenos físicos

<sup>3</sup> De acordo com Bassanezi(2002) e Biembengut e Hein(2011) o sentido de realidade é interpretado como uma das formas possíveis e aceitáveis de perceber o mundo.

reais nas aulas de matemática, estimulando os alunos no processo de investigação e aguçando o raciocínio lógico dedutivo. Essa metodologia de ensino teve como propósito motivar os alunos a criarem uma postura epistemológica de tornarem-se protagonistas. Na produção do conhecimento. Embasou-se na teoria sociocultural de Lev Vygotsky que é abordada na próxima seção.

### **2.3 Teoria da aprendizagem sócio interacionista de Vygotsky**

No momento em que o professor decide ensinar, é importante que ele tenha noção de como acontece o processo de aprendizagem. Muitos estudiosos dedicaram boa parte de suas vidas tentando compreender como a criança e, de modo geral, as pessoas aprendem. A partir de estudos, investigações e experimentos foram desenvolvidas várias teorias de aprendizagem e de desenvolvimento que contribuíram bastante para o entendimento do desenvolvimento mental da criança, não somente ao entrar na escola, mas durante todo o processo educacional, escolar e acadêmico. Reconhecendo a importância destas teorias, este trabalho utilizou-se da estabelecida por Lev Vygotsky para ensinar conceitos Matemáticos a partir de problemas reais envolvendo fenômenos físicos, isto é, utilizando a Física como forma de dar sentido à Matemática. Vygotsky partiu do princípio de que o desenvolvimento cognitivo não acontece fora do contexto social, histórico e cultural. Isto significa que o conhecimento é desenvolvido a partir da interação social e ocorre primeiro entre os indivíduos e em seguida por meio da internalização. Nesse sentido Vygotsky, afirma:

Todas as funções no desenvolvimento da criança aparecem duas vezes: primeiro, no nível social, e, depois, no nível individual; primeiro, entre pessoas (interpsicológica), e, depois, no interior da criança (intrapsicológica). Isso se aplica igualmente para atenção voluntária, para a memória lógica e para a formação de conceitos. Todas as funções superiores originam-se das relações reais entre indivíduos humanos" (VYGOTSKY, 1991, p. 43)

A proposta de trabalhar com a teoria de Vygotsky tem como finalidade um aprendizado que leve o aluno a relacionar o conhecimento da sala de aula com os fenômenos reais, por meio da interação social com os colegas, com ajuda do professor e também através de pesquisa. Pois a ideia não é apenas fazer o aluno aprender Física a partir das aulas de Matemática, mas que ele possa ter um pleno desenvolvimento cognitivo e que seja capaz de utilizar o conhecimento assimilado para estruturar sua forma de pensar e tomar decisões e, como consequência, consiga

---

resolver problemas, de natureza teórica ou prática, que tenha relação com fenômenos físicos reais.

Toda criança já possui um conhecimento prévio ao chegar à escola e esse conhecimento deve ser levado em consideração. Nesse sentido, Vygotsky (1991, p.56) afirma: “O ponto de partida dessa discussão é o fato de que o aprendizado das crianças começa muito antes delas frequentarem a escola”. Ciente desse fato, para verificar as dimensões do aprendizado escolar ele instituiu a zona de desenvolvimento proximal e estabeleceu dois níveis de desenvolvimento, os quais Vygotsky, descreveu:

O primeiro nível pode ser chamado de nível de desenvolvimento real, isto é, o nível de desenvolvimento das funções mentais da criança que se estabeleceram como resultado de certos ciclos de desenvolvimento já completados. [...] Nos estudos do desenvolvimento mental das crianças, geralmente admite-se que só é indicativo da capacidade mental das crianças aquilo que elas conseguem fazer por si mesmas. [...] Por outro lado, se a criança resolve o problema depois de fornecermos pistas ou mostrarmos como o problema pode ser solucionado, ou se o professor inicia a solução e a criança a completa, ou, ainda, se ela resolve o problema em colaboração com outras crianças - em resumo, se por pouco a criança não é capaz de resolver o problema sozinha - a solução não é vista como um indicativo de seu desenvolvimento mental. (VYGOTSKY, 1991, p.57)

Percebe-se que para haver desenvolvimento de uma criança ou pessoa deve-se trabalhar com a zona de desenvolvimento proximal, ou seja, para que o estudante possa transformar aquela ideia que está no seu estado embrionário em algo concreto é necessário o papel do professor como mediador ou orientador do processo, pois segundo Vygotsky:

[...]A zona de desenvolvimento proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário. Essas funções poderiam ser chamadas de "brotos" ou "flores" do desenvolvimento, ao invés de "frutos" do desenvolvimento. O nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente (VYGOTSKY, 1991, p. 58)

Essa pesquisa adotou a teoria desenvolvimentista de Vygotsky, pois se acredita que estratégia de ensino através da modelagem se torna mais eficiente quando realizado em equipe, em que o aluno tem a possibilidade de interagir com os colegas, socializando informações e adquirindo conhecimento e facilitando o processo de aprendizagem. Segundo Vygotsky (1991), o indivíduo só se desenvolve plenamente com o suporte de outros indivíduos de sua cultura, ocupando uma posição de destaque na troca de experiência entre alunos e, também entre aluno e professores.



Verificou-se que durante a atividade de modelagem desenvolvida na disciplina, a realização dos procedimentos realizados no processo tornou-se mais compreensível devido à ajuda e a interação com os colegas e, também, com o professor, reforçando a teoria de aprendizagem desenvolvida por Vygotsky e dando indícios de que a interação sociocultural entre indivíduos facilita a aprendizagem do aluno. Esse fato foi verificado durante a realização do processo de modelagem realizado pelos alunos, o qual permitiu que eles pudessem interagir e compartilhar informações, para definir a situação problema, verificar os equipamentos para a coleta de dados, formulação do problema, construção do modelo, interpretação e solução do problema. Isto posto, devido ao trabalho de modelagem ter sido realizado em equipe. Enquanto que o papel do professor foi orientar o processo e fazer os questionamentos necessários para que os alunos pudessem definir a situação problema, utilizar os procedimentos adequados na coleta de dados, assim como contribuiu em outras etapas do processo como é mostrado no produto educacional e na análise dos resultados.

A próxima seção aborda os conteúdos de física que foram desenvolvidos durante as aulas para relaciona-los com o conteúdo de matemática.

### 3 CONTEÚDOS DE FÍSICA ABORDADOS

Para ensinar Física nas aulas de Matemática, através do processo de modelagem, foram necessários conhecimentos relacionados aos conceitos de movimento e de energia. Esses temas da Física foram associados ao conteúdo matemático sobre funções. Os conceitos físicos abordados nesta seção estão fundamentados nas ideias de Halliday, Resnick e Walker<sup>4</sup>

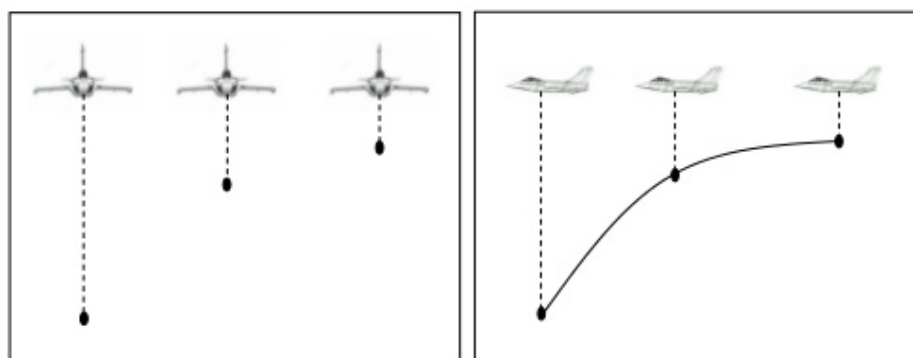
#### 3.1 Cinemática

No estudo da mecânica, a cinemática é o primeiro conteúdo abordado. O seu objetivo é estudar e descrever como se processam os movimentos de um corpo em relação a um referencial, verificar as posições que eles ocupam em uma trajetória ao longo do tempo e determinar suas possíveis velocidades, independentemente das causas dos movimentos. O movimento estudado na cinemática representa a variação, em função do tempo, da posição de um corpo em relação a outro corpo que serve de referência. Esse fato permite inferir que todo o corpo está em movimento, basta definir um referencial adequado. Nesse sentido Halliday, Resnick e Walker afirmam que:

O mundo, e tudo que nele existe, está sempre em movimento. Mesmo objetos aparentemente estacionários, como uma estrada, estão em movimento por causa da rotação da Terra, da órbita da Terra em torno do Sol, da órbita do Sol em torno do centro da Via Láctea e do deslocamento da Via Láctea em relação às outras galáxias (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016, P. 14)

Outro fato que depende do referencial é a trajetória descrita pelo corpo em movimento que pode ser reta ou curva, como pode ser verificado na figura 3.

**Figura 3** - Trajetória de um pacote de mantimentos arremessado por um avião



Fonte: Souza e Correa (2015).

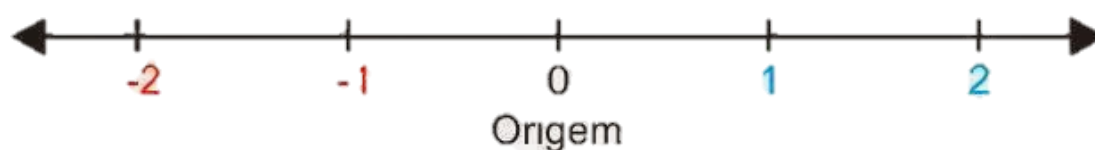
<sup>4</sup> Fundamentos de Física Vol. 1e2

A figura 3, permite inferir que um mesmo objeto em movimento pode apresentar mais de uma trajetória e o seu formato depende do referencial adotado.

### 3.1.1 Movimento retilíneo

Nesta seção, será estudado o movimento em situações em que o corpo está transladando-se em linha reta, chamado doravante de movimento unidimensional. Além disso, será analisada a velocidade (intensidade e orientação) com que esse corpo se move, isto é, a taxa de variação temporal da posição com relação ao tempo. Para o estudo do movimento retilíneo será estabelecido um eixo com uma origem e coordenadas (números) positivas e negativas, como mostra a figura 4. A partir desse eixo é possível localizar a posição que o corpo ocupa em relação à origem, analisar seu deslocamento, que representa a mudança da posição  $x_1$  para a posição  $x_2$  e estabelecer um sentido para o movimento.

**Figura 4** - Eixo de coordenadas unidimensional



Fonte: Autor (2019).

A direção e o sentido da velocidade determinam para onde um objeto se move. No caso do movimento unidimensional, a direção não varia, portanto, o sentido da velocidade é suficiente para especificar para onde se move este objeto. No caso de velocidade positiva, isto é  $v > 0$ , o objeto se desloca no sentido do semieixo positivo de  $x$  (da esquerda para a direita). Se a velocidade for negativa, ou seja  $v < 0$ , o objeto se move no sentido do semieixo negativo de  $x$  (da direita para a esquerda).

O deslocamento sobre o eixo unidimensional é determinado utilizando a seguinte expressão:

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

onde  $x_2$  representa a posição final do objeto e  $x_1$  representa sua posição inicial e  $\Delta x$  é o deslocamento sobre o eixo unidimensional.

Apesar de o eixo unidimensional estar na horizontal, o movimento retilíneo pode ocorrer, também, em direção vertical ou diagonal (inclinada). Como exemplos, podemos

utilizar o lançamento vertical e o movimento em plano inclinado (restrito a uma direção), por possuírem somente um grau de liberdade.

A taxa de variação temporal das posições com respeito ao tempo, expressa fenomenologicamente como a rapidez com que o corpo se move, é definida como o módulo da velocidade. Esta grandeza é vetorial, então para ser completamente especificada, ela necessita, também, de direção e de sentido. Existem algumas formas classicamente usadas por livros didáticos para defini-la:

**Velocidade média:** é a razão entre o deslocamento  $\Delta x$  e o intervalo de tempo  $\Delta t$  durante o qual esse deslocamento ocorreu.

$$V_{m\acute{e}dia} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Em um gráfico de  $x$  (posição) em função do  $t$  (tempo), a velocidade média é o coeficiente angular da reta que liga dois pontos da curva  $x(t)$ : um dos pontos corresponde a  $x_2$  e  $t_2$ , e o outro corresponde a  $x_1$  e  $t_1$ .

**Velocidade escalar média:** é a razão entre a distância percorrida e o intervalo de tempo para percorrê-la. É importante ressaltar que a distância percorrida depende da trajetória.

$$V_{E\ m\acute{e}dia} = \frac{\text{dist\~{a}ncia percorrida}}{\Delta t}$$

**Velocidade instant\~{a}nea:** essa velocidade não é definida como uma razão. Ela é obtida a partir da velocidade média, quando o intervalo de tempo  $\Delta t$  tende a zero.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

A velocidade instant\~{a}nea representa a taxa de variação da posição em relação ao tempo a cada instante, ou seja, é a derivada de  $x(t)$  em relação a  $t$ . Gráficamente, essa velocidade é representada pelo coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função  $x(t)$  no instante considerado.

Outro fator analisado no estudo da cinemática é a aceleração, que corresponde à variação da velocidade em função do tempo. Em relação à aceleração, temos:

**Aceleração média:** é a razão entre a variação de velocidade  $\Delta v$  de um corpo e o intervalo de tempo  $\Delta t$  no qual ocorre essa variação.

$$a_{\text{média}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

**Aceleração instantânea:** é a taxa de variação temporal (instantânea) da velocidade, ou seja, é a derivada primeira da velocidade  $v(t)$ , ou a derivada segunda da posição  $x(t)$ , em relação ao tempo.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Graficamente, a aceleração em um determinado instante é a inclinação da curva  $v(t)$  nesse instante.

Discute-se, a seguir, dois tipos básicos de movimento retilíneo usados como modelos durante o desenvolvimento da proposta de modelagem. Eles são classificados, de acordo com a variação da posição em relação ao tempo, em movimento retilíneo uniforme (velocidade constante) e movimento retilíneo uniformemente variado (aceleração constante).

### **Movimento retilíneo uniforme**

Nesse tipo de movimento, o corpo percorre distância iguais em tempos iguais, isto é, a velocidade é constante. Neste caso a velocidade média é igual à velocidade instantânea em qualquer instante. A equação horária do movimento retilíneo uniforme expressa a posição como uma função linear do tempo, devido à taxa de variação temporal daquela função, a velocidade, ser constante, conforme expresso abaixo:

$$x(t) = x_0 + vt$$

*v: velocidade escalar constante*

$$y(x) = a + bx$$

*b: taxa de variação constante*

No movimento retilíneo uniforme, a velocidade escalar mantém-se constante devido o corpo não estar sob a ação de nenhuma força. Pois, de acordo com a segunda lei de Newton, a força produz aceleração e a aceleração causa variação (que pode ser em módulo, em direção, em sentido) da velocidade.

### **Movimento retilíneo uniformemente variado**

O movimento é caracterizado por uma aceleração constante. Desta forma, a aceleração média coincide com a aceleração instantânea.

Utilizando a definição da aceleração constante, serão deduzidas as equações horárias do movimento retilíneo uniformemente variado.

#### **Função horária da velocidade**

Tem-se que:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Como,  $dt \neq 0$ , a equação é reescrita como

$$dv = a dt$$

Calculando a integral indefinida de ambos os membros e lembrando que a aceleração é constante.

$$\int dv = \int a dt$$

$$\int dv = a \int dt$$

$$v = at + k$$

Definindo como  $v_0$  a velocidade no instante  $t = 0$ , obtém-se  $k = v_0$ . Assim, fica estabelecida a função horária da velocidade

$$v = v_0 + at,$$

Verifica-se que essa função possui o comportamento de uma função linear:

$$y = a + bx.$$

#### **Função horária da posição**

Sabe-se que:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Sendo o diferencial  $dt \neq 0$ , tem-se:

$$dx = v dt$$

Integrando ambos os membros:

$$\int dx = \int v dt$$

Como  $v = v_0 + at$ , tem-se:

$$\int dx = \int (v_0 + at) dt$$

Logo,

$$x = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 + k'$$

Definindo a posição no instante  $t = 0$  como  $x_0$ , obtém-se  $k' = x_0$ . Dessa forma é determinada a equação horária da posição:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

A função obtida para a posição possui o comportamento da função quadrática:

$$y = a + bx + cx^2$$

Combinando essas duas equações de maneiras diferentes, obtém-se novas equações. Podem ser combinadas para eliminar a variável que representa o tempo, obtendo a equação:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Essa equação é conhecida como equação de Torricelli, muito útil para resolver alguns problemas nos quais o tempo não é definido. Elas podem também ser combinadas para eliminar a variável que representa a aceleração. Nesse caso, encontra-se a seguinte equação resultante:

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t.$$

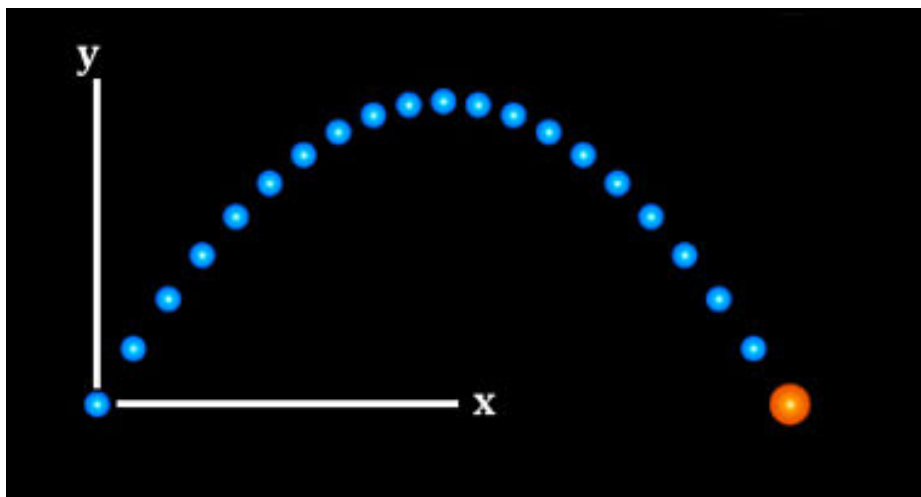
## Queda livre

Um corpo em queda livre move-se com característica do movimento uniformemente variado. Caso o corpo esteja livre da resistência do ar e próximo à superfície da Terra, o seu movimento estará sobre a influência de uma aceleração constante, denominada aceleração da gravidade e representada por  $g$ . Através de experimentos, foi detectado que seu valor próximo ao nível do mar é de aproximadamente  $9,8\text{m/s}^2$ . Ao redor da terra esse valor não é fixo, há uma variação de aproximadamente  $9,789\text{ m/s}^2$  no equador até  $9,823\text{ m/s}^2$  nos polos. Desta forma, as equações deduzidas para o movimento uniformemente variado servem, também, para o movimento de queda livre, uma vez que a aceleração é constante.

### 3.1.2 Movimento Oblíquo

Esse movimento também conhecido como movimento balístico ocorre no lançamento de um corpo que é chamado de projétil. Esse lançamento pode ser uma bola de tênis arremessada por uma raquete ou lançamento de dardos e martelos como ocorre em esportes olímpicos. O movimento oblíquo é bidimensional, mas pode ser decomposto em dois movimentos unidimensionais. Para seu estudo é necessário que o aluno tenha o conhecimento sobre vetores, descritos, neste trabalho, por letra minúscula em negrito. A figura 5, mostra a trajetória de um projétil ao ser lançado desprezando-se o efeito da força de resistência do ar sobre ele.

**Figura 5** - Trajetória de um projétil no movimento oblíquo

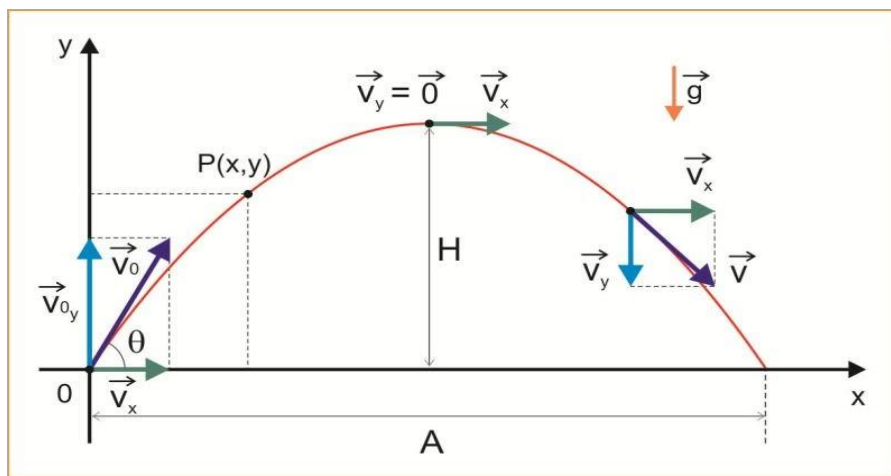


Fonte: Silas, 2019 (Brasil Escola).



O projétil é lançado com uma velocidade inicial  $v_0$  que pode ser escrita em função de suas componentes. A velocidade  $v_0$  forma um ângulo  $\theta$  com o eixo x, como mostra a figura 6. Durante o movimento, o vetor posição e a velocidade do projétil mudam continuamente, no entanto, o vetor aceleração é constante e está sempre dirigido verticalmente para baixo. O projétil não possui aceleração horizontal, pois a aceleração da gravidade está orientada na vertical (sentido negativo).

**Figura 6** - Componentes da velocidade no movimento oblíquo



Fonte: Borges e Nicolau (2011)

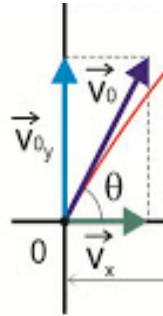
Neste movimento bidimensional, o movimento horizontal e o movimento vertical são independentes, ou seja, um não afeta o outro, diferentemente do caso em que haja resistência do ar (movimentos acoplados). Dessa forma, podem ser analisados separadamente. Como existe uma aceleração dirigida verticalmente para baixo (aceleração da gravidade), o movimento na vertical é uniformemente variado, enquanto o movimento na horizontal, como não existe aceleração, é uniforme.

### Deduzindo as equações do movimento oblíquo

A velocidade inicial  $v_0$  escrita na forma de combinação linear em função de suas componentes.

$$v_0 = v_{0y} + v_{0x}$$

Conhecendo o ângulo  $\theta$  pode-se determinar as componentes  $v_{0y}$  e  $v_{0x}$



$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

Como não existe aceleração na direção horizontal, a componente horizontal  $v_{0x}$  da velocidade do projétil permanece inalterada durante toda a trajetória. Isto significa que o deslocamento horizontal do projétil em relação a posição inicial  $x_0$ , em qualquer instante  $t$ , é  $x - x_0$ , determinado pela equação

$$x - x_0 = v_{0x}t + \frac{a}{2}t^2$$

Como a aceleração  $a = 0$ , tem-se:

$$x - x_0 = v_{0x}t$$

Mas,

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

Logo,

$$x - x_0 = v_0 \cos(\theta)t$$

No movimento vertical, o deslocamento do projétil em relação à posição inicial  $y_0$ , em um instante qualquer, é  $y - y_0$ . Como o projétil, nesse movimento, está sob a influência da aceleração da gravidade  $g$  (o sentido da a aceleração é no sentido negativo de  $y$ , será adotado  $-g$ ), tem-se a equação:

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

Mas  $v_{0y} = v_0 \sin \theta$ , então:

$$y - y_0 = v_0 t \sin \theta - \frac{g}{2}t^2$$

Como o movimento vertical é uniformemente variado, então:

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

Combinando as duas equações, obtém-se a equação:

$$v_y^2 = (v_0 \text{sen}\theta)^2 - 2g(y - y_0)$$

Como o movimento é bidimensional e está sendo analisado no plano  $xy$ , então para determinar a trajetória do projétil, basta estabelecer uma equação de  $y$  em função de  $x$ . Para isso, combina-se as equações do deslocamento na horizontal e vertical, isto é:

$$x - x_0 = v_0 \cos(\theta)t \text{ e } y - y_0 = v_0 \text{sen}(\theta)t - \frac{g}{2}t^2$$

Isolando  $t$  na primeira equação e substituindo na segunda, tem-se:

$$y - y_0 = (x - x_0) \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} - \frac{g}{2} \frac{(x - x_0)^2}{(v_0 \cos\theta)^2}$$

Adotando  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 0$ , obtém-se a equação:

$$y = (tg\theta)x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2} x^2$$

Essa equação representa uma função quadrática, cujo o gráfico é uma parábola. Portanto, conclui-se que a trajetória do movimento oblíquo é descrita por uma parábola, como mostra a figura 5.

Além da trajetória é possível estabelecer uma equação para o alcance horizontal  $R$ , ou seja, a distância horizontal percorrida pelo projétil até retornar a altura de lançamento. Para determinar o alcance  $R$ , basta fazer  $x - x_0 = R$  e  $y - y_0 = 0$ . dessa forma temos:

$$R = v_0 t \cos\theta \text{ e } v_0 t \text{sen}\theta - \frac{g}{2} t^2 = 0$$

Isolando  $t$  na segunda equação e substituindo na primeira, tem-se:

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \text{sen}\theta \cos\theta$$

Usando a identidade trigonométrica  $\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta \cos\theta$ , obtém-se a equação:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \text{sen}2\theta$$

O alcance horizontal  $R$  é máximo quando  $\text{sen}(2\theta) = 1$ , o que ocorre quando  $\theta = 45^\circ$ .

Na aplicação do produto educacional desse trabalho, em sala de aula, foram feitas as relações das funções linear e quadrática com as equações do movimento oblíquo.

## 3.2 Termodinâmica

### 3.2.1 Temperatura e Calor

A **temperatura** é uma grandeza termodinâmica intensiva, pois seu valor não se modifica com as variações da dimensão do sistema. No senso comum, ela está relacionada à sensação de quente e frio, no entanto, no sistema macroscópico, a temperatura mede a energia interna média das partículas, com determinado grau de liberdade, de um sistema em equilíbrio termodinâmico. Essa medida ocorre na escala Kelvin (pode ser determinada em outras escalas, como a celsius e a fahrenheit). Quando se aumenta a energia interna das partículas, isto é, elas são aceleradas, há uma variação na temperatura. O aumento na temperatura pode produzir o aumento no volume de um gás, a dilatação de uma barra metálica, entre outros fatores.

O instrumento utilizado para medir a temperatura de um corpo é o termômetro. Para fazer a medição da temperatura de um corpo A, o termômetro e o corpo são colocados em contato até ambos atingirem o equilíbrio térmico. A leitura do termômetro é, conseqüentemente, a temperatura do corpo na condição de equilíbrio. Se o mesmo processo ocorrer com um corpo B e for verificada a mesma temperatura, então pela **Lei Zero da termodinâmica** esses dois corpos estão em equilíbrio. Essa lei diz: se dois corpos, A e B, estão separadamente em equilíbrio térmico com um terceiro corpo C (no caso, o termômetro), então A e B estão em equilíbrio térmico entre si.

O equilíbrio térmico é alcançado após a transferência de energia térmica de um sistema para o ambiente, do ambiente para o sistema, ou após a transferência de energia térmica de um sistema para outro, neste caso os sistemas estão termicamente isolados. De acordo com Halliday, Resnick e Walker (2012, p. 191): “a energia térmica é uma energia interna que consiste na energia cinética e na energia potencial associadas aos movimentos aleatórios dos átomos, moléculas e outros corpos microscópicos que existem no interior de um objeto”. Esse processo de transferência de energia é chamado de calor. Dessa

maneira, o **calor** é definido como a energia trocada entre um sistema e o ambiente, ou entre sistemas, devido a uma diferença de temperatura. É simbolizado pela letra  $Q$ .

Quando o sistema (de temperatura  $T$ ) absorve exclusivamente energia interna da sua vizinhança (temperatura  $T'$ ) por um processo de calor ( $T' > T$ ), esse calor é caracterizado como positivo ( $Q > 0$ );

Quando o sistema cede exclusivamente energia interna para sua vizinhança por um processo de calor ( $T' < T$ ), esse calor é caracterizado como negativo ( $Q < 0$ ).

A ocorrência desta transferência de energia (calor) vai depender da capacidade calorífica do sistema. Essa capacidade calorífica é determinada experimentalmente, medindo a variação de um parâmetro (energia térmica) mantendo controlado o outro parâmetro (temperatura), enquanto as demais mantêm-se fixas. Esse tipo de grandeza obtida dessa forma, em termodinâmica, é estabelecida como função resposta.

$$C = \frac{dQ}{dT},$$

*C: capacidade térmica*

Na troca de energia térmica do sistema com o meio externo, independente da forma como ocorre, toda energia é conservada. Dessa forma, pode-se afirmar que todo processo de variação da energia interna está expresso em termos de processos de calor ou de trabalho. Assim vale a **primeira lei da termodinâmica** que diz: a variação de energia interna de um sistema termodinâmico é igual ao calor menos o trabalho realizado pelo sistema sobre a vizinhança. Isto é:

$$\Delta U = Q - W$$

*$\Delta U$ : variação de energia*

*Q: calor*

*W: trabalho*

Na diferencial<sup>5</sup>, tem-se:

$$dU = dQ - dW$$

---

<sup>5</sup> As diferenciais  $dQ$  e  $dW$  são inexatas, isto é, dependem do caminho adotado para integração. Já  $dU$  é uma diferencial exata.

No experimento realizado nesta pesquisa não houve realização de trabalho pelo sistema, nem sobre o sistema, dessa forma todo o calor recebido pelo sistema (aquecimento da água) e todo calor cedido pelo sistema (resfriamento da água) foi convertido em energia interna. Isto é:

$$W = 0$$

$$Q = \Delta U$$

Essa transformação é conhecida como isovolumétrica.

É importante ressaltar que trabalho e calor não são variáveis de estado, mas formas de transporte de energia que ocorre na fronteira entre o sistema e a vizinhança.

### 3.3 Resfriamento de Newton

Quando se coloca um corpo com uma temperatura  $T_c$  em um ambiente de temperatura  $T_a$ , de modo que  $T_c \neq T_a$ , depois de um certo tempo o corpo atinge o equilíbrio térmico com o ambiente. O ambiente se comporta como um reservatório, dessa maneira, somente a temperatura do corpo varia.

Considerando  $T = T(t)$ , a temperatura do corpo no instante  $t$ , pode-se afirmar que a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é proporcional a diferença de temperatura do corpo e o ambiente. Isto é:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

A constante de proporcionalidade  $k$  depende do material do qual o corpo é constituído.

A taxa de resfriamento, que representa a rapidez da variação da temperatura, vai depender de alguns fatores, tais como: a diferença de temperatura entre o corpo e o meio externo; a superfície do corpo exposta; o calor específico da substância<sup>6</sup> que o constitui; as condições do ambiente no qual este corpo foi colocado; o tempo em que o objeto permanece em contato com o ambiente.

Agora, resolvendo a equação diferencial ordinária.

---

<sup>6</sup> grandeza física intensiva que define a variação térmica de determinada substância ao receber determinada quantidade de calor

Sendo  $T - T_a \neq 0$  tem-se:

$$\frac{dT}{T - T_a} = -kdt$$

Integrando ambos os membros

$$\int \frac{dT}{T - T_a} = \int -kdt$$

$$\ln(T - T_a) = -kt + c$$

$$T - T_a = e^{-kt+c}$$

$$T = Ce^{-kt} + T_a$$

Para determinar a constante C, basta fazer  $T(0) = T_0$ , obtendo:

$$C = T_0 - T_a$$

Analisando a solução da equação, podemos verificar que representa uma função exponencial.

Esses conhecimentos de Física abordados neste capítulo foram utilizados nas aulas de matemática para ensinar física através de funções. Além disso, foram utilizados pelos alunos no processo de modelagem para resolver problemas reais da Física.

O capítulo seguinte aborda a metodologia de pesquisa e didática.

## 4 METODOLOGIA

Nesta seção dividimos a discussão da metodologia em: metodologia didática, isto é, aquela aplicada no processo de ensino em sala de aula; e metodologia investigativa, ou seja, aquela utilizada no processo de análise dos dados recolhidos durante a implementação do processo didático.

### 4.1 Metodologia Didática

O processo de ensino através da modelagem matemática somente terá resultado significativo se o professor estiver preparado para explorá-lo adequadamente. Para modelar existem diferentes procedimentos que podem ser escolhidos de acordo com a situação problema. Biembengut e Hein (2011) discutem, em sua obra, diversos exemplos de processos para modelagem, o que evidencia a polissemia desta palavra. Neste trabalho selecionou-se uma proposta de modelagem baseada nas obras de Bassanezi (2002) e Biembengut e Hein (2011), que estabelecem os procedimentos que podem ser seguidos por professores que pretendem utilizar esse método de ensino em suas práticas pedagógicas com a finalidade de relacionar o que é ensinado em sala de aula com a realidade, para que o conhecimento tenha importância no dia a dia do aluno. Nesse sentido, D'Ambrósio (1999, p. 80) diz: “o grande desafio para a educação é pôr em prática hoje o que vai servir para o amanhã”.

A proposta desse trabalho é relacionar através da modelagem o ensino da matemática com fenômenos físicos reais que serão investigados pelos alunos e transformados em problemas. Depois, utilizar os modelos estabelecidos, a partir da identificação das variáveis, da formulação de hipóteses e da simplificação para resolver os problemas e, em seguida, interpretar as informações obtidas para fazer previsões futuras. Se for o caso, serão feitos os ajustes necessários nos modelos. No entanto é importante frisar, como afirma Bunge (1974), que eles representam apenas uma aproximação da realidade e na maioria das vezes necessitam de ajustes, mas ainda é o melhor método para apreender a realidade.

Partindo dessas informações, nesta seção, são descritas todas as etapas que devem ser realizadas por quem deseja abrilhantar suas aulas através do método de modelagem para ensinar conteúdos de matemática por meio de problemas da física.

A primeira etapa é escolher o tema e formular a situação-problema que pretende modelar. Neste caso, o professor de Matemática trabalha o conteúdo da disciplina e, durante



esse período, divide a turma em grupos e sugere temas ligados à Física que possuam relação com o conteúdo abordado para os grupos escolherem. Biembengut e Hein (2011, p.20) informam “que deve ser feita uma breve exposição sobre o tema, delimitando-o. A forma como o professor demonstra seu conhecimento e interesse sobre o tema pode contribuir significativamente, para a motivação dos alunos”.

Com o tema escolhido, os alunos vão fazer um estudo e coletar todas as informações possíveis sobre ele, mediante a investigação em livros, internet, experimentos, visitas técnicas e por meio de profissionais da área. Após a familiarização com o tema através da pesquisa realizada, inicia-se a segunda etapa do processo de modelagem que deve obedecer a uma sequência de procedimentos baseados em Bassanezi (2002) e Biembengut e Hein (2005). O primeiro passo do processo de modelagem é a definição da situação problema, que deve ter relação direta com o tema escolhido. É essencial o acompanhamento do professor nessa fase, para verificar se a situação problema definida é possível de ser modelada. No entanto, é crucial que o professor não subestime a capacidade do aluno, e sim ofereça possibilidades para o aluno desenvolver seu potencial, pois de acordo com a teoria de aprendizagem sociointeracionista de Vygotsky, o professor deve mediar a aprendizagem utilizando estratégias que levem o aluno a tornar-se independente e estimule o conhecimento e o potencial, de modo a criar uma nova ZDP a todo momento.

O passo seguinte é coletar as informações sobre o fenômeno físico que será modelado. Esta fase possui sua importância, em virtude da interação com a situação problema, diante disso Biembengut e Hein (2011, p.14) diz: “A situação problema torna-se cada vez mais clara, à medida que se vai interagindo com os dados”. Em seguida, chega o instante da formulação do problema envolvendo fenômenos físicos. A escolha da situação real a ser problematizada para ser modelada precisa estar de acordo com a teoria matemática desenvolvida nas aulas, uma das razões é fazer os alunos perceberem o conhecimento com um novo olhar e outra, é relacionar o conhecimento de sala de aula com o mundo real. Escolhido o fenômeno físico, a formulação do problema pode ocorrer de três maneiras, as quais Barbosa (2004, p. 76 e 77) chama de casos, os quais são:

Caso 1: o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação. Aqui, os alunos não precisam sair da sala de aula para coletar novos dados.

Caso 2: os alunos deparam-se apenas com o problema para investigar, mas têm que sair da sala de aula para coletar dados. Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial. Nesse caso, os alunos são mais responsabilizados pela condução das tarefas.

Caso 3: trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas não relacionados à Matemática que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. Aqui, a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas dos alunos. Este foi o caso adotado na pesquisa.

É a partir desses procedimentos que vai ser possível formular o modelo. Mais uma vez, é necessária a ajuda do professor, devido ser uma fase de características conceitual e abstrata, na qual serão estabelecidas as variáveis envolvidas no problema e a relação entre elas. É também nessa fase que se estabelecem as hipóteses para resolver o problema, elas são geradas a partir de observações, experimentos, comparações e deduções lógicas. Para criação do modelo, é importante que haja uma simplificação da situação-problema, para que seja tratável matematicamente, como afirma Bunge (1974) “A formação de cada modelo começa por simplificações, mas a sucessão histórica dos modelos é um progresso de complexidade”.

Após essa sequência de procedimentos, o modelo é formulado, ou seja, o problema real estabelecido é transformado em uma linguagem matemática.

Com a formulação do modelo, chega o momento da resolução do problema. A resolução do modelo é através da teoria matemática, podendo ser dissociada da realidade modelada. Muitas vezes, devido ao grau de complexidade na elaboração do modelo, são necessários métodos computacionais para obter uma solução. No entanto, Biembengut e Hein (2005) afirmam que “a questão formulada que permite a resolução da questão e de outras similares, pode ser considerada um modelo matemático” (p. 22).

Após utilizar o modelo para resolver o problema formulado, chega o momento de verificar sua validação, isto é, testa-lo para confirmar sua veracidade. De acordo com Bassanezi, validação:

É o processo de aceitação ou não do modelo proposto – Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real – O grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para sua validação. (BASSANEZI, 2002, p. 30)

É na fase da validação que o modelo incorporado a um conjunto de ideias deve ser testado para verificar se é parcialmente realista, pois o bom modelo deve ter a eficácia de fazer

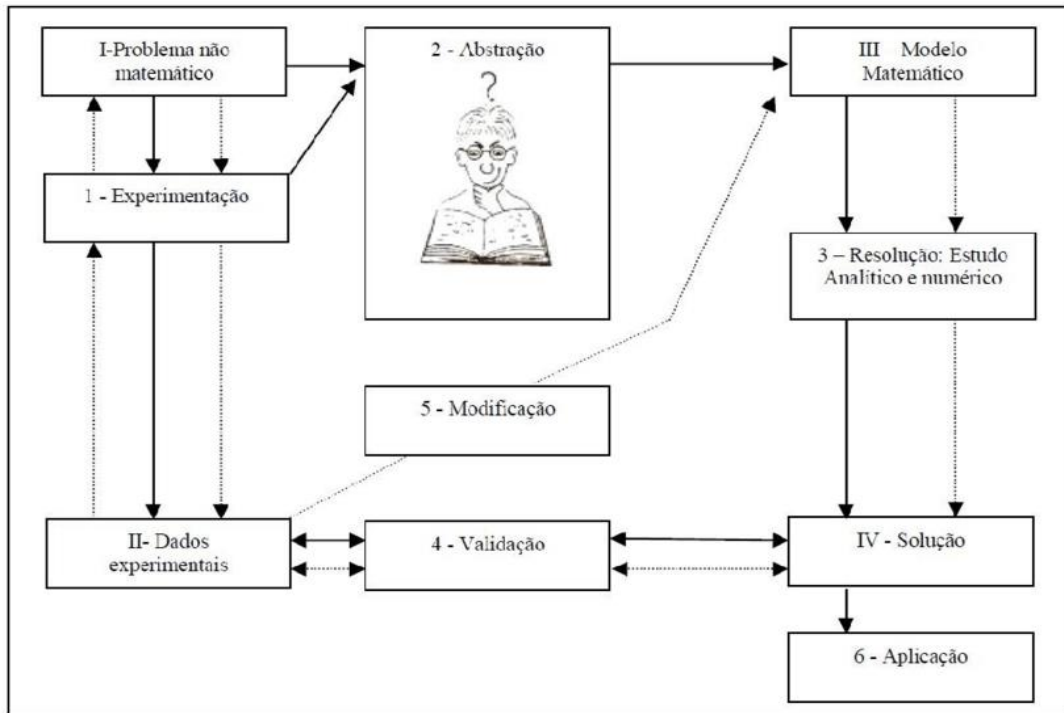
previsões de fatos novos. Caso perceba-se um distanciamento da realidade no momento da validação, procedem-se os ajustes necessários para o modelo tornar-se mais realista. Como afirma Bunge (1974), modelos submetidos à prova da experiência são suscetíveis de ser corrigidos segundo a necessidade.

A modificação ocorre quando o modelo formulado, que representa a realidade ou idealizações aproximadas da realidade, não estabelece previsões parcialmente verdadeiras. Isto ocorre devido a fatores relativos à situação que representa o problema real proposto, tais como: alguns dados experimentais ou informações podem ter sido obtidos de forma incorreta, por isso a importância de o professor acompanhar essa fase; algumas variáveis físicas envolvidas na situação problema podem ter sido preteridas na formulação do modelo; pode ter havido erro matemático na construção do modelo, entre outros fatores. Em verdade, nenhum modelo pode ser considerado definitivo, sempre podem ser melhorados a fim de se obter modelos mais realistas.

Para proceder com eficácia às etapas apresentadas no processo de modelar, é importante que o professor estabeleça um plano de ação de como conduzirá o trabalho junto aos alunos e tenha conhecimento dos procedimentos do método de modelagem. Esses procedimentos são estabelecidos por diversos autores, tais como: Burak, Barbosa, Biembengut, Bassanezi, entre outros. Apesar de existirem algumas diferenças entre as etapas, no entanto todos utilizam o processo de modelagem para representar a realidade por meio de modelos e os quatro autores citados utilizam como estratégia de ensino. Neste trabalho, foram abordadas as ideias de Bassanezi e Biembengut sobre modelagem.

Na figura 7, observa-se um diagrama exibindo as etapas de modelagem de acordo com Bassanezi (2002), que estabelecem os procedimentos que vai do problema não matemático (situação problema) a aplicação do modelo.

**Figura 7** - Esquema das etapas de uma modelagem



Fonte: Bassanezi (2002, p.27).

Na figura 8, apresentam-se as etapas do processo de modelagem estabelecidas por Biembengut e Hein (2011).

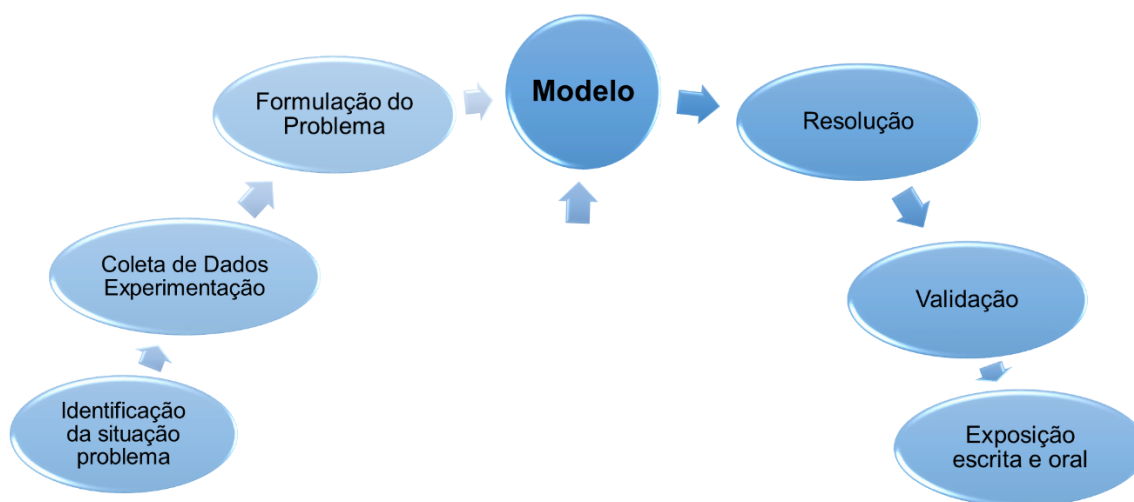
**Figura 8** - Dinâmica da modelagem matemática



Fonte: Biembengut e Hein (2011).

Neste trabalho, foi feita uma junção<sup>7</sup> desses procedimentos, como mostra a figura 9, para trabalhar a modelagem relacionado a Matemática e a Física para resolver problemas reais envolvendo fenômenos físicos. O resultado da junção dos processos de modelagem estabelecidos pelos dois autores resultou na forma como foi conduzido as atividades nessa pesquisa.

**Figura 9** – Procedimentos de modelagem



Fonte: Autor (2019)

#### 4.1.1 Descrição do produto educacional

A modelagem é uma estratégia de ensino que o professor pode adotar para aproximar a Matemática de outra área de conhecimento, relacionando as informações da sala de aula com problemas reais. Nesta pesquisa, utilizou-se essa metodologia para relacionar a Matemática com fenômenos Físicos, isto é, ensinar Física a partir da Matemática.

Com base nessa pesquisa, construiu-se um Produto Educacional (ver apêndice), que consiste em um material didático com o objetivo de apresentar uma proposta a ser seguida pelos professores de cursos universitários, âmbito no qual estive trabalhando durante o período final do mestrado, em que a Matemática e Física fazem parte da grade curricular, para relacionar essas duas áreas do conhecimento com o propósito de tornar o ensino mais dinâmico e eficaz.

<sup>7</sup> As etapas dessa junção estão especificadas no produto educacional (apêndice)

No entanto essa proposta pode ser adaptada para ser utilizada por professores da educação básica.

O produto inicia com uma introdução que descreve a relação entre a Matemática e a Física e apresenta a proposta de metodologia para interação entre essas áreas do conhecimento. Essa proposta é a temática da pesquisa, ou seja, o método de modelar.

O capítulo seguinte do produto discorre sobre os procedimentos que devem ser empregados pelo professor para usar a modelagem em sua prática docente. Na primeira seção deste capítulo, foram apresentadas sugestões para o professor abordar o conteúdo de funções associando a temas da Física; a pretensão não é ensinar como o professor deve dar suas aulas, mas compartilhar sistematizações de experiências didáticas que foram satisfatórias na realização da pesquisa e que possibilitaram a construção do produto educacional. Na seção seguinte, foram abordados os procedimentos estabelecidos por Bassanezi (2002) e Biembengut e Hein (2011) para o processo de modelagem, detalhando toda a sequência do processo, desde a escolha do tema, passando pela identificação da situação problema, coleta de dados, formulação do problema, construção do modelo, verificação, até os ajustes necessários no modelo formulado para que seja mais realista possível. Nessa seção, também se comenta a respeito da utilização da teoria de aprendizagem de Lev Vygotsky para ensinar. Ao final, são apresentadas as considerações finais, seguidas da bibliografia utilizada.

## **4.2. Metodologia Investigativa**

Toda pesquisa segundo Gil (2002, p. 17) tem como objetivo proporcionar resposta aos problemas propostos. No entanto, em uma pesquisa é necessário um conjunto de procedimentos que possa servir de recursos para realizá-la. Nesta seção, serão descritos os meios utilizados para realização da pesquisa, que, de acordo com Gil (2019), “é o processo formal e sistemático de desenvolvimento do método científico. Seu objetivo é descobrir respostas para problemas mediante o emprego de procedimentos científicos”.

Com base no objetivo geral, estabelecido nesta pesquisa, que tem como propósito avaliar ou explicar como a modelagem pode auxiliar o aluno a interpretar e compreender os fenômenos físicos, verificou-se que ela se classifica como pesquisa explicativa, pois segundo Chaves (2012, p. 72) “A investigação explicativa tem como principal objetivo tornar algo inteligível, justificar-lhes os motivos, visa, portanto, a quais fatores contribuem de alguma forma, para a ocorrência de determinado fenômeno”. E é exatamente essa a proposta deste

trabalho: tornar mais compreensível o ensino da física através da matemática utilizando a modelagem.

A pesquisa é delineada como um estudo de caso devido a vários fatores, por exemplo: escolha de apenas uma turma<sup>8</sup> para realização da pesquisa; a coleta de dados foi mediante a observações, da análise dos relatórios construídos pelos alunos no processo de modelagem das situações problemas envolvendo os fenômenos físicos, vídeos, fotografias, entrevistas gravadas e, também, da socialização das informações da pesquisa realizada por eles. Pois segundo Gil (2002) “A coleta de dados no estudo de caso é feita mediante o concurso dos mais diversos procedimentos. Os mais usuais são: a observação, a análise de documentos, a entrevista e a história de vida”.

Quanto à abordagem, a pesquisa é considerada qualitativa, pois não se preocupou com a representatividade numérica e nem utilizou de ferramentas estatísticas para a análise dos resultados, mas procurou descrever e explicar como a modelagem auxiliou na resolução de problemas físicos reais nas aulas de Matemática a partir das observações, dos relatórios, das interações entre os alunos e entre alunos e professor, pois, segundo Minayo (2001, p.21 e 22), a pesquisa qualitativa “ [...]trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis”. Além do mais, a pesquisa é considerada qualitativa pelo fato do pesquisador ter tido contato direto com os pesquisados, haja vista que a coleta de dados ocorreu dentro da sala de aula onde o pesquisador (professor) e os participantes (alunos) conviveram durante todo o primeiro semestre de aula do ano de 2019. Foi realizada tendo o contato direto com os pesquisados. Nesse sentido, Creswell apud Gil (2019, p.31) afirma: “[...] nas pesquisas que adotam o enfoque interpretativista – as pesquisas qualitativas – os pesquisadores procuram chegar o mais próximo possível dos participantes que estão sendo estudados. Dessa forma, o saber passa a ser conhecido por meio de experiências subjetivas de pessoas”.

A finalidade da pesquisa, além de verificar de que forma a matemática pode ser usada para auxiliar o aluno compreender os fenômenos físicos reais, teve o propósito de construir um produto educacional para assessorar professores que pretendem utilizar o método de modelagem em suas aulas. Por isso, ela é considerada como pesquisa aplicada.

---

<sup>8</sup> A grade curricular da turma é composta basicamente por disciplinas envolvendo o conhecimento de Matemática e Física.

Apesar da metodologia de pesquisa deste trabalho ter seguido esse caminho para realizar os estudos e justificar que a modelagem é uma estratégia de ensino eficiente para relacionar o conhecimento da sala de aula com o mundo real, a metodologia adotada pelos alunos para realizarem suas pesquisas e coletas de dados a partir de fenômenos físicos foi diferente do que se narra nesta seção, afinal descrevem-se aqui os métodos didáticos e investigativos para analisar justamente como a modelagem era desenvolvida pelos discentes. Os dados foram coletados por eles através de experimento e a análise envolveu recursos estatísticos.



## 5 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE MODELAGEM

O método de modelagem para o ensino, segundo os procedimentos de Bassanezi (2002) e Biembengut e Hein (2011) que foi descrito no Produto Educacional (ver apêndice), foi aplicado em uma turma de 20 alunos do primeiro semestre do curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia (BCTEC) da Universidade Federal do Oeste do Pará. No BCTEC, os componentes curriculares com os conteúdos de Física e Matemática são maioria na grade curricular. A proposta foi desenvolvida na disciplina de Fundamentos da Matemática com carga horária de 45h (54 tempos de aula de 50 minutos), na qual o conteúdo programático da ementa está, entre outros conteúdos, basicamente fundamentado em funções.

A ideia foi utilizar as situações da Física, para ensinar o conteúdo de Funções, de maneira a aplicar-se o método de modelagem para interligar essas duas áreas do conhecimento. Para isso ser possível, ao iniciar o estudo, mostrou-se aos alunos que a noção intuitiva de função está baseada na relação de dependência entre grandezas.

Para enfatizar essa ideia, foram apresentados exemplos de dependência de grandezas envolvendo aceleração, força e massa; pressão força e área; potência trabalho e intervalo de tempo, como mostra a quadro 2:

**Quadro 2** - Modelos físicos utilizados para exemplificar a relação de dependência entre grandezas

Grandezas	Símbolos	Relação	Dependência
aceleração força massa	$\vec{a}$ $\vec{F}$ $m$	$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$	$a$ depende de $F$ e de $m$
pressão força área	$p$ $F$ $A$	$p = \frac{F}{A}$	$p$ depende de $F$ e de $A$
potencia trabalho intervalo de tempo	$P$ $\tau$ $\Delta t$	$P = \frac{\tau}{\Delta t}$	$P$ depende de $\tau$ e $\Delta t$

Fonte: Autor (2019).

As relações utilizadas na tabela foram usadas para trabalhar a ideia de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Geralmente, as informações sobre funções eram associadas a um tema da Física, de forma imediata ou posteriormente, com a finalidade de vincular a Matemática e a Física. No entanto, é necessário fazer uma análise do ponto de vista epistemológico ao descrever fenômenos físicos a partir da linguagem matemática, com o

propósito de evitar que alunos resolvam problemas relacionados à física produzindo apenas resultados numéricos sem compreender o conceito físico relacionado ao fenômeno. Nesse sentido Uhden et al. (2012, p. 487) afirma que: “[...] uma estratégia comum usada pelos alunos para resolver problemas é ligar cegamente as quantidades em equações físicas e produzir respostas numéricas sem entender o significado físico de seus cálculos”<sup>9</sup>.

Essa preocupação em evitar a visão deturpada do aluno sobre o aprendizado da Física através da Matemática sempre foi constante durante as aulas, mas esse fato parece ser usual no ensino médio na cidade de Santarém, talvez devido a um grande número de matemáticos ministrarem aulas de Física.

Durante as primeiras aulas sobre funções, foram utilizados dois tempos de 50 minutos para informar aos alunos que a metodologia aplicada seria a de utilizar situações e conceitos de Física para ensinar-lhes Matemática de maneira significativa e interdisciplinar, e que os conteúdos de funções seriam aplicados para resolver problemas físicos, além do que no decorrer das aulas eles iriam perceber que muitos dos modelos físicos foram estruturados com base nos modelos que representam os tipos de funções. E para que essa metodologia pudesse funcionar, seria utilizado o processo de modelagem, com o qual eles teriam a oportunidade de resolver problemas envolvendo fenômenos físicos reais identificados por eles.

Após receberem a informação de como seriam desenvolvidos os trabalhos, foram apresentados dois temas para pesquisarem: o de Movimento e o de Energia. Os temas foram selecionados pelo professor, pois Biembengut e Hein (2011) informa que que o tema pode ser escolhido pelos alunos ou pelo professor, mas enfatiza que a desvantagem da escolha pelos alunos é a escolha de temas não adequados para o desenvolvimento do programa.

Partindo-se das premissas de Vygotskyanas de que toda pessoa é um ser social e cultural, e que o desenvolvimento do ser humano acontece através das interações socioculturais, a turma foi dividida em duas equipes para que a aprendizagem ativa acontecesse de forma coletiva, através da interação entre os membros dos grupos. É importante que o professor tenha essa percepção de que o desenvolvimento intelectual pode ocorrer por meio da socialização de

---

<sup>9</sup> studies indicate that one common strategy used by the students to solve problems is blindly plugging quantities into physics equations and churning out numeric answers without understanding the physical meaning of their calculations.

conhecimento entre os alunos, e uma das formas disso acontecer é através de atividades em grupo, pois, conforme Vygotsky,

Muitos educadores não reconhecem esse processo social, essas maneiras pelas quais um aprendiz experiente pode dividir seu conhecimento com um aprendiz menos avançado, não-reconhecendo esse que limita o desenvolvimento intelectual de muitos estudantes. (VYGOTSKY, 1991, p.83).

Após a divisão, o grupo A, ficou com o tema Movimento e para obterem melhores informações sobre o tema, foi sugerido que fizessem uma pesquisa sobre os seguintes temas:

- Movimento Uniforme.
- Movimento uniformemente variado;
  - Movimento horizontal;
  - Lançamento vertical;
  - Lançamento oblíquo;
- Leis de Newton;
- Energia mecânica.

O grupo B, por sua vez, recebeu o tema Energia e teve que fazer investigações sobre os temas abaixo:

- Temperatura;
- Calorimetria;
- Energia mecânica;
- Energia térmica;

Estabelecidos o tema e os assuntos, selecionaram-se mais dois tempos de aula para informar todos os procedimentos que deveriam seguir no processo da modelagem, inclusive, o processo seria de acordo com o caso 3, estabelecido por Barbosa (2004, p.77) e tirar as possíveis dúvidas iniciais. Esses procedimentos estão descritos no Produto Educacional.

Enquanto os alunos faziam a pesquisa investigativa, com a finalidade de familiarizar-se com o tema, a teoria matemática sobre funções era desenvolvida durante as aulas relacionando com modelos físicos, como descrito no Produto Educacional. Também em sala de aula era trabalhado a modelagem de acordo com o caso 1, estabelecido por Barbosa (2004, p. 76) através de lista de problemas envolvendo fenômenos físicos e algumas vezes fenômenos biológicos.

Durante as aulas, era reservado, inicialmente, um quarto do tempo de cada aula (as aulas eram às segundas-feiras, com três horários de aula de 50 minutos) para acompanhar o desenvolvimento das atividades por cada grupo. O primeiro momento ocorreu após eles terem se familiarizado com o tema. Esse momento teve o propósito de verificar as informações obtidas e o possível fenômeno físico que pretendiam modelar.

Após a comunicação das situações problemas definidos pelas equipes, elas foram questionadas pelo professor sobre a possibilidade de modelá-las e qual a relevância científica da situação no ponto de vista de cada equipe. A partir dos questionamentos, as equipes se reuniram para discutir e ficou acertado que dariam uma posição nas próximas aulas. Na aula seguinte, no horário estabelecido para as discussões e orientações, as quais eram gravadas, as equipes apresentaram as seguintes situações problemas.

- **A correnteza do rio Tapajós em frente à cidade de Santarém, no perímetro da orla entre a Praça Monsenhor José Gregório<sup>10</sup> e a praça do Pescador<sup>11</sup> (equipe A);**
- **Aquecimento e resfriamento de um líquido (H<sub>2</sub>O) em uma garrafa PET comum e em duas garrafas PET preparadas com materiais de baixo custo para evitar a transferência de calor (equipe B).**

Com a situação problema definida, o próximo passo foi a coleta de dados. As equipes utilizaram as informações obtidas na investigação do tema e fizeram uma pesquisa mais específica sobre a situação com o intento de familiarizar-se com o fenômeno físico envolvido. Com as informações obtidas através da pesquisa documental, a coleta de dados quantitativos ocorreu através das medições das grandezas envolvidas no fenômeno. A equipe A, utilizou uma embarcação para auxiliar as medições da situação problema definida, como mostra a Figura 10.

---

<sup>10</sup> Localizada em frente à Igreja Matriz de Santarém, conhecida como Praça da Matriz.

<sup>11</sup> Localizada a 400m da Praça Monsenhor José Gregório no sentido da foz do rio Tapajós.

**Figura 10** - Embarcação usada para auxiliar as medições relativas à situação problema



Fonte: Alunos da turma (2019).

Para medir a velocidade do fluxo do rio Tapajós em sentido da foz e nascente do rio e em sentido perpendicular rio orla de Santarém, utilizaram-se os seguintes instrumentos: uma trena de 50 m; GPS e cronômetro de celulares, para obter os dados; fita gomada e outros materiais que serviram como acessórios na medição, como mostra a Figura 11.

**Figura 11** - Instrumentos para a coleta de dados (medição) da situação problema



Fonte: Alunos da turma (2019).

A equipe B fez a coleta no laboratório de física da UFOPA com auxílio do técnico do laboratório, utilizando os seguintes equipamentos: o termômetro do LabQuest; Pen drive e notebook, como mostra a Figura 12.

**Figura 12** - Medição da temperatura dos líquidos nas garrafas através do LabQuest



Fonte: Alunos da turma (2019).

Obs.: Os dados obtidos estão exibidos no produto educacional (Ver apêndice).

Com os dados obtidos, as equipes verificaram os fatos envolvidos nos fenômenos e a relação entre as variáveis para formulação dos problemas relacionados a situações físicas reais definidos. Houve a preocupação de deixar evidente a separação entre a situação problema definida e a formulação do problema, pois, a primeira é uma proposta de pesquisa para a aplicação do método de modelagem, enquanto a segunda indica especificamente o que pretende resolver. Esta fase exigiu bastante esforço por parte das equipes. Ainda que a formulação do problema fosse de responsabilidade dos alunos, o professor teve um papel fundamental no processo de orientação para que o problema tivesse caráter científico. Após as orientações repassadas pelo professor e a interação entre os alunos, as equipes formularam os seguintes problemas:

- **De que maneira o rio Amazonas influencia a correnteza do rio Tapajós no perímetro localizado em frente à cidade de Santarém? (Equipe A)**
- **Em que medida um recipiente construído com materiais de baixo custo<sup>12</sup> preserva a temperatura de um líquido? (Equipe B)**

---

<sup>12</sup> Garrafa PET, papel alumínio, jornal.

Com os problemas formulados, o passo seguinte foi a construção dos modelos. Vale ressaltar que houve uma diferença dos modelos obtidos pelas equipes e nos procedimentos utilizados para a resolução dos problemas. A equipe A apresentou os modelos por meio de tabelas, gráficos e equação e através da investigação e interpretação obteve a solução do problema, a equipe B apresentou os modelos utilizando gráficos, equações obtidas através de um programa computacional (Excel).

### 5.1 Modelos construídos e a solução dos problemas no processo de modelagem

Nesta seção, serão apresentados os modelos construídos que possibilitaram a resolução do problema, assim como as soluções obtidas. Primeiramente, serão abordadas as informações sobre o processo de modelagem da situação problema estabelecida pela equipe A, no que tange à construção do modelo e a resolução do problema.

Após a coleta de dados e a formulação do problema, a equipe A iniciou a elaboração dos modelos, através da construção de tabela com os dados quantitativos obtidos e a razão entre a distância percorrida pela embarcação e o intervalo de tempo gasto no percurso, como mostram os quadros 3 e 4. Em seguida, construíram um gráfico a partir dos quadros, como mostra a Figura 13, e definiram uma equação para calcular a velocidade do fluxo do rio Tapajós em frente a orla de Santarém no perímetro da Praça Monsenhor José Gregório e a Praça do Pescador, como mostra a figura 14.

**Quadro 3** - Dados coletados no movimento da embarcação da Praça Monsenhor José Gregório à Praça do pescador

Movimento	Espaço (metros)	Tempo (segundos)	Velocidade média da embarcação (m/s)
Em sentido à praça do pescador (ida)	0 – 200	120	1,67
	200 – 400	203	0,98
Em sentido à Praça Monsenhor José Gregório (volta)	400 – 200	183	1,09
	200 – 0	100	2,00

Fonte: Alunos da turma (2019).

No quadro 4, estão os dados observados no movimento da embarcação do rio Tapajós em sentido a orla de Santarém. A direção do trajeto da embarcação foi perpendicular à orla. A embarcação manteve a mesma aceleração dos outros percursos.

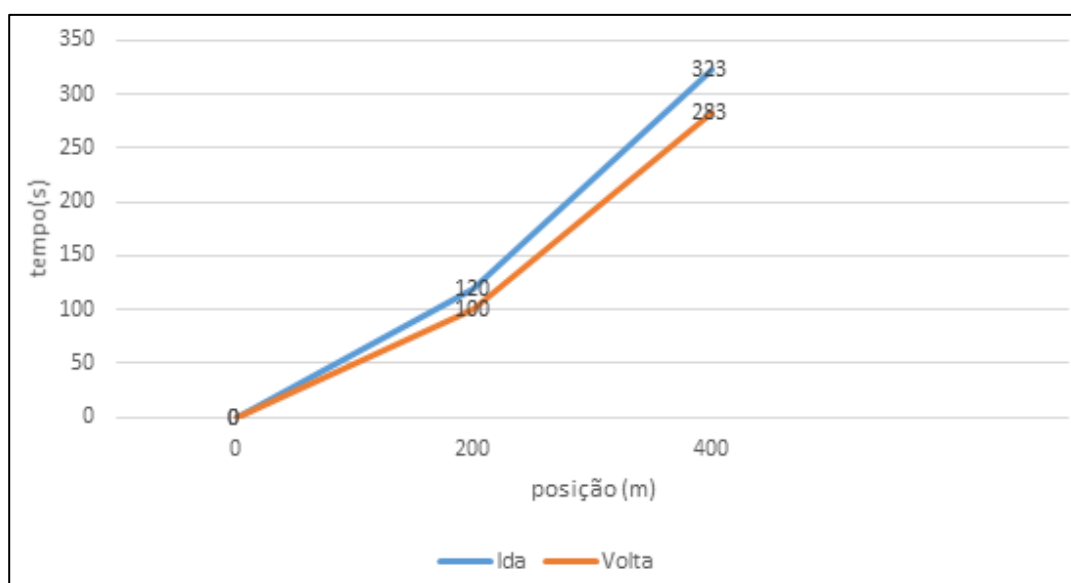
**Quadro 4** - Dados obtidos em direção perpendicular à orla de Santarém no sentido Rio Tapajós à orla

Espaço (metros)	Tempo (segundos)	Velocidade média (m/s)
0-400	120	3,33

Fonte: Alunos da turma (2019).

A Figura 13 apresenta um gráfico dos dados do Quadro 3, do tempo em relação a posição.

**Figura 13** - Tempo gasto no percurso entre a Praça José Gregório e a Praça do Pescador



Fonte: Alunos da turma (2019).

A Figura 14 mostra o perímetro da orla de Santarém, entre a Praça Monsenhor José Gregório e a Praça do Pescador, local onde foi coletado os dados da situação problema definida pela equipe A.



**Figura 14** - Fluxo do rio Tapajós em frente a orla de Santarém no perímetro da Praça Monsenhor José Gregório e a Praça do Pescador



Fonte: CREA-PA

Utilizando a razão entre a distância percorrida pela embarcação e o tempo gasto no percurso, ou seja, a velocidade do barco<sup>13</sup>, a equipe determinou a velocidade do fluxo do rio em frente à orla de Santarém nos 200 m iniciais entre a Praça Monsenhor José Gregório e a Praça do Pescador através da diferença da velocidade no percurso de ida e de volta.

$$V_F = V_{ida} - V_{volta}$$

$$V_F = 1,67 - 2,00 = -0,33 \text{ m/s}$$

A velocidade do fluxo foi de  $-0,33 \text{ m/s}$  no sentido Praça do Pescador à Praça Monsenhor José Gregório.

Da mesma maneira procederam para encontrar a velocidade do fluxo do Rio Tapajós nos 200 metros finais entre a Praça Monsenhor José Gregório e a Praça do Pescador.

$$V_F = 0,98 - 1,09 = -0,11 \text{ m/s}$$

<sup>13</sup> Em todos os movimentos da embarcação foi mantida a mesma aceleração. A velocidade do barco modificou devido ao fluxo do rio.

A velocidade do fluxo foi de 0,11 m/s no sentido praça dos pescadores à Praça Monsenhor José Gregório.

Analisando os modelos, a equipe percebeu que a velocidade do fluxo do Rio Tapajós estava no sentido praça do pescador à praça Monsenhor José Gregório, isto é, sentido foz-nascente nesse perímetro. Além desse fato, verificou que a velocidade da embarcação no movimento sentido perpendicular Rio Tapajós-orla foi maior em relação à velocidade em outros percursos apresentados na Tabela 1. A partir dessas observações nos modelos e através de pesquisa sobre a situação problema, a equipe chegou a seguinte conclusão:

*“Em outro momento, os alunos se reuniram para debater sobre as informações coletadas, tornou-se possível observar que um fenômeno físico ocorria no local analisado, tal fato ocorrido se dá devido ao rio Amazonas por possuir uma densidade maior e sua velocidade de correnteza ser superior comparada ao do rio Tapajós, conseqüentemente, devido a esses dois fatores o primeiro rio exerce uma força na correnteza do segundo rio citado que possui uma densidade menor em relação ao primeiro rio, tendo em vista que ambos os rios se encontram em frente à cidade sem se misturarem, tornando possível a formação do evento físico natural belíssimo denominado de ‘Encontro das Águas’.*

*Há outro fator que influencia esse fenômeno também. Ao observamos a figura 1<sup>14</sup>., percebemos que a situação geográfica da orla torna o problema muito mais evidente, tendo em vista a imagem citada, percebe-se que o local observado possui uma curva natural que faz com que uma mudança de correnteza seja muito mais fácil de identificar, dividindo o curso do rio em dois, a primeira parte do rio segue a sua correnteza natural, indo em direção ao sul do estado do Pará, e a segunda bate na curva e é empurrada pelo rio Amazonas, retornando a nascente do rio, no Estado de Mato Grosso”.*<sup>15</sup>

Essa conclusão representa de forma geral a solução do problema apresentado. No relatório produzido pela equipe (ver apêndice), está descrita essa conclusão e também são apresentados maiores detalhes em relação à interpretação e solução do problema, tais como:

*“Tal problema dificulta o embarque e desembarque de passageiros e produtos, tendo em vista que Santarém é de grande influência econômica para diversas famílias ribeirinhas e também tem uma forte influência turística para visitantes da região, estados e países vizinhos. Uma solução para esse problema é evitar esse trecho do rio [...]”.*

---

<sup>14</sup> Ver figura 27

<sup>15</sup> Conclusão da equipe A apresentada no relatório.

A equipe B utilizou os dados armazenados no pen drive, que foram obtidos por meio do equipamento LabQuest no laboratório, na realização do experimento no qual foram coletados os dados referentes ao aquecimento e resfriamento da água nas garrafas PET preparadas com material de baixo custo e na Garrafa PET comum, para elaboração dos modelos. Primeiramente, os dados foram transferidos para Excel na forma de tabela como mostram o quadro 5. Em seguida, a equipe construiu modelos gráficos para representarem as tabelas.

**Quadro 5** - Dados do experimento relativo ao aquecimento e resfriamento da água na troca de calor com o meio ambiente obtido através do LabQuest

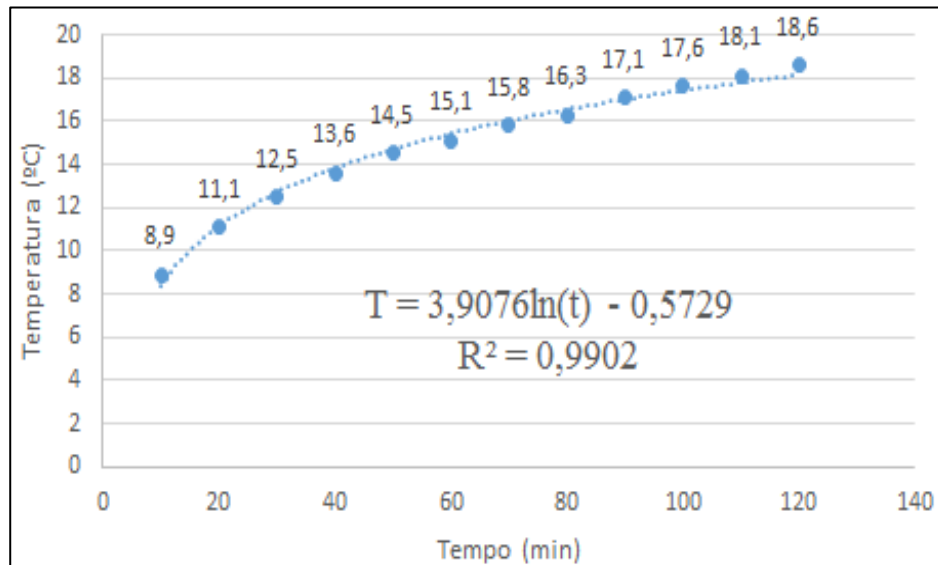
Tempo em minutos	Temperatura da água em °C			
	Aquecimento na garrafa PET	Aquecimento na garrafa PET preparada	Resfriamento na garrafa PET	Resfriamento na garrafa PET preparada
0	5,8	4	56,8	54,2
10	8,9	4,6	54,2	53,5
20	11,1	5,7	51,2	52,5
30	12,5	6,4	48,7	51,2
40	13,6	7,1	46,2	50,1
50	14,5	8	44,1	48,8
60	15,1	8,5	41,9	47,9
70	15,8	8,9	40,3	47,1
80	16,3	9,6	38,7	46
90	17,1	9,9	37,1	45,1
100	17,6	10,4	35,9	44,4
110	18,1	11,1	34,6	43,5
120	18,6	11,5	33,5	42,7

Fonte: Alunos da turma (2019).

Com os dados do aquecimento da água no interior da garrafa comum tabulados, construiu-se o modelo gráfico. Observou-se que a sequência dos pontos no plano, que representava a temperatura em função do tempo, possuía aspecto de uma curva logarítmica a partir dos 10 minutos de observação. Então, a equipe utilizou a função linhas de tendências do Excel para fazer o ajuste da curva logarítmica e através do método dos mínimos quadrados. O software

determinou um modelo na forma de equação para expressar a curva de ajuste, com o coeficiente de determinação  $R^2$  próximo de 1, o que denota uma qualidade de ajuste muito boa. Essas informações estão exibidas na Figura 15.

**Figura 15** - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET

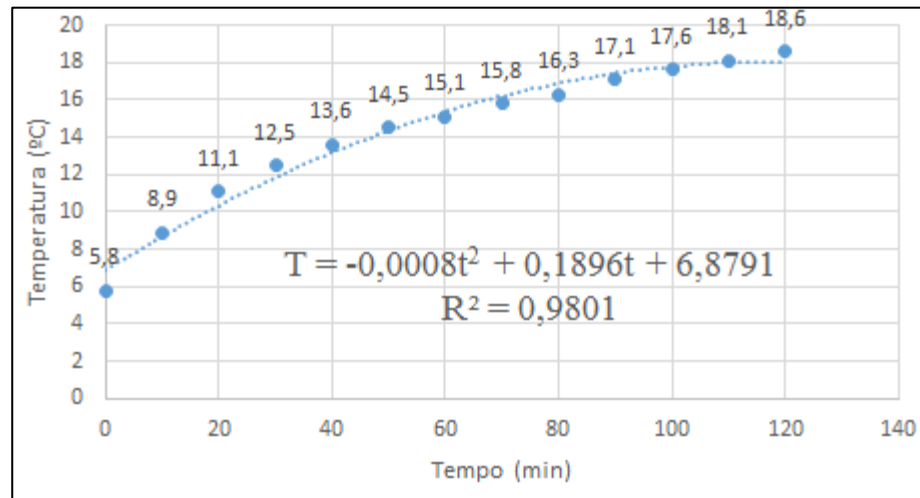


Fonte: Alunos da turma (2019).

O modelo na forma de expressão foi obtido com o auxílio do software, pois os alunos estavam no primeiro semestre da graduação e não haviam cursado a disciplina de álgebra. No entanto, a equipe verificou o coeficiente de determinação para analisar a qualidade de ajuste das curvas.

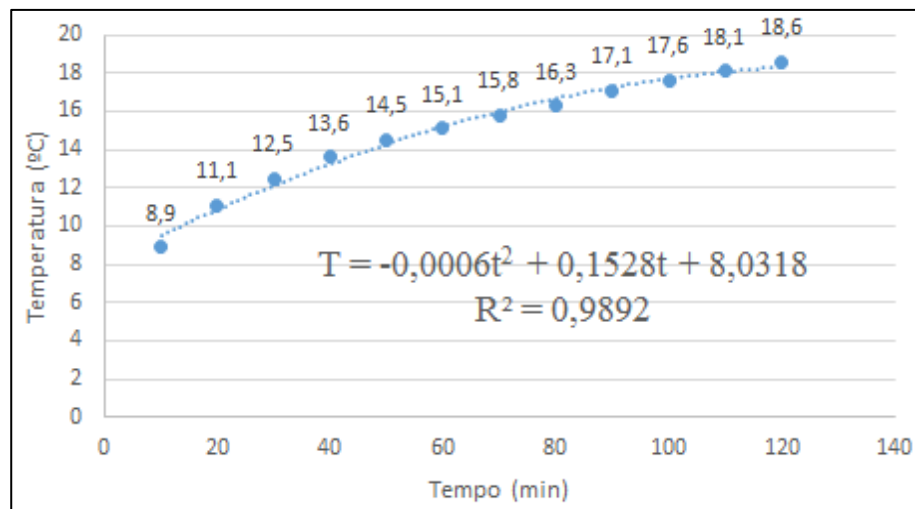
Para confirmar que a curva logarítmica era a curva que melhor se ajustava aos dados, foi feito um ajuste polinomial de grau 2, iniciando a partir do instante  $t = 0$ , como mostra a Figura 16 e a partir do instante  $t = 10$  min como mostra a Figura 17, com o propósito comparativo. Foi verificado por meio do coeficiente de determinação que a melhor qualidade de ajuste ocorreu na curva logarítmica.

**Figura 16** - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET – ajuste polinomial para  $t_0 = 0$



Fonte: Alunos da turma (2019).

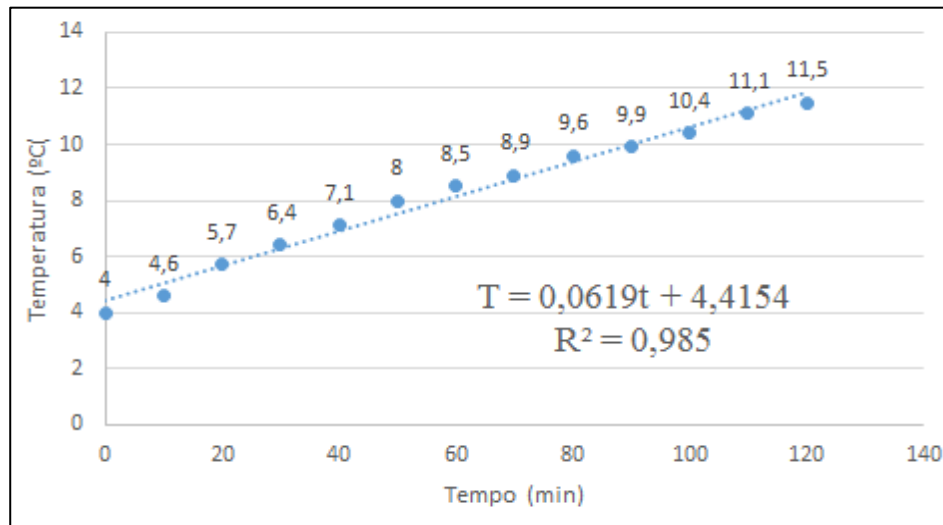
**Figura 17** - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET – ajuste polinomial para  $t_0 = 10$



Fonte: Alunos da turma (2019).

No aquecimento da água no interior da garrafa PET preparada com materiais de baixo custo, para evitar a transferência de calor com meio externo, as curvas de ajustes aos pontos do gráfico foram: a linear, como mostra a Figura 18 e a polinomial de ordem 2, como mostra a Figura 19.

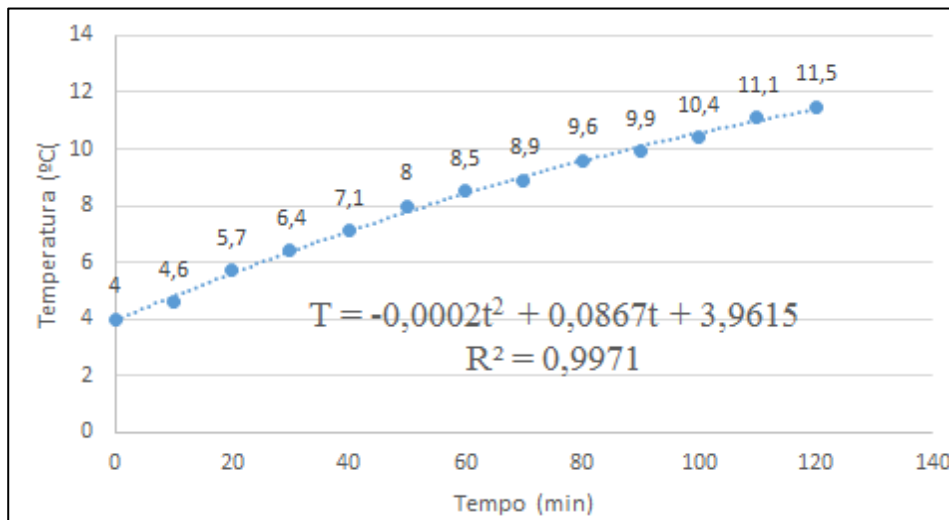
**Figura 18** - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET preparada - curva de ajuste linear



Fonte: Alunos da turma (2019).

Inicialmente a equipe presumia que a curva linear teria o melhor ajuste aos pontos do gráfico, porém, ao aplicar a linha de tendência do Excel e analisando o coeficiente de determinação, verificou-se que a curva polinomial de ordem 2 dispunha do melhor ajuste.

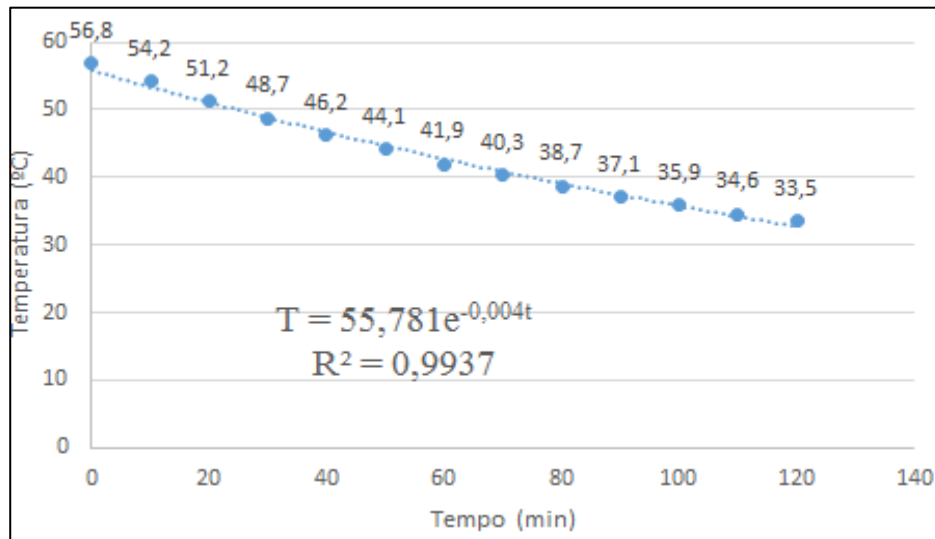
**Figura 19** - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET preparada - curva de ajuste polinomial



Fonte: Alunos da turma (2019).

No processo de resfriamento da água em uma garrafa PET, os pontos estabelecidos no gráfico foram submetidos ao ajuste exponencial, como é mostrado na Figura 20.

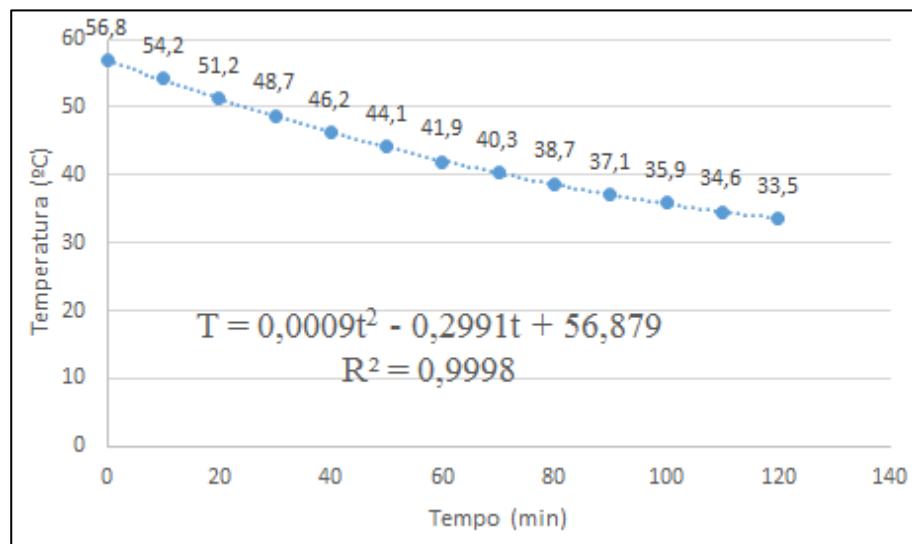
**Figura 20** - Resfriamento da água quente no interior de uma garrafa PET - ajuste exponencial



Fonte: Alunos da turma (2019).

Com a intenção de fazer um comparativo para verificar a curva que melhor se ajustava aos dados observados no experimento foi feito um ajuste polinomial de ordem 2, como mostra a Figura 21. Por meio do coeficiente de determinação, foi confirmado que a curva polinomial possuía o melhor ajuste, com o valor muito próximo de 1.

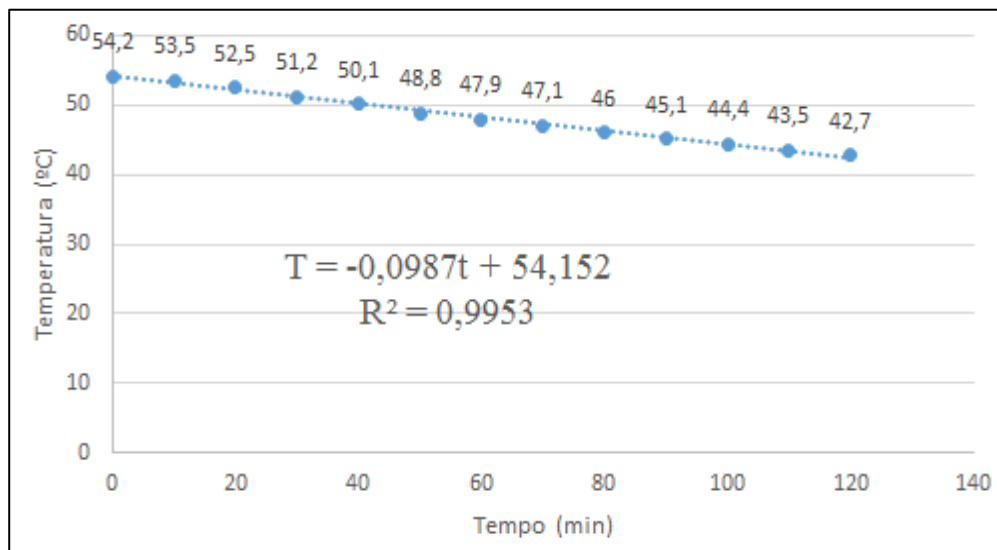
**Figura 21** - Resfriamento da água quente no interior de uma garrafa PET - ajuste polinomial de ordem 2



Fonte: Alunos da turma (2019).

No resfriamento da água no interior da garrafa PET preparada, foram feitos três ajustes em relação aos pontos do gráfico: o ajuste linear, figura 22; ajuste exponencial, figura 23 e ajuste polinomial de ordem 2, figura 24. Ao observar os pontos no gráfico, a equipe acreditava que o ajuste linear era o mais adequado, no entanto, ao se observar o coeficiente de determinação, constatou-se que a curva polinomial apresenta a melhor qualidade de ajuste.

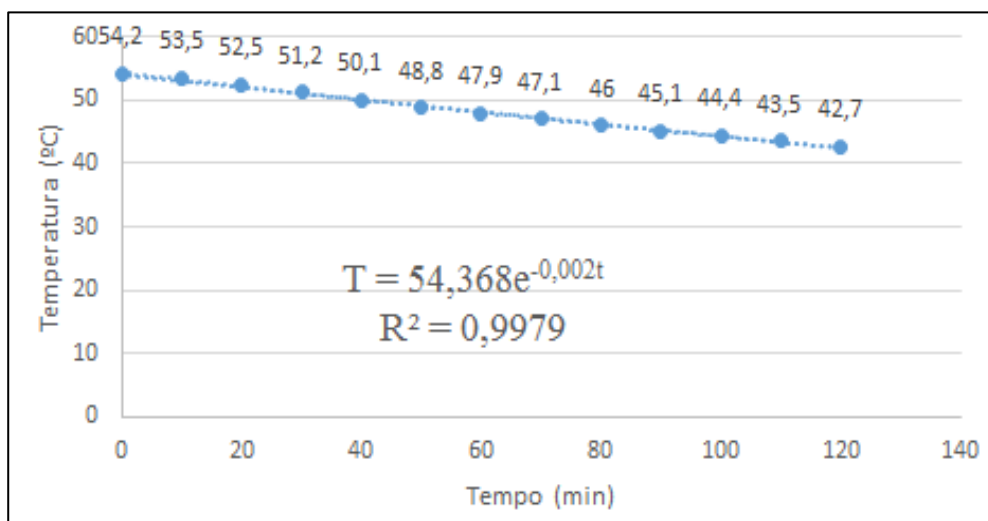
**Figura 22** - Resfriamento da água no interior da garrafa PET preparada - ajuste linear



Fonte: Alunos da turma (2019).

Na figura 23, a linha de tendência tem um aspecto linear, mas ela representa um ajuste exponencial, como pode ser observado no modelo obtido pelo EXCEL.

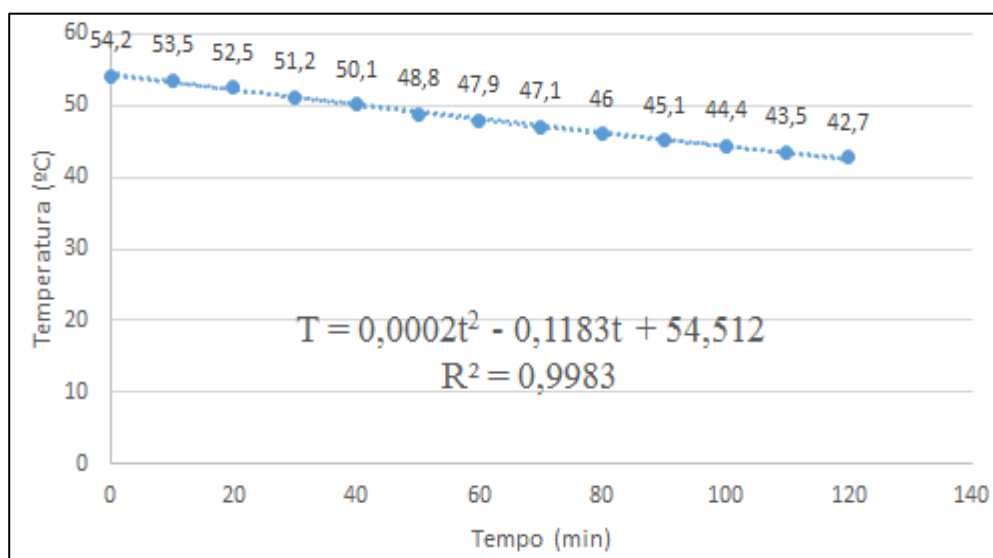
**Figura 23** - Resfriamento da água no interior da garrafa PET preparada - ajuste exponencial



Fonte: Alunos da turma (2019).



**Figura 249** - Resfriamento da água no interior da garrafa PET preparada - ajuste polinomial de ordem 2



Fonte: Alunos da turma (2019).

A equipe comparou os modelos obtidos por meio dos dados coletados no aquecimento e resfriamento da água no interior das garrafas preparadas com material de baixo custo com os modelos obtidos no aquecimento e resfriamento da água no interior da garrafa PET comum. A partir dessa comparação, a equipe chegou a seguinte conclusão:

*“[...] concluímos, por meio dos modelos obtidos que um recipiente construído com matérias de baixo custo (recicláveis), como foi o caso da garrafa produzida, permite que a temperatura de um líquido no seu interior varie com menor velocidade do que a temperatura em uma garrafa PET comum, ou seja, a temperatura do líquido na garrafa preparada leva um tempo mais prolongado para atingir a temperatura ambiente, enquanto a temperatura de uma garrafa normal esse tempo é mais reduzido. Esse tempo mais prolongado na variação da temperatura ocorre devido ao fato dos materiais de baixo custo utilizados na preparação da garrafa dificultam a transferência de calor. O papel alumínio diminui a transferência por meio da radiação, o jornal colocado entre a garrafa interna e externa ameniza a transferência por meio da condução e a vedação da tampa evita parcialmente a transferência por convecção”*.<sup>16</sup>

Além disso, a equipe utilizou os modelos na forma de equações, referentes às curvas que apresentavam a melhor qualidade de ajuste, para verificar a temperatura em intervalos de tempo entre zero e 120 minutos, que não foram contabilizados pelo LabQuest. E, como

<sup>16</sup> Conclusão da equipe A apresentada no relatório.

instrumento de previsão, os modelos também foram usados para estimar temperaturas para um tempo de observação maior que 120 minutos.

As duas equipes, através do processo de modelagem, identificaram a situação problema, com ajuda do professor e através da interação entre os colegas como sugere a teoria sócio interacionista de Vygotsky verificaram os equipamentos necessários para a coleta de dados e, por meio da análise e interpretação desses dados formularam os problemas. Este fato fez com que o pesquisador verificasse que o objetivo da pesquisa estava sendo atingido. Após a formulação do problema construíram modelos que, juntamente com as pesquisas feitas sobre os temas para familiarizar com a situação problema em que o fenômeno físico real estava inserido, permitiram mediante a análise e interpretação responder às perguntas formuladas. Em seguida a equipe B verificou a validação dos modelos na forma de equação e constatou que os resultados obtidos por eles eram muito próximos dos dados observados, dessa forma, os modelos poderiam ser utilizados para fazer previsões. Essa verificação constata o argumento de Bunge de que o modelo teórico é um sistema hipotético dedutivo que está sujeito a validação e pode ser utilizado para fazer previsões.

No próximo capítulo será feita uma análise mais detalhada sobre o processo de modelagem realizado pelos alunos e sobre os dados obtidos pelo pesquisados através de observações, vídeos, fotografias, entrevistas gravadas, relatórios construídos pelos alunos e a socialização das atividades realizadas por meio de uma exposição oral.

## 6 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados registros em relação à pesquisa que foram imprescindíveis para a realização, esses registros estão expostos no formato de um diário de bordo. Também são apresentados os dados coletados durante a realização deste trabalho, assim como a análise desses dados.

### 6.1 Diário de Bordo

Devido esse trabalho ter utilizado a abordagem qualitativa com a finalidade de demonstrar, através de um estudo de caso, que era possível criar condições para os alunos compreenderem fenômenos físicos reais por meio do método de modelagem, foi necessário fazer um registro pormenorizado das ações e acontecimentos ocorridos na interação entre o pesquisador e os pesquisados. Isto foi importante para a coleta de dados e apresentação dos resultados que serão expostos nesse capítulo, haja vista que na pesquisa qualitativa, diferentemente das quantitativas, os resultados são apresentados através de descrições verbais, como afirma Gil (2019): “A mais evidente diferença entre as pesquisas quantitativas e qualitativas é que nas primeiras os resultados são apresentados em termos numéricos e, nas qualitativas, mediante descrições verbais”.

Em virtude de o pesquisador ser o professor e os pesquisados serem os alunos, o contato entre as partes ocorreu de forma prolongada e constante. Dessa maneira, foi possível registrar, através de anotação, gravação de voz, gravação de vídeo e fotografia, detalhes que se tornaram úteis para realização do trabalho.

Selecionada a turma para a realização do estudo de caso, os alunos foram informados, não somente sobre como seria a metodologia utilizada, mas também, que fariam parte de um experimento para demonstrar se o método de modelagem poderia auxiliá-los a compreender melhor fenômenos físicos reais mediante as aulas de Matemática.

Após esse primeiro momento, trabalhou-se o conteúdo matemático associado à física e fez-se a divisão dos temas para as equipes pesquisarem. No momento em que as equipes foram solicitadas a apresentarem a situação problema para ser aplicado o processo de modelagem, os fenômenos almejados pela equipe A foram: análise do movimento oblíquo de uma partícula lançada através de um estilingue e a verificação da correnteza enfrentada pelas catraias<sup>17</sup> na

---

<sup>17</sup> Embarcação movida a remo utilizada para o transporte dos turistas em Alter do Chão.

travessia de Alter do Chão (distrito da cidade Santarém) para a ilha do amor<sup>18</sup>. Na reunião, como mostra a figura 25, a equipe foi questionada pelo pesquisador sobre a viabilidade da realização da coleta dos dados e a relevância científica e social da pesquisa sobre as situações problema apresentadas.

**Figura 25** - Reunião com a equipe A para estabelecer a situação problema



Fonte: Autor (2019).

Depois de um período de discussão e reflexão a equipe chegou à conclusão que a situação problema relacionada à correnteza enfrentada pelos catraieiros possuía uma relevância maior, tanto científica como social. Os questionamentos prosseguiram e foram registrados através de um gravador de voz. A conversa é descrita nos parágrafos seguintes.

***Professor:** Para formular o problema referente a essa situação que vocês me apresentaram sobre o movimento do barco a favor da correnteza e contra a correnteza, vocês precisam de algumas informações e para obter essas informações vão precisar fazer uma pesquisa. Mas eu queria entender o que vocês pensaram, o que foi estruturado para a coleta de dados?*

***Alunos:** Pensamos em colocar dois colegas para remar, saindo da vila para a praia e retornando. Quando estivesse remando contra a correnteza, seria impressa uma força maior.*

---

<sup>18</sup> Praia localizada em frente ao distrito de Alter do Chão.

**Professor:** *E se não aplicasse uma força maior, mas tentasse manter a mesma força, o que seria difícil, para verificar o tempo que levaria para fazer o mesmo deslocamento em sentido contrário?*

**Alunos:** *Então vamos tentar aplicar a força máxima para remar tanto na ida como na volta. Nós pensamos nesse problema porque queríamos reproduzir uma situação que ocorresse no dia a dia.*

**Professor:** *Mas era exatamente isso, quando foi pensado em desenvolver esse trabalho com a turma, a ideia era que vocês tivessem essa percepção. Verificar uma situação do cotidiano para formular um problema e resolver através de um modelo matemático com característica física. O que vocês têm até o momento?*

**Alunos:** *Já negociamos a catraia e os alunos R e J se prontificaram de remar.*

A partir da decisão da situação a ser modelada, foram repassadas algumas orientações sobre o relatório que deveria ser escrito sobre trabalho de modelagem que a equipe se prontificou a realizar. Entretanto, foi verificado que seria impossível manter uma aceleração constante durante o deslocamento do barco, tanto na ida como na volta. Partindo desse princípio a equipe foi questionada sobre esse fato.

**Professor:** *Qual a viabilidade de coleta os dados para determinar a correnteza enfrentada pelos catraieiros na travessia da vila para a praia?*

**Aluno 1:** *Nós negociamos o aluguel de uma catraia para coletar as informações e os alunos 2 e 3 se prontificaram de fazer a travessia de ida e volta.*

**Professor:** *Ok, mas antes eu queria entender,*

**Professor:** *Vocês me falaram na aula anterior que pretendiam manter a aceleração constante imprimindo uma força máxima nas remadas. No entanto, esse procedimento não garante a confiabilidade dos dados. Como vocês pretendem resolver esse problema?*

A ideia era instigar o aluno para apresentar uma solução. Pois o objetivo do professor era manter a interação com os alunos na zona de desenvolvimento proximal (ZDP)<sup>19</sup>.

**Aluno 1:** *Temos mesmo que manter a velocidade constante, professor?*

**Professor:** *Sim, para que o modelo represente uma parte da realidade, os dados que vão ser utilizados para elaboração do modelo precisam ser confiáveis.*

---

<sup>19</sup> Distância existente entre aquilo que o sujeito já sabe, seu conhecimento real, e aquilo que o sujeito possui potencialidade para aprender, seu conhecimento potencial.

**Aluno 2:** *Com o remo, realmente não tem como manter a mesma aceleração. A não ser que seja utilizado um barco com motor.*

Nesse momento, o aluno apresenta uma solução. Isto representa que ele saiu do nível de desenvolvimento real e chegou ao nível de desenvolvimento potencial, pois apresenta a solução para um problema que não possuía maturação para resolver sozinho, mas foi possível a partir da interação com uma pessoa mais experiente (professor) dentro da ZDP.

**Aluno 3.** *Em tenho um amigo que tem um barco com rabeta<sup>20</sup>, vou ligar pra ele.*

**Professor:** *Verifica com o seu amigo se há coletes na embarcação e quantos. Vocês não podem utilizar o barco sem equipamentos de segurança.*

A aluna ligou e conseguiu o barco motorizado (bajara). A equipe foi questionada como levaria o barco de Santarém a Alter do Chão, haja vista que a distância era grande e, portanto, implicaria em alto custo para eles. Depois de um tempo de reflexão e debate<sup>21</sup>, surgiu a ideia de fazer o experimento em frente à cidade de Santarém, no perímetro descrito no capítulo anterior. Após a decisão, os alunos foram informados que além dos coletes era necessário que o dono da embarcação estivesse junto no processo da coleta de dados. Durante a entrevista com a equipe, para verificar o procedimento que haviam realizado no experimento, o pesquisador certificou-se se haviam usado o colete.

**Professor:** *Em relação à questão de segurança, vocês usaram o colete?*

**Alunos:** *sim, inclusive tiramos fotos para comprovar. Foram dois alunos e mais o dono da embarcação.*

A mesma conduta foi adotada com a equipe B. Realizou-se a reunião para definir a situação problema. A equipe manifestou que pretendia verificar o resfriamento e aquecimento da água em uma garrafa PET preparada com material de baixo custo (papel alumínio, papel de jornal) para evitar a transferência de calor por condução, convecção e radiação e comparar com o resfriamento e aquecimento da água em uma garrafa PET normal. Para que a situação problema pudesse ficar bem definida e que estivesse de acordo com o propósito da pesquisa, que era analisar um fenômeno físico real, fizeram-se alguns questionamentos à equipe, que estão descritos a seguir. Houve uma gravação de voz da reunião.

**Professor:** *O que vocês pensaram em relação ao processo de modelagem utilizando a garrafa preparada com material de baixo custo?*

---

<sup>20</sup> Motor de popa.

<sup>21</sup> Conhecimento desenvolvido a partir da interação entre os alunos, confirmando a teoria de Vygotsky

**Aluno:** *Pela pesquisa que foi feita, foi verificado que existe três tipos de transferência de calor. Condução, em que a transferência é feita de molécula a molécula e para evitar isso, vamos utilizar esse jornal que é um péssimo condutor de energia entre a garrafa interna de um litro e a garrafa externa de dois litros.*

A fala do aluno demonstra que, apesar de Vygotsky (1991, p. 43) afirmar que “Todas as funções superiores originam-se das relações reais entre indivíduos humanos”, o conhecimento pode ocorrer através da interação com livros, documentos e outros materiais dessa natureza.

**Professor:** *Esse jornal funcionaria como se fosse o vácuo?*

**Aluno:** *Isso, professor. O jornal faria o papel do vácuo, evitando a condução. Outro meio de transferência de calor é a radiação. Para evitar esse processo vamos utilizar o papel alumínio, tanto na garrafa interna como na externa. E por último a convecção. Para evitar esse tipo de transferência, vamos vedar bem a garrafa. Essa é a explicação científica, professor.*

**Professor:** *E o que vocês pretendem analisar?*

**Aluno:** *O aquecimento e resfriamento da água dentro dessa garrafa preparada e também em uma garrafa PET comum. Para isso, compramos um termômetro com o sensor para verificar como a temperatura varia de acordo com o tempo, mas por falta de recurso faltou outro termômetro para verificar na garrafa comum.*

**Professor:** *Por quanto tempo vocês observaram?*

**Aluno:** *Por uns dez minutos. Medimos a temperatura inicial do líquido e depois de dez minutos verificamos em temperatura estava.*

**Professor:** *Vocês acham que esses dados são suficientes para modelar o fenômeno?*

Mas uma vez o professor interagindo dentro da ZDP.

**Aluno:** *Não. Mas fica difícil somente com um termômetro e havia vezes que o sensor não ficava em contato como líquido.*

O professor percebeu que havia necessidade de ajudar os alunos na coleta de dados para que o processo de modelagem sobre aquela situação pudesse ser mais eficiente e representar melhor a realidade, como propõe Vygotsky. Para isso, reservou um espaço no laboratório de física da UFOPA para a equipe realizar o experimento sob a supervisão do técnico do laboratório. Também o professor sugeriu a equipe trocar o jornal pelo vácuo, uma vez que o laboratório possuía uma máquina de vácuo, ou somente acrescentar outra garrafa com os

materiais de baixo custo com o vácuo entre a garrafa interna e externa. Um dos integrantes da equipe, que foi o idealizador da garrafa preparada, argumentou que a garrafa construída por ele seria superada na conservação da temperatura do líquido pela garrafa sugerida pelo professor. Nesse instante, o professor aproveitou a situação para explicar à equipe que o bom pesquisador tem como objetivo não somente responder um problema, mas que através da pesquisa pode buscar melhorias para um determinado fato ou produto. Para isso, precisa testar hipóteses através de dados obtidos em experimentos e negligenciar outra possibilidade de obtenção de dados significa que limitar seu trabalho.

É importante salientar que durante esse período o orientador da pesquisa estava acompanhado todo o procedimento em sala de aula. Seu papel era de observador, no entanto, nas reuniões semanais com o professor pesquisador dava as sugestões para que houvesse os ajustes necessários na condução do trabalho.

Esses momentos de interação entre o pesquisador e os pesquisados foram necessários pela própria característica de uma pesquisa qualitativa, pois, através desse levantamento de informações, foi possível avaliar a compreensão das equipes sobre o processo de modelagem e fazer os ajustes necessários para que o trabalho fosse realizado e os alunos pudessem resolver problemas físicos reais utilizando o conteúdo de funções e a pesquisa sobre o tema.

## 6.2 Análise dos resultados

Nesta seção, será feita uma análise dos dados coletados durante a realização da pesquisa e, a partir dessa análise, averiguar-se-á se os objetivos da pesquisa foram alcançados e se a hipótese levantada foi adequada para solucionar o seguinte problema: **“de que forma a matemática pode ser aplicada para auxiliar o aluno a compreender melhor os problemas físicos reais”?** Partindo do pressuposto que o ensino da matemática poderia auxiliar o aluno, não somente a compreender, mas também, a resolver problemas físicos reais se fosse trabalhado na perspectiva do método de modelagem.

Como informado na metodologia, esta pesquisa possui abordagem qualitativa e foi delineada como estudo de caso. Portanto, os dados coletados não são numéricos, e sim apresentados na forma de expressões verbais e coletados por meio de observações, entrevistas e contato permanente com os pesquisados, pois, de acordo com Gil (2019):

O estudo de caso, que é o estudo profundo e exaustivo de um fenômeno, requer a utilização de múltiplas fontes de evidência, ou seja, de procedimentos diversos para a



obtenção dos dados, tais como: análise de documentos, observação e entrevistas. Requer-se também prolongada permanência do pesquisador em campo.

Além disso, a pesquisa é classificada como explicativa, pois tem o propósito de tornar mais inteligível a compreensão de fenômenos físicos mediante a matemática utilizando a modelagem, além de tentar responder um problema e apresentar um produto educacional que pode ser utilizado como manual para professores que pretendem utilizar esse método de ensino em suas aulas. Essas informações têm a finalidade de esclarecer como foram coletados os dados e como feita a análise dos resultados.

A coleta de dados ocorreu de várias maneiras e em diferentes etapas. Os resultados serão analisados por etapas.

### **1º Etapa: Desenvolvimento do conteúdo matemático utilizando o método de modelagem**

O conteúdo matemático desenvolvido em sala de aula para fazer a conexão com a física por meio da modelagem foi o de função. Para fazer a relação entre as duas áreas do conhecimento, trabalhou-se o conceito de função associado ao movimento uniforme; ao movimento uniformemente variado (lançamento vertical, queda livre e lançamento oblíquo); ao decaimento radioativo e de substâncias como medicamentos e drogas (meia-vida); às leis de Newton; ao resfriamento de Newton; à termodinâmica à energia mecânica. Esses conteúdos foram desenvolvidos de acordo como estão apresentados no capítulo 3 deste trabalho. Durante as aulas, como mostra a Figura 26, o professor explicava a relação entre os modelos com característica física e os modelos de funções (linear, quadrática, periódica, exponencial, logarítmica, trigonométrica).

**Figura 26** - Explicação da relação entre os modelos físicos e os modelos que representam os tipos de função



Fonte: Autor (2019).

O desenvolvimento do conteúdo programático seguia as mesmas etapas do processo de modelagem, como é sugerido por Biembengut e Hein (2011), isto é: situação problema, familiarização, formulação do problema, resolução através do modelo e a verificação e interpretação da solução para que o resultado não fosse apenas numérico, mas também conceitual. A maneira como ocorreram essas etapas relacionadas ao conteúdo matemático de funções estão descritas no produto educacional (ver apêndice)

Nesta etapa, a coleta de dados ocorreu mediante atividades, como lista de exercícios, em que era dado não somente a situação problema, mas o problema formulado de acordo com o caso 1, descrito por Barbosa (2004) que diz: “o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação”. Dessa forma, ficou a cargo dos alunos elaborarem o modelo, verificarem sua validade e resolverem o problema. Para complementar essa etapa de coleta de dados, os alunos eram convidados a expor a estratégia usada para chegar à solução do problema (não foi filmado nem feita gravação de voz). Com esse procedimento, foi possível certificar se estava havendo a compreensão física do problema e se estavam fazendo uso do processo de modelagem para chegar à solução. O resultado obtido foi o seguinte<sup>22</sup>:

- 17 alunos conseguiram resolver os problemas propostos;
- 14 utilizaram adequadamente os procedimentos de modelagem;

---

<sup>22</sup> Esses valores não são disjuntos, haja vista que a turma era composta por 20 alunos.

- 12 conseguiram fazer uma interpretação física adequada do problema.

Esses dados foram verificados na exposição da solução dos problemas.

Alguns alunos apresentaram certa dificuldade em utilizar de forma sistemática as etapas de modelagem e fazer uma interpretação física da situação. Diante desse fato, houve a necessidade de reforçar os procedimentos e foi solicitado, também, aos alunos fazerem uma pesquisa em artigos que descrevessem os procedimentos de modelagem.

Essa preocupação ocorreu devido ao trabalho de modelagem que os alunos deveriam fazer sobre uma situação definida por eles, com o objetivo de comprovar que a modelagem é um dos meios mais adequados para relacionar a física com a matemática e, através dessa conexão, resolver problemas envolvendo fenômenos físicos reais.

## **2º etapa: Modelagem da situação problema definida**

Esta etapa tem a finalidade de verificar se os objetivos estabelecidos foram alcançados. Para isso, é necessário confirmar, através dos dados coletados, a hipótese estabelecida.

Nesta pesquisa, além do processo de modelagem trabalhado durante o desenvolvimento do conteúdo, foi proposto aos alunos definirem uma situação problema envolvendo um fenômeno físico real para ser construído um problema a partir dessa situação e criar modelos com propósito de interpretar o problema e resolvê-lo. A situação foi definida atendendo alguns critérios que foram descritos no diário de bordo.

A análise dos resultados vai ser feita em cima dos dados coletados. Esses dados foram coletados através de observação, de entrevista (registrada no gravador de voz), de documento (relatório) e apresentação do trabalho (registrado em vídeo). Os dados serão analisados por equipe.

Primeiramente, serão analisados os dados referentes à equipe A, que escolheu como situação problema **“A verificação da correnteza do Rio Tapajós em frente à orla de Santarém”**. Após a definição da situação, houve coleta de dados pela equipe para formular o problema e criar o modelo. Após a coleta de dados, o pesquisador fez uma entrevista para avaliar como estava ocorrendo os primeiros procedimentos do trabalho de modelagem que a equipe se prontificou a realizar. A seguir, apresenta-se um resumo da entrevista.

***Professor:** Pelas fotos enviadas, foi utilizado o barco com o motor de rabeta que mantém uma aceleração constante o que não ocorreria na canoa, devido a força aplicada no*

remo ser variável e comprometeria a análise dos dados coletados. Vocês fizeram onde o experimento?

**Aluno:** Na orla da cidade. Da praça da matriz à praça do pescador, no percurso de ida e volta. Também, na direção perpendicular a orla, vindo do rio.

**Professor:** quais foram as grandezas medidas?

**Aluno:** Estabelecemos um percurso de 400m, medido através de uma trena, saindo da orla em frente à praça da matriz até ao ponto da orla em frente à praça do pescador. No movimento da embarcação, medimos o tempo a cada 200m na ida e na volta, para através da razão entre a distância e o tempo encontrássemos velocidade. Medimos também o tempo para percorrer 400m em direção a orla, vindo rio. Essa distância foi medida no GPS do celular.

**Professor:** Qual foi o tempo nos 200m iniciais do percurso de ida, que seria a favor da correnteza do rio?

**Aluno:** 2 minutos e 20 milésimos.

**Professor:** e na volta?

**Aluno:** 1 minuto, 40 segundos e 44 milésimos. Eu achei meio estranho esse valor, mas foi esse o observado.

**Professor:** Mas vocês sabem que pela lógica isso não é muito coerente. Pois vocês sabem a correnteza do rio vai da nascente para a foz.

A partir dos dados apresentados, levantou-se a questão se o rio Amazonas influenciava no fluxo contrário do rio tapajós naquele perímetro, devido ao encontro das águas do rio tapajós e do rio Amazonas acontecer em frente à cidade de Santarém, como mostra a figura 27.

**Figura 27** - Encontro das águas do Rio Amazonas e do Rio Tapajós em frente à cidade de Santarém



Fonte: Passeios.org (2016)

A partir da discussão sobre o comportamento inesperado do rio em relação ao seu fluxo em frente à orla de Santarém, no perímetro estabelecido para o experimento, formulou-se o problema da situação definida pela equipe A. Esta fase, permitiu inferir que houve compreensão e interpretação dos dados coletados e isso possibilitou a formulação do problema. Dessa forma, cumprindo uma das etapas do processo de modelagem e também do objetivo geral que é interpretação e formulação de problemas.

Para verificar se o método de modelagem havia sido compreendido pela equipe, se esse método contribuiu para a compreensão do fenômeno físico envolvido na situação problema e se os modelos construídos auxiliaram na resolução do problema formulado, solicitou-se a construção de um relatório sobre a atividade realizada. Mediante ao relatório apresentado, foi possível fazer análise mais aprofundada sobre a influência do método de modelagem para compreender um fenômeno físico e resolver um problema referente ao fenômeno.

Com exceção da fundamentação teórica que representa a realização da pesquisa, os outros dados do relatório relativos a cada etapa do processo de modelagem estabelecido nesta pesquisa a partir dos procedimentos adotados por Bassanezi e Biembengut foram apresentados no capítulo 5 e observou-se:

- A realização da pesquisa sobre o tema proposto através da fundamentação teórica descrita no relatório para dar embasamento na realização da atividade. Verificou-se uma pesquisa aprofundada, apresentando conceitos físicos, equações e gráficos sobre movimentos uniforme, movimento uniformemente variado e leis de Newton;

- A situação problema foi definida com auxílio do pesquisador (descrito no diário de bordo);
- A formulação do problema a partir da interpretação do dados coletados;
- A construção dos modelos, os quais foram descritos no capítulo 5;
- A interpretação do fenômeno e solução do problema através dos modelos.

O relatório possibilitou alcançar os seguintes objetivos específicos: **Resolver problemas físicos reais através de modelos, representar os modelos construídos pelos alunos para resolver o problema e verificar os conhecimentos adquiridos pelos discentes na realização da pesquisa.** No entanto, percebeu-se que o fenômeno poderia ser mais explorado se a coleta de dados ocorresse também após a praça do pescador, ultrapassando a parte mais saliente da orla como mostra a figura 26. Dessa maneira poderia analisar de forma mais adequada a influência do delineamento da orla na correnteza do rio Tapajós em frente a Santarém.

Para verificar mais uma vez o conhecimento adquirido pelos alunos, estes fizeram uma apresentação do trabalho cujo tema era Movimento e a situação problema escolhida foi a verificação da correnteza em frente à orla de Santarém, a qual foi gravada em vídeo. A apresentação contribuiu para o pesquisador examinar se realmente houve compreensão da equipe, mas não de forma geral, pois somente alguns integrantes expuseram o trabalho, enquanto o restante da equipe somente acompanhou, como mostra a figura 28.

**Figura 28** - Integrantes da equipe A no dia da apresentação da pesquisa



Fonte: Autor (2019).

A exposição oral possibilitou avaliar que houve a compreensão do processo de modelagem. Este fato, permitiu inferir que a modelagem contribuiu para a compreensão de fenômenos físicos a partir das aulas de matemática.

A seguir, serão analisados os dados coletados referentes à Equipe B, que escolheu a situação problema “Aquecimento e resfriamento de um líquido (H<sub>2</sub>O) em duas garrafas PET preparadas com materiais de baixo custo para evitar a transferência de calor e em uma garrafa PET comum”. Os procedimentos para a coleta de dados foram equivalentes aos utilizados com a equipe A. Primeiramente, realizou-se uma entrevista após o experimento, em que foi gravada a voz. Alguns trechos são descritos a seguir:

**Professor:** *Como ocorreu o experimento?*

**Alunos:** *Utilizamos duas garrafas PET, uma garrafa de um litro e meio e outra de dois litros. A de um litro e meio encapamos com papel alumínio e por cima do papel alumínio, como isolante, colocamos papel de jornal. Depois do papel de jornal, colocamos novamente papel alumínio sobre toda a garrafa, e colocamos essa garrafa dentro de outra de dois litros. Em seguida fizemos o Experimento com água quente e água fria para ver o comportamento da variação da temperatura. Percebemos que o gráfico referente aos dados coletados, tanto no resfriamento, como no aquecimento da água na garrafa preparada é quase uma reta. Depois*

*fizemos o experimento na garrafa Comum e percebemos que houve o “aquecimento” de Newton.*

Por meio da fala do aluno verifica-se que há uma argumentação científica para explicar o experimento. Este fato ocorreu devido a pesquisa sobre o tema, a qual foi descrita na fundamentação teórica apresentada no relatório.

**Professor:** *Quer dizer, vocês perceberam uma curva? Vocês verificaram que se identifica mais com o resfriamento de Newton quanto usaram a garrafa sem isolante térmico?*

**Alunos:** *Isso! No início começa muito rápido a variação da temperatura e depois começa a desacelerar a “velocidade do resfriamento”.*

**Professor:** *Qual foi o problema que vocês pensaram em resolver com esse fenômeno?*

**Aluno:** *Mostrar que pessoas que moram em lugares que não tem como conservar um líquido poderiam usar esses materiais para construir um recipiente térmico.*

Nesse momento, o pesquisador percebeu que a equipe não entendia como poderia formular o problema em relação ao fenômeno de resfriamento e aquecimento da água em uma garrafa com isolante térmico e uma garrafa comum. A partir de algumas informações, a equipe elaborou problema.

Apesar da dificuldade de elaborar o problema, a equipe mostrou criatividade na escolha do fenômeno motivação para analisar um fenômeno real.

Depois de formulado o problema, a equipe utilizou programas computacionais para criar o modelo e resolver o problema. E, para verificar os conhecimentos alcançados pelos alunos na realização da pesquisa, solicitou-se um relatório no mesmo modelo da equipe A. Com exceção da fundamentação teórica, os outros dados do relatório que representam o processo de modelagem estabelecido nesta pesquisa, estão descritos no capítulo 5. No relatório, observou-se:

- A realização da pesquisa sobre o tema proposto através da fundamentação teórica descrita no relatório para dar embasamento na realização da atividade. Nesta pesquisa verifica-se conceitos sobre temperatura, transferência de calor que foram necessários para construção da garrafa térmica e energia;

- A situação problema foi definida;

- A formulação do problema foi definida com ajuda do professor, como sugere

Vygotsky;



- A construção dos modelos através de programa computacional como sugere Biembengut e Hein (2011);
- A interpretação do fenômeno e solução do problema através dos modelos;
- A validade do modelo e a previsão de informações a partir do modelo.

Mediante ao relatório, foi possível verificar que alguns dos objetivos específicos foram atingidos, tais como: **relacionar a matemática com a física por meio da modelagem; resolver problemas físicos reais através de modelos; representar os modelos construídos para a solução do problema e verificar aquisição de conhecimento através da pesquisa.** Entretanto, o relatório também demonstrou que os modelos na forma de equações foram construídos especificamente por meio dos programas, ; não existir a comparação dos dados obtidos no experimento com dados que poderiam ser obtidos através da equação que determina o resfriamento de Newton.

Além do relatório, que informava todos os passos da pesquisa, os alunos fizeram uma exposição oral, com auxílio de slides, do trabalho realizado que contribuiu para o pesquisador avaliar se a hipótese estabelecida havia sido confirmada. No entanto, a exposição da equipe apresentou o mesmo problema da equipe anterior, pois somente alguns integrantes expuseram os resultados oralmente, como mostra a Figura 29.

**Figura 29** - Integrantes da equipe B no dia da apresentação



Fonte: Autor (2019).

A partir da análise dos dados que foram coletados e apresentados neste capítulo, foi possível obter o seguinte resultado:

É viável aproximar a matemática da física, e através dessa conexão usar o conteúdo de matemática para relacionar com temas da física e, ao mesmo tempo, tentar resolver problemas físicos reais. No entanto, para que os resultados dessas soluções não sejam apenas numéricos, a maneira plausível de relacionar a matemática com problemas físicos reais e que tenham uma interpretação do fenômeno em uma linguagem física é o processo de modelagem. Esta afirmação é sustentada pela solução apresentada no relatório elaborado pela equipe A, referente a situação problema da correnteza do Rio Tapajós em frente a orla de Santarém no perímetro entre a praça Monsenhor José Gregório e a praça do Pescador, no qual é declarado que o fluxo do Rio Tapajós nesse perímetro é o oposto do sentido nascente – foi devido a influência do Rio Amazonas, sendo este mais denso e ter uma maior velocidade, e o delineamento da orla. Além disso, verificou-se que, para que este processo ocorra de forma eficiente, com uma compreensão melhor por parte dos alunos é necessário acompanhamento constante do professor junto às atividades desenvolvidas pelos alunos. Este fato, está de acordo com que estabelece Vygotsky(1991), o que o aluno consegue fazer com ajuda dos outros é, de alguma maneira, muito mais indicativo do seu desenvolvimento mental do que aquilo que consegue fazer sozinho.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em muitos cursos de graduação, a matemática e a física são componentes curriculares que ocupam uma grande parcela da grade de ensino. No entanto, muitas vezes essas áreas do conhecimento são trabalhadas como se não houvesse vinculação entre elas. Partindo desse pressuposto, esta pesquisa apresentou uma proposta para tornar possível a aproximação da matemática com a física. A proposta defendida para contribuir na mudança desse cenário foi ensinar matemática nesses cursos utilizando o processo de modelagem fundamentado em Bunge (1974) e a teoria da aprendizagem, desenvolvida por Lev Vygotsky, contribuiu para a construção do conhecimento através da interação social. A pesquisa teve como objetivo utilizar o método de modelagem para auxiliar os alunos nas aulas de matemática a desenvolver habilidades como interpretação, problematização e resolução de problemas físicos reais.

A pesquisa ocorreu em uma sala de aula com alunos do curso de Bacharelado em ciência e tecnologia. Esse ambiente fechado possibilitou um acompanhamento mais adequado das atividades desenvolvidas pelos alunos. O primeiro passo foi informá-los da metodologia que seria trabalhada e dos objetivos pretendidos. Cientes de como seriam desenvolvidas as aulas e as atividades, os alunos mostraram-se bastante interessados e envolveram-se na proposta. Esse fato contribuiu para a realização da pesquisa. O segundo passo foi trabalhar o conteúdo matemático utilizando as mesmas etapas que o pesquisador pretendia que os alunos realizassem ao definirem a situação problema para modelar. Essa fase serviu para reforçar para os alunos como estes deveriam conduzir o trabalho de modelagem que seria proposto a eles. O terceiro passo foi dividir a turma em duas equipes e sugerir um tema para pesquisarem. As equipes fizeram uma pesquisa aprofundada sobre os temas estabelecidos, servindo de fundamentação para a definição da situação envolvendo o fenômeno físico real. O quarto passo foi definir a situação problema e iniciar o processo de modelagem de acordo com os procedimentos de Bassanezi e Biembengut.

Houve uma preocupação no desenvolvimento da pesquisa, em virtude de servir para a construção de um produto educacional, cujo propósito era orientar professores que pretendam desenvolver essa metodologia em suas aulas para aproximar a matemática da física. Nesse ponto, a teoria de aprendizagem desenvolvida por Vygotsky deu um subsídio relevante para a compreensão e aprendizagem dos alunos. Isso auxiliou a aplicação do método de modelagem usado pelo professor para ensinar funções através de modelos físicos e, também, auxiliou os alunos a utilizar o método na situação problema definida.

Durante a aplicação do processo de modelagem pelos alunos, na atividade que foi proposta a eles de definir uma situação problema relacionada a um fenômeno físico real, utilizando os procedimentos que foram detalhados no produto educacional (ver apêndice), o professor interagia constantemente com os alunos dando as orientações necessárias, de modo a não haver erro em nenhuma etapa para não comprometer o trabalho. Ainda assim, é necessário relatar que, durante a experimentação em que ocorreu a coleta de dados da equipe, o professor não estava presente, dessa forma os dados apresentados não puderam ser confirmados pelo professor. Neste caso, partiu-se do princípio de que eram verdadeiros e foram coletados de forma adequada. Todavia, é necessário que o professor esteja presente nessa etapa que tem uma importância enorme para um resultado significativo.

Devido esta pesquisa ter sido realizada com uma abordagem qualitativa, os dados foram coletados através de observação, entrevista, relatórios e apresentação. A análise dos dados ocorreu com base nas etapas da pesquisa. A partir da análise, foi possível apresentar o resultado da pesquisa, constatando a solução do problema; confirmou-se a hipótese pressuposta, de que a modelagem era ponte capaz de ligar a matemática à física e contribuir para interpretação e resolução de problemas envolvendo fenômenos físicos. Esse fato demonstra que a pesquisa atingiu o objetivo: os alunos definiram uma situação envolvendo um fenômeno real, foram capazes de interpretá-lo, formularam um problema, construíram modelos para resolvê-lo. Os modelos foram apresentados pelas equipes na forma de tabelas, gráficos e equações.

No entanto, verificou-se por meio dos dados coletados que alguns aspectos desse trabalho podem ser aperfeiçoados. Um dos pontos é: o professor deve estar presente na coleta de dados, como foi citado, esse fato, não apenas ajuda a verificar a veracidade dos dados, mas pode sugerir outras medidas que seriam capazes de favorecer a construção de um modelo mais realista. Outro ponto percebido é que, para alguns modelos serem construídos sem ajuda de um programa computacional, o aluno precisa de conhecimento de cálculo diferencial e integral e cálculo numérico para fazer as regressões a partir dos dados recolhidos.

Mesmo com as situações citadas, essa pesquisa contribuiu para a aprendizagem dos alunos, tanto na física como na matemática, pois foi possível relacionar o conhecimento da sala de aula com o mundo real, quebrando o paradigma de que a sala de aula é o espaço limitado por quatro paredes, pois, no processo de modelagem, o aluno vai a campo coletar os dados, muitas vezes dirigindo-se ao lugar onde o próprio fenômeno ocorre, como fez a equipe A, fazendo a coleta de dados em um barco no Rio Tapajós.

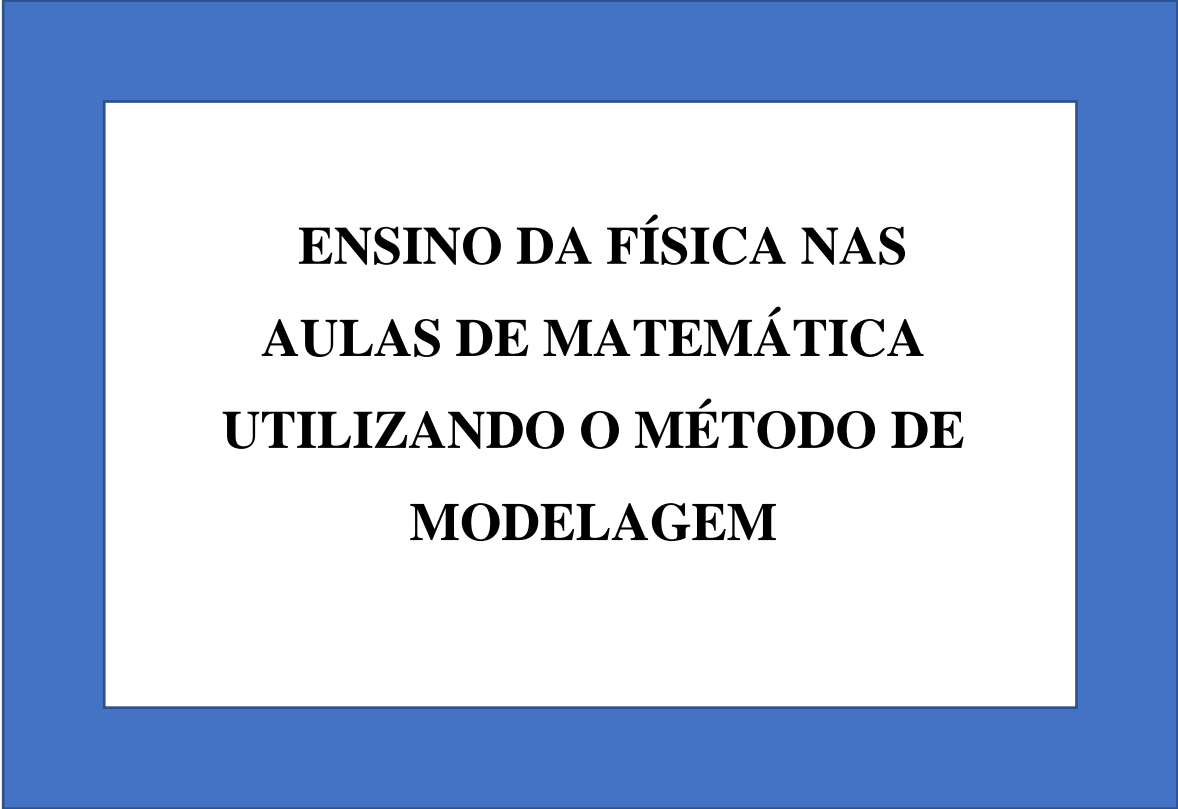
A finalidade dessa investigação é incentivar professores a usar o processo de modelagem como estratégia de ensino para auxiliar a aprendizagem do aluno, possibilitando a eles perceberem as disciplinas de matemática e de física com um novo olhar e dessa forma ter um estímulo maior para aprender. Posto isto, o desinteresse por esses componentes curriculares faz com que os cursos de exatas tenham, não somente grande reprovação, mas também muita desistência.

Todavia, é essencial informar que este trabalho está sujeito a ser aperfeiçoado e adaptado de acordo com a situação, haja vista que foi fundamentado por Bunge e teve como teoria de aprendizagem a teoria sócio interacionista de Lev Vygotsky, o que pode ser alterada para outra teoria de aprendizagem. Os procedimentos utilizados foram aqueles estabelecidos por Bassanezi e Biembengut, no entanto, ressalta-se que existem outros autores que trabalham com modelagem, apesar de estes dois serem referência a nível nacional. Dessa forma, a ideia central do trabalho é contribuir para o ensino aprendizagem.

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como?** Veritati, Salvador, n. 4, p. 73-80, 2004.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino–aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002
- BIEMBENGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011. 128 p.
- BUNGE, Mario. **Teoria e Realidade**. São Paulo: Perspectiva, 1974. 244 p.
- CHAVES, Marco Antônio. **Projeto de Pesquisa: Guia Prático para Monografia**. 5. ed. Rio de Janeiro: Wak, 2012. 140 p.
- CUPANI, Alberto & PIETROCOLA, Maurício. **A relevância da epistemologia de Mario Bunge para o ensino de ciências**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, Florianópolis, v.19, p.100-125, jun. 2002. Número especial.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.
- GIL, Antônio Carlos. **Como Elaborar Projeto de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- GIL, Antônio Carlos. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2019. Disponível em: <https://bookshelf.vitalsource.com/#/books/9788597020984/cfi/6/30!/4@0:0>. Acesso em: 25 ago. 2019.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física Vol. 1**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física Vol. 2**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- MINAYO, Maria Cecília de Souza; GOMES, Romeu; DESLANDES, Suely Ferreira. **Pesquisa Social: Teoria, método e Criatividade**. 21. ed. Petrópolis: Vozes, 2002. 108 p. Disponível em: <https://wp.ufpel.edu.br/franciscovargas/files/2012/11/pesquisa-social.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2019.
- UHDEN, Olaf et al. Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education. **Science & Education**, [s.l.], v. 21, n. 4, p.485-506, 20 out. 2011. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/s11191-011-9396-6>.
- VIGOTSKI, Lev Semionovich. **A Formação Social da Mente**. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991. 191p.

**APÊNDICE: PRODUTO EDUCACIONAL**



**ENSINO DA FÍSICA NAS  
AULAS DE MATEMÁTICA  
UTILIZANDO O MÉTODO DE  
MODELAGEM**

**MATERIAL DO PROFESSOR**

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Função da posição (Movimento Uniforme).....	97
Figura 2 - Função da Velocidade: Movimento Uniformemente Variado.....	98
Figura 3 - Gráfico do Exemplo 1.....	100
Figura 4 - Encontro das águas do rio Amazonas e Tapajós em frente à orla de Santarém ....	105
Figura 5 - Medição da temperatura dos líquidos nas garrafas através do LabQuest.....	105
Figura 6 - Embarcação usada para realizar as medições relativas à situação problema.....	107
Figura 7 - Instrumentos para a coleta de dados (medição) da situação problema.....	107
Figura 8 - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET – curva logarítmica.....	111
Figura 9 - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET – curva polinomial de ordem 2.....	111
Figura 10 - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET preparada - comportamento linear.....	112
Figura 11 - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET preparada - comportamento polinomial.....	112
Figura 12 - Resfriamento da água no interior de uma garrafa PET - curva exponencial.....	113
Figura 13 - Resfriamento da água no interior de uma garrafa PET - curva polinomial.....	113
Figura 14 - Resfriamento da água no interior de uma garrafa PET preparada – curva linear	114
Figura 15 - Resfriamento da água no interior de uma garrafa PET preparada - curva polinomial.....	114



**LISTA DE QUADROS**

Quadro 1 - População do México 1980-1986.....	101
Quadro 2 - Dados coletados no movimento da embarcação da Praça Monsenhor José Gregório à Praça dos Pescadores .....	106
Quadro 3 - Dados obtidos em direção perpendicular à orla de Santarém no sentido Rio Tapajós à orla .....	106
Quadro 4 - Dados do experimento relativo ao aquecimento e resfriamento da água na troca de calor com o meio ambiente obtido através do LabQuest.....	108
Quadro 5 - Dados da água quente na garrafa preparada obtidos no experimento e através do modelo linear .....	116
Quadro 6 - Dados obtidos no modelo linear em intervalos de tempos não utilizados no experimento .....	117

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>89</b>
<b>2</b>	<b>PROCESSO DE MODELAGEM</b> .....	<b>91</b>
<b>2.1</b>	<b>Primeira Etapa: Desenvolvimento do Conteúdo Matemático</b> .....	<b>91</b>
2.1.1	Plano de ação .....	92
2.1.2	Sugestões para as Aulas Sobre Funções .....	94
<b>2.2.</b>	<b>Segunda Etapa: Procedimentos de modelagem</b> .....	<b>103</b>
2.2.1	Identificação da situação- problema .....	104
2.2.2	Coleta de Dados - Familiarização com fenômeno físico .....	106
2.2.3	Formulação do Problema.....	108
2.2.4.	Matematização: Elaboração do Modelo .....	109
2.2.5.	Resolução .....	115
2.2.6.	Validação .....	115
2.2.7.	Exposição Escrita e Oral do Processo de Modelagem .....	117
<b>3</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>119</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>120</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo da Física é fascinante, pois, por meio dele, podem-se compreender certas teorias científicas envolvendo movimento, energia, interação e muitos outros fenômenos físicos. Mas, para analisar e interpretar esses fenômenos é importante ter conhecimento de várias áreas, inclusive da Matemática, pois conforme (BUNGE, 1974, p. 57) “[...] toda teoria científica é erigida com a ajuda de outras teorias: somente a lógica parte do princípio, isto é, sem pressupor outras teorias. Assim, as teorias físicas utilizam a lógica e a matemática”. Ciente do papel que a matemática desempenha na estruturação das teorias físicas, o professor que ministra aula para cursos universitários, nos quais esses dois componentes curriculares estão presentes, precisa refletir sobre sua prática pedagógica e buscar alternativas para relacionar a Matemática e a Física, isto é, utilizar metodologias que esteja presente no planejamento interdisciplinar.

Dessa forma, este Produto Educacional apresenta uma proposta metodológica de planejamento interdisciplinar, visto que a Matemática, quando aplicada à Física, se torna mais dinâmica e atraente no olhar dos estudantes. Essa proposta é a **modelagem matemática** que segundo (BASSANEZI, 2002, p. 16), “[...] Consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções”.

A finalidade deste material é apresentar aos docentes, em especial os de cursos universitários (contexto no qual se desenvolveu a pesquisa da qual resulta este produto), nos quais a Matemática e a Física fazem parte da grade curricular, um significado físico a conceitos matemáticos utilizando situações-problemas envolvendo fenômenos reais. Uma vez que o método de modelagem, que segundo estudos é uma ferramenta relevante na resolução de problemas físicos e no processo ensino aprendizagem. Uhdén é claro ao afirmar que:

A descrição dos processos físicos por meio matemáticos é um dos traços mais característicos da Física em si. Se analisado mais precisamente, o papel da Matemática na Física tem múltiplos aspectos: serve como ferramenta (perspectiva pragmática), atua como linguagem (função comunicativa) e fornece uma maneira de raciocínio lógico dedutivo (função estrutural)<sup>1</sup>. (UHDEN et al, 2011, p. 486)<sup>23</sup>

---

<sup>23</sup> The description of physical processes by mathematical means is one of the most characteristic traits of physics itself. If analysed more precisely, the role of mathematics in physics has multiple aspects: it serves as a tool (pragmatic perspective), it acts as a language (communicative function) and it provides a way of logical deductive reasoning (structural function).

Em essência, este produto educacional proporciona aos estudantes a oportunidade de relacionar o conhecimento da sala de aula com situações do mundo real. Além disso, percebe-se que o ensino da Matemática é mais bem evidenciado em uma perspectiva interdisciplinar de modelagem, isto é, quando utilizado para resolver problemas do cotidiano envolvendo fenômenos físicos, nos quais o aluno tem a possibilidade de investigar, analisar, relacionar o que aprendeu em sala de aula com que acontece ao seu redor, ou seja, ele se torna protagonista de seu aprendizado.

No capítulo seguinte, é apresentada uma sugestão de como articular situações físicas para abordar conceitos matemáticos estruturantes da física para trabalhar em sala de aula, bem como os procedimentos que podem ser adotados pelo professor que pretende utilizar e desenvolver processos didáticos de modelagem de fenômenos físicos em sala de aula.

## **2 PROCESSO DE MODELAGEM**

A partir do momento em que professor se propõe a ministrar suas aulas utilizando o método de modelagem para relacionar a Matemática com a Física, com o propósito de dar sentido a conteúdos que, muitas vezes, para o aluno é bastante abstrato e, ao mesmo tempo, tornar o conhecimento mais interessante na visão do estudante, podem surgir as seguintes perguntas: como devo conduzir as atividades? Quais os procedimentos que devo utilizar no processo de modelagem? De que forma devo orientar os alunos para modelar um fenômeno físico? Para responder essas e outras perguntas, é necessário que o professor possua as noções básicas sobre o processo de modelagem, visto que a falta de conhecimento neste assunto ainda é um obstáculo para alguns professores não adotarem essa estratégia de ensino em sua prática pedagógica.

Partindo desse pressuposto, este produto educacional apresenta uma proposta baseada em Bassanezi (2002) e Biembengut e Hein (2005), que traz os procedimentos a serem adotados no processo de modelagem. Para dar embasamento referente ao processo ensino aprendizagem, este produto tem como suporte a teoria de aprendizagem sócio interacionista de Lev Vygotsky. Nesta, utiliza-se a ideia que o conhecimento se desenvolve a partir da interação social, e em tal perspectiva o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal adquire importância central.

O processo de modelagem apresentado nesse produto educacional ocorre em duas etapas: na primeira, é trabalhado o conteúdo matemático e estabelecido o tema que os alunos irão investigar; na segunda, são estabelecidas as técnicas sugeridas por Bassanezi (2002) Biembengut e Hein (2011) para modelar. Essas etapas não são disjuntas, elas podem e devem ocorrer de forma concomitante.

### **2.1 Primeira Etapa: Desenvolvimento do Conteúdo Matemático**

Quando o professor vai ministrar uma disciplina, já existe uma ementa que dispõe, entre outros fatos, o conteúdo programático a ser trabalhado com alunos. Em virtude disso, é importante que no início das aulas o professor escolha a temática a ser empregada no método de modelagem para resolver situações problema, relacionadas a fenômenos físicos. Nesta proposta, o conteúdo escolhido para ser trabalhado no processo de modelagem foi o de funções.

### 2.1.1 Plano de ação

Inicialmente, o professor estabelece um plano de ação para desenvolver o tema que pode ser da seguinte forma:

**Título:** Modelagem: Possibilidades de ensinar Física através da Matemática

**Assunto:** Funções

**Duração:** A critério do professor e da carga horária da disciplina

**Nível:** Graduação (pode ser adaptado para o Ensino Médio)

**Objetivos:**

**Geral**

Compreender a importância do estudo das funções para resolver problemas reais envolvendo fenômenos físicos através da modelagem.

**Específicos**

- Aplicar os conceitos de funções para resolver problemas envolvendo fenômenos físicos;
- Descrever os conceitos físicos através das funções;
- Representação fenômenos físicos através de gráficos;
- Resolver problemas envolvendo fenômenos físicos usando procedimento de modelagem.

**Conteúdos**

- Conceitos de Funções e Domínio imagem,
- Gráficos
- Funções: crescentes, decrescentes, pares, ímpares, composta, inversas e periódicas.
- Tipos de Funções: Polinomiais (linear e quadrática), racional, trigonométrica, exponencial e logarítmica.

### **Procedimentos Metodológicos**

O assunto deve ser desenvolvido através de uma aula expositiva e dialógica, iniciando com a ideia intuitiva de função, relacionando conceitos de funções com fenômenos físicos, como crescimento e decrescimento. Durante as aulas, o professor deve estimular a discussão, incentivando a participação do aluno. Além disso, ele deve informar que durante as aulas será usado o método de modelagem para ensinar Física através da Matemática.

Nas aulas que serão inseridos os tipos de funções, o professor deve apresentar cada tipo de função como modelos matemáticos e relacioná-los com modelos físicos, mostrando ao aluno a relação entre a Física e a Matemática. Os gráficos de cada tipo de funções devem ser utilizados para analisar e interpretar fenômenos físicos.

Durante as aulas, o professor deve mostrar aos alunos como pode ser construído um modelo a partir de um problema, incentivando o processo de modelagem. Cada conteúdo abordado deve estar relacionado com algum tema da física e, ao final, devem ser apresentados exemplos, mostrando sua importância na resolução de problemas envolvendo situações do cotidiano do aluno.

### **Recursos Didáticos**

- Quadro branco;
- Pincel;
- Notebook;
- Projetor de Slides.

### **Avaliação**

A avaliação deve ser realizada de forma contínua através do envolvimento do aluno na aula, resolução de lista de problemas através do processo de modelagem, apresentação da resolução no quadro para verificar se houve compreensão dos procedimentos de modelar (Isso é necessário, para os alunos serem capazes de futuramente definirem uma situação problema e aplicarem o método de modelagem adequadamente). Para complementar a avaliação, podem ser feitos testes individuais.

Após a construção do plano de ação, o professor pode elaborar o plano de cada aula. Os planos de aula ficam a critério de cada professor que for utilizar essa proposta de ensino sobre modelagem em suas aulas.

### 2.1.2. Sugestões para as Aulas Sobre Funções

Antes de iniciar essa seção, é importante esclarecer que essa proposta não tem a pretensão de ensinar como o professor deve ministrar suas aulas sobre funções, apenas de apresentar algumas sugestões que possam ser utilizadas para relacionar a Matemática com a Física. E também como o professor deve orientar os alunos para a realização do processo de modelagem. Muitas das sugestões apresentadas são observadas em alguns livros didáticos.

Ao iniciar os estudos sobre funções, antes de apresentar o conceito formal, é interessante que seja apresentada a ideia intuitiva de dependência entre grandezas. Nesse momento o professor pode apresentar exemplos, como:

Exemplo 1: A aceleração adquirida por um móvel depende da força aplicada e de sua massa.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Exemplo 2: A pressão exercida por um corpo sobre outro depende da área de contato entre os corpos e força exercida.

$$p = \frac{F}{A}$$

Através desses exemplos o professor deve trabalhar as ideias de proporcionalidade, falando sobre grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

Durante esse período é necessário que o professor explique aos alunos como será desenvolvido o trabalho, informando a todos que o conteúdo sobre funções será utilizado para resolver situações-problema que envolvem fenômenos físicos reais, os quais eles terão a oportunidade de investigar, medir, analisar, verificar as variáveis envolvidas nos problemas e criar um modelo matemático baseado nos estudos de funções que poderá resolver a situação problema identificada. Esse modelo formulado por eles vai ser testado e será verificada a possibilidade de utilizá-lo para fazer previsões em situações semelhantes à apresentada no



problema (extensão do modelo). Poderão ser feitos os ajustes necessários para se tornar um modelo mais realista. A partir do momento em que o modelo matemático é adequado para resolver problema físico, ele assume característica de modelo físico.

Para os alunos identificarem uma situação problema que possa ser modelada, o professor deve sugerir temas de Física relacionados ao conteúdo de funções para eles iniciarem o processo de pesquisa e investigação com finalidade de familiarizar-se com o tema e, dessa maneira, facilitar a formação do problema. Mas sabendo que todo ser humano é um ser social e segundo Vygotsky, o conhecimento é um produto da interação entre a pessoa e o meio, sendo esse meio entendido como algo social, então para haver interação entre alunos, é importante que os temas sejam divididos entre grupos de estudantes, para que, através da socialização de conhecimento entre os alunos, ocorra o desenvolvimento cognitivo. É necessário que o professor esteja ciente disso, pois como afirma Vygotsky:

Muitos educadores não reconhecem esse processo social, essas maneiras pelas quais um aprendiz experiente pode dividir seu conhecimento com um aprendiz menos avançado, não-reconhecimento esse que limita o desenvolvimento intelectual de muitos estudantes. (VYGOTSKY, 1991, p.83)

Diante da socialização entre os alunos, o professor deve assumir o papel de facilitador para que a partir das experiências no processo de modelagem e da interação entre eles o aprendizado ocorra.

Durante a informação da estratégia de ensino que será utilizada nas aulas, o professor deve falar sobre a importância que esse método proporciona para relacionar o conhecimento da sala de aula com a realidade e, além, da possibilidade de fazer previsões e influenciar certas mudanças. Nesse sentido, Bassanezi, afirma:

A Modelagem Matemática utilizada como estratégia de ensino-aprendizagem é um dos caminhos a ser seguido para tornar um curso de Matemática em qualquer nível mais atraente e agradável. Uma modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com a capacidade de influenciar em suas mudanças. (BASSANEZI 2002, p.177)

Após a sugestão de temas para os alunos iniciarem a pesquisa, o professor deverá explicar aos grupos todas as fases que devem ser seguidas no processo de modelagem, ressaltando a importância de cada uma delas. Não pode haver dúvidas por parte dos alunos, para que não haja o risco de comprometimento na realização das atividades. Se o professor perceber que não houve a compreensão dos procedimentos, este deve insistir no esclarecimento e, se for

necessário, compartilhar alguns textos sobre o processo de modelagem de autores como Bassanezi e Biembengut.

Além disso, deve-se adotar uma metodologia direcionada a relacionar o conteúdo de funções com temas da Física. Uma oportunidade para fazer essa relação é no momento em que forem abordados os tipos de funções.

### **Função Linear**

A função linear, também conhecida como função afim é apresentada aos estudantes na forma:

$$y = f(x) = ax + b,$$

Com **a** e **b** sendo números reais, com **a** sendo taxa de variação da função ou coeficiente angular da reta que representa a função e **b** o intercepto da reta no eixo y, ou seja, o valor da função quando **x** é igual zero. O domínio da função é conjunto dos números reais. O gráfico é uma reta.

Quando é informado que o domínio é conjunto dos números reais, isso significa que **x** percorre toda a reta real e para cada valor de **x** tem-se um valor para a função que é representado pelo par ordenado (**x,y**). Além disso, no modelo da função a taxa de variação é constante, isto é, para intervalos iguais do domínio, tem-se a mesma variação para a função.

Esse modelo matemático geral, sem relação com uma situação problema, está isento de significado além do puramente matemático. No entanto, se o professor quiser relacionar esse conhecimento com a Física, ele deve apresentar aos alunos modelos físicos que foram construídos a partir a função linear. Para isso, ele começa inserindo a ideia de movimento e explica que para cada instante **t** de uma partícula em movimento ela vai ocupar uma posição **S(t)** que pode ser representada pelo par ordenado (**t, S(t)**). Supondo que nesse movimento a velocidade **v** (taxa de variação da posição em relação ao tempo) mantém-se constante, para encontrar a posição da partícula em qualquer instante de tempo, procede-se de maneira a encontrar o valor da função  $f(x)$  para qualquer valor para **x** quando a taxa de variação é constante.

$x \rightarrow t$ : instante de tempo, variando no intervalo  $[0, \infty)$

$a \rightarrow v$ : taxa de variação da posição em função do tempo (constante)

$b \rightarrow s_0$  : posição quando  $t = 0$

$y = f(x) \rightarrow S(t)$ : posição em função tempo

Com essa nova forma de representar as variáveis e os parâmetros, pode-se escrever a função afim da seguinte maneira:

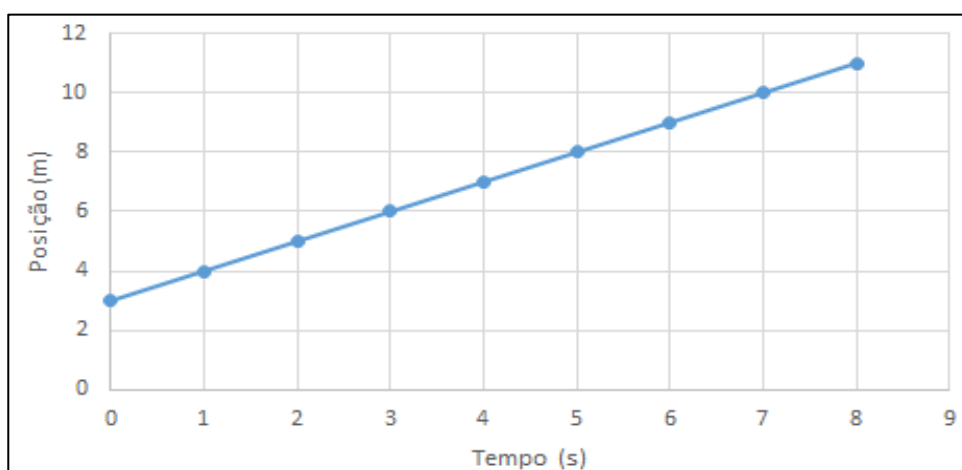
$$S(t) = S_0 + vt$$

Esse modelo (função da posição) já possui um significado físico e representa a posição de uma partícula quando se movimenta com velocidade é constante e, dentro da teoria física da cinemática, configura o movimento uniforme.

Este processo pode ser usado pelo professor, em suas aulas, para ensinar física a partir da matemática. Bunge (1974) denomina processo de modelar, aquele no qual utiliza um objeto modelo (móvel, representado como uma partícula) para representar um fenômeno (movimento da partícula) que, interpretado dentro de uma teoria geral (cinemática), dá origem a uma teoria específica (movimento retilíneo uniforme) na qual possam ser feitas relações dedutivas.

Para fazer análise do movimento uniforme, o professor utiliza gráficos para uma melhor visualização do movimento em relação ao tempo, conforme Figura 1:

**Figura 1** - Função da posição (Movimento Uniforme)



Fonte: Autor (2019).

Da mesma forma, o professor pode construir um modelo que representa a função da velocidade do Movimento Uniformemente variado a partir da função linear.

Em que:

$x \rightarrow t$ : instante de tempo, variando no intervalo  $[0, \infty)$

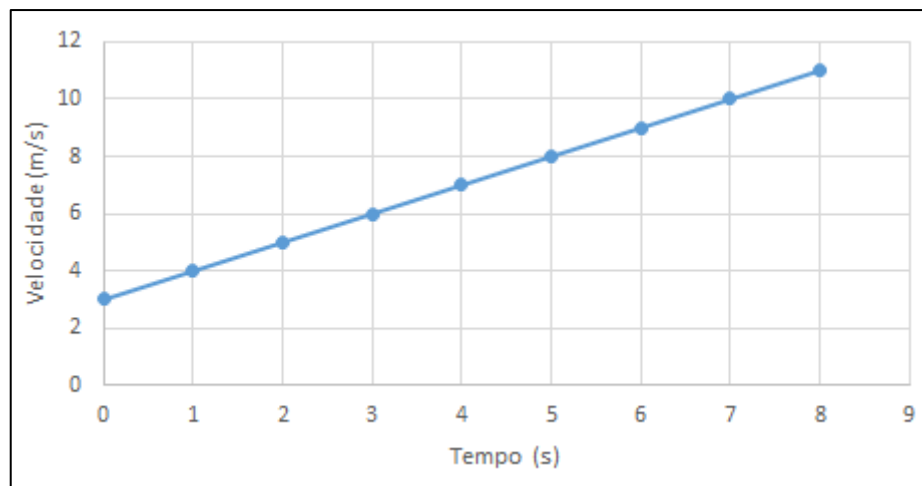
$a \rightarrow a$  : taxa de variação da velocidade (aceleração)

$b \rightarrow v_0$ : intercepto do eixo vertical (velocidade no instante  $t=0$ )

$y = f(x) \rightarrow v(t)$ : velocidade em função do tempo.

Para analisar o movimento uniformemente variado, é importante o estudo do gráfico que representa o movimento, conforme Figura 2.

**Figura 2** - Função da Velocidade: Movimento Uniformemente Variado



Fonte: Autor (2019).

Através do gráfico, o professor aborda o conceito de sentido do movimento, movimento progressivo e retrógrado.

### Função quadrática

A função quadrática, muitas vezes chamada de função do segundo grau é definida por:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

**a**, **b** e **c** são números reais com **a**≠0, denominados de coeficientes da função. O **a** indica a concavidade da função, o **b** determina a coordenada do vértice e o **c**, o intercepto com eixo vertical. O domínio da função é o conjunto dos números reais. O gráfico resulta em uma parábola.

Para dar sentido à função quadrática, o professor aborda a ideia de lançamento vertical. Devido à força gravitacional que age nos corpos próximos à terra, decorre disso que estes corpos são acelerados e a esta taxa de variação temporal da velocidade, denomina-se aceleração da gravidade. Através de experimentos, foi detectado que seu valor próximo ao nível do mar é de aproximadamente  $9,8\text{m/s}^2$ . Sendo que ao redor da terra, esse valor não é fixo, há uma variação de aproximadamente  $9,789\text{ m/s}^2$  no equador até  $9,823\text{ m/s}^2$  nos polos.

Em seguida, constrói-se o objeto modelo do fato (lançamento vertical), através da teoria geral cinemática e incorpora-se a esse modelo à teoria específica do movimento retilíneo uniformemente variado, descrito pela expressão abaixo:

$$h = h_0 + V_0 t + \frac{g}{2} t^2$$

$c \rightarrow h_0$ : altura do objeto no instante  $t = 0$ ;

$b \rightarrow V_0$ : velocidade de lançamento do objeto;

$a \rightarrow \frac{g}{2}$ : metade da aceleração da gravidade;

$y = f(x) \rightarrow h(t)$ : altura em função do tempo.

A partir do modelo apresentado, o professor pode fazer os seguintes questionamentos: quanto tempo leva para atingir a altura máxima? Qual é a altura máxima atingida? Quanto tempo a partícula permanece no ar? Qual a velocidade no ponto mais alto? Qual o tipo de movimento na subida? E na descida? Através dessas perguntas o professor faz a comparação entre os significados Matemático e Físico da função. Além disso, constrói junto com os alunos o gráfico e outros fatos referentes ao movimento uniformemente variado, que segundo autores como, Biembengut, Burak e Barbosa também é considerado como modelos. Dessa maneira, o conhecimento vai desenvolvendo através da interação professor e alunos. Esse processo de aprendizagem está de acordo com uma das premissas de Vygotsky, a qual afirma que a aprendizagem ocorre principalmente em processo de relações sociais, com ajuda de pessoas mais experiente, neste caso o professor.

Além do lançamento vertical, o professor pode escolher mais um tema da Física, como energia cinética para relacionar com a função quadrática utilizando o modelo:

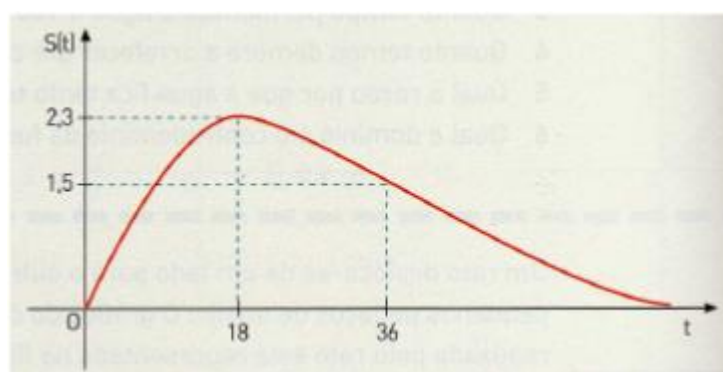
$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

Em energia cinética, podem ser feitas perguntas do tipo: o que acontece com a energia cinética se dobrar o valor da velocidade? Se o objeto estiver em repouso, qual a sua energia cinética e por quê? Entre outras.

Assim como o professor pode associar os modelos matemáticos a modelos físicos, ele também pode mostrar como interpretar ou construir um modelo. Para isso, é proposto um problema em que os dados são apresentados em forma de tabelas ou gráfico, e com base nos modelos apresentados pode-se fazer a interpretação ou construir outros modelos que possam ser verificados e sejam passíveis de fazer previsão.

Exemplo 1: Num laboratório, um biólogo injeta num coelho, por via intramuscular, certa substância inofensiva. O gráfico seguinte (Figura 3) mostra as variações da quantidade de substância  $S(t)$ , em gramas por litro, presente no sangue em cada instante  $t$ (em segundos). Responde às questões com a precisão que o gráfico te permitir.

**Figura 3** - Gráfico do Exemplo 1



- Qual é a quantidade máxima de substância contida no sangue?
- A partir de que momento começa a eliminação?
- Qual a duração da passagem de 0g a 2,3g na fase de absorção? E qual a duração da passagem de 2,3g a 1,5g na fase de eliminação? Compara os valores obtidos. O que podes concluir?
- Qual é a quantidade de substância contida no sangue ao fim de muito tempo?

Este exemplo serve para fazer interpretação do modelo apresentado na forma de gráfico. Vejamos outro exemplo.

Exemplo 2: O Quadro 1 representa a população do México de 1980 a 1986.

**Quadro 1** - População do México 1980-1986

Ano	População (em milhões)
1980	67,36
1981	69,13
1982	70,93
1983	72,77
1984	74,66
1985	76,60
1986	78,59

Utilizando os dados apresentados no Quadro 1, o professor pode mostrar como se construído um modelo que pode ser testado e seja capaz de fazer previsões.

Inicialmente, o professor informa que pode ser desenvolvido, a partir dos dados apresentados no Quadro 1, um modelo que representa a população do México e que seja capaz de prever a população nos anos posteriores. Em seguida, ele solicita para que os alunos observem os dados e verifiquem se a taxa de crescimento é constante a cada ano. No momento que é percebido que a taxa de crescimento não é constante a cada ano que passa, descarta-se a ideia de um modelo linear. Posteriormente, propõe-se que os alunos achem a razão entre a população de um ano (1981) e o ano anterior (1980) e faça isso até o ano de 1986. Os alunos vão encontrar os seguintes resultados:

$$\frac{\text{População de 1981}}{\text{População de 1980}} = \frac{69,13}{67,36} = 1,026$$

$$\frac{\text{População de 1982}}{\text{População de 1981}} = \frac{70,93}{69,13} = 1,026$$

De forma análoga, verificar-se-á que todas as razões são iguais a 1,026. Isso significa que a população está crescendo a 2,6% ao ano. A partir desse problema, o professor demonstra como modelar o crescimento populacional do México em relação ao tempo, considerando o ano de 1980 como  $t = 0$ .

Quando  $t = 0$ , população = 67,36 = 67,36(1,026)<sup>0</sup>.

Quando  $t = 1$ , população =  $69,13 = 67,36(1,026)^1$

Quando  $t = 2$ , população =  $70,93 = 67,36(1,026)^2$

Quando  $t = 3$ , população =  $72,77 = 67,36(1,026)^3$

Continuando esse processo, chega-se ao modelo:

$$P = P_0(1,026)^t$$

$P$ : população (em milhões);

$P_0$ : população inicial (em milhões);

$t$ : tempo (em anos).

Ao concluir o processo, ele informa aos alunos que, se não houver nenhum fenômeno que interrompa ou modifique esse crescimento, esse modelo construído pode ser utilizado para prever a população Mexicana dos anos posteriores. Além desses exemplos, o professor pode sugerir problemas vinculados diretamente à Física.

Dessa forma, o professor vai apresentando os tipos de funções relacionando-os a modelos físicos e, ao mesmo tempo, deve utilizar problemas envolvendo fenômenos físicos. No entanto, é importante que o professor possua conhecimento de Física para que os resultados apresentados na solução dos problemas não se tornem apenas uma resposta numérica sem nenhuma compreensão conceitual do fenômeno. Essa é uma preocupação que deve existir para não fazer o aluno pensar que por encontrar resultados numéricos corretos, já esteja aprendendo física. Nesse sentido, Uhden et al.(2011, p.487) afirma que:

Estudos indicam que uma estratégia comum usada pelos alunos para resolver problemas é a de cegamente atribuir as quantidades a equações físicas e produzir respostas numéricas sem que se entenda o significado físico dos cálculos<sup>24</sup>.

Percebe-se que, ao trabalhar problemas físicos através da Matemática, é importante fazer o aluno refletir para compreender os conceitos Físicos envolvidos.

Finalizada a primeira etapa, em que o professor trabalha o conteúdo e sugere o tema para os alunos iniciarem a pesquisa, inicia-se a segunda etapa, para a qual é apresentada uma sequência didática dos procedimentos de modelagem.

---

<sup>24</sup>studies indicate that one common strategy used by the students to solve problems is blindly plugging quantities into physics equations and churning out numeric answers without understanding the physical meaning of their calculations.



## 2.2. Segunda Etapa: Procedimentos de modelagem

Nesta seção, o professor é orientado passo-a-passo sobre como proceder para adotar o método de modelagem como estratégia de ensino em suas aulas de matemática, com a finalidade de possibilitar aos alunos resolverem problemas reais envolvendo fenômenos físicos. Reafirmando o que já foi dito, as etapas não são disjuntas.

Escolhido o conteúdo matemático a ser desenvolvido para relacionar com ensino da Física; sugeridos os temas a se investigar e dividida a turma em grupos, o professor divide suas aulas em dois momentos: no primeiro momento, explica o conteúdo matemático, associando-o à Física através da modelagem. No segundo momento, reúne-se com os alunos para reforçar a metodologia que está sendo utilizada e orientá-los no processo. O tema sugerido pelo professor deve ser da área da Física e precisa ter relação com a teoria matemática abordada nas aulas. Na pesquisa realizada para a construção desse produto educacional, os temas sugeridos pelo professor e adotados pelas duas equipes de alunos foram Movimento e Energia.

Sobre o tema Movimento, o professor sugere uma pesquisa aprofundada sobre os seguintes assuntos:

- Movimento Uniforme.
- Movimento uniformemente variado;
  - Movimento horizontal;
  - Lançamento vertical;
  - Lançamento oblíquo;
- Leis de Newton;
- Energia mecânica.

Em relação ao tema Energia, a pesquisa sugerida pelo professor pode ser sobre os seguintes conteúdos:

- Temperatura;
- Calorimetria;
- Energia mecânica;
- Energia térmica;

Os procedimentos adotados para ensinar Física nas aulas de Matemática através do método de modelagem e para orientar os alunos a modelar um fenômeno físico foram elaborados baseados em Bassanezi e Biembengut. No entanto, esses procedimentos sugeridos neste produto, para orientar professores que pretendem adotar essa estratégia de ensino em suas aulas, não seguem rigorosamente os autores, em virtude de possibilitar ao professor a liberdade de fazerem as adaptações necessárias para utilização desse método de ensino.

Esses procedimentos descritos são aqueles que os alunos devem seguir, sob a orientação do professor, no processo de modelagem.

### 2.2.1 Identificação da situação- problema

A partir do aprofundamento do tema, através de investigação, entrevistas, consultas e possíveis visitas técnicas, os alunos vão identificar e propor uma situação problema para modelar, que precisa possuir características de um fenômeno físico e ter relação com o tema. Após a escolha, a situação problema precisa ser socializada com o professor, para que se verifique a relevância educacional, social e científica. Para Vygotsky, o professor é a figura essencial do saber por representar um elo intermediário entre o aluno e o conhecimento disponível no ambiente.

Na pesquisa realizada, as situações problemas foram:

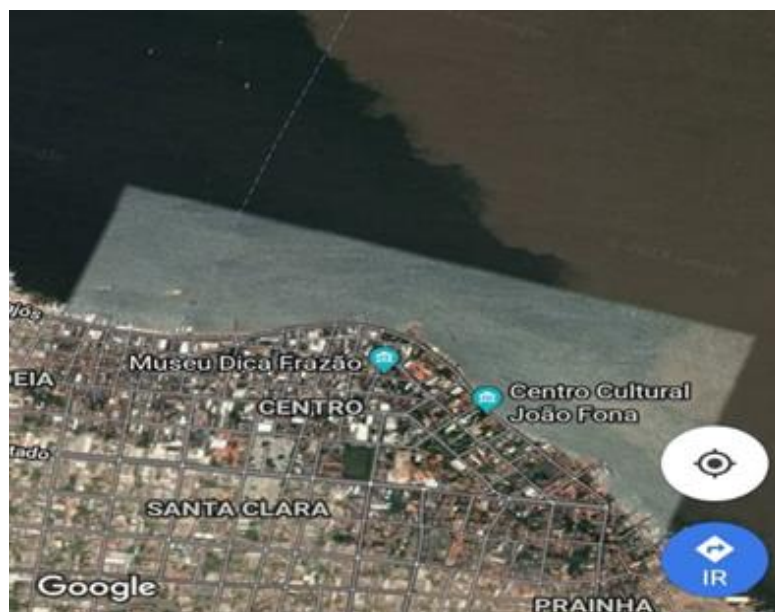
- A correnteza do rio Tapajós em frente de Santarém, no perímetro da orla entre a praça Monsenhor José Gregório<sup>25</sup> e a praça do Pescador<sup>26</sup> mostrado na Figura 4.

---

<sup>25</sup> Localizada em frente a Igreja Matriz de Santarém, conhecida como praça da Matriz.

<sup>26</sup> Localizada a 400m da praça Monsenhor José Gregório no sentido da foz do rio Tapajós.

**Figura 4** - Encontro das águas do rio Amazonas e Tapajós em frente à orla de Santarém



Fonte: Google Maps (2019).

- Aquecimento e resfriamento de um líquido ( $H_2O$ ) em duas garrafas PET preparadas com materiais de baixo custo para evitar a transferência de calor e em uma garrafa PET comum como mostra a Figura 5.

**Figura 5** - Medição da temperatura dos líquidos nas garrafas através do LabQuest



Fonte: Alunos da turma (2019).

### 2.2.2 Coleta de Dados - Familiarização com fenômeno físico

Nesta fase, ocorre a coleta de informações sobre o fenômeno. As informações podem ser qualitativas (conceituais) e quantitativas (dados numéricos e possíveis variáveis).

A coleta de dados numéricos deve ser realizada com equipamentos de medição. Esses dados, junto com as informações conceituais, são os elementos fundamentais para a construção do modelo, juntamente com as hipóteses levantadas.

Os dados coletados referentes à situação problema escolhida pela equipe A concernente à verificação da correnteza do Rio Tapajós em frente à orla de Santarém, no perímetro entre a Praça Monsenhor José Gregório e a Praça dos Pescadores estão descritos no Quadro 2.

**Quadro 2** - Dados coletados no movimento da embarcação da Praça Monsenhor José Gregório à Praça dos Pescadores

Movimento	Espaço (metros)	Tempo (segundos)
Em sentido à praça dos pescadores (ida)	0 – 200	120
	200 – 400	203
Em sentido à Praça Monsenhor José Gregório (volta)	440 – 200	183
	200 – 0	100

Fonte: Alunos da turma (2019).

A equipe A verificou o tempo para percorrer 400 metros na direção perpendicular a orla de Santarém, como mostra o Quadro 3, com a mesma aceleração aplicada no percurso paralelo a orla, o propósito de analisar a influência do rio Amazonas sobre o rio Tapajós.

Quadro 3 - Dados obtidos em direção perpendicular à orla de Santarém no sentido Rio Tapajós à orla

Espaço (metros)	Tempo (segundos)
0-400	120

Fonte: Alunos da turma (2019)

Esses dados foram obtidos no deslocamento de uma embarcação conhecida na região como bajara como mostra a Figura 6.

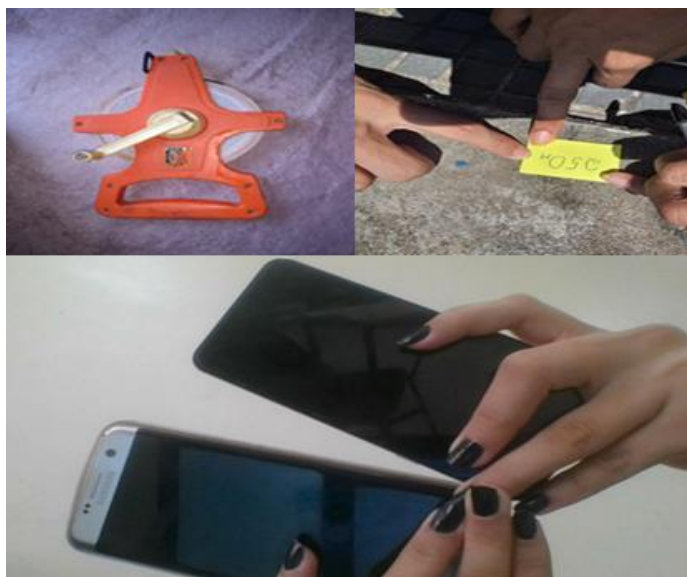
**Figura 6** - Embarcação usada para realizar as medições relativas à situação problema



Fonte: Alunos da turma (2019).

Os instrumentos utilizados para medição foram: trena de 50 metros para fazer a medição do espaço na orla, cronômetros e GPS dos celulares, para a medição da distância no sentido rio/orla, fitas adesivas e post-its para a marcação dos pontos estudados, como mostra a Figura 7.

**Figura 7** - Instrumentos para a coleta de dados (medição) da situação problema



Fonte: Alunos da turma (2019).

Os dados coletados referentes à situação problema escolhida pela equipe B, relativos ao resfriamento e aquecimento da água no interior das garrafas PET, preparada com uso de

material de baixo custo e a garrafa PET comum, medidos no Laboratório de Física da Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA estão apresentados no Quadro 4.

**Quadro 4** - Dados do experimento relativo ao aquecimento e resfriamento da água na troca de calor com o meio ambiente obtido através do LabQuest

Tempo em minutos	Temperatura da água em °C			
	Aquecimento na garrafa PET	Aquecimento na garrafa PET preparada	Resfriamento na garrafa PET	Resfriamento na garrafa PET preparada
0	5,8	4	56,8	54,2
10	8,9	4,6	54,2	53,5
20	11,1	5,7	51,2	52,5
30	12,5	6,4	48,7	51,2
40	13,6	7,1	46,2	50,1
50	14,5	8	44,1	48,8
60	15,1	8,5	41,9	47,9
70	15,8	8,9	40,3	47,1
80	16,3	9,6	38,7	46
90	17,1	9,9	37,1	45,1
100	17,6	10,4	35,9	44,4
110	18,1	11,1	34,6	43,5
120	18,6	11,5	33,5	42,7

Fonte: Alunos da turma (2019).

### 2.2.3 Formulação do Problema

Uma vez feita a coleta de dados, decide-se determinar o que se pretende obter do fenômeno físico escolhido para modelar. Isso leva à formulação do problema que, segundo Bassanezi (2002), deve ser: enunciado numa linguagem própria da área em que está inserido o problema; e explicitado de forma clara e compreensível através de uma pergunta científica, de modo a estabelecer relação entre os fatos envolvidos no fenômeno.

O problema pode ser apresentado pelo professor ou formulado pelos alunos. Neste sentido, Barbosa (2004), estabelece três casos de modelagem que estabelece as tarefas do

professor e do aluno e na pesquisa realizada para a construção do produto foi utilizado o caso três, que diz: “[...] no caso 3, trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas não matemáticos que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. Aqui, a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas do aluno”. (BARBOSA, 2004, p. 77)

Os problemas formulados pelas equipes foram:

Equipe A: **Tema - Movimento**

**De que maneira o rio Amazonas influencia a correnteza do rio Tapajós no perímetro localizado em frente a cidade de Santarém?**

Equipe B: **Tema- Energia**

**Em medida um recipiente construído com materiais de baixo custo conserva a temperatura de um líquido?**

#### 2.2.4. Matematização: Elaboração do Modelo

Após a coleta dos dados e formulação do problema, inicia-se o processo de levantamento de hipótese para formulação do modelo. Biembengut e Hein (2011, p. 22) informam que “a questão formulada que permite a resolução da questão e de outras similares, pode ser considerado um modelo matemático”. No entanto, ela afirma que na resolução de um problema quando quantificado, requer uma formulação matemática detalhada. Nessa perspectiva Biembengut e Hein (2011, p.12) informa “[...] um conjunto de símbolos e relações matemática que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema de situação real, denomina-se modelo matemático”.

A elaboração do modelo ocorre a partir das hipóteses, cuja geração acontece de vários modos, tais como: observação dos fatos, dedução lógica, análise das relações entre as variáveis. Nesse sentido Bassanezi (2002, p.29) afirma: “a montagem do modelo matemático que se dá nessa fase do processo de modelagem depende substancialmente do grau de complexidade das hipóteses e da quantidade das variáveis inter-relacionadas”. Isso significa que se o professor quer construir um modelo para resolver uma situação problema real, deve simplificar o problema e, conseqüentemente as hipóteses levantadas terá um menor grau de complexidade e, dessa forma, será possível elaborar um modelo (principalmente, limitando o número de variáveis envolvidas no fenômeno). De acordo com Kac apud Bassanezi (2002, p. 29), “Se você

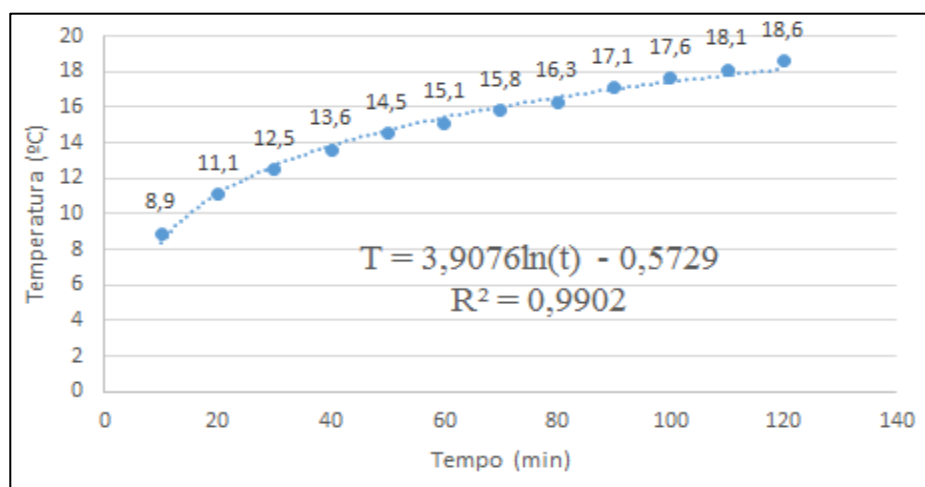
não consegue resolver o problema a que propôs, então tente simplificá-lo. A condição única é esta: você não deve simplificá-lo demasiadamente a ponto de perder as informações essenciais”. Nesse mesmo sentido, Bunge (1974, p. 14) diz: “a formação de cada modelo começa por simplificações, mas a sucessão histórica dos modelos é um progresso de complexidade”.

A ideia apresentada tem o propósito de informar ao professor que vai utilizar esse produto educacional, como sugestão para ministrar suas aulas usando o método de modelagem, a necessidade de observar a complexidade dos problemas formulados pelos alunos. É importante que o professor compreenda de forma clara que elaborar um modelo matemático da situação problema não é apenas construir uma equação, mas como afirma Biembengut (2011, p.14) “[...] é chegar a um conjunto de expressões aritméticas ou fórmulas, ou equações algébricas, ou gráficos, ou representações, ou programa computacional, que levem à solução ou permitam a dedução de uma solução”.

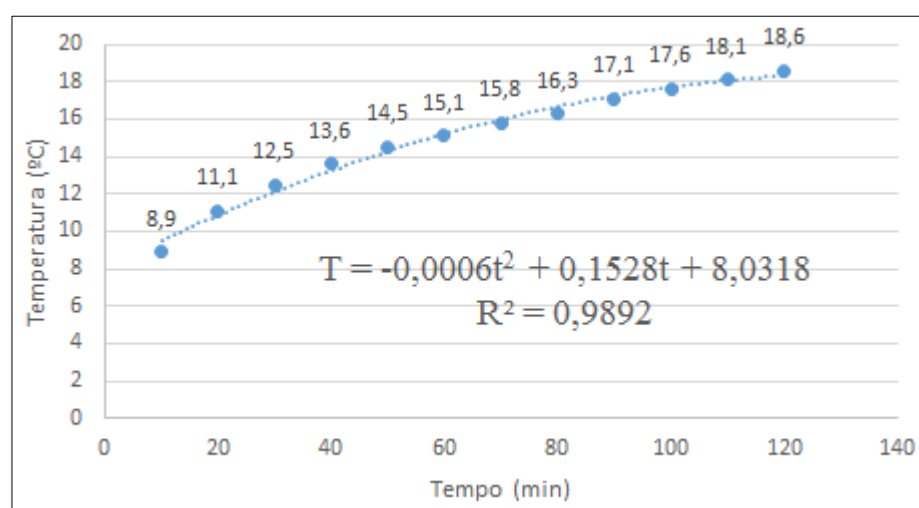
Na pesquisa realizada para elaboração deste produto, os dados obtidos pelos alunos, na realização do processo de modelagem foram através de medição. Dessa forma, os modelos obtidos foram apresentados na forma, forma de tabelas, gráficos, expressões e equações. Por questões de detalhamento, serão apresentados os modelos obtidos e a resolução apenas referente à situação problema estabelecida pela equipe B. Primeiramente, a equipe utilizou os dados das Tabelas 4, 5, 6 e 7 para construir modelos gráficos.

O gráfico da Figura 8 apresenta uma curva referentes ao aquecimento da água no interior de uma garrafa PET, o qual foi construído a partir dos dados da Tabela 4. Verifica-se que o comportamento do gráfico é similar a uma curva logarítmica, no entanto a curva polinomial de ordem 2 foi a que melhor se ajustou como mostra a Figura 9. As figuras mostram as equações obtidas através das regressões determinadas pelo programa Excel.



**Figura 8** - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET – curva logarítmica

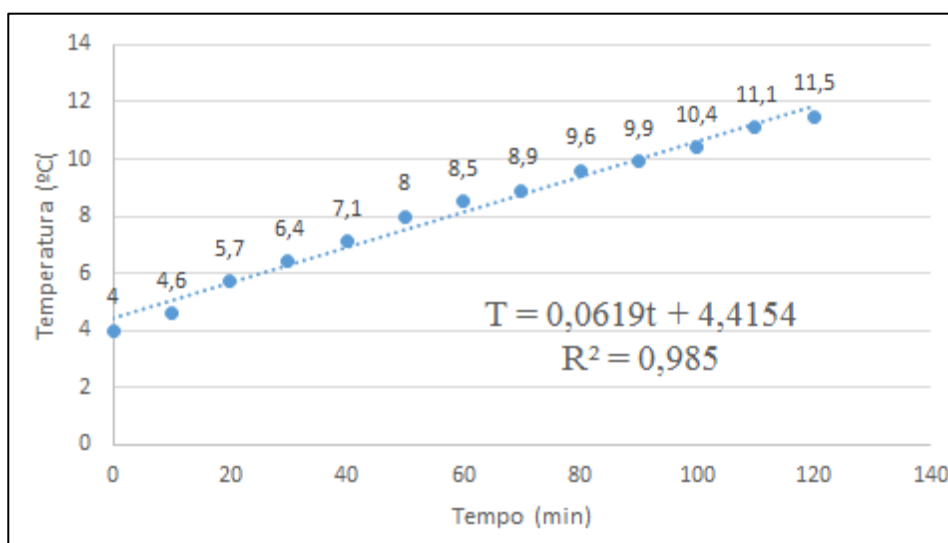
Fonte: Alunos da turma (2019).

**Figura 9** - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET – curva polinomial de ordem 2

Fonte: Alunos da turma (2019).

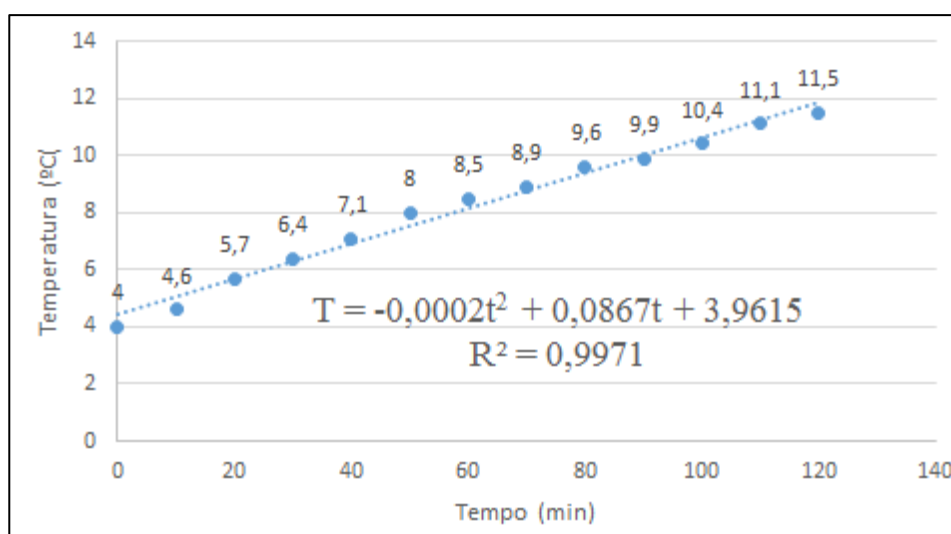
O gráfico da Figura 10 foi construído a partir dos dados do Quadro 5 e representa o aquecimento da água no interior de garrafa PET isolada termicamente com materiais de baixo custo. O gráfico apresentou um comportamento linear, diferentemente do comportado dos gráficos da Figura 8. Entretanto observou que mesmo com aparência linear, a curva que melhor se ajustou foi novamente a polinomial de ordem 2, como mostra a Figura 11. Em cada figura estão inseridos os modelos na forma de equação obtidos através do Excel. Mas é importante frisar, caso os alunos tenham conhecimento de álgebra linear, que os modelos na forma de equação podem ser construídos pelos próprios alunos.

**Figura 10** - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET preparada - comportamento linear



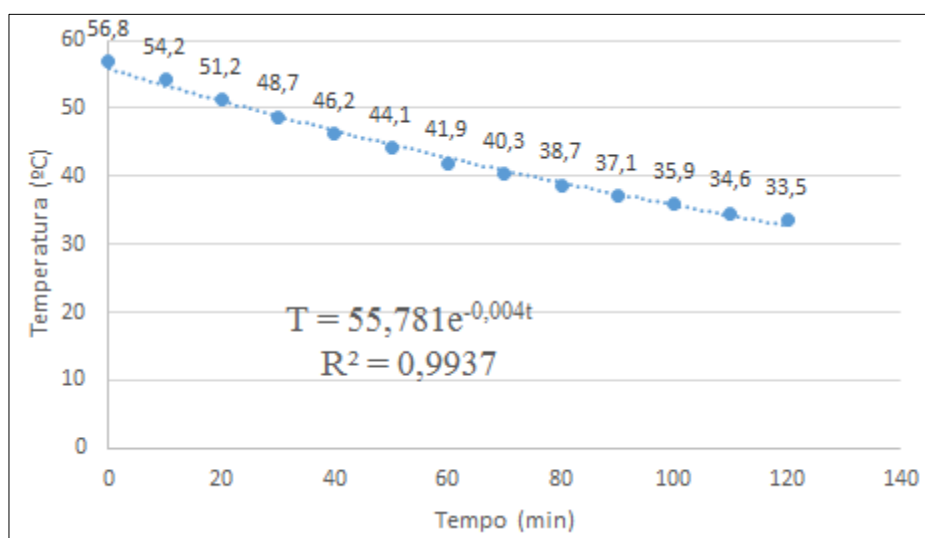
Fonte: Alunos da turma (2019).

**Figura 11** - Aquecimento da água no interior de uma garrafa PET preparada - comportamento polinomial

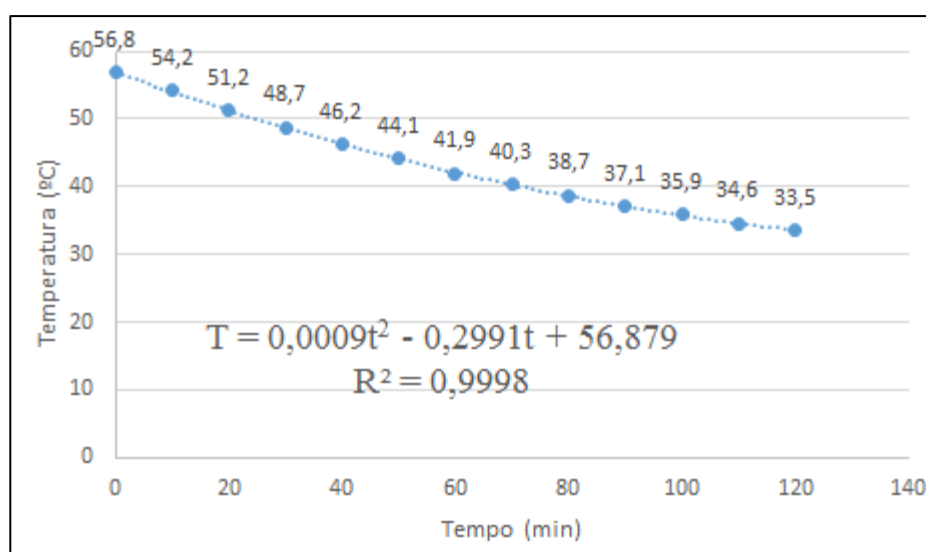


Fonte: Alunos da turma (2019).

O gráfico da Figura 12 apresenta uma curva referente aos dados coletados no resfriamento da água no interior de uma garrafa PET comum. O gráfico tem o comportamento de uma curva exponencial, mas verificou-se que a função polinomial possuía uma qualidade de ajuste melhor em relação aos dados, como mostra a Figura 13.

**Figura 12** - Resfriamento da água no interior de uma garrafa PET - curva exponencial

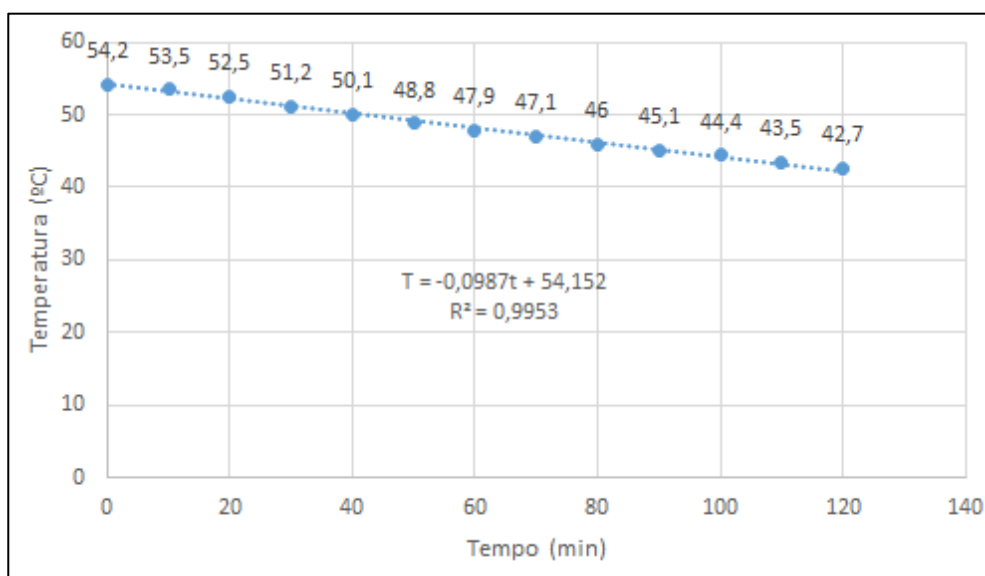
Fonte: Alunos da turma (2019).

**Figura 13** - Resfriamento da água no interior de uma garrafa PET - curva polinomial

Fonte: Alunos da turma (2019).

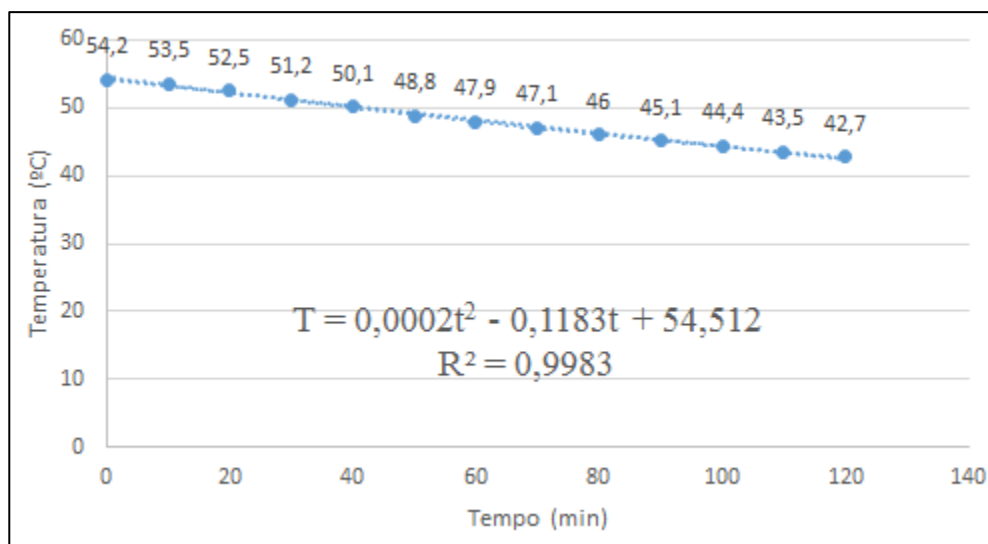
No gráfico da Figura 14, que representa os dados coletados de resfriamento da água no interior da garrafa PET preparada, o comportamento tem uma aparência linear, assim como o comportamento do gráfico da mesma garrafa no aquecimento. No entanto, o ajuste com melhor qualidade ocorreu através da curva polinomial de ordem 2, como mostra a Figura 15.

**Figura 14** - Resfriamento da água no interior de uma garrafa PET preparada – curva linear



Fonte: Alunos da turma (2019).

**Figura 15** - Resfriamento da água no interior de uma garrafa PET preparada - curva polinomial



Fonte: Alunos da turma (2019).

Foi possível verificar a melhor qualidade dos ajustes através dos modelos na forma de equação e pelo processo dos mínimos quadrados.

### 2.2.5. Resolução

Nesta fase, é o momento em que o modelo ou os modelos são analisados e interpretados, com a finalidade de apresentar uma solução do problema elaborado a partir do fenômeno físico escolhido pelos alunos. Isto significa verificar se através dos modelos construídos a partir dos dados obtidos e das hipóteses, o problema será respondido.

No processo de modelagem realizado pelas equipes de alunos foi possível chegar a uma solução do problema através dos modelos e do processo de investigação.

A equipe A ficou com o tema Movimento e escolheu o fenômeno físico concernente à correnteza do rio Tapajós em frente à cidade de Santarém, cujo problema estabelecido foi: **de que maneira o rio Amazonas influencia a correnteza do rio Tapajós no perímetro localizado em frente a orla da cidade de Santarém?** A resposta obtida pela equipe a partir da análise e interpretação dos modelos foi a seguinte: como a velocidade do rio Amazonas é maior que a do rio Tapajós e devido a forma delineada da orla de Santarém faz com que a correnteza do rio Tapajós em frente à cidade seja contrária ao curso do rio em um determinado perímetro.

A equipe B, que ficou com o tema Energia e escolheu o fenômeno físico referente ao aquecimento e resfriamento da água em duas garrafas, que teve como problema **em que medida um recipiente construído com materiais de baixo custo conserva a temperatura de um líquido?** Após analisar e interpretar os modelos elaborados a partir dos dados coletados e das hipóteses levantadas, obteve-se a seguinte resposta: um recipiente quando é construído com materiais de baixo custo de forma a evitar os três tipos de transferência de calor, prolonga o tempo de aquecimento e resfriamento, ou seja, a variação de temperatura ocorre de forma mais demorada do que em uma garrafa de plástico normal.

### 2.2.6. Validação

Nesta fase, segundo Bassanezi (2002, p. 30), “[...] os modelos juntamente com as hipóteses devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com valores obtidos no sistema real”. Esse procedimento de verificação do modelo é necessário para confirmar sua validação. Pois, segundo Bunge (1974, p.39), “todo modelo testado é, no melhor dos casos, parcialmente verdadeiro”.

Será mostrado o processo que a Equipe B utilizou para verificar a validação do modelo.

A equipe utilizou os modelos na forma de equação para verificar a temperatura no resfriamento e no aquecimento com a finalidade de comparar com os dados obtidos no experimento. Além de utilizar os mesmos intervalos de tempo que foram dez minutos no experimento, a equipe utilizou intervalos de cinco minutos para medir a variação de temperatura. Será apresentada neste produto apenas a verificação do resfriamento na garrafa preparada, com o modelo linear para verificar os dados obtidos e comparar com os dados coletados como mostra o Quadro 5 e a verificação de temperaturas através do modelo linear em intervalos de tempo que não foram analisados no experimento como mostra o Quadro 6.

Quadro 5 - Dados da água quente na garrafa preparada obtidos no experimento e através do modelo linear

Dados obtidos no experimento		Dados obtidos através do modelo linear $T = -0,0987t + 54,152$	
Tempo (min)	Temperatura (°C)	Tempo (min)	Temperatura (°C)
0	54,2	0	54,152
10	53,5	10	53,165
20	52,5	20	52,178
30	51,2	30	51,191
40	50,1	40	50,204
50	48,8	50	49,217
60	47,9	60	48,230
70	47,1	70	47,243
80	46	80	46,256
90	45,1	90	45,269
100	44,4	100	44,282
110	43,5	110	43,295
120	42,7	120	42,307

Fonte: Alunos da turma (2019).

Quadro 6 - Dados obtidos no modelo linear em intervalos de tempos não utilizados no experimento

Dados obtidos através do modelo linear $T = -0,0987t + 54,152$	
Tempo (min)	Temperatura (°C)
0	54,152
5	53,6585
15	52,6715
25	51,6845
35	50,6975
45	49,7105
55	48,7235
65	47,7365
75	46,7495
85	45,7625
95	44,7755
100	44,282
105	43,7885

Fonte: Alunos da turma (2019).

A equipe calculou a diferença entre o valor estimado pelo modelo e os dados observados no experimento, elevou ao quadrado e fez a somatória, além disso, calcularam a média dos dados observados no experimento. Esse cálculo tinha o propósito de calcular o coeficiente de determinação para analisar a qualidade do ajuste.

### 2.2.7. Exposição Escrita e Oral do Processo de Modelagem

Esta fase é incluída quando a modelagem é utilizada como procedimento metodológico no processo ensino aprendizagem. É exatamente esta a finalidade deste produto.

Realizado o processo de modelagem, as equipes devem apresentar um registro escrito organizado do que fizeram. Esse registro das atividades de modelagem deve ser apresentado pelas equipes através de um relatório contendo justificativa, objetivos (geral e específico), definição do problema, hipóteses, referencial teórico do tema escolhido, procedimentos

metodológicos na realização do processo, análise dos resultados, considerações finais e referências.

Além da entrega do relatório, as equipes devem fazer uma exposição oral da atividade realizada e da compreensão de todo o processo de modelagem. Essa socialização é relevante para os outros alunos compreenda o que a equipe realizou e para o professor avaliar o trabalho e ter um registro para divulgar.

Na pesquisa realizada para elaboração dessa proposta, as equipes elaboraram um relatório que está anexo na dissertação e fizeram a exposição oral que foi filmada pelo professor, com autorização dos alunos.



### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este produto foi resultado de uma pesquisa realizada para elaboração de uma dissertação do curso do Mestrado Nacional Profissional no Ensino da Física (MNPEF). Ele foi construído com intuito de auxiliar o professor que pretende usar as aulas de matemática, ministradas em curso universitários, dos quais as disciplinas matemática e física façam parte da grade curricular, para estimular os alunos a resolverem problemas físicos reais.

Os procedimentos apresentados, tanto os da primeira etapa, referente aos procedimentos metodológicos de ensino do conteúdo da disciplina, como da segunda, que aborda os procedimentos para a realização da atividade, servem para nortear o professor na utilização do método de modelagem como estratégia de ensino. Durante a descrição do produto, detalhou-se a metodologia utilizada, para auxiliar o professor durante a aplicação do processo de modelagem com alunos. Além dos procedimentos baseados em Bassanezi e Biembengut, apresentaram-se os dados dos trabalhos de modelagem realizados pelos alunos de graduação em Ciências e Tecnologia. Esses dados mostram a importância da resolução de um fenômeno físico real e sua interpretação usando linguagem matemática, visto que sua finalidade é resolver situações problema envolvendo fenômenos físicos reais a partir da matemática.

Durante a pesquisa realizada, verificou-se que os procedimentos apresentados contribuem com o incentivo à investigação; desenvolvem habilidades para resolução de problemas envolvendo fenômenos físicos reais; ampliam o raciocínio lógico dedutivo e a criatividade do aluno. O professor que utilizar este produto terá liberdade para modifica-lo, adequando-o conforme o andamento das aulas. Além disso, é importante o professor ter a capacidade de adequar esses procedimentos a qualquer conteúdo matemático, não apenas usá-lo para ensinar função.

Essa proposta foi idealizada para orientar professores com pretensão de inovar sua prática pedagógica, assumindo uma nova postura diante do processo de ensino aprendizagem, a utilizar uma estratégia de ensino que vem apresentando resultados positivos na aproximação da matemática com a física. Pretende-se, com isso, estimular mais professores a utilizar esse procedimento metodológico em suas aulas, no intuito de fazer o aluno perceber a relação entre essas duas áreas do conhecimento e, ao mesmo tempo, evidenciar a conexão do conhecimento da sala de aula com o mundo real. Ressalta-se que a proposta está sujeita a confronto e complementação para ser aperfeiçoada.

**REFERÊNCIAS**

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como?** Veritati, Salvador, n. 4, p. 73-80, 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino–aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002

BIEMBENGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011. 128 p.

BUNGE, Mario. **Teoria e Realidade**. São Paulo: Perspectiva, 1974. 244 p.

UHDEN, Olaf et al. Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education. **Science & Education**, [s.l.], v. 21, n. 4, p.485-506, 20 out. 2011. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/s11191-011-9396-6>.

VIGOTSKI, Lev Semionovich. **A Formação Social da Mente**. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991. 191p.