UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ – UFOPA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS

LICENCIATURA INTEGRADA EM MATEMÁTICA E FÍSICA

MARCOS PAULO SILVA OLIVETTO

QUATRO OPERAÇÕES: OS PORQUÊS POR TRÁS DO PASSO A PASSO

Santarém – PA

2018

MARCOS PAULO SILVA OLIVETTO

QUATRO OPERAÇÕES: OS PORQUÊS POR TRÁS DO PASSO A PASSO

Monografia apresentada ao Programa de Ciências Exatas, do Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática e Física.

Orientador: Prof. *Me. Hamilton Cunha de Carvalho*

Santarém – PA

2018

MARCOS PAULO SILVA OLIVETTO

QUATRO OPERAÇÕES: OS PORQUÊS POR TRÁS DO PASSO A PASSO

Monografia submetida ao Programa de Ciências Exatas, do Instituto de Ciências da Educação, da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática e Física.

Aprovado por:

Prof. Me. Hamilton Cunha de Carvalho
Orientador – UFOPA

Prof. Dr. José Ricardo e Souza Mafra
Examinador – UFOPA

Prof. Me. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues
Examinador – UFOPA

Santarém – PA
2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço de todo coração a minha família, pelo apoio e incentivo. Principalmente minha mãe Maria Cezarina e minha esposa Valdineia Guimarães pelas noites acordada ao meu lado. Aos meus irmãos Antônio Monteiro, Luana Conceição, Francisco Rafael e Marta Mayara.

Um agradecimento especial ao (PIBID) de física, por ter contribuído significativamente no meu crescimento como educador, ao professor Sandro Aléssio coordenador do PIBID por acreditar no meu trabalho e a professora supervisora Nara Roberta pelas contribuições e exemplo de profissional. Todos os “pibidianos” que desenvolveram junto a mim o projeto, Andrey Camurça, Marcos Araújo assim como a escola Rio Tapajós.

Serei imensamente grato aos professores: Sebastian Mancuso por acreditar em mim quando pensei em desistir do curso, sempre incentivando nos difíceis momentos da minha vida, Aroldo Rodrigues pelo exemplo de profissional e ser humano, Glauco Pantoja excelente educador e amigo, Hamilton Carvalho por acreditar no meu trabalho orientando-me, Carlos Machado professor de excelência, Hugo Diniz magnifico reitor da Universidade e excelente educador. Todos os professores do corpo docente de Física e Matemática, assim como a (UFOPA) pela estrutura e ambiente.

Aos verdadeiros amigos que acompanharam minha luta, Andrey Camurça pela força durante o curso, Juliane Meireles pelo apoio, carinho e exemplo de vida, Tamilson de Castro por ser companheiro, Pedro Henrique pela contribuição e ajuda, Sara Lopes pelo exemplo de superação, Lissa Nareli pelo apoio e parceria; Wilde Rebelo, Arley Antes e todos os demais amigos, meu muito obrigado.

“O valor de um homem deve medir-se pelo que dá e não pelo que recebe. Não se converta em um homem de sucesso senão num homem de valores”.

–Albert Einstein

RESUMO

Apresentar significativamente as quatros operações matemáticas no ensino básico não é uma tarefa trivial para alguns professores, principalmente nas séries iniciais em que essa responsabilidade é condicionada aos professores pedagogos que ensinam as fundamentações matemáticas das operações básicas. Neste sentido, apresentaremos o passo a passo das quatro operações e discutiremos alguns algoritmos práticos, isto é, argumentos práticos que possibilitam a justificativa do fazer algoritmos com o objetivo de oferecer argumentos, justificativas e ferramentas conceituais que o professor poderá utilizar no momento em que apresentará, aos seus educandos, as quatro operações. O objetivo deste trabalho consiste em construir argumentações que contribuam significativamente no entendimento do algoritmo das quatro operações básicas, inferindo sentido ou significado dos porquês são válidos os procedimentos convencionalmente utilizados em sala de aula. Não é de nosso interesse realizar quaisquer tipos de demonstração matemática no desenvolvimento dos algoritmos, mas sim, proporcionar uma aprendizagem que circunde o aprender atribuindo significado. Dessa forma, cada seção deste trabalho será apresentada unificando o modelo convencional com a forma diferenciada, ressaltando que a união do que já é empregado no ensino básico com as fundamentações e suas justificativas podem ser eficientes na melhor compreensão do conteúdo referente as quatro operações básicas e na construção de um embasamento matemático mais sólido.

Palavras-chave: Quatro operações; Aprendizagem significativa; Atribuir significado.

ABSTRACT

Significantly presenting the four mathematical operations in primary education is not a trivial task for some teachers, especially in the initial grades where this responsibility is conditioned to the teacher teachers who teach the mathematical fundamentals of basic operations. In this sense, we will present the step-by-step of the four operations and discuss some practical algorithms, that is, practical arguments that allow the justification of doing algorithms with the objective of offering arguments, justifications and conceptual tools that the teacher can use at the moment of presentation , to its students, the four operations. The objective of this work is to construct arguments that contribute significantly to the understanding of the algorithm of the four basic operations, inferring meaning or meaning of the why the procedures conventionally used in the classroom are valid. It is not in our interest to perform any kind of mathematical demonstration in the development of algorithms, but rather to provide learning that surrounds learning by assigning meaning. In this way, each section of this work will be presented, unifying the conventional model with the differentiated form, emphasizing that the union of what is already used in basic education with the justifications and justifications can be efficient in the better understanding of the contents related to the four basic operations and in the construction of a more solid mathematical foundation.

Keywords: Four operations; Meaningful learning; Assign meaning.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Fundamentar significativamente as quatros operações matemáticas no momento de ensina-las no ensino básico não é uma tarefa fácil. Essa responsabilidade é condicionada inicialmente aos professores pedagogos que apresentam e ensinam os algoritmos e suas fundamentações aos educandos nas séries iniciais. Neste sentido, apresentaremos e discutiremos no decorrer deste trabalho alguns algoritmos práticos, isto é, argumentos práticos que justificam o fazer algoritmos com o objetivo de oferecer ferramentas conceituais que poderão auxiliar o professor no momento de expor as quatro operações básicas. A ideia não é fazer uma demonstração matemática rigorosa, mas sim construir argumentações que contribua significativamente no entendimento do algoritmo das quatro operações básicas inferindo sentido dos porquês são válidos os procedimentos convencionais utilizados em sala de aula.

Existem pesquisas que apontam algumas dificuldades na compreensão das quatros operações básicas matemáticas nas séries iniciais, entre elas, a pesquisadora Martini Grasiela (2010), em seu relato de experiência em sala de aula, revela alguns desses pontos de dificuldades no entendimento do assunto, tais como:

> -Diferenciar o sinal das operações do sinal dos números;
> -Resolução das operações de adição e subtração com inteiros;
> -Dificuldade em representar os problemas práticos através da escrita;
> -Comparar os números inteiros;
> -Dificuldade em interpretar problemas. (MARTINI, 2010, p.17).

É possível apresentar o algoritmo das quatro operações básicas, de modo que, o educando não precise apenas decorar formas e procedimentos, mas sim, compreender as fundamentações e os motivos que levam tais procedimentos a serem válidos? Ou seja, apresentar o passo a passo dos algoritmos utilizados para efetuar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, inferindo sentido e/ou significado aos procedimentos realizados?

Levando em consideração tais dificuldades e o questionamento anterior, a proposta de sequência didática em caráter quantitativo e qualitativo de ZABALA (2007) será apresentada, com a finalidade de auxiliar compreensão dos algoritmos que são abordados em sala de aula e apresentar os algoritmos práticos referente as quatro operações. Nosso propósito com a sequência didática, ou seja, conjunto de passos e etapas que tem como objetivo auxiliar o professor e à aprendizagem do educando, isto é:

> (...), conhecer qual a situação de partida, em função de determinados objetivos gerais bem definidos (avaliação inicial); um planejamento da intervenção fundamentado e,

> ao mesmo tempo, flexível, entendido como uma hipótese de intervenção; uma atuação na aula, em que as atividades e tarefas e os próprios conteúdos de trabalho se adequarão constantemente (avaliação reguladora) às necessidades que vão se apresentando para chegar a determinados resultados (avaliação final) e a uma compreensão de valoração sobre o processo seguinte, que permita estabelecer novas propostas de intervenção (avaliação integradora), (ZABALA, 2007, p. 201).

Dessa maneira, apresentaremos, no capítulo 2 deste trabalho, uma abordagem teórica sobre a origem dos números inteiros, fazendo referência a alguns fatos importantes que contribuíram para o surgimento e desenvolvimento dos números inteiros e das operações com números relativos.

No capítulo 3, trataremos da compreensão dos algoritmos tradicionalmente utilizados quando efetuamos as quatro operações, dos conceitos de número, numeral e algarismo, do papel da vírgula e do ponto na representação de um número e do princípio de posição presente no sistema posicional decimal, o qual perpassa pelo significado de valor absoluto e relativo dos algarismos em um numeral.

O capítulo 4 será reservado para apresentação da proposta de sequência didática. No capítulo 5 trataremos de conceitos relacionados às quatro operações: Qual o significado de somar? Qual o significado de subtrair? O que significa multiplicar e dividir? Esses questionamentos serão explorados nesse capítulo, assim como a forma diferenciada que possibilitará uma melhor compreensão do conteúdo, e também as relações que podem ser exploradas na abordagem do assunto, referenciando as descrições necessárias, de acordo com ZABALA (2007), para aplicação da proposta didática.

Por fim, o capítulo 6 será destinado às considerações finais e procurará responder como tal proposta pode ser relevante como material de apoio ao professor nas séries iniciais do ensino básico.

2 OBSERVAÇÕES TEÓRICAS: A ORIGEM DOS NÚMEROS INTEIROS

A origem dos números inteiros, também conhecidos como números relativos, é incerta. Embora indispensáveis na contemporaneidade, segundo PASSONE (2002), acredita-se que estes surgiram para suprir as necessidades básicas do comércio, na época do Renascimento. Acredita-se também que tais transações comerciais eram realizadas através da troca de mercadorias e produtos, de modo que essa troca fosse substituída por uma efetiva moeda de negociação, sendo que esta suprisse a necessidade do contexto social daquela época, o que conhecemos atualmente como valores monetários. De acordo com BOYER (2003), com o surgimento da moeda comercial monetária e levando em consideração as separações de lotes para cultivo de plantações, começaram a surgir problemas também que envolviam operações matemáticas relativamente simples para separação e divisão de áreas de plantações e na relação de bem e débito por exemplo.

Segundo MOL (2013), o processo de contagem é a noção matemática mais simples, precedendo qualquer desenvolvimento matemático mais sofisticado.

Acredita-se, de acordo com BOYER (2003) que grande parte da evolução e desenvolvimento matemático, são atribuições dos conhecimentos adquiridos e desenvolvidos a partir das necessidades do comércio e das demarcações de terras para plantios, levando em consideração as contribuições de diversas civilizações, como os babilônicos, egípcios e gregos por exemplo, a matemática passou a ser melhor compreendida e explorada com mais elegância, sofisticação e rigorosidade, mesmo não considerando as operações com os resultados obtidos em forma de “perda” e também “não inteiros”, ou seja, os resultados de cálculos com valores menores que zero não eram estabelecidos, então a perda existia, mas não era reconhecida matematicamente.

Segundo PASSONE (2002), os matemáticos da época do renascimento, não admitiam resultados com valores menores que zero, a exemplo dos obtidos na contemporaneidade, quando queremos nos referir a uma série de situações que envolvem esses resultados, da mesma forma quando nos referimos a uma operação bancária na qual consta-se como débito uma situação financeira ou 2,5 partes de uma pizza de fatias, ou nas reportagens dos telejornais, em previsões do tempo, mencionam a queda de temperatura para 7 graus abaixo de zero, entre outros contextos conhecidos e corriqueiros.

Inseridos a necessidades da evolução social, das observações vigentes da época e decorrendo bastante tempo do início a utilização da matemática, ou seja, a diferença entre números naturais só era admitida nos casos em que o minuendo fosse maior que o subtraendo, visto que inteiros negativos não eram admitidos como números.

No sentido de compreender a origem dos números inteiros, por exemplo, busca-se registros que possam levar em que momento da história começou, de fato, a compreensão e utilização das operações. Nesse sentido TODESCO (2006), afirma que um dos primeiros registros da ideia de número negativo de que se tem notícia ocorreu na China antiga, por volta de 2000 anos atrás com representações específicas para os números positivos, que eram caracterizados pela cor vermelha, representações estas feitas em tabuleiros com aplicações de cálculos realizadas em barras de bambu, inserindo as representações dos números negativos na cor preta.

Para BOYER (2003), mesmo operando em tabuleiros, e com as representações dos números inteiros devidamente estabelecidos, os matemáticos da china antiga, em se tratando de soluções de equações algébricas, a não aceitação desses numerais, ou seja, mesmo operando algo em um mecanismo confiável e obtendo um resultado já formalizado matematicamente, não havia aceitação para conclusões em que seus resultados fossem números negativos. Porém, somente com as formalizações argumentadas pela civilização hindu, o sentido para resultados negativos começou a ser compreendido, quando precisou representar um formalismo matemático para a caracterização do fato de dívida, isto é, com o objetivo de representar débitos, os números negativos surgiam fortemente aplicáveis.

No contexto histórico da construção matemática, principalmente no que se refere às civilizações que contribuíram fortemente nos formalismos matemáticos aceitáveis na contemporaneidade, os gregos são citados por diversos autores pela sua desenvoltura com a geometria, acreditasse que essa civilização teve um papel fundamental na história da matemática pois seus trabalhos de geometria eram difundidos em outras civilizações. Para PASSONI, (2002) o que chama atenção, no entanto, é o fato que os gregos não admitiam, portanto, rejeitavam a ideia de resultados negativos, porque quando aplicavam os números negativos na geometria prática, ou seja, na obtenção de resultados reais no cálculo de áreas por exemplo, não havia adequação para tais resultados numéricos.

Para SOARES, (2008), além de serem conhecidos pela sua geometria sólida, o povo grego também era bastante caracterizado pelas suas abreviações em seus cálculos e por isso, somente tempo depois da aceitação e da formalização de resultados negativos em suas operações, por consequência de inúmeras tentativas para o entendimento nas regras dos sinais, surgia um matemático em Alexandria chamado Diofanto de Alexandria (250 d. C.), em seu primeiro livro da "Aritmética" mesmo não fazendo qualquer tipo de referência aos números negativos, apresentou o produto de duas diferenças, sendo tempo depois reconhecido como precursor da regra de sinais escrevendo: "o que está em falta multiplicando pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto o que está em falta multiplicando pelo que é positivo, dá o que está em falta" (GLAESER, 1981, p. 333).

A procura sobre os primeiros registros que pudessem levar a quem de fato contribuiu diretamente para a compreensão das operações com números inteiros ainda é constante, mas existem registros que direcionam ao astrônomo e matemático Brahmagupta (598 - 668 d.C), como o primeiro registro com estes termos, segundo Boyer (2003), Brahmagupta apresenta a seguinte regra para operações com os números inteiros: “uma dívida subtraída de zero torna-se um bem, e um bem subtraído de zero torna-se uma dívida”.

Essas relações de dívida e bens eram frequentemente indagadas no âmbito do comércio da época, mas não se tinha uma simbologia formal específica para o acréscimo e/ou dívidas. No entanto, algo que chama atenção, no que diz respeito ao desenvolvimento e aplicação da simbologia para acréscimos $(+)$ e faltas ou dívidas $(-)$ segundo TODESCO (2006), é que essas representações foram inicialmente utilizadas a partir da necessidade de pequenos armazéns e comércio para expor ao público o excesso de determinadas mercadorias com o sinal de $(+)$, e a falta destas pelo sinal de $(-)$, e essa representação foi relevante no âmbito da matemática, pois estaria surgindo uma simbologia sólida para a aritmética, e um ganho imensurável para o comércio local porque surgia uma ferramenta que facilitaria a logística dos comerciantes em efetuar operações com mais precisão e rapidez.

De acordo com BOYER (2003), os símbolos $+$ e $-$ são atribuídos a um outro matemático alemão, Johannes Widmann (1460 – 1498) por ter sido o primeiro a utilizar esses símbolos no seu livro de Aritmética Comercial, que foi publicado na Alemanha na cidade de Leipzig em 1489.

Segundo BOYER (2003), o transbordar da relação de sinal positivo $(+)$ e negativo $(-)$ ocorreu em um período crucial para a humanidade. TODESCO (2006) ressalta que, foi em pleno período do renascimento onde já haviam vários matemáticos que dominavam as soluções de equações algébricas, que as raízes negativas despertavam a necessidade de um novo mecanismo que transpusesse as limitações dos cálculos algébricos, e com o novo formalismo, essas limitações puderam ser transgredidas. Porém, mesmo havendo dúvidas sobre esse novo formalismo, tais técnicas e a associação as novas ciências existentes, foi possível a consolidação dos números negativos para solução de diversos problemas algébricos da época, um ganho gigantesco e a consolidação de uma estrutura sólida para cálculos mais precisos.

Dessa forma, no capítulo seguinte iremos abordar alguns conceitos relacionados às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, correlacionando-as com as fundamentações matemáticas sobre os porquês na perspectiva dessas operações em relevância ao passo a passo procedimental para primeira abordagem desse conteúdo no ensino básico. Trataremos, no decorrer do capítulo, como esses conceitos podem ser abordados de forma significativa para que o educando relacione seu conhecimento prévio, sua vivência e relações significativas com o assunto abordado em sala de aula.

3 CONCEITOS RELEVANTES ÀS OPERAÇÕES

O conceito de algoritmo é de fundamental importância para a compreensão e êxito no entendimento deste trabalho. Sendo assim, algoritmo é o conjunto de passos utilizados para resolver um problema. Um exemplo de algoritmo seria um manual que mostra como montar um móvel de casa, isto é, o passo a passo de como fazer. Com isso, podemos descrever os algoritmos tradicionalmente utilizados para resolver problemas envolvendo as quatro operações aritméticas básicas, mostrando que esses algoritmos não são os únicos possíveis, compreendendo assim os mecanismos que explicam o funcionamento dos algoritmos tradicionais.

Alguns questionamentos pertinentes que poderiam ser feitos seriam: Existe diferença entre os conceitos de número, numeral e algarismo? Será que são a mesma coisa ou eles distinguem-se uns dos outros? Caso sejam diferentes, o que os diferencia?

Existem algumas confusões no que diz respeito à diferença entre esses conceitos, até mesmo quando nos expressamos, como, por exemplo, definindo que número representa uma quantidade ou que serve para quantificar algo, e numeral a ordem a qual eles estão dispostos, porém, apesar de existir esse entendimento em uma outra relação, como a de caracterização para o conceito de número cardinal e número ordinal respectivamente, não se aplica esse entendimento para conceituar número, numeral e algarismo.

Podemos conceituar número como a quantidade em si, resultado de um processo de contagem ou de medição, isto é, número é uma ideia abstrata pois não podemos vê-lo, então ele existe apenas de forma imaginável em nossas mentes. Porém, quando imaginamos o número 7, por exemplo, provavelmente não estamos pensando no número 7, possivelmente imaginamos 7 objetos ou pensamos no símbolo 7 e não no número em si. É importante ressaltar que esse símbolo pensado é um numeral.

Logo, podemos definir numeral como a representação simbólica de um número, seja por meios sonoros, gráficos ou outra forma qualquer. Então, como número é uma ideia abstrata, ele precisa ser representado de alguma forma, por exemplo, quinze pode ser representado dessa forma 15 ou XV dessa maneira, nesse caso estamos tratando de numerais grafados, escritos.

Quando nos expressamos e pronunciamos “fifteen”, estamos representando de forma sonora o numeral 15, ou seja, usamos esta articulação sonora, esse conjunto de sons para expressar na fala o som “fifteen”. Sabendo que essa pronúncia representa o numeral 15 na língua inglesa, então qualquer símbolo que pode ser usado para representar um número, este é um numeral.

Sendo assim, podemos conceituar algarismo como cada um dos elementos constituintes da representação de um numeral grafado, então 15 é um número constituído por dois algarismos, logo esse numeral, o 15, está representado utilizando dois algarismos. No caso do número 455 temos três algarismos, sendo um que se repete.

Podemos relacionar os três conceitos em um único exemplo da seguinte forma: O número 25 pode ser representado por estes dois numerais 25 e/ou XXV, sendo que o primeiro tem dois algarismos e o segundo três algarismos. Então, neste exemplo, aparecem as palavras número, numeral e algarismo cada uma com seu sentido distinto. Logo, podemos conjecturar que a ideia em si é um número, a representação dessa ideia é um numeral e os elementos constituintes dessa representação, quando ela é grafada, chamamos de algarismo.

Um questionamento tão importante quanto o anterior é: Qual o significado da vírgula na representação de um número? A vírgula serve para separar a parte inteira da parte decimal de um número, nos informando qual a posição ocupada pelo algarismo das unidades, que sempre estará imediatamente à esquerda dela. De forma mais simplificada, a vírgula nos mostra onde encontram-se as unidades e os décimos, pois estes sempre estarão posicionados à esquerda da vírgula e a direita dela respectivamente. Ressaltando que à direita sempre estarão os décimos, seguidos dos centésimos, milésimos, décimos de milésimos e assim por diante, assim como à esquerda estão as unidades, seguida das dezenas, centenas e assim por diante.

Mas será que precisava ser a vírgula? Bom, a resposta é que não necessariamente teria que ser a vírgula, poderia ser qualquer símbolo, porém é importante ressaltar que a vírgula é utilizada no Brasil, no caso do ponto; utilizamos para separar as classes de milhar, ou seja, o ponto serve basicamente para facilitar a leitura do número onde encontra-se os milhares, milhões, os bilhões e assim sucessivamente.

E qual seria a função do ponto no número? Então, a função do ponto é mais estética enquanto a função da vírgula, é de fato mais matemática. Vale a ressalva que esta notação não é universal, nas calculadoras científicas e demais do gênero, por exemplo, o ponto pode assumir o papel da vírgula e a vírgula pode assumir o papel do ponto. Isso significa que do ponto de vista conceitual, independentemente do sistema de numeração utilizado, a função do ponto ou da vírgula, ou outra representação qualquer, sempre será a mesma, então no Brasil, o ponto tem um papel apenas estético enquanto a vírgula mais matemático.

Podemos representar um número sem a utilização do ponto que não haveria problema, mas no caso da vírgula isso não seria possível. Sabemos que ela tem um papel matemático fundamental, separar a parte inteira da parte não inteira, isto é, a parte decimal. Logo, escrever 31256,25 é diferente de3125,625. A notação científica e também americana é mais usual e faz sentido quando se tem um amadurecimento matemático, pois as relações de pares ordenados, que são as classes representativas do plano cartesiano são separadas por vírgula, principalmente em alguns livros didáticos básicos de matemática.

As relações de valor absoluto e valor relativo também são importantes para compreendermos o nosso sistema posicional que é decimal, e como consequência, as relações dos algoritmos dentro do entendimento e dos procedimentos matemáticos das quatro operações básicas. Pode parecer natural, em uma fala, quando apresentamos aos educandos o número 532 que este possua quinhentas e trinta e duas unidades representativas, e possivelmente muitos professores, especialmente nas séries iniciais, quando as crianças começam a se familiarizar com o sistema de numeração posicional decimal, mencionam as seus alunos que o 2 tem valor absoluto que é dois e seu valor relativo que também é dois, o três tem seu valor absoluto que é três, mas seu valor relativo não é mais três e sim trinta, ou trinta unidades, o 5 tem valor absoluto que é cinco, mas seu valor relativo não é cinco e sim quinhentos, ou quinhentas unidades.

Fazer essas considerações é importante, pois o educando começa a compreender que o que é relativo é relativo a algo e/ou a alguma coisa, e esse algo ou alguma coisa se refere a posição a qual esses valores encontram-se no numeral. Então falar de valor relativo e absoluto é significativo para o educando, principalmente quando operamos adicionando e subtraindo, mostrando de forma significativa a somar e a subtração.

Essas considerações são importantes no entendimento e na relevância do conteúdo proposto neste trabalho, como auxílio ao professor do ensino básico, principalmente nas séries iniciais. É necessário saber o significado dessas relações para ensinar aos nossos educandos, pois só podemos ensinar aquilo que sabemos para que não haja um entendimento equivocado na construção cognitiva do conhecimento dos alunos.

4 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Quando se trata de ensino, o planejamento inicial do que se pretende trabalhar e como é possível aplicar tal proposta é de fundamental relevância para o processo construtivo educacional. Levando em consideração as tarefas da prática docente, unificaremos o procedimento convencional, resolução de problemas que envolvam as quatro operações básicas desenvolvidas na lousa, agregando fundamentações significativas das relações que validam tais procedimentos, argumentando os motivos por trás do algoritmo, juntamente com o auxílio do ábaco aberto, por exemplo. Neste processo construtivo de aprendizagem, todo e qualquer tipo de planejamento não deve ser considerado como único e imutável.

> A execução do planejamento não é mecânica. É dinâmica e pode sofrer alterações e adaptações na medida em que os dados da própria execução venham a exigi-las. Por exemplo, se um conjunto de alunos não possui os mecanismos de assimilação de um conteúdo novo, há que se tomar a decisão de se criar essas condições, se se quer efetivamente que os educandos aprendam, pois sem os pré-requisitos eles não terão como aprender. (...). Assim sendo, a execução de um planejamento não é linear, mas sim perpassada por processos de avaliação, tomadas de decisão, reorientações etc. A execução do planejamento deve ser uma de construção dos resultados esperados e, para tanto, precisam ser utilizados todos os meios disponíveis. (LUCKESI, 2006, p. 148).

Este capítulo será reservado para a construção da proposta de sequência didática sendo a de ZABALA (2007) sugerida. Iremos sugerir um conjunto de passos e etapas que tem como objetivo auxiliar o professor e à aprendizagem do educando, com ênfase na construção argumentativa explicativa e procedimental, unificando o convencional ao significativo. Dessa forma, destacamos inicialmente o subproduto da sequência didática, a engenharia didática de Pais (2011, p. 99) que “caracteriza uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa em didática da matemática” No geral estabelece uma relação de dependência dicotômica entre a teoria e a prática.

Ensinar de forma a atribuir significado no processo de ensino aprendizagem nem sempre é uma tarefa trivial, porém, dar sentido ao conteúdo possibilita ao educando adquirir ferramentas que contribuirão, não apenas quantitativamente, mas também qualitativamente em cada etapa do processo educacional. A preocupação de apresentarmos uma proposta que circunda os conceitos e fundamentações plausíveis, com finalidade de contribuir de forma significativa com o professor do ensino básico nas séries iniciais, quando são ensinadas as quatro operações básicas matemáticas, Zabala (2007, p. 63) propõem algumas indagações de atividades existentes na sequência didática que possam validar, plausivelmente, as características da sequência.

> a) que nos permitam determinar os *conhecimentos prévios* que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?
> b) cujos conteúdos são propostos de forma que sejam *significativos* e *funcionais* para os meninos e meninas?

> c) que possamos inferir que são adequadas ao *nível de desenvolvimento* de cada aluno?
> d) que representem um desafio alcançável para o aluno, quer dizer que levem em conta suas competências atuais e as façam avançar com a ajuda necessária; portanto, que permitam criar *zonas de desenvolvimento proximal* e intervir?
> e) que provoquem um *conflito cognitivo* e promovam a *atividade* mental do aluno, necessária para que estabeleça relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios?
> f) que promovam uma *atitude favorável*, quer dizer, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos?
> g) que estimulem a *auto-estima* e o *autoconceito* em relação às aprendizagens que se propõem, quer dizer, que o aluno possa sentir que em certo grau aprendeu, que seu esforço valeu a pena?
> h) que ajudem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com *aprender a aprender*, que lhe permitam ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens?

Analisando inicialmente os *conhecimentos prévios* dos educandos, levando em consideração se a sequência didática estabelecida é adequada aquele público, podemos utilizar os passos procedimentais convencionais, acima apresentados; em seguida, enfatizar os porquês de tais processos serem válidos, para a nossa proposta, por exemplo, provocando simultaneamente um *conflito cognitivo* e aguçando a *atividade* mental do educando.

De acordo com a sequência escolhida, o professor pode criar *zonas de desenvolvimento proximal*, ou seja, uma aprendizagem que prioriza o que o educando aprende a realizar individualmente no futuro, com fundamentações do que já se faz com acompanhamento no presente, auxiliando-os para que estes adquiram habilidades de *aprender a aprender* de maneira convincente e significativa, e a partir das necessárias adaptações em sua sequência didática, quando houver, com o objetivo de elaborar propostas e ferramentas que possibilitem uma maior abrangência do conteúdo abordado, o profissional da educação aproxima o querer aprender do aluno ao que está sendo apresentado a ele naquele momento.

O educador pode expor ainda, de forma diferenciada e concreta, os argumentos convencionais, ressignificando-os quando for o caso, através do uso de uma calculadora primitiva, por exemplo, o ábaco aberto, e argumentos que tenham sentido nas operações através dos algoritmos práticos na busca de uma maior assimilação do assunto apresentado. A importância na relevância da utilização desse embasamento prático teórico e os porquês apresentados neste trabalho, como apoio ao professor no momento de explicar o algoritmo das quatro operações, por exemplo, tornam-se úteis desde que sejam *significativos* e *funcionais*, assim como as fundamentações que justificam, de forma significativa, a *nível de desenvolvimento* do educando.

Para Pais (2011, p. 101), existem quatro importantes fases da engenharia didática, “no que se refere ao planejamento, a escolha pela utilização de uma engenharia didática se faz pela execução de quatro fases consecutivas: análises preliminares; concepção e análise *a priori;* aplicação de uma sequência didática e a análise *a posteriori* e a avaliação".

As implicações que levaram na justificativa do desenvolvimento da proposta, juntamente com as descrições necessárias para o desenvolvimento deste trabalho, podemos relacionar a uma análise preliminar.

> Na *análise preliminar,* é preciso lembrar que a concepção de uma sequência de ensino não dispensa a referência de um quadro teórico sobre o qual o pesquisador fundamenta suas principais categorias. Feita essa observação, o objeto é submetido a uma análise preliminar, através da qual se fazem as devidas inferências, tais como levantar constatações empíricas, destacar concepções dos sujeitos envolvidos e compreender as condições da realidade sobre a qual a experiência será realizada. (PAIS, 2011, p. 101).

Detalhando os procedimentos relevantes e as ações fundamentais que envolvem os porquês dos algoritmos utilizados nas quatro operações básicas matemática, elucidaremos nossos procedimentos com a segunda fase da engenharia didática, a concepção e análise a priori.

> Na fase da *concepção* e *análise a priori* consiste na definição de um certo número de variáveis de comando do sistema de ensino que supostamente interferem na constituição do fenômeno. Essas variáveis serão articuladas e devidamente analisadas no decorrer da sequência didática. (...). É sobre o conjunto dessas variáveis que se inicia a análise *a priori*, cujo objetivo é determinar quais são as variáveis escolhidas sobre as quais se torna possível exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos podem desenvolver para a apreensão dos conceitos em questão. (PAIS, 2011, p. 101, 102).

De posse dos conhecimentos relacionados às operações, previamente abordados acima, e enfatizando que algoritmo significa o passo a passo na solução da operação, o professor poderá montar uma sequência procedimental que possibilite, não apenas quantitativamente o desempenho de seus educandos, mas que venha a desempenhar uma função qualitativa.

Neste sentido, Pais (2011) ressalta que uma sequência didática, terceira fase da engenharia didática, é formada da seguinte maneira:

> A sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo conceitos previstos na sequência didática. Essas aulas são também denominadas de *sessões*, tendo em vista o seu caráter específico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas comuns no sentido da rotina de sala de aula. (...). Cumpre destacar ainda que, quando a aplicação da sequência didática não for diretamente coordenada pelo pesquisador, é preciso que a equipe de professores esteja suficiente consciente quanto

> aos objetivos da pesquisa, pois, caso contrário, os resultados podem ser prejudicados. (PAIS, 2011, p. 102, 103)

Então, como poderíamos avaliar, de acordo com as fundamentações acima, o aprendizado dos conteúdos de adição, subtração, multiplicação e divisão expostos aos educandos? Podemos relacionar, inicialmente, esse questionamento a quarta fase, a análise a posteriori.

> A *fase da análise a posteriori* refere-se ao tratamento das informações obtidas por ocasião da aplicação da sequência didática, que é a parte efetivamente experimental da pesquisa. (...). Do ponto de vista metodológico, a avaliação é uma etapa onde a vigilância deve ser aplicada, pois se trata de garantir a essência do caráter científico. Dessa maneira, enquanto procedimento metodológico, a engenharia didática se fundamenta em registros de estudos de casos, cuja validade é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada. (PAIS, 2011, p. 103).

Sendo assim, compartilhar informações de caráter educacional perpassa, inicialmente, por uma pesquisa detalhada sobre o que se abordará, ou seja, um planejamento inicial analisando as possíveis variáveis a serem trabalhadas dicotomicamente, a sequência didática estabelecida para ser aplicada durante o processo de ensino-aprendizagem, sendo que esta pode ser mutável de acordo com as necessidades do público alvo. Por conseguinte, a avaliação pode ter caráter continuado e/ou formativo, segundo Zabala (2007, p. 209), “o meio mais adequado para nos informarmos do processo de aprendizagem e do grau de desenvolvimento e competência que os meninos e meninas alcançam consiste na observação sistemática de cada um deles na realização das diferentes atividades e tarefas”.

Logo, cada professor no desenvolver de suas aulas e de acordo com a sequência didática empregada, poderá escolher uma avaliação que possibilite o educando mostrar, de forma também qualitativa, os conhecimentos adquiridos no percurso de cada conteúdo. É importante ressaltar que:

> A partir de uma opção que comtempla como finalidade fundamental do ensino a formação integral da pessoa, e conforme uma concepção construtivista, a avaliação sempre tem que ser formativa, de maneira que o processo avaliador, independentemente do seu objeto de estudo, tem que observar as diferentes fases de uma intervenção que deverá ser estratégica. Quer dizer, que permita conhecer qual a situação de partida, em função de determinados objetivos gerais bem definidos (avaliação inicial); um planejamento da intervenção fundamentado e, ao mesmo tempo, flexível, entendido como uma hipótese de intervenção; uma atuação na aula, em que as atividades e tarefas e os próprios conteúdos de trabalho se adequarão constantemente (avaliação reguladora) às necessidades que vão se apresentando para

> chegar a determinados resultados (avaliação final) e a uma compreensão de valoração sobre o processo seguinte, que permita estabelecer novas propostas de intervenção (avaliação integradora), (ZABALA, 2007, p. 201).

Dessa forma, a avaliação poderá ser continuada e formativa, que circunde a real necessidade de aprendizado do assunto apresentado pelo profissional atuante. Considerando que a ferramenta expositiva e o conteúdo apresentado poderá ser regulado, de acordo com a avaliação reguladora, tanto em caráter quantitativo como qualitativo. Zabala (2007) ressalta:

> Devemos levar em conta que se o objetivo fundamental da avaliação é *conhecer para ajudar,* a forma como tradicionalmente as provas escritas foram desenvolvidas, pelo fato de terem caráter sancionador, estabeleceu uma dinâmica que faz com que o objetivo básico do aluno não seja dar a conhecer suas deficiências para que o professor ou professora ajudem-no, mas, ao contrário, demonstrar ou aparentar que sabe muito mais. (...). Dificilmente podemos conceber a avaliação como formativa se não nos desfazermos de algumas maneiras de fazer que impedem mudar as relações entre os alunos e os professores. (ZABALA, 2007, p. 209)

Sendo assim, discutiremos posteriormente as indagações, relações conceituais e alguns problemas diretos que possibilitam a discussão das fundamentais relações matemáticas que envolvem essas quatro operações, com foco representativo e significativo como apoio ao professor, e consequentemente, ao educando no processo de ensino-aprendizagem. Tentaremos despertar o interesse motivando-os para a melhor compreensão do conteúdo aqui abordado, correlacionando as diversas relações que podem ser exploradas nas soluções das aplicações referentes a este trabalho.

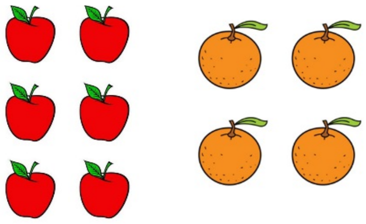
5 QUATRO OPERAÇÕES

Essa proposta, como já mencionada nos capítulos anteriores, foi motivada em elaborar uma sequência metodológica diferenciada na abordagem, conceptualização e aplicação das quatro operações básicas matemáticas, levando em consideração a forma convencional e apresentando as relações significativas procedimentais na apresentação dos algoritmos das quatro operações básicas, tratando fundamentalmente os conceitos relacionados aos porquês de tais procedimentos serem válidos, tanto quando as operações envolvem números relativos quanto quando envolvem decimais.

5.1 ADIÇÃO

Podemos nos indagar inicialmente, o que significa, de forma mensurável, ou seja, concreta somar? Bom, para responder esse questionamento e dar significado, de forma concreta, a essa operação, podemos relacionar a adição ao conceito de agregar, agrupar, juntar e reunir objetos e coisas. Dessa forma, o educando poderá começar a conjecturar a aprendizagem significativa e representativa com seus próprios brinquedos e objetos pessoais, pois estes estão disponíveis a ele e poderão fazer relações importantes com esses materiais concretos. Mas devemos tomar cuidado para não passar despercebido que estamos reunindo objetos, os diversos brinquedos por exemplo, que diferem entre si. Ou podemos somar objetos de natureza distinta, os brinquedos a título de exemplo? Ou melhor, será que podemos somar os objetos da figura 01?

Figura 01: Imagens de maçãs e laranjas.



Fonte: http://www.tudodesenhos.com/d/menina e-cesta-de-laranjas, acesso em 06/05/2018

Como mostrado na figura acima, podemos somar 6 maçãs e 4 laranjas? Isto é, podemos somar coisas e objetos de naturezas distintas? Caso sim, somando 6 maçãs com 4 laranjas teríamos necessariamente o que?

Precisamos compreender que, essa soma só será possível se reunirmos as 6 “frutas” maçãs e as 4 “frutas” laranjas resultando em um total dessa reunião 10 frutas, entre elas maçãs e laranjas. Note que não somamos objetos de naturezas distintas, maçãs e laranjas, pois a operação de adição não está definida dessa forma, somamos, agregamos, reunimos objetos de mesma natureza, neste caso somamos frutas.

Então, quando somamos 6 maçãs com 4 laranjas e dizemos que a resposta é 10 frutas foi pelo motivo de transformamos maçãs e laranjas no mesmo tipo de objeto “frutas” antes de efetuar a soma e consequentemente agrupá-los em um único objeto, respeitando assim a definição de adição. Matematicamente não podemos somar as 6 maçãs com as 4 laranjas, pois são objetos de natureza distinta. Isso tem que ficar entendido para nós professores e para os educandos. De forma concreta, conseguimos juntar e agrupar objetos, mas na matemática não, pois a adição só nos permite somar coisas de mesma natureza.

No caso das operações com vírgula, como posicionaremos adequadamente a soma 591,4 + 6,13 “quinhentos e noventa e um vírgula quatro, mais seis vírgula treze”? A princípio, a leitura correta para esta expressão seria: quinhentos e noventa e um inteiros e quatro décimos somados a seis inteiros e treze centésimos. Não há problemas em usar a leitura costumeira, pois além de não ser comum utilizarmos a expressão mais adequada, seria estranho ler sempre dessa forma. Porém, é importante que o professor do ensino básico que ministrará o conteúdo específico, conheça as fundamentações necessárias ao operar o algoritmo.

Ler da forma costumeira e convencional é mais fácil e menos complicado, na realidade, ler de maneira culta não será sempre possível pois existem infinitos números e isso torna-se inviável a nomeação de todos eles.

Ou conseguiríamos responder, com facilidade, qual o nome do sucessor ao tredecilhão? O tredecilhão tem suas casas de milhar representada claramente por 1.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000, chegará um momento que o número terá tantos algarismos que não haverá um nome específico associado a ele. Isso ocorre para números muito pequenos também.

Voltando para o nosso problema inicial, como armaríamos adequadamente a conta 591,4 + 6,13? Geralmente, senão quase sempre, somos “convencidos” a posicionar a vírgula embaixo da vírgula e efetuar a operação e chegamos ao resultado sem sabermos o porquê vale essa relação, ou seja, sempre armamos essa operação da maneira mostrada na figura 02, achamos o resultado da operação e não nos perguntamos por que isso dá certo?

Figura 02: Resultado e posicionamento da vírgula na soma 591,4 + 6,13

$$\begin{array}{r} 591{,}4 \\ +\ \ 6{,}13 \\ \hline 597{,}53 \end{array}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Levando em consideração a título de exemplo a figura acima, por qual motivo ou razão devemos posicionar “vírgula embaixo de vírgula” antes de efetuar a soma de dois números decimais?

De acordo com nossos conhecimentos iniciais, exposto neste trabalho sobre a vírgula, devemos posicionar as unidades embaixo das unidades, consequentemente e de forma natural a vírgula ficará posicionada embaixo da vírgula, isso porque não podemos somar objetos de naturezas diferentes, então se a vírgula não estiver posicionada embaixo de vírgula, unidade embaixo de unidade, décimo embaixo de décimo por exemplo, estaríamos descumprindo a regra estabelecida para adição, estaríamos somando objetos de naturezas distintas.

Dessa forma, são válidas as argumentações iniciais sobre somar objetos de mesma natureza, as frutas por exemplo, porque 6 maçãs mais 4 laranjas são 6 maçãs e 4 laranjas, ou 10 frutas. Esse conceito bem entendido nos remete ao real significado para representar a operação de adição, não necessariamente no caso das operações com números decimais, mas também é válida para os inteiros. Levaremos em consideração, inicialmente, o caso dos números com vírgulas e estenderemos aos números relativos posteriormente ressaltando que, só podemos somar, matematicamente, objetos de mesma natureza.

Logo, podemos reconfigurar a operação da figura 02, respeitando seu sistema posicional decimal com identificação de sua respectiva grandeza, obedecendo os conceitos estabelecidos anteriormente, como mostrado na figura 03.

Figura 03: Identificação posicional dos algarismo

C	D	U	d	c
5	9	1,	4	
+		6,	1	3

Fonte: Arquivo pessoal

Além dessas relações, que são de fundamental importância para a aprendizagem do educando, existem aquelas operações relativamente mais simples de se operar, operação sem a vírgula, como o caso da soma 945 + 638. Armamos essa operação como mostrado na figura 04.

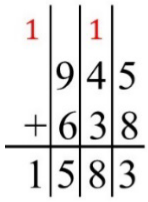
Figura 04: Armando a operação de adição

	C	D	U
	9	4	5
+	6	3	8

Fonte: Arquivo pessoal

Na maioria dos casos, convencionalmente o professor resolve essa operação da seguinte forma: Somamos cinco com oito e temos 13 como resultado, fica três e “vai um”, observe a figura 05. Quatro mais três dá sete com “um que foi” resta oito, continuando e fazendo nove mais seis temos como resultado quinze, fica cinco e “vai um”, como não tem nenhum número para somar com esse “um que foi”, basta baixa-lo e teremos como resultado 1.583.

Figura 05: Resultado da operação 945 + 638

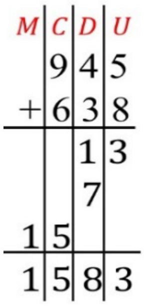


Fonte: Arquivo pessoal

Geralmente é assim que o professor resolve este algoritmo no ensino básico, logo no primeiro contato do educando com este conteúdo. Alguns educadores desconhecem outros algoritmos que podem ser utilizados para a resolução das 4 operações básicas e que, talvez por isso, não apresentem outras formas de efetuar as operações. A falta de preparo pode também fazer com que o professor desconsidere outros mecanismos utilizados pelos alunos para efetuar as contas.

Porém, essa argumentação é falha. O profissional da educação poderia operar de outras maneiras e com argumentações plausíveis, mostrando que é possível chegar ao mesmo resultado, ou seja, podemos somar da forma apresentada na figura 06.

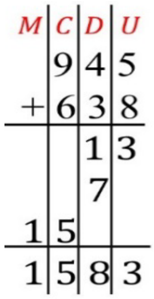
Figura 06: Operando 945 + 638 atribuindo sentido



Fonte: Arquivo pessoal

Somando oito unidades a cinco unidades temos como resultado treze unidades, observe na figura 07, podemos converter e/ou agrupar dez unidades em uma dezena e nos restaria três unidades, o famoso “vai um”, neste caso, deixou de existir pós os argumentos utilizados foram de agrupar dez unidades representativas em uma grandeza de ordem maior, neste caso, uma dezena. Somando quatro dezenas com três dezenas, temos como resultado sete dezenas. Agrupando nove centenas a seis centenas temos como resultado quinze centenas, podemos agrupar dez centenas em uma unidade de milhar e nos restaria cinco centenas. Agora, temos uma relação que nos direciona a soma daquilo que corresponde a sua representação natural, ou seja, objetos de mesmas características, veja a figura 07 abaixo.

Figura 07: Resultado de acordo com sua correspondência



Fonte: Arquivo pessoal

Então temos três unidades, uma dezena mais sete dezenas das oito dezenas, temos também cinco centenas e um milhar, obtendo então o mesmo resultado1.583 já apresentado na figura 05. A diferença agora é que há significado em operar dessa maneira, não precisou da argumentação “vai um” neste caso. Isso significa que se considerarmos a primeira relação argumentativa como a “única” maneira de efetuar as operações através do algoritmo pois está torna-se desprovida de verdade.

O problema para a primeira argumentação é que ela é ensinada apenas dessa forma, mesmo não fazendo muito sentido esse “vai um”, nós acabamos “decorando” essa maneira de somar. Na realidade, a forma a qual se aborda esse algoritmo, convencionalmente falando, mesmo sendo desprovido de sentido em alguns casos, e não bem compreendido na primeira abordagem, torna-se útil na resolução do problema de forma mais rápida, pois este algoritmo é prático.

Atribuir significado na efetuação das operações através dos algoritmos práticos reforça a proposta que havia sido exposta na sequência didática, de acordo com Zabala (2007), fundamentações que fazem sentido e que provocam uma atitude favorável ao conhecimento de um novo conteúdo que se pretende adquirir torna-se um motivador na abstração deste.

É importante ressaltar que o problema não é ensinar da forma “vai um”, ou seja, de maneira convencional senão mecanicista, o problema está em ensinar apenas dessa maneira sem atribuir significado algum na operação, sem o aluno compreender o porquê “vai um”. Explicar atribuindo significado, mesmo que depois seja usado com frequência o argumento “vai um”, o educando passará a entender o porquê “vai um” de fato, quanto que na realidade veremos posteriormente que não é um que está indo.

Talvez esse processo seja um bom passo intermediário na compreensão e assimilação da construção procedimental de se operar, de forma a facilitar o conceito construtivo do procedimento significativo para o educando. Mostrar essas argumentações significativas na operação, mesmo que em seguida, seja abordado o procedimento convencional, é atribuir significado a operação. Dessa forma, podemos responder a indagação realizada na proposta de sequência didática por Zabala (2007) na qual é possível sim apresentar conteúdos que sejam significativos e funcionais aos nossos alunos.

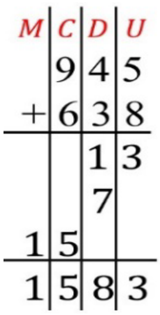
Porque apresentar o conteúdo de forma significativa além de ser mais entendível ao aprendiz, ele passará a operar de forma natural respeitando o sistema posicional decimal, entende as argumentações de agrupamentos de objetos de mesmo significado, sem precisar decorar padrões, procedimentos ficando assim vulnerável ao esquecimento, podendo ficar impossibilitado a resolver um problema posterior equivalente a este.

Apesar de demandar mais tempo na aplicação desse procedimento, gastar mais espaço na folha de papel e precisar de um maior aprofundamento conceitual do assunto por parte do profissional da educação, porém, quando esse conceito significativo está bem estabelecido para o aluno, a operação torna-se entendível e as relações errôneas na construção do algoritmo são minimizadas pelas atribuições de sentido no momento da operação.

Podemos relacionar sempre a forma do passo a passo com o método convencional, ou seja, o famoso “vai um” por exemplo. Mas o questionamento a ser feito é, o que significa esse “vai um”? Na realidade, que um foi esse que foi?

Para responder esses questionamentos de forma plausível, vamos relacionar o exemplo da operação anterior, veja figura 08.

Figura 08: Compreendendo o “vai um”



Fonte: Arquivo pessoal

Precisamos entender a seguinte relação, cinco unidades somadas as oito unidades disponíveis são treze unidades, três unidades representamos na coluna das respectivas unidades e as outras dez unidades nós à representaremos em uma outra ordem de grandeza, ou seja, uma grandeza de ordem superior, neste caso como uma dezena, então na realidade esse um é uma dezena, bem representada na sua ordem de grandeza, sendo assim, dez unidades foram convertidas em uma grandeza de ordem superior, elas foram agrupadas em uma dezena.

Prosseguindo, temos quatro dezenas somadas as três dezenas disponíveis e agregadas a dezena que veio do agrupamento das dez unidades anteriores, resta-nos o total de oito dezenas. Reunindo nove centenas as seis centenas disponíveis temos um total de quinze centenas, dez dessas centenas podemos converter em uma grandeza de ordem superior, ou seja, dez centenas podem ser representadas por uma grandeza de milhar, restando cinco centenas representadas em suas devidas grandezas, como relacionamos acima em colunas na figura 08.

Não há problema, durante as exposições das operações através dos algoritmos práticos dizer que “vai um” se o aluno compreender que aquele um que está indo na realidade não é exatamente um, mas sim uma dezena, uma centena, um milhar e assim por diante se for o caso, ou seja, foi o agrupamento em uma ordem de grandeza maior.

Não é apenas uma questão de mudar o termo que normalmente é utilizado em sala de aula ao ensinar, é uma questão de atribuir significado ao procedimento que está sendo realizado, é atribuir significado no algoritmo. Essas fundamentações provocam circunstancias que auxiliam o aluno a adquirir habilidades relacionadas com *aprender a aprender*, permitindo que cada educando seja autônomo quanto suas aprendizagens.

A matemática é uma ciência espetacular e prazerosa, porém muitas pessoas se distanciam dela, isso talvez seja reflexo de um primeiro contato totalmente desprovido de sentido e/ou de significado. Essa ciência torna-se uma das piores disciplinas do ensino básico, com índices de reprovação altamente elevados, tornando-se frustrante para o educando possivelmente por não conseguir atribuir valores e significados ao que está sendo feito.

Entretanto, quando a matemática é abordada com seus conceitos fundamentados, com características que podem ser encontradas no dia a dia do aluno, além de prazeroso e significativo empregar as fundamentações matemáticas com aquilo que se conhece, esta torna-se relevante e fantástica. No momento que o aprendizado ocorre de forma significativa, o aluno não terá a necessidade de decorar procedimentos, ele conseguirá resolver o algoritmo com embasamentos significativos e de maneira mais rápida porque reconhece e compreende o que está fazendo durante o processo de aprendizagem.

Um material concreto bastante eficaz nas operações aritméticas é o ábaco aberto ou de pinos, uma calculadora primitiva que auxilia, de forma significativa, na compreensão das fundamentações procedimentais aritméticas. Fundamentações estas que podem inferir as adequações quanto ao *nível de desenvolvimento* de cada aluno.

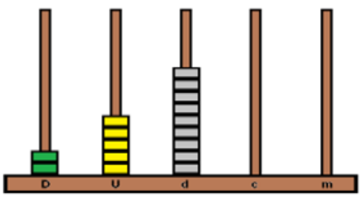
Mostraremos ilustrativamente o ábaco na figura 09 abaixo, que será utilizado como exemplo, o de cinco "pinos" que chamaremos de "hastes", onde cada uma dessas hastes representam uma grandeza do sistema posicional decimal, as dezenas, unidades, décimos, centésimos e assim por diante. O risco contido na base de sustentação, posicionado entre os discos amarelos e pretos, indica a posição das unidades que está imediatamente à esquerda dele, consequentemente a direita os décimos; assim como a posição de cada grandeza está descrita na base de sustentação da calculadora, observe:

Figura 09: Ábaco de pinos retirada do blog Crianças e Números.

Fonte: http://criancasenumeros.blogspot.com/2012/11/o-abaco-tipos-surgimento-e-utilidade.html
Acesso em: 17 set. 2018

Para utilizá-lo, no sistema posicional decimal, é preciso que tenhamos no mínimo 10 discos e/ou contas, são assim chamados os pequenos "botões" coloridos da figura 09 pois a cada grupo de dez contas podemos agrupá-las, e, portanto, representar esse agrupamento em outras grandezas de ordem superiores. A título de exemplo, se quiséssemos efetuar a operação 25,9 + 60,45 devemos escrever no ábaco qualquer um dos numerais anteriores, escreveremos então o numeral 25,9 como mostrado na figura 10.

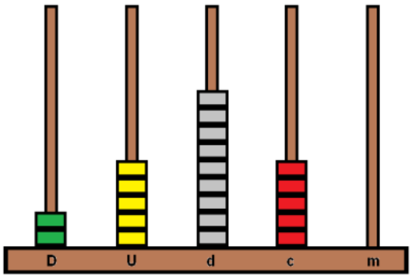
Figura 10: Representação do numeral 25,9



Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino.

Podemos observar que, temos disponíveis duas contas na arte das dezenas, 5 nas unidades e 9 nos décimos. De forma simplificada, para realizar a soma desses numerais, basta acrescentarmos as contas a serem somadas, neste caso, precisamos agregar 60,45 ao ábaco, respeitando a ordem de grandeza de acordo com o sistema posicional decimal, isto é, precisamos acrescentar a representação em disco de 60,45 na figura 10. Faremos isso, de forma prática e mais utilizada, da direita para a esquerda. Acrescentando inicialmente os 5 centésimos na arte de respectiva grandeza, a figura 11 mostra este primeiro processo.

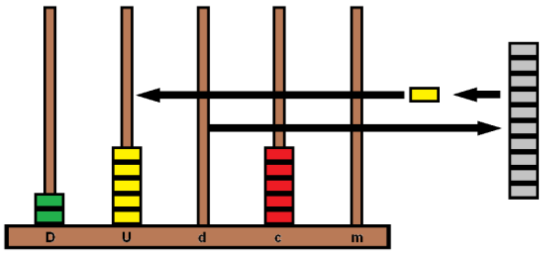
Figura 11: Acréscimo de 5 contas na grandeza dos centésimos



Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino.

Para prosseguirmos, precisamos acrescentar 4 contas na arte dos décimos, como já há 9 nessa arte e acrescentando 1 dos 4 discos necessários, ficaremos com um total de 10 discos nesta grandeza, na qual podemos convertê-los em uma grandeza de ordem superior, 1 unidade, veja esse processo na figura 12 abaixo.

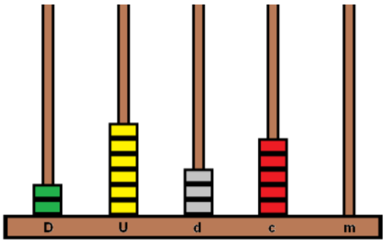
Figura 12: Conversão de 10 décimos em 1 unidade.



Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino.

Após a conversão de 10 centésimos em 1 unidade, podemos agregar as 3 contas restantes que ainda precisam ser agrupadas na arte dos décimos. Como há 0 discos disponíveis nesta arte, basta reuni-las em sua respectiva grandeza, como podemos notar esse processo na figura 13.

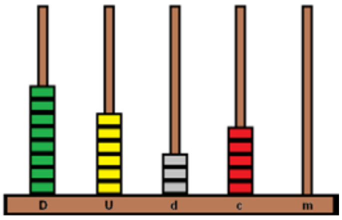
Figura 13: Acréscimo de 3 décimos restantes.



Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino.

Observe ainda que, deveríamos agregar 0 unidades as 6 existentes na arte desta grandeza, como sabemos que o zero é o elemento neutro da adição e subtração esta arte continuará com a mesma quantidade de discos. Portanto, resta-nos acrescentarmos apenas as 6 contas necessárias na arte das dezenas, e após essa reunião de objetos de mesma natureza, há um numeral representativo para a operação 25,9 + 60,45, como mostra a figura 14 abaixo.

Figura 14: Representação do resultado da operação 25,9 + 60,45



Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino.

Após a operação realizada no ábaco, restou-nos 8 contas na arte das dezenas, 6 contas na arte das unidades, 3 contas na arte dos décimos e 5 contas na arte dos centésimos, como observamos na figura 14; totalizando assim o resultado 8 dezenas, 6 unidades, 3 décimos e 5 centésimos, ou seja, 86,35. Dessa forma, podemos ressaltar que todas a argumentações acima inferida para a operação não inteira 25,9 + 60,45, são válidas também aos inteiros, levando em consideração que não teremos contas nas hastes respectivas das grandezas de ordem inferior às unidades, considerando-as assim como zeros.

Apresentar de forma convincente o porquê por trás do algoritmo é dar significado ao “vai um”. O educando pode compreender de forma mais convincente e de maneira que o processo faça sentido as argumentações procedimentais convencionais, isto é, o porquê, por exemplo a vírgula ficar embaixo de vírgula, e o fato de somar zero não influenciar o resultado. Observe o resultado da operação 25,9 + 60,45 na figura 15 abaixo.

Figura 15: Representação extensiva da operação 25,9 + 60,45

	1		
D	U	d	c
2	5,	9	
+ 6	0,	4	8
8	6,	3	5

Fonte: Arquivo pessoal

Ressaltamos novamente que, não há problemas em apresentar a operação da forma usual e mais convencional, como mostrada acima, aos nossos educandos durante o processo de entendimento do algoritmo, porém, o ábaco aberto pode ser utilizado como uma ferramenta importante e de fácil manuseio para uma melhor compreensão dos porquês de cada passo no procedimento convencional. O ábaco pode ser utilizado na abstração dos conceitos em questão, principalmente no que diz respeito ao ganho conceptual no processo de ensino aprendizagem.

Para compreender que um é esse que vai, de forma mais abstrata, levaremos em consideração, a título de exemplo, a grandeza “tempo”. Como poderíamos somar duas horas quarenta e três minutos e cinquenta e seis segundos a uma hora, dezenove minutos e trinta e um segundos? Ou seja, como somaríamos 2: 43: 56 + 1: 19: 35? Veja na figura 16 como armaríamos essa operação.

Figura 16: Armando a operação 2: 43: 56 + 1: 19: 35

h	min	s
2	43	56
+ 1	19	35

Fonte: Arquivo pessoal

Neste caso, podemos nos questionar “que um é esse que vai?” Ou será que neste exemplo, o agrupamento do sistema posicional base 10 poderá ser aplicado? Sabemos de argumentações anteriores que a cada dez unidades podemos realizar o agrupamento destes em uma grandeza de ordem superior, porém, note que na operação da figura 16 o sistema posicional não é mais base 10, e sim base 60 isso significa que os agrupamentos devem ser realizados de 60 em 60 para que seja possível convertê-la em uma grandeza de ordem superior.

Logo, para este exemplo, não podemos resolver o algoritmo usando o ábaco representado na figura 09 pois não temos “contas” em quantidade suficiente para realizarmos o agrupamento. Precisaríamos de um ábaco que possuísse, pelo menos, 60 contas para realizar, de forma concreta, essa operação.

É importante ressaltar que, a ideia de agrupar 10 a 10 não é universal como poderíamos pensar. O sistema de numeração posicional decimal não é o único que existe ou existiu na humanidade, a história nos remete, segundo BOYER, (2003), que os povos da antiga Babilônia utilizavam um sistema sexagesimal, ou seja, os agrupamentos eram feitos de 60 em 60, e alguns resquícios desse sistema posicional nós utilizamos até hoje, como por exemplo na contagem do tempo, como no caso apresentado no exemplo da figura 16.

Dessa forma, podemos perceber que um minuto é um agrupamento de 60 segundos, que uma hora é um agrupamento de 60 minutos, ou seja, é um outro sistema de numeração de base sessenta. Então, como resolver o problema anterior? A resposta está representada na figura 17.

Figura 17: Solução da soma de horas

1 h	1 min	s
2	43	56
+ 1	19	35
4	03	31

Fonte: Arquivo pessoal

Podemos operar da seguinte maneira, 56 segundos somados a 35 segundos temos como resultado 91 segundos, neste caso a regra é que não pode ultrapassar 60, então desses 91 segundos disponíveis agruparemos 60 segundos em uma grandeza de ordem superior, neste caso 1 minuto e nos restaria 31 segundos, ou seja, ficam 31 segundos em sua respectiva ordem de grandeza e “vai um”, isto é, 1 minuto, pois estamos agrupando de 60 em 60 respeitando seu respectivo sistema posicional que não é mais decimal.

Já que operamos segundos, podemos partir para a próxima ordem posicional os minutos, então 43 minutos agregados a 19 minutos e 1 minuto do agrupamento dos segundos, temos como resultado 63 minutos, sabemos intuitivamente que a cada 1 hora é equivalente a 60 minutos, matematicamente estamos agrupando 60 minutos em uma grandeza de ordem superior, ou seja, 1 hora. Dessa forma, temos 1 hora e três minutos como resultado dessa operação.

Sendo assim, não há problemas, na expressão de alguns professores, dizer que “vai um”, desde que o aluno compreenda que um é esse que está indo, neste caso esse “um que vai” é o agrupamento de 60 minutos. Continuando a efetuação da operação através do algoritmo prático, somando as grandezas de hora, temos 2 horas adicionadas a 1 hora e a outra 1 hora do agrupamento anterior, que é equivalente ao resultado mostrado na figura 17, isto é, 2 horas + 1 horas + 1 horas = 4 horas.

Essa expressão “vai um” precisa estar bem entendida, ou seja, esse “vai um” é um agrupamento que nem sempre será de 10, como mostrado neste caso do tempo. Então, estabelecemos as relações básicas fundamentais no entendimento da operação de adição para que o algoritmo seja resolvido de forma a fazer sentido para o educando que está manipulando aritmeticamente o problema. Podemos interpretar essas fundamentações como atitudes motivadoras favoráveis em relação à aprendizagem dos novos conteúdos, relacionadas na proposta de sequência didática deste trabalho.

5.2 SUBTRAÇÃO

Para começar esse tópico é necessário que façamos uma introspecção sobre a forma que apresentamos o conceito de subtração no capítulo 3. Será que estamos sendo claros para nossos educandos ao expormos esse conceito? De forma mais objetiva, será que sabemos definir, de maneira plausível e concreta, o que significa subtrair?

Dentre várias formas de conceituarmos significativamente e concretamente este conteúdo para o aluno, apresentar a subtração vinculada a ideia de perda seria uma boa estratégia, assim como a ideia de complemento, inferindo que se temos um conjunto de elementos, podemos retirar destes alguns elementos e teríamos uma certa equivalência no entendimento empírico de perda. Podemos relacionar ainda a subtração como operação inversa da adição. Se nos questionarmos sobre a ideia de complemento, por exemplo, nossos educandos já operam de forma intuitiva dessa maneira, usando complementar, ao brincarem de jogos educativos e jogos de figurinhas por exemplo.

Logo, apresentar o conteúdo e conceituando a subtração, para nossos alunos, utilizando as brincadeiras que supostamente eles mais gostam, pode tornar o processo de ensino-aprendizagem mais significativo e prazeroso, ou seja, indagar problemáticas da seguinte maneira seria uma opção: Eduardo possui 15 cartas de Pokémon. Sua irmã, Isabela, possui 20 cartas. Quantas cartas faltam para que Eduardo tenha a mesma quantidade de cartas que sua irmã? Se analisarmos esse questionamento, veremos que se trata de uma relação que envolve a ideia de complementar.

Veja que após esse questionamento realizado ao aluno, ele poderá conjectura as relações algébricas de forma intuitiva e sem se dar conta disso, ou seja, $15 + x = 20$. É importante ressaltar que, não estamos propondo que seja apresentada essa expressão algébrica neste momento, não fará sentido algum para ao aprendiz ter contato com a expressão exposta acima, pelo menos não agora.

O que estamos querendo enfatizar é que quando trabalhamos o conceito de subtração, com uma certa relevância ao cotidiano e que tenha significado o contexto apresentado para nossos aprendizes, estamos preparando-os para que, em séries futuras, no decorrer de sua evolução educacional escolar, eles possam compreender a álgebra pelas conjecturas realizadas no processo de amadurecimento matemático preestabelecidos nos anos iniciais do ensino básico.

Abstraindo essas relações, e levando em consideração a importância do desenvolvimento lógico do educando, podemos apresentar diversas relações e problemas que farão nossos alunos iniciarem suas conjecturas lógicas em busca de uma melhor construção cognitiva bem fundamentada e preparada para os desafios posteriores, ou seja, podemos apresentar problemas de formas diferenciadas. “É sobre o conjunto dessas variáveis que se inicia a análise a priori, cujo objetivo é determinar quais são as variáveis escolhidas sobre as quais se torna possível exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos podem desenvolver para a apreensão dos conceitos em questão”. PAIS (2011, p. 101,102).

Um outro exemplo interessante seria: Eduardo tinha 20 cartas de Pokémon, mas, depois de um jogo restaram-lhe apenas 15 das cartas que possuía inicialmente. Quantas cartas Eduardo perdeu? Relacionando com o pensamento algébrico abstrato e as fundamentações expostas anteriormente, o educando começará a conjecturar a expressão algébrica $20 - x = 15$, sem que perceba isso.

Um outro questionamento interessante que poderia ser realizado é, se Eduardo possuísse mais 5 cartas de Pokémon, teria 20 cartas, assim como sua irmã Isabela. Quantas cartas tem Eduardo? Novamente podemos relacionar o problema a sua expressão algébrica, e o aluno fará isso sem que perceba, então estaríamos ajudando a conjecturar a construção do pensamento algébrico do aprendiz da seguinte forma, $x + 5 = 20$.

Observe: Eduardo estava jogando e perdeu 5 cartas de Pokémon, restando-lhe apenas 15 cartas. Quantas cartas de Pokémon Eduardo possuía inicialmente? Novamente poderíamos relacionar nosso problema com uma expressão algébrica do tipo $x - 5 = 15$. Ressaltamos que o propósito não é este, estamos fazendo isso para mostrar que é possível começar a desenvolver ideias que futuramente servirão de alicerce para o pensamento algébrico abstrato, sem a necessidade de mencionar equações algébricas.

Poderíamos também, expor aos nossos alunos o seguinte problema: Eduardo tinha 20 cartas de Pokémon, mas perdeu 5 cartas em um jogo. Com quantas cartas Eduardo ficou? Se pararmos para refletir sobre esses problemas, em particular o anterior, veremos que novamente estamos construindo significativamente, e de forma intuitiva, as relações pertinentes a álgebra, ou seja, com a expressão algébrica, neste caso, do tipo $20 - 5 = x$.

Pode parecer trivial e até nada inédito para alguns profissionais da educação, todos os questionamentos acima que poderiam ser realizados para os educandos, entre outros também não apresentados, podendo ser até entendidos como redundantes para alguns profissionais. Porém, devemos levar em consideração que para o aluno, que está começando a criar suas fundamentações lógicas da operação de subtração, são coisas totalmente diferentes e um tanto quanto complexas.

Dessa forma, e levando em consideração a importância de uma base matemática bem estabelecida e estruturada, nós, professores de matemática precisamos fazer com que nossos alunos raciocinem sobre a subtração nessas diferentes formas e perspectivas, para que em séries posteriores, ou seja, no ensino da álgebra por exemplo, eles consigam fazer a transposição da língua materna para a simbologia matemática.

Logo, não devemos apresentar o conceito de subtração apenas como uma retirada ou perda, precisamos trabalhar a ideia de complementar também, isso será um fator de alta relevância em séries posteriores, assim como podemos conceituar a subtração como a operação inversa da adição.

Essas fundamentações precisam ser trabalhadas e desenvolvidas em sala de aula com nossos alunos, mesmo por que essa forma de relacionar o conteúdo, que é exigido no ensino da matemática, está diretamente ligado ao dia a dia dos aprendizes e eles serão cobrados posteriormente. Todas as fundamentações dos conteúdos específicos trabalhados em todo o desenvolvimento do ensino básico e médio precisam da base matemática bem consolidada para o sucesso educacional.

Os problemas acima expostos, propostos dessa forma, refletem de fato a realidade dos educandos. É comum ensinarmos o conceito de subtração apenas como perda, se pararmos para refletir, é mais fácil exemplificarmos o conceito de subtração como perda, na maioria dos casos. Se levarmos em consideração uma compra no supermercado, por exemplo, onde precisaremos pagar por um objeto para adquiri-lo, sendo que será dado um valor ao vendedor e deste valor será subtraído uma certa quantia como forma de adquirir esse bem, ou seja, perderemos parte do valor dado como forma de adquirir este objeto.

Porém, problemas que envolvem uma abstração em lidar com valores monetários, necessariamente é uma realidade nossa, adultos, pouco vivenciada pela criança, ela não saberia lidar de forma plausível com uma relação mais complexa como é o caso das finanças, pelo menos não neste caso, pois não costuma brincar com dinheiro. É importante sabermos que a realidade dela são as brincadeiras, ou seja, quem lida de maneira direta e corriqueiramente com dinheiro somos nós adultos.

Então, levar essas fundamentações para a realidade da criança, é expor o conteúdo da forma como foi colocado acima, através de algo que faça não apenas sentido para elas, mas que estejam em seus contextos de realidade. Seja através dos jogos de cartas de Pokémon, petecas e outras situações nas quais os educandos consigam dimensionar os quão próximos eles estão inseridos daquela situação, isso sim é transpor o problema para a realidade do aluno.

Nós como professores de matemática, temos o dever de explorarmos as diversas problemáticas em diferentes formas possíveis, embora seja o mesmo problema, para que o indivíduo consiga fazer diferentes construções, principalmente os educandos que estão desenvolvendo suas conexões lógicas e conjecturas formais da linguagem matemática. Podemos fundamentar as relações acima com a engenharia didática sobre o estudo de casos de acordo com PAIS (2011), onde as fundamentações metodológicas devem ter validade interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada.

Aprender quando estamos no ensino básico, enquanto crianças e/ou jovens por exemplo, é bem diferente comparado quando já estamos em fase adulta. Depois que estamos adultos e nos dedicamos a aprender algo, seremos sempre limitados, comparado com o aprendizado desse mesmo conteúdo por uma criança, isso simplesmente pelo motivo de nossas conexões lógicas já terem uma certa desenvoltura e nossas preconcepções já estarem formalizadas e preestabelecidas precisando, em alguns casos, de uma ruptura conceitual para que o conhecimento seja fundamentado de forma mais adequada.

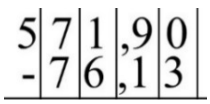
O aluno, principalmente a criança, tem uma facilidade maior nos reconhecimentos dos padrões comparando com um adulto, isso facilita uma construção cognitiva fortemente embasada e melhor estruturada para um salto significativo no aprimoramento de determinados conteúdos e nas aplicações dessas formalizações posteriormente.

Uma outra relação muito importante na subtração é a decomposição das grandezas de ordem superior em grandezas de ordem inferior, usualmente expressada em sala de aula como o famoso “empresta um”, isto é, quando o algarismo que está sendo operado matematicamente do subtraendo é maior que do minuendo, é necessário decompor o algarismo de ordem maior, posicionado ao lado deste no minuendo, “emprestando um”, para que a operação seja realizada. No entanto, quando emprestamos algo ou alguma coisa, necessariamente precisamos devolver em seguida. Uma indagação pertinente em relação a isso é, faz sentido para nosso educando a ideia de “empresta um”? Uma vez que ele não consegue saber o porquê precisa necessariamente “emprestar” e como devolver posteriormente o que haverá emprestado.

Sendo assim, como podemos realizar a seguinte operação 571,9 – 76,13? Sabemos que devemos posicionar vírgula embaixo de vírgula para que possamos operar numerais de mesma ordem de grandeza, isso já deve estar bem estabelecido, ou seja, operar unidades com unidades, décimos com décimos e assim por diante.

Podemos armar a conta 571,9 – 76,13 da seguinte maneira, observe a figura 18.

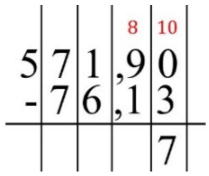
Figura 18: Armação da subtração 571,9 – 76,13



Fonte: Arquivo pessoal

É apresentado, na maioria dos casos, a seguinte forma de operar: Como não é possível subtrair 3 de 0, “emprestamos um” de 9, ficando 8 após o empréstimo, e teremos no lugar do 0 a grandeza 10, subtraindo 3 de 10 obtemos o resultado 7, como podemos observar na figura 19.

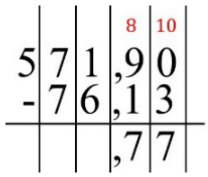
Figura 19: Retirando a primeira parcela da subtração 571,9 – 76,13



Fonte: Arquivo pessoal

Continuando, tínhamos 9 e foi “emprestado um” para o 0 resta-nos 8, logo 8 menos 1 é igual a 7. Resultado representado na figura 20.

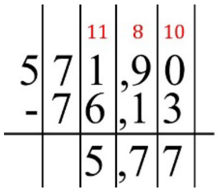
Figura 20: Retirando a segunda parcela da subtração 571,9 – 76,13



Fonte: Arquivo pessoal

Continuando a operação, 6 não pode ser subtraído de 1, “emprestaremos um” de 7 e ficaremos com 11, então 11 menos 6 é igual a 5. Representamos na figura 21 o resultado dessa subtração.

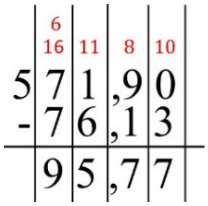
Figura 21: Retirando a terceira parcela da subtração 571,9 – 76,13



Fonte: Arquivo pessoal

Sendo assim, tínhamos 7 e foi “emprestado um”, portanto restou apenas 6, como 7 não pode ser retirado de 6, “emprestaremos um” do 5 e ficamos com 16, subtraindo 7 de 16 temos então 9 de resultado, como mostrado na figura 22.

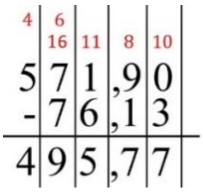
Figura 22: Retirando a quarta parcela da subtração 571,9 – 76,13



Fonte: Arquivo pessoal

Como tínhamos 5 e foi “emprestado um” restou apenas 4, não tendo nada para ser subtraído desse valor, baixaremos o 4 e teremos como resultado 495,77, observe a figura 23 abaixo.

Figura 23: Retirando a quita parcela da subtração 571,9 – 76,13



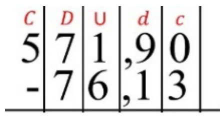
Fonte: Arquivo pessoal

Para que a operação acima fosse provida de sentido, em argumentações plausíveis, deveríamos apresentá-la inferindo inicialmente que 571,9 é o minuendo da operação, 76,13 é o subtraendo e o resultado dessa operação será o resto ou diferença. A subtração pode ser conceituada como a operação inversa da adição, como já mencionada anteriormente, onde é comum chamarmos os termos da adição de parcelas. Porém, o mesmo entendimento não pode ser aplicado na subtração. Por que definidos como minuendo e subtraendo ao invés de parcelas?

Podemos utilizar a expressão “termos” na adição como “parcelas” porque a adição respeita o princípio da comutatividade, se mudarmos a ordem dos termos obteremos o mesmo resultado, como por exemplo, se tivéssemos a operação 8 + 5 = 13, como a adição é comutativa, podemos operar da seguinte maneira 5 + 8 = 13 que teríamos o mesmo resultado, então chamamos de parcelas pelo fato da adição ser comutativa. Porém, essa mesma relação não é possível inferir para a subtração, note que 8 – 5 = 3 que é diferente de 5 – 8 = - 3, logo, a subtração não é comutativa e por esse motivo chamamos de minuendo e subtraendo ao invés de termos e/ou parcelas.

Retornando ao problema inicial 571,9 – 76,13 e o representaremos na figura 24.

Figura 24: Reescrevendo a subtração 571,90 – 76,13



Fonte: Arquivo pessoal

Realizada a consideração acima, após a reconfiguração do minuendo, podemos ler quinhentos e setenta e um inteiros e noventa centésimos, ou seja, é o mesmo número 571,90 apenas estamos olhando os décimos em forma de centésimos, sendo que, ter oito décimos e dez centésimos é a mesma coisa que ter nove décimos ou noventa centésimos.

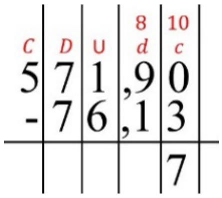
Respeitando o sistema posicional decimal, precisamos retirar 3 centésimos de 0 centésimos, para realizar essa operação, necessitamos decompor uma grandeza de ordem superior em uma grandeza de ordem inferior, ou seja, 1 décimo em 10 centésimos.

Mas, em momento algum foi dito que não seria possível subtrair 3 de 0, ou seja, não foi dito que não poderia retirar 3 de 0, mesmo porque isso não seria verdade, sabemos que 0 menos 3 é igual a - 3, isto é, 0 – 3 = - 3. É relevante essa análise para que não haja uma interpretação errônea e uma construção do conceito equivocado no momento de abordar os números negativos com os educandos.

Neste sentido, PAIS, (2011) ressalta muito bem na terceira fase da engenharia didática que “A sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo conceitos previstos na sequência didática”.

Dessa maneira, podemos realizar a subtração sem a necessidade de usarmos a expressão “empresta um”, ressaltamos ainda que no livro da MA (2009), ela chama isso de subtração com reagrupamento. Sendo assim, podemos retirar 3 centésimos de 10 centésimos agrupados anteriormente, e teremos o resultado dessa operação, 7 centésimos, como mostrado na figura 25.

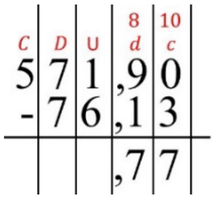
Figura 25: Reagrupando a primeira parcela da subtração 571,90 – 76,13



Fonte: Arquivo pessoal

Seguindo o mesmo raciocínio de decomposição de grandezas de ordem superior em grandezas de ordem inferior, retirando 1 décimo dos 8 décimos disponíveis após o reagrupamento, temos como resultado 7 décimos. Observe a representação dos décimos na figura 26.

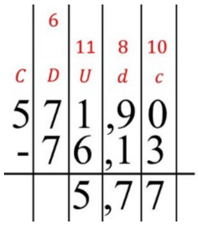
Figura 26: Reagrupando a segunda parcela da subtração 571,90 – 76,13



Fonte: Arquivo pessoal

Precisamos retirar 6 unidades de 1 unidade, será necessário decompor 1 dezena em 10 unidades, ficando assim com 11 unidades, e o que era 7 dezenas passou a ser 6 dezenas. Após a operação 11 unidades menos 6 unidades, obteremos uma sobra de 5 unidades, observe na figura 27.

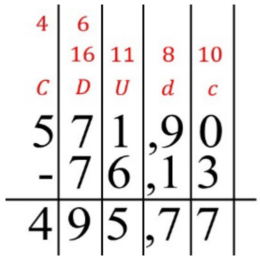
Figura 27: Reagrupando a terceira parcela da subtração 571,90 – 76,13



Fonte: Arquivo pessoal

Restaram 6 dezenas para que sejam retiradas destas 7 dezenas, logo precisamos novamente recorrer a decomposição, neste caso, converteremos 1 centena em 10 unidades de dezenas, dessa maneira podemos retirar as 7 dezenas das 16 dezenas reagrupadas e teremos como resultado 9 dezenas. Podemos observar ainda que restaram apenas 4 centenas que poderão ser consideradas como resultado pelo fato de não haver número a ser somada com elas. Note na figura 28.

Figura 28: Reagrupando a quarta parcela da subtração 571,90 – 76,13

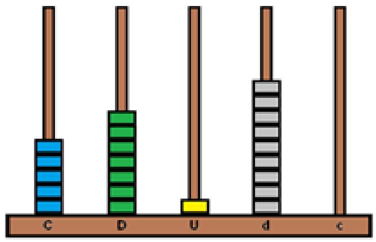


Fonte: Arquivo pessoal

Sem recorrer às argumentações convencionais, inicialmente realizadas como “empresta um”, chegamos ao mesmo resultado. 495,77 quatrocentos e noventa e cinco, vírgula setenta e sete, ou melhor, quatrocentos e noventa e cinco inteiros e setenta e sete centésimos.

Realizaremos, de forma concreta utilizando o ábaco, a mesma operação 571,9 - 76,13. Escreveremos inicialmente o numeral denominado de minuendo, o 571,9 como podemos observar na representação mostrada na figura 29.

Figura 29: Representação do minuendo 571,9

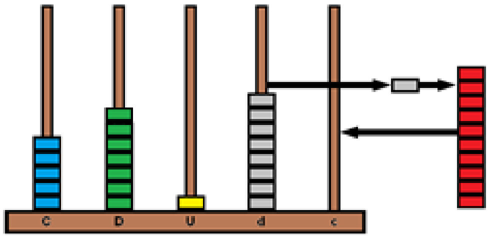


Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino.

Note que, está sendo informada a posição de cada grandeza decimal na base de sustentação do ábaco. Sendo assim, precisamos retirar o subtraendo 76,13 do minuendo escrito acima, faremos isso da esquerda para a direita, processo análogo ao realizado na adição.

Logo, é necessário retirar 3 contas da haste dos centésimos, como não há nenhuma conta nesta haste, será necessário converter uma grandeza de ordem superior em outra de ordem inferior, ou seja, convertemos 1 décimo em 10 centésimos como mostrado abaixo na figura 30.

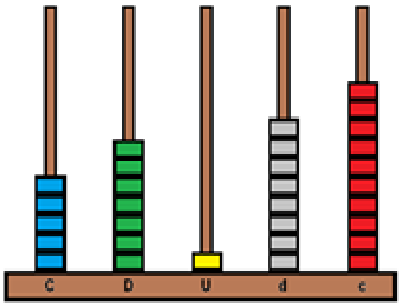
Figura 30: Conversão de 1 décimo em 10 centésimos



Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino.

Dessa forma, reconfiguraremos o minuendo respeitando o numeral 571,9 inicial, como mostra a figura 31 abaixo.

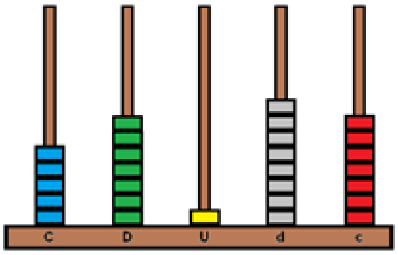
Figura 31: Reescrevendo o minuendo 5719 décimos como 5718 décimos e 10 centésimos



Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino.

Sendo assim, retiraremos 3 contas das 10 disponíveis na haste dos centésimos, o que resultará 7 centésimos de sobra dessa operação, observe na figura 32.

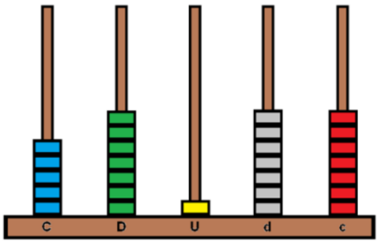
Figura 32: Resultado após a retirada de 3 centésimos dos 10 disponíveis



Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino.

Prosseguindo, podemos retirar facilmente uma conta da haste dos décimos, sem muita dificuldade, restando 6 décimos de resultado mostrado na figura 33.

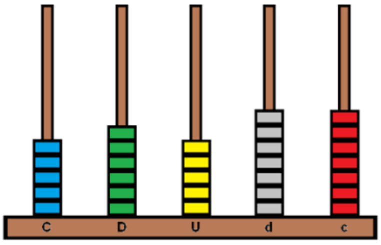
Figura 33: Resultado após a retirada de 1 décimos dos 6 disponíveis.



Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos
e sugestões para o ensino.

Continuando, é necessário retirar 6 unidades de 1 disponível, após a retirada desta, ainda será preciso retirar 5 contas dessa haste. Como não há nenhuma, converteremos então 1 dezena em 10 unidades, dessa forma, conseguimos retirar as 5 unidades das 10 disponíveis, temos como sobra dessa operação 5 unidades, processo apresentado na figura 34.

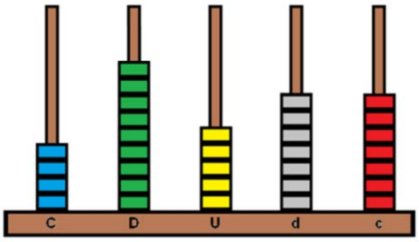
Figura 34: Reconfiguração após a sobra das 5 unidades.



Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos
e sugestões para o ensino.

Então, resta-nos tirar 7 dezenas das 6 disponíveis, retirando as 5 ainda faltará retirar 1, sendo assim, podemos converter 1 conta de grandeza centena em 10 de ordem dezenas, dessa maneira retiraremos a conta que faltava, chegaremos ao resultado 4 centenas, 9 dezenas, 5 unidades; 7 décimos e 7 centésimos ou seja, 495,77. Resultado este já mostrado na forma convencional, como podemos observar, de forma concreta, na figura 35.

Figura 35: Resultado da operação 571,9 - 76,13 = 495,77.



Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos
e sugestões para o ensino.

Então, podemos fazer uso do material concreto, o ábaco, de modo a ressaltar as argumentações convencionais com ênfase aos porquês do famoso empresta um, por exemplo. Novamente gostaríamos de expor que a operação realizada acima 571,9 - 76,13 com suas respectivas explicações, expressa convencionalmente, que esta pode ser utilizada como forma prática de efetuar as operações através de qualquer algoritmo, desde que o educando consiga significá-la. Zabala (2007) afirma que é importante criar conceitos "que promovam uma atitude favorável, quer dizer, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos".

Algo tão importante quanto o anterior é, quando estamos trabalhando o conteúdo de subtração com nossos educandos, apresentar o conceito de complementar de dez, ou seja, a partir dos complementares de dez o educando poderá estabelecer uma relação de padrões dos números que, somados entre si, formam uma dezena, como por exemplo 1 + 9 = 10; 2 + 8 = 10, 3 + 7 = 10 e assim por diante.

Esses pares de números bem estabelecidos, facilitará o entendimento em uma série posterior em relação a saber que, o complementar de 7 em 10 é 3, o complementar de 8 em 10 é 2, o complementar de 9 em 10 é 1, e assim sucessivamente. Facilitará a operação com o ábaco que é um material concreto, de fácil manuseio e que em grande parte das escolas estão disponíveis e podem ser utilizados pelos professores.

5.3 MULTIPLICAÇÃO

Os algoritmos da multiplicação, aparentemente, parecem mais complexos se comparados aos algoritmos anteriores, adição e subtração. Quando conceituamos como mais complexos, nos referimos que para seu melhor entendimento, é preciso saber sua fundamentação estrutural por trás do algoritmo.

Para isso, precisamos nos preocupar em compreender qual o significado de multiplicar, ou melhor, será que nós professores de matemática saberíamos responder qual o significado da multiplicação? Se o educando questionasse o que significa multiplicar, saberíamos responder de forma convincente e plausível?

Quando apresentamos a operação 5×6, por exemplo, queremos ensinar o que de fato?

Poderíamos dizer que essa seria uma forma mais compacta de escrever $6 + 6 + 6 + 6 + 6$, ou seja, estamos escrevendo de maneira mais compacta a soma das parcelas de 6. Vamos imaginar o quão trabalhoso seria, apresentar por soma de parcelas iguais, a operação 55×6, teríamos que somar 55 “vezes” a parcela 6, isto é, precisamos somar $6 + 6 + 6 + \ldots + 6$ de forma a aparecer o número 6 em 55 parcelas ou 55 “vezes”.

Logo, podemos pensar que a multiplicação é uma notação criada para que não seja necessário escrever, em forma extensiva, uma adição de várias parcelas iguais, no caso em que desejarmos saber o resultado da operação 5×6 por exemplo, o número 6 é o valor da parcela e o 5 é a quantidade de parcelas em si, poderia ser o contrário que não haveria problema, dessa forma, teríamos a expressão 5×6 escrita da seguinte maneira $6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$, ou $6 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$. Porque?

Correlacionando as argumentações anteriores, podemos mostrar aos nossos alunos que vale a propriedade comutativa da multiplicação, pois 6×5 pode ser escrito como $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$, assim como 6×5 pode ser reescrito da seguinte maneira $6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$, logo, seus resultados são iguais, e portanto, a propriedade comutativa é válida. Podemos realizar alguns outros exemplos para que o aluno seja convencido que na multiplicação, se mudar a ordem de multiplicar o resultado sempre será o mesmo, ou seja, compreendendo assim que a ordem dos fatores não altera o produto final. O princípio da comutatividade nos garante isso.

Mostrar essa relação geometricamente seria um fator relevante na abstração desse entendimento, utilizando materiais concretos, ou seja, se tivéssemos 12 objetos de mesma geometria, áreas de retângulos por exemplo, poderíamos formar 3 grupos de 4 desses mesmos objetos, mas isso é equivalente a formar 4 grupos de 3 também.

Sendo assim, contribuímos significativamente para nossa operação, o aluno estabelecerá os conectivos apropriados na compreensão, de fato, do porquê é válido operar daquela forma. Entenderá que essa garantia, de mudar a ordem na operação, é satisfeita pelo princípio da comutatividade.

Então, dizer que $4 \times 1{,}5$ pode ser reescrito da seguinte maneira $1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5$ é uma argumentação válida. Mas como escreveríamos, em soma de parcelas a operação $2{,}5 \times 1{,}5$?

Veja que, para este caso $2{,}5 \times 1{,}5$ as argumentações anteriores não são válidas, pois dispúnhamos de um número inteiro de parcelas, e para o caso $2{,}5 \times 1{,}5$ a nossa parcela, $2{,}5$ não é mais um número inteiro, assim como $1{,}5$ também não é.

Por esse motivo não serão válidas as argumentações iniciais sobre essa operação. É importante saber compreender que, quando estendemos o domínio de validade de uma definição, necessariamente devemos ressignificáa-la. Neste exemplo, não faz sentido conceituar a multiplicação como soma de parcelas iguais.

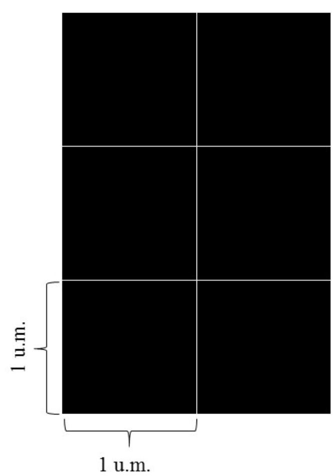
Sendo assim, quando um dos fatores for um numeral inteiro, fará sentido analisar a multiplicação como soma de parcelas iguais. Na multiplicação inclusive, nossos termos são os fatores porque vale a propriedade comutativa, da mesma forma como relacionamos as fundamentações sobre parcelas na adição, minuendo e subtraendo na subtração, para a multiplicação nós temos a denominação fatores.

Então, como resolver significativamente o problema $2{,}5 \times 1{,}5$?

As estratégias diversificadas para dar significado a essa operação, ficará a critério de cada profissional, levando em consideração a realidade, ambiente de aprendizado e o contexto sociocultural do educando essa relação necessariamente implica que, dependendo do plano de ensino e da sequência didática aplicada pelo profissional da educação, existirão estratégias eficientes e outras nem tanto. Vale destacar o que PAIS (2011) ressalta na sua terceira fase da engenharia didática “que, quando a aplicação da sequência didática não for diretamente coordenada pelo pesquisador, é preciso que a equipe de professores esteja suficiente consciente quanto aos objetivos da pesquisa, pois, caso contrário, os resultados podem ser prejudicados”.

Ressaltamos que, uma saída viável para resolver o problema $2{,}5 \times 1{,}5$ anterior, seria mostrar um retângulo de laterais proporcionais a 2,5 e 1,5 unidades de medidas, porém, essa provocação de atribuir significado dessa maneira gera algumas limitações, ou seja, precisaríamos necessariamente abordar os conceitos de perímetro e áreas, isso não seria trivial para eles neste momento. Contudo, na figura 36 temos 6 quadrados de lados iguais a 1 uma unidade de medida, na qual ressignificaremos a operação $2{,}5 \times 1{,}5$

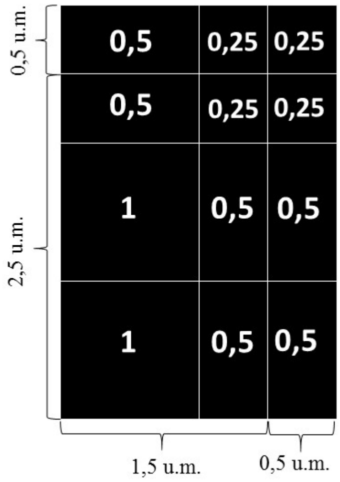
Figuras 36: Representação de seis quadrados de lados 1 u.m.



Fonte: Arquivo pessoal

Em seguida, na figura 37 abaixo, partiremos 4 desses quadrados em partes proporcionais, e veremos que as medidas de áreas internas desses quadrados particionados assumirão representações bem definidas iguais a 0,5 e 0,25 unidades de medidas depois da partição. Observe abaixo.

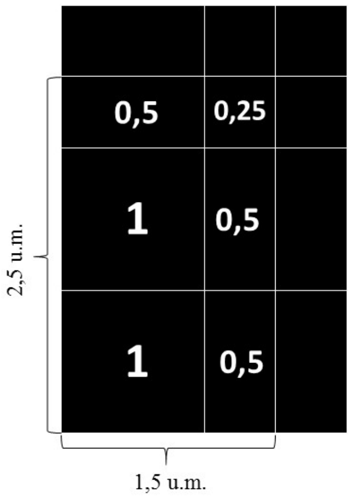
Figuras 37: Dividindo os quadrados em medidas proporcionais.



Fonte: Arquivo pessoal

Dessa maneira, poderemos selecionar as medidas que pretendemos operar, e com isso, estaremos preenchendo a região interna do retângulo de lados escolhidos iguais a 2,5 e 1,5 unidades de medidas, respectivamente para a operação, observe na figura 38 abaixo

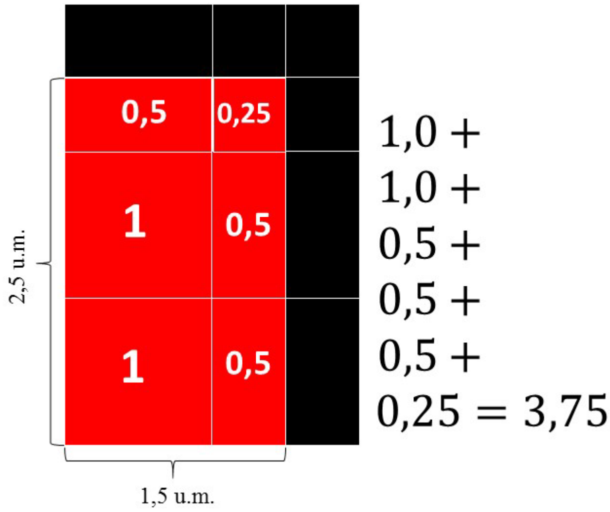
Figuras 38: Selecionando o retângulo de lados 2,5 e 1,5.



Fonte: Arquivo pessoal

Após o preenchimento da região retangular interna referente as medidas laterais 2,5 e 1,5, perceberemos que a soma das regiões internas dos quadrados e retângulos, nessa região definida, será igual a 3,75. Observe na figura 39.

Figuras 39: Soma das áreas internas dos quadrados e retângulos.



Fonte: Arquivo pessoal

O resultado com a soma das áreas internas do retângulo de lados 2,5 e 1,5 acima, é equivalente ao fazermos a operação convencionalmente utilizada em sala de aula, ou seja, $2{,}5 \times 1{,}5 = 3{,}75$. Veja na figura 40 abaixo.

Figuras 40: Operando convencionalmente 2,5 × 1,5.

$$\begin{array}{r} 2{,}5 \\ \times\ 1{,}5 \\ \hline 125 \\ 25\ + \\ \hline 3{,}75 \\ U\ d\ c \end{array}$$

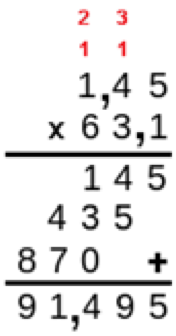
Fonte: Arquivo pessoal

É importante ressaltar que, essa relação conceitual de área, geralmente abordada em séries mais avançadas, isso porque os alunos já possuem um amadurecimento matemático concretizado. No entanto, significar o algoritmo em relação a como realizar a operação é possível fazer de modo que, o educando consiga criar conectivos suficientemente entendíveis durante o passo a passo.

Dizer qual seria a melhor forma de mostrar concretamente o significado dessa operação, talvez seja uma limitação deste trabalho que poderá ser sanada com a aplicação deste em um momento posterior. Porém, inicialmente o passo a passo na obtenção do resultado esperado é possível mostrar na operação do algoritmo. Saberíamos responder o porquê, ao multiplicarmos, “arredamos” os resultados das multiplicações por cada algarismo antes de somá-los? Isto é, por que a quantidade de algarismos que aparecem depois da vírgula no produto é a soma das quantidades de algarismos que aparecem depois da vírgula nos fatores?

Relacionando ao problema anterior, as argumentações posteriores serão inferidas na tentativa de responder os questionamentos acima. Dessa forma, temos a título de exemplo a operação $1{,}45 \times 63{,}1$ ou $63{,}1 \times 1{,}45$ pois sabemos que operar dessa maneira só é possível pela comutatividade. Vejamos a conta armada e resolvida na figura 41 apresentada abaixo.

Figura 41: Armação e resultado da operação 63,1 × 1,45



Fonte: Arquivo pessoal

Note que a vírgula “deslocou-se” exatamente as três casas que são as quantidades de algarismos após a vírgula no algoritmo da figura 41. Compreender o porquê “arredamos” os números quando multiplicamos, não os deixando alinhados e por qual motivo a “vírgula” deixa três casas decimais no resultado para o caso da operação $63{,}1 \times 1{,}45$ é de fundamental relevância para uma compreensão provida de sentido.

Convencionalmente somamos quantas casas estão após a vírgula na multiplicação de um número decimal, para posicioná-la no resultado, ou seja, temos duas casas decimais acima e uma abaixo, no exemplo acima, logo somamos $2 + 1 = 3$, a vírgula será posicionada três casas decimais da direita para a esquerda. E por que necessariamente esse deslocamento, a título de exemplo a figura 41, deve ser para a esquerda?

Podemos explicar essas fundamentações aos educandos, principalmente o motivo do deslocamento. Para a vírgula, também é possível uma justificativa plausível, mas será necessário que tenhamos trabalhado frações com eles. Começaremos a responder essas indagações utilizando um caso mais simples e voltaremos ao problema anterior posteriormente.

Então, analisaremos a operação 145 × 6 mostrado na figura 42:

Figura 42: Analisando a operação 6 × 145

$$\begin{array}{r} 1\,4\,5 \\ \underline{\times\,6} \end{array}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Geralmente, e de forma convencional, o algoritmo 145 × 6 é resolvido da seguinte maneira: 6 vezes 5 é 30, fica 0 e “vai” 3. Observe na figura 43:

Figura 43: Operando a primeira parcela de 6 × 145

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3} \\ 1\,4\,5 \\ \underline{\times\,6} \\ 0 \end{array}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Continuando, 6 vezes 4 da 24 somando com os 3 “que foi” temos 27, fica sete e “vai 2”, como podemos observar na figura 44.

Figura 44: Operando a segunda parcela de 6 × 145

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\,{\scriptstyle 3} \\ 1\,4\,5 \\ \underline{\times\,6} \\ 7\,0 \end{array}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Continuando, 6 vezes 1 dá 6 somados aos 2 que foram, temos 8 como resultado. Observe a figura 45.

Figura 45: Operando a terceira parcela de 6 × 145

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\,{\scriptstyle 3} \\ 1\,4\,5 \\ \underline{\times\,6} \\ 8\,7\,0 \end{array}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Essa forma exposta na figura 45, com essas argumentações é apresentada para o aluno, em alguns casos como única maneira de resolver este algoritmo, mas o que está por trás desse algoritmo de fato? Na realidade, há uma propriedade que relaciona a adição com a multiplicação, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, temos por exemplo $5 \times (3 + 4) = 5 \times 3 + 5 \times 4 = 15 + 20 = 35$ essa propriedade denomina-se assim justamente porque distribuímos a multiplicação em relação à adição na operação.

É importante sabermos que, existe na matemática, outras propriedades distributivas, como por exemplo, $(3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = 225$. Chamamos para este caso de propriedade distributiva da potenciação em relação à multiplicação. Não entraremos no mérito dessas relações, mas é importante que o professor da educação básica saiba que, as propriedades distributivas existem não apenas em relação a multiplicação e adição, porém em relação a outras operações também.

Voltando ao problema 6×145 na figura 46:

Figura 46: Retomada do problema 6×145

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\;3\;\;} \\ 1\,4\,5 \\ \times\, 6 \\ \hline 8\,7\,0 \end{array}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Operamos o algoritmo da figura 46, da forma como foi exposta com argumentações convencionais, sendo que esta é válida pelo princípio da distributividade. Observamos que:

$$145 \times 6 = (100 + 40 + 5) \times 6$$

Como é válida a propriedade acima, quando multiplicarmos o argumento dentro dos parênteses por 6 é equivalente a operarmos da seguinte forma:

$$(100 \times 6 + 40 \times 6 + 5 \times 6) = 6 \times 100 + 6 \times 40 + 6 \times 5$$

Ou seja:

$$600 + 240 + 30$$

Note que o 240 é igual a $200 + 40$, logo podemos reescrever $600 + 240 + 30$ da seguinte maneira:

$$600 + 200 + 40 + 30$$

Isto é:

$6\,centenas\ +\ 2\,centenas\ +\ 4\,dezenas\ +\ 3\,dezenas$, temos então:

$$8\,centenas\ +\ 7\,dezenas = 870$$

Então, o arranjo que fizemos acima é por estarmos usufruindo do excedente 240 e nele temos duas centenas de sobra, dessa maneira, podemos reescrever a expressão $600 + 240 + 30 = 870$ como $600 + 200 + 40 + 30 = 870$, sem que tenhamos qualquer prejuízo no resultado final da operação.

Uma sugestão, para melhor compreensão das fundamentações acima seria ensinar, inicialmente, aos nossos educandos a multiplicarem com números de um algarismo, depois de efetuar as operações através dos algoritmos práticos mostrando outros problemas em outros formatos com mais de um algarismo e, logo em seguida, abordar expressões com vírgulas, por exemplo.

Da mesma maneira, seria interessante e significativo apresentar alguns problemas que envolvam multiplicação de números por potências de 10, ou seja, potências do tipo $10^1 = 10; 10^2 = 100, 10^3 = 1000, 10^4 = 10000$ que são respectivamente as dezenas, centenas, milhares, dezena de milhar e assim por diante. Porque essa relação de potência de dez facilitará o entendimento do aluno quando multiplicarmos, por exemplo o numeral 456,54 por uma potência de 10, no caso $10^3 = 1000$, a vírgula é deslocada 3 casas para a direita, isto é:

$$456{,}54 \times 1000 = 456540$$

Essas argumentações de multiplicar e "andar com a vírgula" por exemplo, mas sem que seja exposto o motivo que valida isso, mesmo que seja verdade que a vírgula assuma uma posição diferente da inicial após a multiplicação de um decimal por uma potência de 10, o sentido de validade para tal procedimento não fica claro.

É comum que no ensino básico nos expressemos que ao multiplicar um numeral decimal por 1000 por exemplo, no caso $10^3 = 1000$ devemos deslocar a vírgula três casas para a direita, isso é verdade, assim como é verdade que quando dividirmos por exemplo 465,54 pela mesma potência $10^3 = 1000$ a vírgula deve ser deslocada três casas para a esquerda. Ou seja:

$$456{,}54 \div 1000 = 0{,}45654$$

É verdade que isso ocorre, mas a justificativa para que isso seja verdade não fica clara para o aluno. Voltando para a multiplicação, a argumentação que justifica o deslocamento da vírgula é que temos quatrocentos e cinquenta e seis inteiros e cinquenta e quatro centésimos, quando multiplicamos por mil inteiros, ou seja, ao realizarmos a operação $456{,}54 \times 10 =$

$4565,4$, transformamos centésimos em décimos, pois dez centésimos equivalem a um décimo, quando multiplicamos $456,54 \times 100$ estamos transformando centésimos em unidades, ou seja, $456,54 \times 100 = 45654$ pois dez décimos ou cem centésimos equivalem a uma unidade; e quando multiplicamos $456,54 \times 1000$ estamos transformando milésimos em unidades, isto é, $456,54 \times 1000 = 456540$ pois mil milésimos equivalem a uma unidade.

Então quando multiplicamos $456,54 \times 10$ o que era centésimo passa a ser décimo, o que era décimo passa a ser unidade, o que era unidade passa a ser dezena, o que era dezena passa a ser centena e o que era centena passou a ser milhar, mas note que a vírgula sempre estará posicionada entre as unidades e décimos, então é por esse motivo que a vírgula "anda" uma casa para a direita ao multiplicarmos por uma potência $10^1 = 10$.

Sendo assim, quando fizemos $456,54 \times 100 = 45654$ a vírgula "andou" duas casas para a direita, pois $100 = 10^2$ que é equivalente a multiplicar por dez duas vezes, quando fizemos $456,54 \times 1000 = 456540$ a vírgula deslocou-se três casas para a direita, pois $1000 = 10^3$ que é equivalente a multiplicar por dez três vezes. E por que o zero no final? Porque precisamos dizer que, neste caso, não temos nenhuma unidade. Por esse motivo, na multiplicação por uma potência de dez, a vírgula "anda" para a direita.

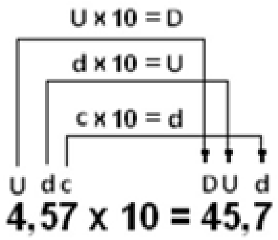
E por que na divisão $456,54 \div 1000 = 0,45654$ a vírgula é deslocada para a esquerda?

Pelo simples fato de a divisão ser a operação inversa da multiplicação, como veremos a seguir, a vírgula é deslocada para a esquerda. Se fizermos $456,54 \div 10$, os décimos virariam centésimos, as unidades convertem-se em décimos, as dezenas converter-se-iam em unidades e as centenas tornaram-se dezenas, o processo análogo, porém inverso da multiplicação.

Novamente, ao fazermos $456,54 \div 1000 = 0,45654$ temos o resultado em que a vírgula encontra-se posicionada entre as unidades e os décimos, como não temos nenhuma unidade no resultado dessa operação, precisamos obrigatoriamente adicionar o zero nas unidades para que essa informação, o fato de não haver unidades, fique visível. Trataremos dessas fundamentações na divisão no tópico 5.4 seguinte.

É importante sabermos que, estamos relacionando composições e decomposições de grandezas utilizando aditiva e multiplicativa. De modo geral, o motivo de deslocarmos a vírgula é pelo simples fato de não termos o hábito de escrevermos os números da seguinte maneira, observe a figura 47:

Figura 47: O motivo da vírgula deslocar-se



Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino.

Note que quando multiplicamos 4 unidades por 1 dezena, temos como resultado 4 dezenas, ao multiplicarmos 5 décimos por 1 dezena, o resultado será 5 unidades, quando multiplicarmos 7 centésimos por 1 dezena, resultará em 7 décimos. Estamos convertendo grandezas de ordem inferior em ordem superior quando multiplicamos, e sabemos que a divisão é a operação inversa da multiplicação, ao dividirmos por uma potência de $10^1 = 10$, por exemplo, transformamos grandezas de ordem superior em ordem inferior.

Observe que no exemplo da figura 47 não mencionamos a frase “anda com a vírgula”, ela assume uma posição diferente porque devemos respeitar o real sentido de ela existir, separar a parte inteira da decimal. Porém, não é comum escrevermos da forma mencionada acima, por isso, torna-se comum mencionar “andar com a vírgula” para a direita, quando multiplicamos, e para a esquerda quando dividimos e não há problema em utilizar essa argumentação, desde que o aluno consiga compreender porque é válido esse argumento.

Após as argumentações anteriores estarem compreendidas, voltaremos ao nosso problema inicial, $63{,}1 \times 1{,}45$. Como devemos proceder neste caso, levando em consideração as argumentações anteriores? Para um melhor entendimento, vamos realizar a multiplicação com os números inteiros 631×145, e em seguida, estendemos as argumentações para o caso não inteiro $63{,}1 \times 1{,}45$, pois serão atribuídos apenas alguns detalhes na retomada. Logo, teremos o resultado representado na figura 48.

Figura 48: Operando o algoritmo inteiro 631×145

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 4 & 5 \\
 & \times & 6 & 3 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 4 & 5 \\
 & 4 & 3 & 5 & \\
8 & 7 & 0 & & + \\
\hline
9 & 1 & 4 & 9 & 5
\end{array}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Quando multiplicamos 1 por 145, teremos como resultado 145 unidades, pois multiplicamos 1 unidade por 145 unidades. Multiplicamos 3 vezes 145, estamos multiplicando 3 dezenas por 145 unidades, obtendo o resultado de 435 dezenas que é equivalente a 4350 unidades, operando dezenas com unidades, estamos transformando unidades em dezenas, dezenas em centenas e centenas em milhares. Sempre que possível, seria importante desenvolver essas fundamentações com os educandos nas séries iniciais para que o entendimento referente as unidades representativas fiquem bem estabelecidas. Ao fazermos 6 vezes 145, estamos multiplicando 6 centenas por 145 unidades, o resultado será 870 centenas que é equivalente a 87 mil unidades. Temos como resultado, após a soma 91495 unidades. Note na figura 49 o procedimento:

Figura 49: Reconfigurando a figura 48

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & & 2 & 3 & \\
 & & 1 & 1 & \\
DM & M & C & D & U \\
 & & 1 & 4 & 5 \\
 & \times & 6 & 3 & 1 \\
\hline
1 & & 1 & 4 & 5 \\
 & 4 & 3 & 5 & \\
8 & 7 & 0 & & + \\
\hline
9 & 1 & 4 & 9 & 5
\end{array}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Na realidade, se observarmos com mais detalhes, não estamos “arredando”, apenas deixamos de escrever os zeros, pois eles não influenciarão no momento que realizarmos a soma na operação. Porém, as posições dos números influenciam significativamente no resultado porque só podemos somar coisas de mesma natureza, por esse motivo somamos unidades com unidades, dezenas com dezenas, centenas com centenas e milhares com milhares.

Já sabemos operar com os números inteiros, vamos retornar ao problema inicial não inteiro, $63{,}1 \times 1{,}45$. Para responder esse questionamento, o motivo de somarmos a quantidade de casas decimais após a vírgula e "andarmos" com ela para esquerda, realizado no início dessa seção, precisaremos recorrer ao rigor matemático utilizando multiplicação de fração, conteúdo este que não é trivial de ser mostrado para nossos alunos, pelo menos não ao iniciarmos o conceito de multiplicação inteira, isso poderia ser deixado para mostrar-lhes posteriormente identificado o domínio das argumentações anteriores, pois os educandos já poderiam compreender as fundamentações matemáticas de operar frações pelo seu amadurecimento lógico cognitivo.

Todavia, nós professores do ensino básico, devemos nos apropriar dessas fundamentações o quanto antes para que possamos, a partir delas, elaborar conceitos mais simplistas com o intuito de transpor essas informações de forma acessível para nossos alunos. Isso significa que devemos apresentar fundamentações "que promovam uma *atitude favorável*, quer dizer, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos". (Zabala, 2007, p. 63).

Podemos dizer que 1,45 são cento e quarenta e cinco centésimos, ou seja, $\frac{145}{100}$ e que 63,1 são seiscentos e trinta e um décimos, isto é, $\frac{631}{10}$. Reescreveremos a expressão $1{,}45 \times 63{,}1$ da seguinte maneira:

$$1{,}45 \times 63{,}1 = \frac{145}{100} \times \frac{631}{10}$$

A partir de nossos conhecimentos de potências de 10, escreveremos os denominadores fracionários de acordo com suas respectivas potências, temos então:

$$\frac{145}{10^2} \times \frac{631}{10^1}$$

Sabemos da operação, sem a vírgula, que o resultado de $631 \times 145 = 91495$ sendo exatamente a multiplicação do numerador das frações acima, resta-nos apenas, operar com o denominador, as potências de dez, levando em consideração que $100 \times 10 = 1000$, ou procedemos utilizando a relação mostrada abaixo, uma das propriedades das potências, temos então:

$$\frac{145}{10^2} \times \frac{631}{10^1} = \frac{91495}{10^{2+1}} = \frac{91495}{10^3}$$

Resultando, após a multiplicação, noventa e um mil quatrocentos e noventa e cinco milésimos, ou seja:

$$\frac{91495}{10^3} = \frac{91495}{1000} = 91{,}495$$

Por esse motivo a vírgula deslocou-se três casas decimais da direita para a esquerda, pois estamos dividindo por uma potência de $10^3 = 1000$ que tem três zeros. Na realidade, o que fazemos, de certa forma, é somar os zeros nas multiplicações por frações.

As fundamentações anteriores só serão possíveis quando temos uma quantidade limitada de casas decimais. Não valeria essa análise para uma dízima periódica por exemplo. Sempre que tivermos uma quantidade limitada de casas decimais, podemos reescrever a expressão em forma de fração com denominadores em potências de dez, como fizemos acima e isso mostra por que a vírgula assume uma posição diferente da inicial após a operação.

Ma (2009, p. 93, 95), ressalta que: “O valor posicional de uma unidade básica determina a forma como o número é apresentado. (...) Os alunos não podem obter um entendimento profundo do valor posicional num só dia, mas sim passo a passo”. Isso reforça a relevância do entendimento de um número poder ser expressados por uma potência de dez e que esse entendimento é adquirido no processo contínuo de aprendizagem.

5.4 DIVISÃO

Em matemática, dividir significa repartir em iguais proporções, processo que pode deixar resto, podendo ser zero ou outro número. A divisão é a operação inversa da multiplicação. Podemos escrever $16319 \div 54$ da seguinte maneira:

$$16.319 \;=\; 54 \;\times\; 302 \;+\; 1\,1$$

Dividendo Divisor Quociente Resto

Da forma como escrevemos acima $16.319 = 54 \times 302 + 11$, temos o produto de 54 com 302 somado a $11 = 16.319$, isto é, quantas vezes “cabe” o divisor no dividendo e qual o possível resto deixado nessa operação. Podemos perceber que o número a ser dividido é o dividendo, o que está dividindo denota-se divisor, tendo como resultado da operação destes dois o quociente, e a sobra, que é o resto após a partição do dividendo.

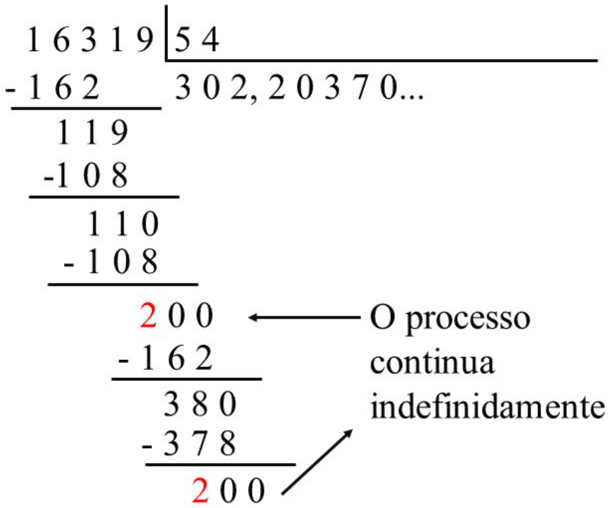
Isso nos remete a que, o produto do divisor com o quociente somado ao resto é igual ao dividendo. Então, é possível que tenhamos dois casos interessantes, o inteiro e o continuado.

Na primeira situação, por exemplo $12 \div 4 = 3$ o quociente é um número inteiro e não sobrou resto nesta operação, impossibilitando-a assim de ter continuidade. Para o caso continuado, não inteiro, ou seja, $7 \div 2 = 3$ temos uma sobra de 1 e poderíamos continuar operando e, portanto, teríamos um numeral não inteiro como resultado, não houve a mesma relação, comparado a primeira em que o quociente é inteiro aí também se fizermos a divisão inteira, o problema está no fato do resto agora não ser zero.

Sendo assim, na divisão inteira, o quociente nos informa quantas vezes o divisor "cabe" no dividendo, o resto nos indica se houve alguma "sobra" neste processo e de quanto foi esse resto. Sempre que estamos dividindo um número por outro, estamos testando as possíveis quantidades que o divisor pode ser inserido no dividendo, ou seja, estamos testando um múltiplo, quociente, que não exceda o dividendo.

Há algumas relações passíveis de questionamentos sobre a divisão de um algoritmo qualquer, como o caso da divisão de 16.319 por 54 por exemplo, sabemos que esta não será uma operação inteira pois seu quociente não é um inteiro. Analise a figura 50:

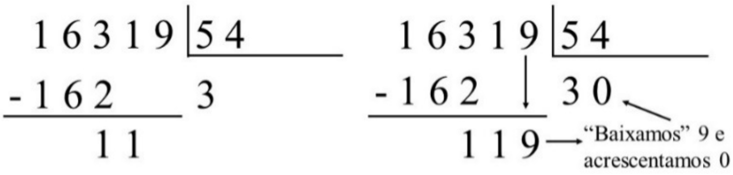
Figura 50: Divisão do numeral 16319 por 54



Fonte: Arquivo pessoal

Quando solucionamos o algoritmo da figura 50, poderíamos questionar o motivo que nos levou a acrescentarmos zero ao quociente, quando "baixamos do dividendo" um numeral e este foi insuficiente para ser dividido, precisando assim "baixar" outro, observe que a figura 51 nos permite notar isso.

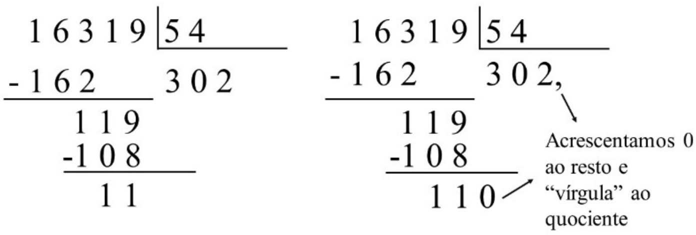
Figura 51: Acrescentando zero ao quociente



Fonte: Arquivo pessoal

Da mesma maneira, seria interessante o questionamento do motivo de quando a divisão inteira acaba. Neste exemplo podemos acrescentar um zero ao resto, a vírgula ao quociente e continuar dividindo como mostrado na figura 52.

Figura 52: Acrescentando a vírgula ao quociente



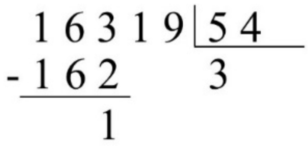
Fonte: Arquivo pessoal

Essas relações podem gerar confusão para o educando quando não fica claro o porquê esses "passos" são válidos na compreensão das operações através dos algoritmos apresentados. Na realidade não existem outras formas de apresentarmos essa divisão por exemplo, com argumentações que façam sentido na sua justificativa.

Nos preocuparemos, inicialmente, em apresentar a maneira usual para a divisão inteira como é convencionalmente feita, e relacionaremos as fundamentações destas para o caso continuado, pois a forma anterior é facilmente encontrada em livros didáticos básicos. Então, na divisão inteira $16319 \div 54$ é possível dividir 1 dezena de milhar por 54 dezenas de milhares? E se fossem 16 milhares, poderíamos dividir por esse mesmo valor?

Na maioria dos casos a resposta é não. Contudo, veremos em argumentações posteriores em que é possível essa divisão, tendo zero como resposta ao resultado porque não seria possível distribuir nenhum grupo de mesma grandeza nesse número disponível. Mas podemos dividir 163 centenas por 54 centenas, teremos assim o resultado 3 centenas. Ao fazermos a volta multiplicando 3 com 54, significa que estamos distribuindo 3 parcelas de 54 no dividendo, que é equivalente a quantidade de 162 centenas após a distribuição, percebemos que existe uma diferença de 1 entre a quantidade 163 e o que está sendo distribuído observe abaixo a figura 53.

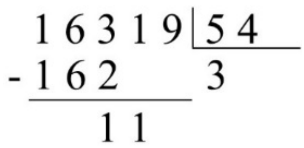
Figura 53: Operando a primeira parcela da divisão 16319 por 54



Fonte: Arquivo pessoal

Essa centena que sobrou pode ser adicionada com a dezena acima disponível, a famosa e coloquial expressão “baixa o um”, obtendo assim 11 dezenas que estão disponíveis para a continuação da divisão, note na figura 54.

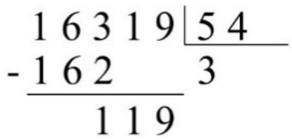
Figura 54: Acrescentando uma dezena ao resto



Fonte: Arquivo pessoal

É possível dividir 11 dezenas por 54? Então, na educação básica somos ensinados, majoritariamente, que devemos baixar o 9, logo, temos essa relação apresentada na figura 55.

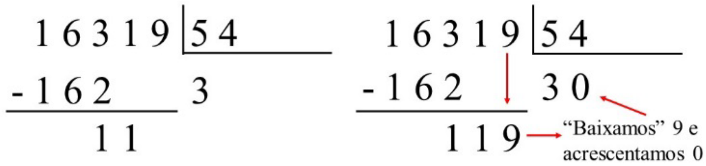
Figura 55: Acrescentando nove unidades ao resto



Fonte: Arquivo pessoal

Porém, nesse processo descritivo de baixar o 9 é ensinado o seguinte. “Quando baixamos novamente um número, precisamos obrigatoriamente acrescentar o zero no quociente”, mas por que isso? Observe a figura 56 abaixo:

Figura 56: Acrescentando o zero ao quociente



Fonte: Arquivo pessoal

Na realidade, refletindo sobre o questionamento anterior, é possível sim dividir 11 dezenas por 54 dezenas, na qual a resposta seria zero dezenas. Não foi distribuído nada e por esse motivo que o zero aparece no quociente. Note que, tínhamos inicialmente 163 centenas que foram convertidas em 3 grupos de 54 centenas e redistribuídas no dividendo. Com a reconfiguração do numeral, sobra assim 1 centena.

Como não é possível distribuir uma centena para um grupo de 54 centenas, pois este é o resto da operação anterior, podemos agregar a este a dezena disponível do dividendo, ficando com 11 dezenas disponíveis para serem operadas. Distribuindo 11 dezenas para o grupo de 54, temos que este grupo ficará com nenhuma dezena, ou seja, zero dezena que foi acrescentada ao quociente. Porém, convertendo as 11 dezenas em unidades e agregando com as 9 unidades restantes disponíveis do dividendo, temos 119 unidades que podem ser reagrupadas em 2 grupos e restará uma sobra de 11 unidades, temos na figura 57 a representação desse processo.

Figura 57: Operando a terceira parcela de 16319 por 54

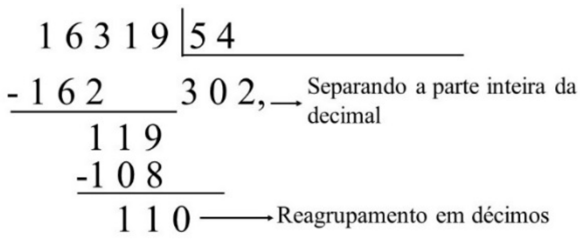
$$
\begin{array}{r|l}
16319 & \underline{54} \\
\underline{-162} & 302 \\
119 & \\
\underline{-108} & \\
11 &
\end{array}
$$

Fonte: Arquivo pessoal

É importante ressaltar que foi possível realizar a divisão porque convertemos 11 dezenas, que é um número menor que 54 dezenas, em 110 unidades somadas com as 9 disponíveis no dividendo, totalizando 119 unidades, que consequentemente tornou-se um número maior que 54. Após a redistribuição, restam 11 unidades a serem particionadas como mostrado na figura 57.

Podemos converter 11 unidades em 110 décimos, dessa maneira, estamos operando com uma grandeza inferior à unidade e sabendo que, a vírgula é utilizada para separar a parte inteira da decimal, então obrigatoriamente à posicionamos no quociente. Note que, a vírgula não foi inserida de forma não ordenada, houve uma argumentação plausível na realização disso. Como podemos observar na figura 58 abaixo:

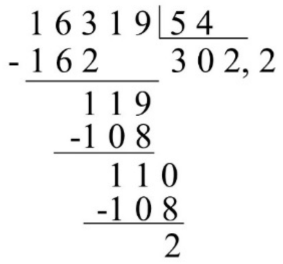
Figura 58: Separando a parte inteira da decimal no quociente



Fonte: Arquivo pessoal

Podemos distribuir 2 grupos de 54 décimos no conjunto de 110 décimos. Estamos operando com números menores que as unidades, é importante ressaltar que esta distribuição estará posicionada imediatamente à direita da vírgula, respeitando assim a regra inicial de que, na subtração, só podemos operar objetos de mesma natureza. Logo, 2 grupos de 54 é equivalente a 108, e os distribuindo nos 110 temos uma sobra de 2 décimos.

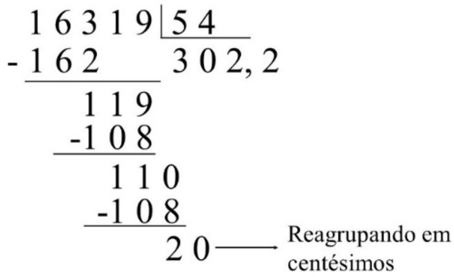
Figura 59: Operando com a parte decimal da divisão 16319 por 54



Fonte: Arquivo pessoal

Para continuar a distribuição, precisamos converter os 2 décimos disponíveis em uma grandeza de ordem inferior a esta, neste caso devemos converter em centésimos, temos 2 décimos que podem ser convertidos ao equivalente a 20 centésimos. Observe o resultado na figura 60.

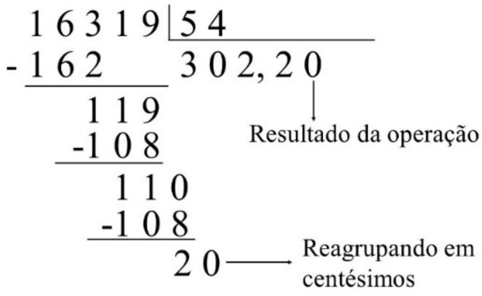
Figura 60: Distribuindo 2 décimos na divisão 16319 por 54



Fonte: Arquivo pessoal

Sendo assim, podemos continuar operando e distribuir em 20 centésimos 54, temos que cada grupo ficará com zero centésimos porque 54 não cabe em 20 por ser maior. Note na figura 61 apresentada a seguir.

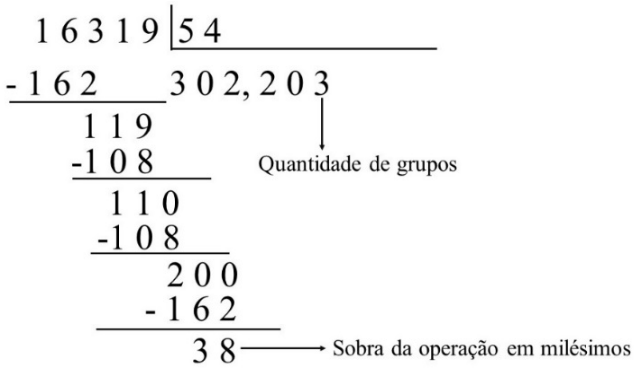
Figura 61: Distribuindo 20 centésimos na divisão 16319 por 54



Fonte: Arquivo pessoal

Dessa maneira, converteremos 20 centésimos em 200 milésimos, e consequentemente podemos distribuir 3 grupos de 54 milésimos em 200 milésimos e restar-nos-ia, após a reconfiguração deste, uma sobra de 38 milésimos, veja a figura 62 abaixo.

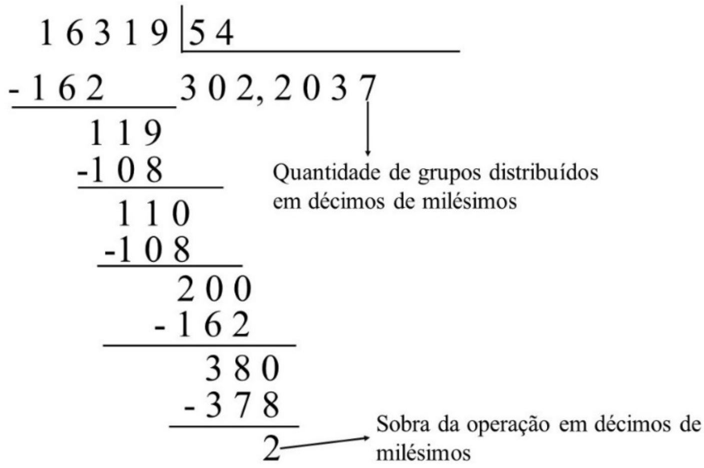
Figura 62: Distribuindo 200 milésimos na divisão 16319 por 54



Fonte: Arquivo pessoal

Convertendo 38 milésimos em 380 décimos de milésimos, distribuiremos 7 grupos de 54 e teremos como resultado uma sobra de 2 décimos de milésimos. Podemos observar o procedimento na figura 63.

Figura 63: Distribuindo 380 décimos de milésimos na divisão 16319 por 54

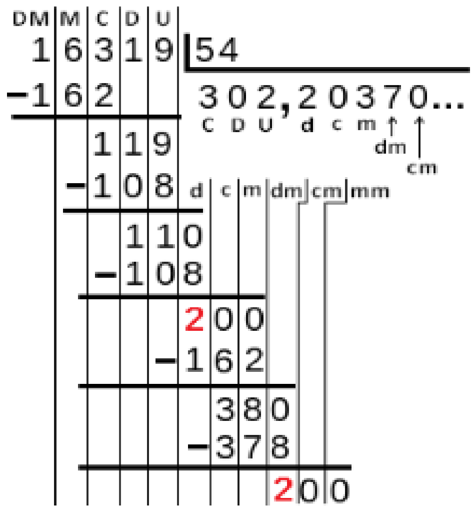


Fonte: Arquivo pessoal

Poderíamos realizar várias conversões e continuar resolvendo o algoritmo, temos 2 décimos de milésimos que podem ser convertidos em 20 centésimo de milésimos ou em 200 milionésimos. Ressaltamos que o resto nos reserva uma informação importante do algoritmo. Na divisão em que desejamos um resultado preciso, se o resto for zero e o quociente inteiro, teremos uma divisão inteira, e, portanto, exata.

Para o caso continuado, vale a ressalva de duas particularidades, se a sobra for zero, o quociente poderá ser um numeral decimal exato, se o resto for um número que se repete, como o caso do 2 no algoritmo da figura 64, poderíamos realizar essa operação infinitamente e não chegaríamos a um quociente exato, ou seja, o número 2 tornaria a repetir-se como sobra e, portanto, o resultado desta operação será uma dízima periódica. Observe a figura 64:

Figura 64: Observação do surgimento de uma dizima periódica



Fonte: Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino.

Caracterizamos o resultado da operação acima como uma dízima pelo motivo do padrão existir. Certamente um valor aproximado para o resultado poderia ser apresentado ao educando, dependerá de quantas casas decimais será levado em consideração, ou seja, quantos algarismos significativos serão tomados como valor verdade.

Então, conhecendo as fundamentações procedimentais do algoritmo da divisão, e sabendo operar este por dois naturais, ou seja, na divisão em que o quociente é um numeral inteiro e não haja sobra, podemos estender essas relações, conhecendo o sistema posicional decimal, para os casos em que a vírgula aparecer no divisor, dividendo ou simultaneamente em ambos.

Contudo, analisando o caso em que tenhamos a operação $163{,}19 \div 5{,}4$, a título de exemplo, podemos justificar o motivo de igualarmos o número de casas decimais e ignoramos a vírgula, ou seja, por que quando temos que dividir $163{,}19 \div 5{,}4$ igualamos o número de casas decimais e depois fazemos a divisão inteira?

Podemos reescrever 163,19 como $16319 \div 100$, pois temos dezesseis mil trezentos e dezenove centésimos, da mesma forma 5,4 como $54 \div 10$. A reconfiguração anterior só foi possível porque conhecemos o sistema posicional decimal e pela conversão de grandezas de ordem maiores em ordem inferiores. Temos então:

$$(16319 \div 100) \div (54 \div 10)$$

Reagrupando o numeral 54 e igualando os denominadores, temos:

$$\frac{16319}{100} \div \frac{540}{100}$$

É importante frisar que, essa justificativa será válida se, e somente se, o educando já possui conhecimento das propriedades de divisão de fração onde a divisão é a operação inversa da multiplicação e, portanto, dividir frações é manter a primeira intacta e multiplicar pelo inverso da segunda, ou seja:

$$\frac{16319}{100} \div \frac{540}{100} = \frac{16319}{100} \cdot \frac{100}{540} = \frac{16319}{540}$$

Resultado já conhecido, logo, a justificativa que nos leva a igualamos o número de casas decimais e depois fazemos a divisão, é reconfigurar o numeral deixando-o em igual grandeza numérica para que tenhamos denominadores de bases iguais, realizando assim uma operação inteira já dominada de conhecimento.

Dessa forma, podemos expor o algoritmo da divisão relacionando as fundamentações de que quando o resto, que será o novo dividendo, é menor que o divisor na divisão inteira, o zero aparece ao quociente como consequência de nenhuma distribuição de parcelas realizadas em relação a esse novo divisor e ao dividendo. Que a vírgula aparece ao quociente, após o termino da divisão inteira, quando convertemos o resto em grandeza menor que unidades, e quando há repetições consecutivas de um algarismo qualquer no resto, operando em decimais necessariamente surgirá a dízima periódica.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conhecer as fundamentações e os porquês na efetuação das operações através dos algoritmos práticos é de fundamental relevância no processo de construção do conhecimento de nossos educandos. O professor do ensino básico deve estar munido dessas fundamentações para que possa transgredir a barreira do ensinar, unicamente, da forma convencional; e de forma concreta fazer com que, o processo normalmente exposto possa ter auxílio de materiais e métodos que dão significados no decorrer do ensino aprendizagem.

Ma (2009, p. 29, 30), ressalta que: “Um professor com uma compreensão profunda da matemática fundamental está não só consciente da estrutura conceptual e das atitudes básicas da matemática inerentes à matemática elementar, mas também é capaz de ensiná-las aos alunos”. Dessa forma, este trabalho pode ser utilizado pelo professor do ensino básico, nas séries iniciais, como material de apoio uma vez que, nossa preocupação proposta aqui fundamenta-se, prioritariamente, na compreensão dos motivos que validam o algoritmo das quatro operações básicas inserindo argumentações e materiais concretos que podem fazer sentido e/ou tenha algum significado para o aluno.

O modelo convencionalmente utilizado é prático, porém assim como qualquer outro, pode ser aprimorado com a utilização de ferramentas adequadas que servem como suporte no aperfeiçoamento deste. Dessa maneira, torna-se clara a proposta apresentada neste trabalho de fundamentar as argumentações convencionais com o apoio de materiais e argumentos que tenham significado ao procedimento e consequentemente, algumas limitações na compreensão dos algoritmos serão sanadas a partir da iniciativa de introduzir conceitos entendíveis embasados em fundamentações lógicas.

O professor da educação básica, conhecendo as fundamentações lógicas da matemática elementar, principalmente o algoritmo das quatro operações, poderá melhor fundamentar os argumentos mais utilizados em sala de aula como “o porquê vai um, para que serve a vírgula, empresta um, anda com a vírgula tantas casas”, por exemplo. E caso preciso, poderá continuar argumentando dessa forma, porém, sabendo que essas argumentações são realizadas por serem práticas ao operar o algoritmo e que o importante é relacionar significativamente esse “um que foi”, o papel de vírgula no numeral; o “empresta um” e compreender de fato o motivo que provoca o deslocamento da vírgula no algoritmo da multiplicação e divisão, para transpor essas fundamentações de forma mais clara para seus alunos.

Dessa maneira, o profissional da educação poderá de acordo com a sequência didática escolhida, definir a melhor forma de avaliar seus alunos. No entanto, sugerimos que esta seja feita de forma continuada e qualitativa, pois de acordo com Pais, (2011), “Do ponto de vista metodológico, a avaliação é uma etapa onde a vigilância deve ser aplicada, pois se trata de garantir a essência do caráter científico. Dessa maneira, enquanto procedimento metodológico, a engenharia didática se fundamenta em registros de estudos de casos, cuja validade é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada”.

Atribuir significado no processo de efetuar as operações através dos algoritmos práticos é o objetivo fundamental deste trabalho, partindo de fundamentações lógicas para que não haja a necessidade de decorar formas e posições, procedimentos e “macetes” quando operamos com os algoritmos das quatro operações básicas. E isso pode ser feito ao apresentarmos esses conteúdos nas séries iniciais do ensino básico. Unificando o convencional a proposta aqui apresentada é uma sugestão que pode ser melhorada ou adaptada conforme a necessidade do professor para minimizar, de acordo com as vivências em sala de aula, o desafio de ensinar essas operações.

REFERÊNCIAS

BOYER, C.B. ***História da Matemática***. São Paulo: Edgard Bencher Ltda, 2003.

GLAESER, G. ***Epistemologia dos Números Relativos.*** Boletim do GEPEM. Rio de Janeiro, n. 17, p. 29-124, 1981.

LUCKESI, Cipriano Carlos. ***Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições***. 18ª.ed. São Paulo: Cortez, 2006.

MA, LIPING. ***Saber e Ensinar matemática Elementar.*** 1ª ed. Lisboa: Gradiva, 2009.

MARTINI, G. ***Estratégias de trabalho para a aprendizagem de operações com números inteiros.*** 2010, Trabalho de Conclusão de Curso – Faculdade de Matemática de Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

MOL, ROGÉRIO S. ***Introdução à História da Matemática***. Belo Horizonte: CAED-UFMG,2013.

MOREIRA, M. A. http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf s.d. Acesso em 06 de Maio de 2018, disponível em www.if.ufrgs.br.

PAZ, LUIS CARLOS. ***Didática da matemática: Uma análise da influência francesa*** 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica. 2011.

PASSONI, J. C. ***Pré-álgebra: Introduzindo os Números Inteiros***. São Paulo: PUC. 2002.

PEREIRA F. L; MOURA, M. M; LIMA M. D. V; FURTADO, N. F. ***Números Inteiros***, Trabalho de conclusão de Curso-Universidade do Estado do Pará, 2006.

RAMOS, L. F. ***Conversa sobre números, ações e operações: uma proposta criativa para o ensino de matemática nos primeiros anos*** 1ª ed. São Paulo, SP: Ática. 2009.

RODRIGUES, AROLDO EDUARDO ATHIAS. ***Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino.*** 2013. 166 f.: il. Dissertação (Mestrado)-Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática. Santarém.

SOARES, P. J. ***O jogo como recurso didático na apropriação dos números inteiros: uma experiência de sucesso***. 2008. 157 f. Dissertação (mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

TODESCO, H. ***Um estudo com os Números Inteiros nas Séries Iniciais: Reaplicação da Pesquisa de PASSONI***. São Paulo: PUC. 2006.

ZABALA, Antoni. ***A prática educativa: como ensinar***. Porto Alegre: Artmed, 2007.