UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

MARCELO DE LIMA LOPES

DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE EDUCACIONAL E SUA APLICAÇÃO EM NÚMEROS ESPECIAIS

Santarém
2022

MARCELO DE LIMA LOPES

DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE EDUCACIONAL E SUA APLICAÇÃO EM NÚMEROS ESPECIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, área de concentração Matemática Aplicada.
Orientador: Prof. Dr. Mario Tanaka Filho
Coorientador: Prof. Dr. José Antônio de Oliveira Aquino

Santarém
2022

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas (SIBI) da UFOPACatalogação de Publicação na Fonte. UFOPA - Biblioteca Unidade Rondon

Lopes, Marcelo de Lima.
Desenvolvimento de software educacional e sua aplicação em números especiais / Marcelo de Lima Lopes. - Santarém, 2022.
120f.: il.

Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Oeste do Pará-UFOPA. Instituto de Ciências da Educação-ICED. Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT.
Orientador: Mario Tanaka Filho.
Coorientador: José Antônio de Oliveira Aquino.

1. Software educacional. 2. Aritmética. 3. Números especiais. 4. Aprendizagem. I. Tanaka Filho, Mario. II. Aquino, José Antônio de Oliveira. III. Título.

UFOPACampus Rondon CDD 372.41 23.ed

Elaborado por Selma Maria Souza - CRB-2/1096

MARCELO DE LIMA LOPES

DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE EDUCACIONAL E SUA APLICAÇÃO EM NÚMEROS ESPECIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, área de concentração Matemática Aplicada.

Conceito: Aprovado

Data de aprovação: 26 / 04 / 2022 .

Mario Tanaka Filho

Prof. Dr. Mario Tanaka Filho
Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA

Prof. Dr. José Antônio de Oliveira Aquino
Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA

Claudir Oliveira

Prof. Dr. Claudir Oliveira
Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA

Prof. Dr. João Claudio Brandemberg Quaresma
Universidade Federal do Pará - UFPA

Dedico este fruto, aos meus pais pelo apoio e amor, a minhas filhas pelo companheirismo e compreensão, aos meus irmãos e irmã pelo incentivo, a minha família pelo carinho e a todos que comungam da paixão pela matemática, por estarmos juntos.

AGRADECIMENTO

Aos meus pais, Antônio Marciano e Mª do Socorro Lopes, pelo exemplo de perseverança, pela presença marcante em minha vida, pelo apoio e incentivo descomunais.

À minhas filhas, Marcele Jussara e Kelly Maísa, por compreender o tempo passado distante de nossas práticas cotidianas, de nosso contato.

Aos meus irmãos e irmã, pela preocupação e cuidado para comigo, pela influência em minha formação e por sempre estar presente.

À minha família, por compreender minha ausência, por apoiar meu desenvolvimento e incentivar meu crescimento.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Mario Tanaka Filho e Prof. Dr. José Antônio de Oliveira Aquino, por acreditar em meu potencial e incentivar a continuação na caminhada educacional.

Aos professores do Mestrado, pela participação ativa em minha formação, pela troca de experiências e por possibilitar meu crescimento.

Aos servidores e colaboradores da Ufopa, pelo calor humano, pelo contato afetuoso e cordial no trato cotidiano.

Aos amigos de turma do Mestrado, pela vivência positiva e construtiva, pelos momentos agradáveis que passamos juntos.

Aos voluntários que participaram do projeto, contribuindo para a consecução do presente trabalho.

A todos que contribuíram com o projeto, direta ou indiretamente, participando ou incentivando a realização do presente trabalho.

“A introdução de abstrações adequadas é a nossa única ajuda mental para reduzir o apelo à enumeração, para organizar e dominar a complexidade.”

Edsger W. Dijkstra

RESUMO

A aritmética é praticada e estudada há séculos, entretanto, tais conhecimentos não afastaram a realidade atual, onde entre os maiores problemas apontados para os desempenhos insatisfatórios em Matemática, está o baixo domínio das operações básicas pelos estudantes, sendo vivenciado pela experiência educacional do autor, e evidenciado na literatura por Masola e Allevato (2016). Relacionado ao fato supracitado, neste trabalho foi desenvolvida uma ferramenta educacional visando a aprendizagem de aritmética e números especiais como alternativa na busca de facilitar a assimilação dos temas em epígrafe, almejando desta forma, contribuir com a educação matemática. A princípio, o software seria aplicado com estudantes do 7º ano do ensino fundamental em 2 (duas) escolas no município de Santarém, entretanto, em virtude da impossibilidade de reunir estudantes em salas de informática devido a pandemia causada pela Covid-19, a aplicação foi realizada de maneira voluntária, através da disponibilização do software em página na internet e também divulgado pelas redes sociais. Os participantes puderam conhecer e fazer uso do software previamente, contribuindo assim com a pesquisa por meio de um questionário eletrônico. Para o desenvolvimento da pesquisa descritiva, caracterizada como *Survey*, foi aplicado aos participantes um questionário com perguntas abertas e fechadas, buscando lhes possibilitar respostas adequadas às suas necessidades, classificando o presente estudo em qualitativo e quantitativo devido aos tipos de perguntas e consequente análise das respostas. Os resultados apontaram a adequação do Senes para a aprendizagem de aritmética, indicando a contribuição do programa para a prática e apreensão de novos conhecimentos de maneira descontraída e lúdica. Assinalaram ainda, o fato de ferramentas educacionais deste tipo contribuir significativamente para melhorar a qualidade da educação matemática, por possibilitar a visualização da aplicação prática dos conhecimentos, além de envolver e atrair a atenção do aprendiz.

Palavras-Chave: Software Educacional. Aritmética. Números especiais. Aprendizagem.

ABSTRACT

The present work was motivated by the need to strengthen knowledge about arithmetic, seeking to achieve better results in the teaching-learning process of Mathematics, because in several cases, among the problems indicated by educators for the low performance of students in mathematics, is the low mastery of basic mathematical operations. The domain of functional programming in Haskell by the proponent, allowed him to develop and present the Senes, an Educational Software for the learning of arithmetic and special numbers. The aim of the research is to verify the influence of the software on the learning of arithmetic. The software would be applied in schools with students of basic education however, due to the pandemic of Covid-19, the application was carried out voluntarily, through the availability of the software on its own web page for this purpose, and disseminated by social networks, where participants could know and make use of the software, and then contribute to the research by answering an electronic questionnaire. For the development of descriptive research characterized as *Survey*, a questionnaire was applied to participants with open and closed questions, which allowed the participants answers more appropriate to their needs, classifying the present study as qualitative and quantitative due to the types of questions and the consequent analysis of the answers. The results indicated the adequacy of the Senes for the learning of arithmetic by contributing to the practice and apprehension of new knowledge in a relaxed and playful way, also pointed out that educational tools of this type can contribute significantly to improve the quality of mathematical education, because it allows the visualization of the practical application of knowledge, besides involving and attracting the attention of the learner.

Keywords: Educational Software. Senes. Arithmetic. Special numbers. Apprenticeship.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE DIAGRAMAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A sociedade está imersa em tecnologia, sendo considerada na atualidade como sociedade digital, onde o uso de recursos computacionais está presente em diversos ramos. E neste contexto, a escola não pode ser alheia a tal realidade deve, portanto, desfrutar das possibilidades desencadeadas por ela. Assim, uma das formas de garantir a inclusão digital nas escolas é através da apresentação de ferramentas e motivação para a utilização de softwares educacionais no processo de aprendizagem, buscando então facilitar e melhorar o entendimento de temas educacionais e descomplicar o aprendizado.

Podemos citar aqui a disciplina de matemática, intimamente ligada à programação computacional, principalmente em linguagens funcional, onde estudantes apresentam dificuldades de aprendizagem. Alguns consideram difícil, outros que não tem aplicação prática e desinteressante. Entretanto, com o uso de software educacional, é possível interagir com o programa, aprender e aplicar seus conhecimentos e assim, apresentar melhoria de desempenho, conhecer aplicações da matemática para a resolução de problemas reais.

A aritmética, como ramo da Matemática, vem sendo estudada e praticada há séculos por estudiosos e outras pessoas interessadas no ramo, ainda que com outras funções oficiais, como o Padre Marin Mersenne (1588-1648), tornando-se notoriamente conhecido por seus números primos (Primos de Mersenne). Entretanto, este tempo não foi suficiente para responder todas as perguntas sobre a aritmética, tampouco, para evitar a realidade presente, mostrando a aritmética como um fator a ser reforçado no processo educacional.

Em diversos casos, o pouco domínio de operações básicas (cálculos aritméticos) pelos estudantes é apontado por educadores como um dos causadores de baixo desempenho educacional tanto na disciplina matemática, quanto em outras disciplinas que necessitam de tais conhecimentos. Tal ocorrência é evidenciada em vários níveis da educação, do ensino fundamental, passando pelo ensino médio, e até mesmo no ensino superior, segundo Masola e Allevato (2016).

Pensando no exposto, e visando contribuir em minimizar tais dificuldades, neste trabalho desenvolvemos uma ferramenta computacional denominada Senes (Software Educacional para Números Especiais). Trata-se de uma ferramenta que visa fortalecer o aprendizado da aritmética e aplicá-lo na identificação de números especiais, proporcionando a relação entre teoria e prática, ao relacionar a aplicação dos números especiais em situação reais como na programação e segurança digital.

A proposta do software é fornecer conhecimentos, orientações e instruções para o cálculo aritmético das operações, além de apresentar informações enriquecedoras sobre matemáticos e sobre a matemática, desta forma, este servirá como ferramenta de incentivo à busca de conhecimentos, motivando estudantes e aprendizes de modo geral, a tornarem-se protagonistas de seus conhecimentos.

Neste sentido, na Seção 2 será apresentada uma visão sobre o ensino-aprendizagem de matemática. Esta disciplina é apontada como uma das mais difíceis do currículo escolar pelos estudantes, segundo as investigações apresentadas na literatura por Rodrigues (2019), Masola e Allevato (2016), entre outros e evidenciada na prática educacional cotidiana. Apresentaremos ainda a utilização de softwares no ensino de matemática, como fator que pode favorecer o processo de aprendizagem significativa na disciplina, propiciando a prática de cálculos aritméticos, tanto mentais, quanto computacionais.

A seção 3 foi destinada para a apresentação dos conhecimentos sobre aritmética abordados no Senes, através da fascinante viagem pelos números, destacando a Memorável História da contagem, a importância da contagem tanto no passado, quanto no presente. As implicações em relação a identificação de números primos e Números de Mersenne, dos quais fazem parte os Primos de Mersenne, com destaque para o fato de o maior número primo conhecido atualmente ser um destes. Relação entre os primos de Mersenne com os números perfeitos pares e com números triangulares, entre outros conhecimentos relevantes, relacionados a cálculos aritméticos e números especiais.

A Seção 4 abordará a Engenharia de Software, onde será possível entender a caracterização de um software, identificar um software educacional, diferenciando-o dos demais por suas funcionalidades e potencialidades, fornecendo subsídios para identificação de softwares destinados ao ensino e a aprendizagem, de igual modo, será mostrado o Senes, seu modo de navegação, sua estrutura, onde encontrar as informações desejadas e o modo prática de conhecimentos, onde será possível aplicar e treinar os temas abordados com níveis diferentes de dificuldade.

A metodologia aplicada à pesquisa será descrita na Seção 5, indicando a precedência pelo desenvolvimento do software educacional pelo autor, seguido pela reavaliação sobre a maneira de aplicação do software, em decorrência da pandemia de Covid-19, motivo da alteração do processo pedagógico da pesquisa de ensino-aprendizagem, para apenas aprendizagem, pois a aplicação não poderia mais ocorrer nas Escolas devido à questões sanitárias, passando para a disponibilização do Senes na Internet, em site próprio.

A participação na pesquisa passou a ser através do voluntariado, onde os interessados puderam realizar o download do programa, utilizar em seu computador e após o uso, contribuir com a pesquisa respondendo a um questionário eletrônico com perguntas fechadas e abertas disponibilizado no mesmo site de hospedagem do programa, possibilitando desta forma um Estudo Transversal sobre as possíveis implicações do uso do software, em uma pesquisa descritiva ao valer-se de técnica padronizada para coleta de dados, possibilitando o alcance de resultados qualitativos e quantitativos.

Os resultados da pesquisa podem ser encontrados na Seção 6, nela é possível notar a participação de voluntários de diversas cidades, como a cidade polo da pesquisa – Santarém, Manaus, Belém, entre outros municípios, alcance possibilitado por ser pesquisa on-line. Os participantes indicaram ter apreendidos novos conhecimentos, tanto históricos, quanto aritméticos, principalmente sobre os temas que associam a relação de mais de um componente, como a relação entre máximo divisor comum (mdc) e mínimo múltiplo comum (mmc), e a relação entre os números primos de Mersenne e os números perfeitos.

As considerações finais do trabalho são apresentadas na Seção 7, indicando as afinidades entre a investigação por nós desenvolvida e a literatura consultada para referenciar a produção do presente trabalho, mostraremos a importância da utilização de ferramentas digitais como facilitadoras do processo de aprendizagem, assim como exibiremos a aceitação do software como ferramenta de aprendizagem de aritmética e números especiais e o compromisso do autor para a manutenção e atualização do Senes.

2 MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO

A presente seção mostrará o referencial teórico sobre a Matemática na Educação, proporcionando uma visão sobre o ensino-aprendizagem de matemática, suas dificuldades e os desafios enfrentados tanto por estudantes, quanto por professores. A experiência escolar e as pesquisas educacionais apresentam a Matemática como uma das disciplinas mais difíceis do currículo, na ótica dos estudantes, para contornar tal situação, as investigações apresentadas na literatura e na prática educacional, apontam a utilização de software no ensino de matemática, como fator que pode favorecer a educação matemática, a prática de cálculos aritméticos tanto mentais, quanto computacionais.

2.1 Ensino-aprendizagem de matemática

O processo de ensino-aprendizagem pressupõe a ligação entre dois entes, estando por um lado o professor, enquanto pelo outro, o estudante, ambos sujeitos ativos. A literatura aponta a existência do aprendizado sem auxílio de um professor, porém é enfática ao afirmar a interdependência do ensino diretamente vinculado ao aprendizado, restando as compreensões de Kubo e Botomé (2001), assim como de Ostermann e Cavalcanti (2011).

Para os autores supracitados, existe uma relação entre o objetivo de ensino e o fazer pedagógico no processo ensino-aprendizagem, vinculando os comportamentos dos professores de "ensinar" com o comportamento dos estudantes de "aprender", ressalta-se o processo como um organismo vivo, logo, não pode ser pensado como algo "estático, fixo". Relacionando com o método freireano, propor o ensino de maneira separada do aprender é uma forma inadequada de fazer educação.

Neste sentido, Kubo e Botomé (2001, p. 5) afirmam que

> Ensinar define-se por obter a aprendizagem do aluno e não pela intenção (ou objetivo) do professor, ou por uma descrição do que ele faz na sala de aula. A relação entre o que o professor faz e a efetiva aprendizagem do aluno é o que, mais apropriadamente, pode ser chamado de ensinar.

Complementando a interpretação, Ostermann e Cavalcanti (2011) apontam como objetivo do processo ensino-aprendizagem o desenvolvimento de pessoas plenamente atuantes, de modo geral, o objetivo educacional deve ser a facilitação da aprendizagem. Para os autores, a aprendizagem é evidenciada a partir da mudança de comportamento do aluno, onde "suas relações com seu meio que evidenciam o que, de fato está produzindo de transformações nesse meio" (KUBO e BOTOMÉ, 2001, p. 6).

Na concepção freireana para Ostermann e Cavalcanti (2011), a aprendizagem é concebida a partir do momento em que o aprendiz consegue interagir com seu meio transformando-o, neste entendimento, a educação deve ser libertadora, contrapondo-se à educação tradicional, tida como "bancária", por apenas "depositar" informações e à educação renovada, por se tratar de uma libertação psicológica individual.

Segundo Kubo e Botomé (2001), a aprendizagem ocorre quando o aprendiz consegue alterar satisfatoriamente a situação-problema a que é submetido com pouco (ou nenhum) desgaste físico ou emocional, mantendo a autoconfiança, possibilitado pelo acúmulo de experiência, assim, com pouco "desgaste", consegue solucionar ou obter algum grau de solução para a situação-problema.

Neves e Damiani (2006), assinalam o processo de ensino-aprendizagem como fruto da interação social, e o aprendizado como resultado da cultura, onde este acontece devido a zona de desenvolvimento proximal, compreendido pelo "distanciamento" ou diferença, entre os conhecimentos do professor e do aluno, pondo o professor como agente indispensável no processo a partir da análise da teoria de aprendizagem de Vygotsky.

Ostermann e Cavalcanti (2011) ressaltam que para Vygotsky, o ensino deve ser pensado para níveis além dos desenvolvimentos já obtidos, do contrário o processo será ineficaz, pois não haverá mais desenvolvimento global do aluno, deste modo, deve preceder ao ensino, a identificação do desenvolvimento do estudante, visando antecipar o conhecimento para a aprendizagem.

A respeito das dificuldades encontradas para a aprendizagem, Kubo e Botomé (2001, p. 9) nos trazem os custos da ausência do professor com seu ensinar, para os autores, "Caso o professor não o auxilie, não ensine tal maneira de agir perante as circunstâncias com que se defrontará, o aluno provavelmente demorará muito tempo e terá um custo muito alto até descobrir como estabelecer uma relação melhor com as circunstâncias com que se defronta".

As dificuldades são encontradas no processo ensino-aprendizagem de modo geral, em todas as disciplinas, entretanto, existe um destaque para as disciplinas intimamente ligadas à cálculos, onde a matemática está no centro, seja por consistir na base para os cálculos das demais disciplinas como física, e química, ou por constar na base do currículo educacional, sendo apresentada como disciplina a partir das séries iniciais da educação básica (BRASIL, 2018), seguindo como obrigatória até o final do ensino médio, onde em comparação com as demais disciplinas, sua incidência é maior, proporcionando por consequência maior evidência.

As dificuldades vinculadas à matemática são apresentadas não apenas por sua grande incidência, mas entre outros motivos, por ser considerada por estudantes como difícil, neste sentido, aponta Evangelista (2014, p. 41), “Os alunos consideram a matemática chata e misteriosa, que assusta e causa pavor, e por consequência, o aluno sente medo da sua dificuldade e vergonha por não aprendê-la.”, além da problemática voltada ao fato do estudante não conseguir transformar seu aprendizado, surge o fator psicológico podendo influenciar em sua falta de aprendizagem ao assumir a disciplina como um obstáculo, algo intransponível. Neste sentido, Zatti, Agranionih e Enricone (2010, p. 128), afirmam ser

> [...] importante refletir que dificuldades relacionadas aos primeiros estágios das operações básicas (contagem, adição e subtração) podem resultar em problemas futuros, relacionados tanto com aspectos cognitivos quanto com a motivação, já que a criança não obtém satisfatoriamente noções de habilidades básicas que serão importantes posteriormente. Além disso, ao perceber seu insatisfatório grau de êxito no desempenho de atividades matemáticas, pode se desmotivar e perder o interesse.

A ênfase de Rodrigues (2016, p. 14), ao citar as dificuldades nas “Operações básicas com que, ao longo dos anos escolares, os alunos se deparam, em situações diretas ou indiretas, na Matemática e nas disciplinas afins”, destaca a necessidade de destinar atenção ao processo educacional, neste sentido, Evangelista (2014) aponta como uma possível solução, a mudança de atitude do professor, abandonando o método expositivo tradicional, onde o estudante possui um papel passivo, para valer-se de metodologias ativas, tornando o estudante sujeito ativo no processo educacional, indica ainda a utilização de “mídias digitais. Com inúmeras vantagens, as mídias digitais podem tornar a aula mais dinâmica, atraente e interessante para o aluno” (EVANGELISTA, 2014, p. 47).

A literatura nos mostra que tal realidade educacional é sentida nos diversos estágios da educação, das séries iniciais ao ensino médio, refletindo-se na educação superior, onde para Masola e Allevato (2016, p. 65), as dificuldades refletem diretamente na formação acadêmica dos “cursos superiores em que o aluno está inserido, principalmente em Matemática. As dificuldades se refletem, também, em outras disciplinas na continuidade do curso”, em outras palavras, é necessário cuidar da formação pela base, para minimizar as dificuldades matemáticas.

Concordando com Evangelista (2014), Masola e Allevato (2016, p. 71) apontam que o professor

> deve refletir sobre sua própria prática e desenvolver esforços para alterar o foco das tarefas que propõe; criar ambientes de aprendizagem que possibilitem a troca de experiências e a construção ou reconstrução de ideias matemáticas utilizando tecnologias que possam ser incorporadas, aos poucos, como ferramentas cognitivas. Mas é preciso estar consciente de que a utilização de determinada tecnologia em sala

> de aula depende do empenho do professor para conhecer as potencialidades e as limitações do recurso tecnológico adotado, ou seja, depende de seu esforço pessoal em consumir e incorporar tecnologias para empregá-las de maneira que mudem as formas de pensar e de fazer Matemática com seus alunos.

Indicando ainda a importância da formação do professor para a melhoria do processo ensino-aprendizagem. Para Martins, Santomauro e Ratier (2008, p. 59), "o conhecimento do docente e sua atuação em sala de aula são decisivos para o desempenho da turma". Mostrando com isso que os conhecimentos e habilidades do professor têm grande relação com o nível de entendimento, qualidade e desempenho da turma na qual ele trabalha.

Ao tomar como base o sistema escolar de países que têm o melhor desempenho educacional do mundo, vemos a importância e a necessidade de investir na formação educacional do professor, pois como afirmam Martins, Santomauro e Ratier (2008, p. 60), é necessário entre outros fatores, cuidar da formação dos docentes, para que possa haver educação de qualidade, sobre os professores, "É preciso mantê-los sempre atualizados. Mentoria, trabalhos em grupo, cursos sobre as didáticas específicas... Existem várias maneiras de criar e disseminar as melhores estratégias de ensino". Portanto, a literatura nos mostra uma íntima ligação entre o sucesso do processo ensino-aprendizagem e a boa qualificação dos educadores.

2.2 Ensino-aprendizagem da Matemática mediado por Software Educacional

O mundo contemporâneo tem apresentado a tecnologia como mediadora para inúmeros processos, sua utilização na indústria, no comércio e na administração são muito frequentes e na educação não é diferente, o uso da tecnologia na educação tem representado um avanço frente as metodologias tradicionais, conforme Cassiano *et al.* (2013, p. 688) " [...] os softwares educativos tem contribuído para a ruptura da metodologia tradicional composta por giz e quadro. São considerados educativos por que foram desenvolvidos exclusivamente para o uso na educação [...]", atrelado ao uso da tecnologia, é fundamental que o professor esteja preparado para lidar com tal ferramenta, do contrário, os objetivos podem não ser alcançados.

O uso de ferramentas didáticas como softwares educacionais no ensino-aprendizagem de matemática, para Cassiano *et al.* (2013, p. 688) "tem papel importante dentro do ambiente escolar, podendo auxiliar os professores com novos recursos e novas estratégias didáticas e despertar, nos alunos, o interesse pelo aprendizado.", além da possibilidade de transmitir uma melhor concepção de matemática junto ao aprendizado, onde para os mesmos autores "A utilização de softwares nas atividades de ensino da matemática pode desmistificá-la como uma disciplina difícil, fazendo com que os alunos se sintam motivados e interessados pela matéria.” (CASSIANO *et al.,* 2013, p. 688), neste contexto, é possível melhorar o desempenho de estudantes na disciplina matemática, bem como transformar a visão equivocada que se tem da disciplina, ao concebê-la como difícil.

As práticas de ensino-aprendizagem em matemática pressupõem competências e habilidades relativas à compreensão de conceitos matemáticos, sua identificação e aplicação em fenômenos naturais e situações concretas, seja por meios de ferramentas manuais, mecânicas ou tecnologias digitais. Neste último, está nosso enfoque, pois dada a necessidade e importância do tema, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), entre outras normas oficiais brasileiras preveem sua utilização e aplicação, onde segundo Brasil (2018, p. 276)

> [...] a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares [...] têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas.

Neste sentido, Brasil (2018), destaca ainda importância de construir conhecimentos que favoreça aos jovens a inserção ativa e dinâmica na sociedade atual, ao relacionar os conhecimentos às práticas do cotidiano, devido ao fato de as tecnologias digitais estarem cada vez mais presentes em nosso cotidiano, em nossos “bolsos” inclusive, através dos aparelhos celulares.

O uso de software educacional para desenvolver os conhecimentos matemáticos, deve-se principalmente a ampla gama de possibilidades disponíveis para trabalhar na prática digital com temas variados como geometria, álgebra, aritmética, frações, inclusive lógica, através de softwares que possibilitam a programação matemática, favorecendo ao estudante desenvolver a prática de criação de seus próprios códigos em linguagem de programação, neste aspecto,

> [...] usar diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática; e utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade. (BRASIL, 2018, p. 475)

O conjunto de informações apresentadas nos mostra a possibilidade de melhorar os desempenhos e resultados em matemática, bem como mudar a visão que se tem pela matemática, de uma disciplina difícil e complicada, para uma mais prazerosa, como apontam Frederico e Gianotto (2013, p. 46)

> A Física e a Matemática são algumas das disciplinas que lideram o ranking de reprovações em todo o Brasil. Não diferente de outras disciplinas, acredita-se que podem vir a melhorar substancialmente com ouso de tecnologias inovadoras. É um recurso adicional que pode contribuir significativamente para tornar as aulas muito mais dinâmicas e prazerosas de serem trabalhadas.

Consoante a estes fatos, estão Ferreira, Campos e Dias (2008, p. 6), pois em geral, "A escolha de trabalhar com software voltado ao ensino da matemática foi motivada pela dificuldade encontrada por muitos alunos na disciplina, e ainda pela grande importância atribuída aos conhecimentos e métodos dela decorrentes", deste modo, percebe-se a possibilidade de facilitar o aprendizado da matemática e dinamizar as aulas, propiciando aos estudantes e professores momentos mais prazerosos em aula, o que pode contribuir para ampliar o aprendizado e minimizar o alto nível de reprovação na disciplina.

3 A FASCINANTE VIAGEM PELOS NÚMEROS

Apresentaremos nesta seção uma fascinante viagem pelos números, onde os temas serão tratados de maneira intuitiva, em oposição ao método axiomático (com demonstrações formais), tal qual o fizemos no Senes, buscando deixar o conhecimento menos maçante, entretanto, em virtude da formalidade exigida pela classificação e destinação do presente trabalho, o texto foi transposto para linguagem acadêmica.

Toda via não utilizaremos citações diretas ou demonstrações formais, dado ao fato citado acima e ao caráter dos temas serem de domínio público, no caso da Aritmética, os principais expoentes são “Os elementos” de Euclides, fornecendo base para as produções sobre Teoria dos números, enquanto em relação a História da Contagem, muito advém da oralidade, porém, ressaltamos a literatura fundamental para a consecução desta, das quais se enquadram, Euclides (2009), Hefez (2016), Iezzi (2010), Lima (2013), Boyer (2012), Boyer (1974), Stewart (2014), Aires (2010), entre vários outros autores de grande notoriedade.

3.1 Dos ossos entalhados aos números

A Subseção 3.1 apresentará uma breve história a respeito do surgimento da contagem, destacando a importância da contagem como recurso para a tomada de decisões pelas pessoas de diferentes períodos e culturas. Nela serão apresentadas ideias intuitivas de conjuntos e outros conhecimentos considerados importantes para a compreensão dos temas abordados no trabalho.

3.1.1 A Memorável História da Contagem

Ao falar de contagem e de história, somos levados geralmente a usar números para identificar período, data, momento, mas nem sempre foi desta forma, pois durante alguns períodos na existência da humanidade, os números não haviam sido criados, entretanto, os humanos criaram outros parâmetros para se guiar e manter informações, orientações e consequentemente, a tomada de decisões.

Os números são representações abstratas, eles em si não existem como produto, mas fazem referência a uma determinada quantidade de algo real ou abstrato, por exemplo, alguém que possua as bolas de gude como as abaixo, tende a querer quantificá-las, dar a entender quantas possui, representando pelo símbolo 5, mas o símbolo é uma unidade, que busca representar a quantidade, mas não são ambos o mesmo objeto.

Figura 1 – Bolas de gude

Fonte: https://www.istockphoto.com/br/foto/bola-de-gude-gm991857894-268765671

Iniciamos com a ideia de números, para apontar sua utilização comum no cotidiano, porém, a partir deste momento, começaremos um mergulho na memória da humanidade para mostrar a relação mencionada acima sobre a abstração dos símbolos numéricos e os seus parâmetros utilizados para contagem. Quando não existiam os símbolos numéricos, os seres humanos já realizavam cálculos de acordo com suas necessidades, valendo-se do que tinham a sua disposição.

Um pastor de ovelhas por exemplo, ao levar seu rebanho para pastar com uma quantidade elevada, grande, muito grande de animais (estamos buscando representar uma quantidade sem mencionar numericamente, já que estes ainda não existem em nossa representação, estamos construindo-os), para não sofrer perdas, precisava identificar os animais que saíam e compará-los no retorno, entretanto, como não existiam números para contar os animais, ele associava cada animal a um outro objeto.

Um objeto comum em locais de pasto são pequenas pedras, podemos pensar ainda em pedaços de galhos, deste modo, ele podia realizar algo semelhante ao citado acima com as bolas de gude, e assim, associar uma pedra a um animal que saísse do curral (local de guarda dos animais), criando um parâmetro para identificar a quantidade sem o auxílio de números, desta forma, guardando as pedras em um recipiente (saco de pano), ao final o pastor teria armazenadas tantas pedras, quantas ovelhas no pasto, e para verificar se todas retornaram do pasto, realiza o processo inverso, retira uma pedra, quando uma ovelha entra no curral, portanto, caso todos os animais entrassem e ainda houvesse pedra na sacola, havia algum animal perdido.

A informação sobre o fato de todas as ovelhas terem retornado ou não, possibilitava a tomada de decisão pelo pastor, se ele precisaria ou não procurar alguma ovelha. Vimos no caso anterior, que mesmo sem números, já havia a contagem, e mais, uma ideia importante para a matemática, a noção de igualdade. Para resolver equações é necessário entender e perceber a relação de equilíbrio por trás da igualdade, usando como exemplo o caso do pastor de ovelhas, podemos equilibrar quantidades de objetos como abaixo.

Quadro 1 – Ideia de igualdade através do equilíbrio de quantidades

Lado A	Vs	Lado B
* * *	Vs	/ / /
0 0 0 0	Vs	/ / / /
* *	Vs	a a

Fonte: Autor (2020)

No quadro acima é possível perceber o equilíbrio ao associarmos a quantidade de elementos do lado A com o lado B, vendo assim a ideia de igualdade. Enquanto trata-se da relação com unidades de objetos, torna-se relativamente fácil perceber, até que surgem símbolos numéricos para representar as quantidades em tal equilíbrio com o uso de números como conhecemos.

Quadro 2 - Ideia de igualdade associando objetos e números

Lado A	Vs	Lado B
* * *	Vs	3
* * * *	Vs	3 + 1 = 4
C + 2	Vs	5

Fonte: Autor (2020)

Acima apresentamos a igualdade associando objetos aos números, onde a ideia por trás da igualdade para resolver a última linha do quadro e encontrar o número que representa a letra C é a mesma utilizada pelo pastor de ovelhas no retorno do rebanho ao curral, nesta ocasião ele retiraria da sacola uma pedra para cada animal que entrasse, nos indicando a manutenção do equilíbrio da igualdade ao retirar uma unidade de cada lado no quadro, repetindo tal processo até chegar ao resultado desejado, o ponto onde não será mais possível retirar, este será o número que representará a letra C, como apresentado abaixo.

Quadro 3 - Retirando uma unidade de ambos os lados

Lado A	Vs	Lado B
C + 2	Vs	5
C + 2 – 1 = C +1	Vs	5 – 1 = 4
C + 1 – 1 = C	Vs	4 – 1 = 3
C	Vs	3

Fonte: Autor (2020)

Quando consideramos os elementos da linha acima, e retiramos uma unidade de ambos os lados estamos mantendo o equilíbrio, e consequentemente a igualdade, assim encontramos 3 como a representação da letra C. Note que fizemos no quadro 3, como o pastor, mas em verdade, o procedimento pode ser otimizado se realizarmos o mesmo procedimento de ambos os lados, mas em vez de retirarmos (ou adicionarmos) unidade por unidade, utilizarmos o número (quantidade) excedente, no caso acima ficaria de acordo com o quadro 4.

Quadro 4 – Equilibrando equações

Lado A	Vs	Lado B
C + 2	Vs	5
C + 2 – 2 = C	Vs	5 – 2 = 3
C	Vs	3

Fonte: Autor (2020)

Desta forma, a operação seria aplicada diretamente, mas o princípio usado pelo pastor de ovelhas ainda seria mantido, porém, agora otimizado para quantidades maiores que a unidade, ou seja, foi generalizado, e entender a ideia central apresentada aqui, pode contribuir com o entendimento de outras relações matemáticas e facilitar o cálculo de expressões algébricas.

Tornando a submergir nas memórias da história da humanidade, podemos utilizar parâmetros para identificar o período em que poderia ter ocorrido a situação com o pastor de ovelhas sem usar números, devido a característica de criação de animais, certamente ocorreu em período quando o ser humano passou a ser agricultor, já não eram mais nômades, haviam domesticado animais, possuíam um local fixo para moradia, inclusive, por isso havia o curral, e retornavam os animais para lá após pastar, essas são ideias que nos ajudam a criar parâmetros e facilitar a identificação de tempo e período.

Os achados em escavações arqueológicas são em geral fascinantes por seu valor cultural e histórico, eles conseguem despertar curiosidades, emoções, especulações, conjecturas. Ossos em especial, remontam nossa história, não apenas esqueleticamente falando, mas sobre o que guardam em si.

Nosso mergulho mais profundo na memória da humanidade, nos leva ao período em que o ser humano era nômade, neste, ao observar a natureza, o ser humano sentia a necessidade da contagem, seja para algo curto como o dia, para que pudesse encontrar abrigo antes de escurecer, seja para algo mais longo como o período das luas, ou mesmo uma aproximação do que hoje conhecemos como mês, com aproximadamente 30 dias, as possibilidades são várias.

Tais ideias de contagem daquele período, são apontadas por dois achados arqueológicos, segundo Aires (2010), proporcionando mais dúvidas, especulações e certezas, são os Ossos de Ishango (figura 2) e dos Lebombos (figura 3), eles foram encontrados em regiões distintas, e pelos estudos realizados, são originados de períodos bem diferentes, sendo o primeiro estimado em cerca de 30 mil anos, enquanto o segundo data aproximadamente 37 mil anos, sendo considerados os mais antigos registro de instrumento para contagem conhecidos, ambos são fíbulas (osso da perna) de babuínos.

Figura 2 – Osso de Ishango

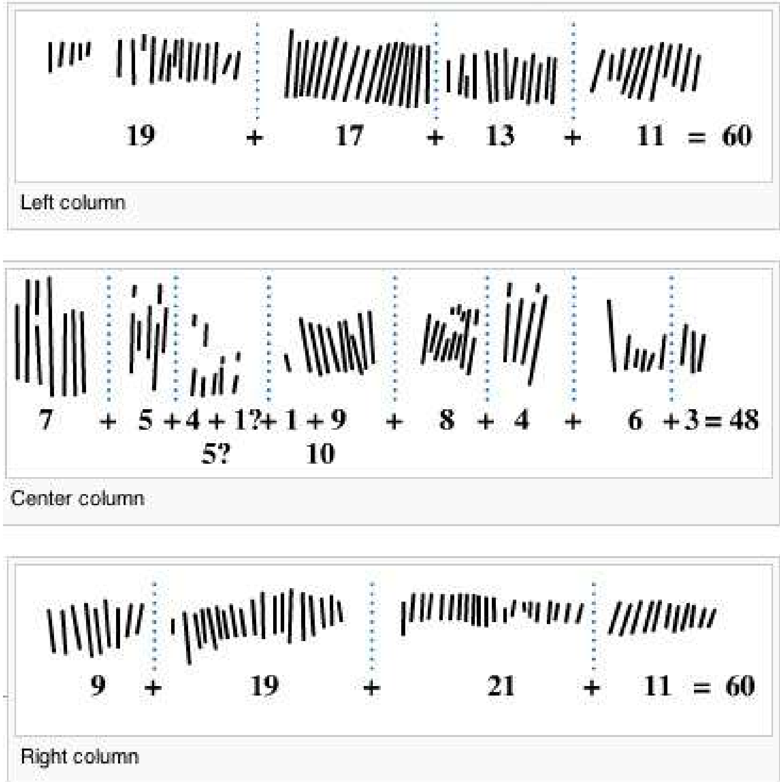
Fonte: https://cearacriolo.com.br/o-osso-de-ishango/

Figura 3 – Osso dos Lebombos

Fonte: https://www.cieliperduti.it/2020/10/29/il-calendario-e-donna/

Eles possuem entalhes (fendas, marcações) em forma de traços, o Osso dos Lebombos possui 29 entalhes, aproximadamente o números de dias em um mês, enquanto o Osso de Ishango possui 3 colunas de entalhes divididos em grupos (Figura 4), onde por coincidência ou não, a coluna da esquerda apresenta grupo de entalhes em quantidade de números primos (subseção 3.2.1) e estão dispostos em 11, 13, 17 e 19 entalhes, cuja soma é 60, aproximadamente dois meses, já a coluna central era dividida em 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5 e 7, totalizando 48 entalhes enquanto a coluna da direita apresentava 11, 21, 19 e 9 entalhes, totalizando 60, assim como a coluna da esquerda.

Figura 4 – Ilustração dos entalhes apresentados no Osso de Ishango



Fonte: https://cearacriolo.com.br/o-osso-de-ishango/

Os achados indicam pistas de sua utilização, a relação com meses, calendário lunar, períodos importantes para ser identificado para algumas culturas, usados para pescar ou caçar durante a claridade da lua, seja por crenças, para realizar ou evitar realizar algo neste período. Os entalhes são relacionados também ao ciclo menstrual, sugerindo que sua utilização era feita por mulheres, entretanto, a certeza que temos, é de que os seres humanos mais organizados sentiam a necessidade de informações para orientação e consequentemente a tomada decisões.

3.1.2 Admiráveis Números Naturais

A memorável história da contagem (subseção 3.1.1) nos forneceu a ideia sobre os processos de contagem usados antes do surgimento dos símbolos numéricos. Nesta subseção, veremos sobre o período após o surgimento destes, entretanto, não mais como visão histórica, mas como fundamentos e início das aplicações aritméticas. Os números naturais são usados em geral para contagem, enumeração, inclusive, se o pastor de ovelhas da subseção 3.1.1 possuísse tal conhecimento, não precisaria usar pedras, tendo em vista que o objetivo destes é quantificar, contar, entre outros.

Em nosso cotidiano, ao verificar horário em um dado momento, supondo que o relógio marque 10:30 da manhã, nós saberemos e falaremos que são 10 horas e 30 minutos, não por exemplo que são 10,5 horas da manhã (ou do dia). A diferença consiste no fato de a primeira usar números naturais, enquanto a segunda utiliza a representação de números racionais (utilizaremos os números racionais apenas como exemplo, pois foge ao nosso objetivo, porém, apresentaremos mais ideias sobre eles na subseção 3.1.4).

Em nossa vivência, vemos e utilizamos vários números naturais, ao nascer em um hospital, fomos levados para o quarto número XXX, passamos a ser o bebê número XXXX, representando a ordem de nascimento geral do hospital, ou mesmo do dia, ou ambos, e neste caso terá dois números de referência apenas para o hospital, possibilitando gerar um novo registro de nosso nascimento em cartório, no Brasil, somos distintos numericamente ainda pelo Cadastro de Pessoa Física (CPF), pelo Registro Geral (RG) emitido pelos órgãos de segurança pública, entre outros números de identificação.

O objetivo dos registros numéricos é informação, organização e tomada de decisões. Há tempos, desde períodos remotos era assim, e principalmente na atualidade, o maior exemplo é obtido através da pandemia de Covid-19, os gestores dos países e consequentemente dos setores de saúde precisaram de informações numéricas a respeito da taxa de contágio, número de pessoas já infectadas, leitos disponíveis em hospitais para poder intervir e criar hospitais de campanha, número de vacinas, período de ação da vacina, entre outros vários dados numéricos, com o intuito de adquirir informações, proporcionando assim, melhores organizações e decisões.

Os números naturais servem para enumerar, ou seja, fornecer ordem ou quantidade, onde o primeiro é o número 1, o segundo é o 2, o terceiro é o 3, e assim sucessivamente. Bem como para quantificar, caso você conte, 1, 2, ... , 16, significa que você tem 16 objetos. Estes são os números naturais, iniciados com 1, 2, 3 , 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... , onde a partir do primeiro, o seguinte pode ser obtido acrescentando a ele uma unidade e o 1 é o menor número natural (a depender da referência (livro) consultada e do objetivo, alguns autores consideram 0 como número natural), no presente trabalho, consideramos como primeiro número natural o 1.

De modo geral, os números naturais são usados para contagem, enumeração e para criar ou mesmo representar os demais números (veja mais na seção 3.1.4). Eles conseguem nos chamar atenção, e causar fascínio devido à capacidade de esconder “segredos”, como o caso dos números primos, que diferente da relação de paridade (se um número é par ou ímpar), não é tão simples identificar se um número é primo, nos referimos a números primos com “muitos” dígitos, pois os “pequenos” podem ser verificados manualmente, existe o crivo de Eratóstenes (subseção 3.3.3) que realiza tal atividade, excluindo-se os múltiplos dos primos já encontrados, no caso os menores, otimizando a verificação.

A importância dos naturais como apresentado, está relacionada tanto a sua simplicidade, quanto aos mistérios guardados, sua aplicação em situações reais é vasta, os números primos por exemplo, servem para codificação e decodificação, em outras palavras, as senhas e mensagens criptografadas, precisam dos números primos para realizar a combinação necessária para manter o sigilo das comunicações.

O uso da criptografia pode ser observado por exemplo, em aplicativos de mensagens onde aparece a informação, conversa criptografada de ponta a ponta, ou algo semelhante, isso significa que sua conversa é protegida, ao ser codificada para viajar pela internet, para caso alguém a intercepte, não consiga ler, ou pelo menos tenha dificuldade, pois precisará decodificar, e para isso, precisará de uma chave, que neste caso, mesmo sem você saber, se encontra em seu aparelho, e é justamente o que possibilita que a mensagem seja decodificada para você conseguir ler.

3.1.3 Aspirações sobre Números inteiros

Gostaríamos de falar a respeito do mundo inteiro (dos números), mas decidimos abordar no Senes, os números naturais como principais, vamos destacar os números inteiros nesta subseção para conhecimento básico, entretanto, nosso foco será os naturais. Os números Inteiros, indicando de uma forma minimalista, são os números naturais, acrescidos do zero (0) e dos opostos dos naturais, significando os números naturais acrescidos do símbolo “ - ”, para indicar que são menores do que zero, assim, são diferenciados em positivos caso sejam maiores que zero e negativos caso sejam menores que zero, sendo representados por ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... , perceba que desta forma, as propriedades identificadas sobre os naturais, poderão ser aplicadas sobre os inteiros, como a retirada ou acréscimo de números.

Hoje estamos acostumados com tais números, por isso, estas ideias podem nos parecer algo simples, mas no surgimento deles, não foi assim, a ideia do zero não foi tão simples, surgiram perguntas do tipo, “O zero é positivo ou negativo?”, “Os números negativos são iguais aos positivos?”, e as respostas fazem mais sentido com o passar do tempo e com conhecimento. O zero é neutro, não sendo positivo ou negativo, já os números, como são opostos, não podem ser iguais, pode-se pensar que um representa a existência, enquanto o outro a ausência de algo.

Podemos pensar da seguinte maneira, alguém está com 50 reais (esse valor é positivo), paga 20 reais de feira e 30 reais de carne, neste momento, o valor que ele possui chegará a zero, e a partir daí não terá mais de onde tirar, até que receba mais dinheiro, mas ainda precisa comprar alguns itens no comércio do canto de sua casa, onde é permitido pagar em outro momento (fiado), assim ele compra 10 reais de itens, restando neste momento -10 reais (10 reais negativos).

A situação hipotética acima, não é praticada geralmente por pessoas físicas como nós em nossas finanças, não costumamos pensar que estamos com -10 reais, porém isto é feito pelas pessoas jurídicas, ou seja, nas empresas para controle de caixa, nas área da contabilidade e economia, entre outros locais, desta forma, vemos que contar a ausência ou débito é tão importante quanto contar a existência de algo, e neste sentido, se alguém estiver com zero reais, não consegue comprar nada (com esse dinheiro), mas não deve nada para ninguém, este é um exemplo do fato de 0 ser neutro, pois não é débito ou crédito.

3.1.4 Devaneio e ideias sobre números

A definição de número não é precisa, tampouco existe um consenso sobre tal, alguns autores dizem que número é: o conjunto de todos os conjuntos; um objeto abstrato usado para representar quantidade, ordem, medida; é um ente abstrato, desenvolvido pelo homem como modelo para medir e contar. A ideia que chega mais próximo do considerado número, pela maior parte da literatura na atualidade, é a última, e mesmo ela, não chega a ser uma definição ideal.

Apesar do exposto, os números nos são importantes, e não importa necessariamente sua dimensão, ou quantos dígitos possui. Por exemplo, para a programação de computadores, em linguagem de máquina são usados basicamente os dígitos 0 e 1, chamado de código binário, enquanto em nosso sistema de numeração, utilizamos dez símbolos (de 0 a 9) para representar os demais números, na base dez, para significar que após o nono dígito, o processo se repetirá, combinado com o sistema posicional, para distinguir as unidades (U) a direita, das dezenas (D) imediatamente a esquerda das unidades e das centenas (C) imediatamente a esquerda das dezenas, ficando CDU, onde 342, representa 3 centenas, 4 dezenas e 2 unidades, formando o número trezentos e quarenta e dois. A terna CDU se repete indefinidamente para a identificação de números maiores, na casa dos milhares, milhões, bilhões, e assim sucessivamente, devido a esse fato, nosso sistema de numeração é chamado posicional e decimal.

Existiram (e existem) outros sistemas de numeração (como o mencionado código binário), o próprio sistema usado para computadores passou por modernização buscando maior capacidade de processamento, usando hoje o sistema hexadecimal (base 16). Em diversas culturas e períodos da história, foram utilizados sistemas diferentes de numeração, como o sexagesimal (base 60) usado pelos Babilônicos, o sistema de numeração romano (usa 7 símbolos) que usamos atualmente para indicar séculos, entre outros.

Os números que vimos em seu sistema de numeração (a partir deste momento, quando falarmos em número, considere o número no sistema posicional decimal, a menos que algo seja dito contrário) estão organizados em conjuntos (para entender a ideia de conjuntos, pense em caixas, onde podemos inserir objetos, tantos quanto quisermos). Desta forma, os números naturais pertencem a um conjunto, devido a suas características, os inteiros pertencem a outro conjunto, onde a ideia de pensar em caixas fará mais sentido neste momento, lembre-se que os números inteiros são formados pelos naturais (ver subseção 3.1.3).

Portanto, podemos deduzir o seguinte, a caixa (o conjunto) que contém os números naturais, está dentro da caixa (conjunto) com números inteiros, desta forma, temos que a caixa (conjunto) dos inteiros, contém a caixa (conjunto) dos naturais, isto nos fornece um outro raciocínio, do qual, se pensarmos em quantidade de elementos de cada conjunto, deduziremos que a caixa do inteiros tem maior quantidade de elementos que a caixa dos naturais, proporcionando a ideia intuitiva de os inteiros serem em maior quantidade, apesar de ambos os conjuntos serem infinitos.

Podemos destacar outras caixas (conjuntos) com números, neste momento citaremos os números racionais, estes são formados pela razão – onde temos a ideia de divisão, de partir um número em quantidades ou medida menores; entre dois números, sendo um número inteiro e um número natural, daí surge a ideia de fração, representado da seguinte forma, se falarmos da razão entre m e n, teremos

$$m/n = \frac{m}{n}$$

onde m é um número inteiro e n, natural, lido como a razão de m por n, ou simplesmente a razão entre m e n. Note que da definição, como n é natural e em nossa concepção zero não é natural intencionalmente, excluímos a possibilidade de zero estar como denominador (parte inferior da barra de fração, enquanto o número da parte superior recebe o nome numerador), pois na matemática esse valor não existe, sendo chamado de indefinição.

O número $3/4 = \frac{3}{4}$, é lido como três quartos, para indicar que algo foi dividido em quatro partes, das quais três delas estão selecionadas ou referenciadas, podemos ter um objeto considerado em sua totalidade (Figura 5), como uma barra de chocolate, um bolo, ou qualquer outro, e queremos dividi-lo em quatro partes, ficando com o resultado apresentado na figura 6.

Figura 5 – Objeto completo

Fonte: Autor (2020)

Figura 6 – Objeto (da figura 5) particionado em 4

Fonte: Autor (2020)

Note que na figura 6, continuamos com o objeto em sua totalidade, ele apenas foi divido em 4 partes, procedimento ao qual chamamos particionamento (ou simplesmente divisão), tal particionamento pode ser representado através da razão (fração) $4/4 = \frac{4}{4}$, para significar que estamos de posse de sua totalidade, pois $\frac{4}{4} = 1$, porém, quando selecionamos $\frac{3}{4}$ do todo, ficamos com a representação da figura 7.

Figura 7 – Indicação da seleção de $\frac{3}{4}$ (da figura 6)

Fonte: Autor (2020)

A seleção destas três partes (das quatro) da totalidade indica uma fração, e consequentemente um número racional, mas os racionais podem ser expressos ainda em sua forma decimal, onde $3/4 \; = \frac{3}{4}$, é o mesmo que $0{,}75$, ou seja, $3/4 \; = \frac{3}{4} = 0{,}75$, assim, temos que qualquer representação decimal que possa ser expressa em forma de fração é um número racional.

Retornando para nossas caixas, é possível perceber que, como os racionais são criados a partir dos inteiros e naturais, a caixa dos números inteiros está dentro da caixa dos números racionais, ou seja, o conjunto dos racionais contém os conjuntos dos inteiros e dos naturais, portanto, sua "dimensão" é maior que os dois primeiros conjuntos.

Existe uma outra caixa numérica, intrigante por conter números que as vezes confunde os menos atentos, por sua representação lembrar os racionais em sua forma decimal, entretanto, nossos próximos números possuem uma representação decimal infinita, significando que esses números não podem ser escritos em forma de fração, e este fato os diferencia dos números racionais, por isso, essa caixa é totalmente diferente das demais e não contém nenhum elemento comum as outras caixas. Nenhum número pertence a caixa dos números irracionais (nossa nova caixa) e aos racionais concomitantemente, um número é racional ou é irracional.

Talvez o mais famoso dos irracionais seja o número pi, alguns dos números irracionais receberam nome devido a sua importância, aplicação e utilização. O pi é aproximadamente 3,1415..., como sua representação decimal é infinita, inserimos reticência (...) após o 5, para indicar que ele segue indefinidamente, hoje (ano de 2020) são conhecidos 31 bilhões de seus dígitos. O pi é utilizado na comunicação telefônica, de rádio (no cálculo da transformada de Fourier), na localização de pontos por GPS (Sistema de Posicionamento Global), nos relógios de pêndulo, entre outros. A origem do pi está na razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência qualquer.

Existem ainda outros números irracionais destacados, podemos citar o número de ouro, aproximadamente 1,6180..., a constante de Euler aproximadamente 2,7182... , a diagonal do quadrado de lado igual a 1, que é aproximadamente 1,4142... (raiz quadrada de 2), entre outros.

Sobre a ideia de caixas com os números, temos uma outra caixa que contém as caixas identificadas até o momento, essa é conhecida como caixa dos números reais, todos os números visto até agora estão nela, ou seja, os racionais e os irracionais são números reais. Existem, ainda outros números, mas não vamos abordá-los aqui, são os números chamados imaginários que constituem a caixa dos números complexos, estes não são números reais. Ressaltamos que a ideia de utilizar caixas, busca facilitar o entendimento sobre os conjuntos, e cada conjunto pertencente ao conjunto dos números reais, é por consequência um subconjunto deste, assim a notação matemática é dada através de conjuntos.

3.2 Divisores e múltiplos

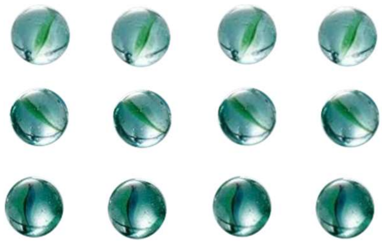
A Subseção 3.2 mostrará a divisão entre números naturais fundamentada na divisão Euclidiana, destacando o fato de existir um par de divisores para todos os números naturais. Serão apresentadas as formas de encontrar os múltiplos de um número, números quadrados perfeitos, e critérios para verificar quando um número natural é divisível por alguns outros números naturais.

3.2.1 Divisão entre números naturais

Nos números naturais, dizemos que um número n divide, um número m quando podemos separar (dividir) m em n parcelas (partes) iguais (veja particionamento na subseção 3.1.4), daí temos que para um número dividir outro, o divisor precisa ser menor do que ou igual ao número que quisermos dividir. Vamos um exemplo.

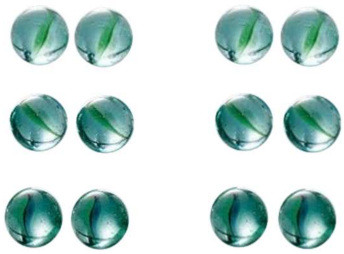
Maísa possui 12 bolas de gude, após uma de suas brincadeiras, começou a organizá-las de maneiras diferentes, como nas figuras abaixo.

Figura 8 – Bolas de gude dispostas em unidades



Fonte: Autor (2020)

Figura 9 - Bolas de gude dispostas em duplas

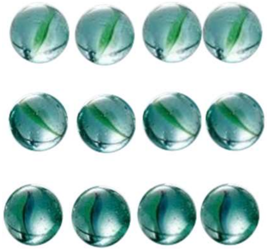


Fonte: Autor (2020)

Figura 10 - Bolas de gude dispostas em trios

Fonte: Autor (2020)

Figura 11 - Bolas de gude dispostas em grupos de 4 unidades



Fonte: Autor (2020)

Figura 12 - Bolas de gude dispostas em grupos de 6 unidades

Fonte: Autor (2020)

Figura 13 - Bolas de gude dispostas em grupo com 12 unidades

Fonte: Autor (2020)

Com isso, ela percebeu que as bolas de gude poderiam ficar em grupos com a mesma quantidade de bolas, apenas se as quantidades fossem 1, 2, 3, 4, 6 ou 12. Assim, notou a ideia de divisão, pois apenas estes números são os divisores de 12, percebeu ainda que, entre os divisores de um número qualquer, sempre estarão a unidade (1) e o próprio número (no presente exemplo o 12).

Os números naturais são geralmente pensados em dois grandes grupos, sendo um, o dos números pares e outro dos ímpares, a tal ideia chamamos paridade de um número, ela depende diretamente da divisão ou não de um dado número por 2, dizemos que um número é par, se for divisível por 2, do contrário, diremos ser ímpar. Por exemplo a paridade de 3 é ímpar.

3.2.2 Pares de divisores

A observação do comportamento e estrutura dos grupamentos formados com bolas de gude, no exemplo de Maísa (subseção 3.2.1), nos leva a uma conclusão interessante, o caso de os divisores de um número serem concebidos sempre em pares, onde o produto (multiplicação) de tais pares, resulta no número dos quais se busca os divisores, tal ideia depreende-se da definição de divisão nos naturais dada por Euclides (2009). Observe novamente as figuras do exemplo de Maísa, atentando para as duplas de divisores do número 12.

A informação mais importante para entender tal ideia, é perceber a relação mantida entre a quantidade de bolas de gude por grupo e o número de grupos, podendo ser notado ao multiplicar uma quantidade pela outra, o resultado sempre nos fornecerá o número total de bolas de gude, observe que,

Quando temos 12 grupos com 1 unidade, temos

$$12 \times 1 = 12$$

Quando temos 6 grupos com 2 unidades, temos

$$6 \times 2 = 12$$

Quando temos 4 grupos com 3 unidades, temos

$$4 \times 3 = 12$$

Quando temos 3 grupos com 4 unidades, temos

$$3 \times 4 = 12$$

Quando temos 2 grupos com 6 unidades, temos

$$2 \times 6 = 12$$

Quando temos 1 grupo com 12 unidades, temos

$$1 \times 12 = 12$$

Desta forma, observamos que ao identificar o divisor de um número, por consequência encontramos outro divisor, logo podemos otimizar nosso processo ao identificar os divisores em pares, no caso acima, obtemos os pares de divisores de 12 como (1, 12), (2, 6) e (3, 4). Tal resultado se aplica a todos os números naturais.

3.2.3 Múltiplos de um número

A ideia de múltiplo de um número surge da multiplicação deste por cada um dos números naturais a partir do primeiro, note que há uma interrelação entre os divisores e múltiplos, pois para um número ser múltiplo de outro, o segundo número precisa participar de um dos pares de divisores (ver subseção 3.2.2) do primeiro número. Veja no Quadro 5, os múltiplos de 3.

Quadro 5 – Múltiplos de 3

Naturais		Número		Múltiplos
1	x	3	=	3
2	x	3	=	6
3	x	3	=	9
4	x	3	=	12
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Autor (2020)

Portanto, ao abordar os múltiplos, retornamos para os divisores, dada a intima ligação entre eles, nos casos apresentados no quadro 5, podemos relacionar com os divisores em pares dos múltiplos, no caso, os divisores em pares de 3 são (1, 3), de 6 são (1, 6) e (2, 3), de 9 são (1, 9) e (3, 3) e de 12 são (1, 12), (2, 6) e (3, 4), de tal relação vemos casos como a multiplicação de um número por si, identificada ao multiplicar o 3 por ele mesmo, resultando em 9, gerando assim uma nova ideia, a de quadrado perfeito.

3.2.4 Quadrado perfeito

Um número natural é chamado de quadrado perfeito quando obtido através do produto de dois números naturais iguais. Desta forma, qualquer número natural, multiplicado por si, gera um quadrado perfeito.

Um exemplo já visto é o 9, que pode ser obtido pelo produto de 3 x 3, podendo ser expresso como 3^2, que se lê, três ao quadrado, pelo citado acima, todo número natural ao quadrado gera um quadrado perfeito, veja no Quadro 6.

Quadro 6 – Números quadrados perfeitos

Natural	Quadrado	Quadrado perfeito
1	1^2	1
2	2^2	4
3	3^2	9
4	4^2	16
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Autor (2020)

Os números quadrados perfeitos, ou simplesmente quadrados podem ser associados a ideia gráfica, e sua visualização pode ser notada através da Figura 14, onde a partir de sua disposição em unidades é possível formar quadrados.

Figura 14 – Quadrado perfeito com 4 e 9 esferas

Fonte: Autor (2020)

Uma outra maneira para identificar os quadrados perfeitos, mas vamos apenas citar por fugir ao nosso objetivo, é usar a radiciação, aplicando a raiz quadrada ao número a ser verificado, caso o resultado seja um número natural, então, o número verificado é um quadrado perfeito.

3.2.5 Critérios de divisibilidade

- Divisibilidade por 2

Um número é divisível por 2 quando é par, ou seja, o algarismo das unidades deve ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemplos:

Divisíveis por 2 temos, 12, 24, 128, entre outros números pares.

Não divisíveis por 2 temos, 3, 15, 127, entre outros números ímpares.

- Divisibilidade por 4

Um número é divisível por 4 quando o número formado pelos algarismos da dezena e da unidade é divisível por 4.

Exemplos:

Divisíveis por 4 temos, 32, 348, 124, entre outros.

Basta observar em 348, e em 124, que 48 e 24 são divisíveis por 4.

Uma outra maneira de identificar um número que seja divisível por 4, é dividir o número por 2, em seguida, dividir o resultado por 2, se tal procedimento for possível, o número é divisível por 4, a justificativa é o fato de 4 ser igual a 2^2.

Exemplo:

Observe que 136 dividido por 2 é 68, em seguida, dividimos 68 por 2, resultando em 34. Portanto, 136 é divisível por 4.

- Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos é divisível por 3.

Exemplos:

Divisíveis por 3 temos, 12, 24, 138, entre outros.

Observe que em 12, a soma dos algarismos 1 e 2 resulta em 3, que é divisível por 3.

De modo análogo,

$$em\ 24, a\ soma\ 2 + 4 = 6,$$
$$em\ 138, a\ soma\ 1 + 3 + 8 = 12$$

e que 6 e 12 são divisíveis por 3. Desta forma, ao repetir o mesmo procedimento, podemos identificar números divisíveis por 3.

- Divisibilidade por 9

Mantendo relação com o processo de identificação dos números divisíveis por 3, um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é divisível por 9.

Exemplos:

Divisíveis por 9 temos, 18, 54, 198, entre outros.

Observe que em 18, a soma dos algarismos 1 e 8 resulta em 9, que é divisível por 9.

Realizando a mesma verificação para os demais números, temos que

$$em\ 54, a\ soma\ 5 + 4 = 9,$$
$$em\ 198, a\ soma\ 1 + 9 + 8 = 18$$

e que 9 e 18 são divisíveis por 9.

- Divisibilidade por 5

Um número é divisível por 5 quando o algarismo da unidade é 0 ou 5.

Exemplos:

Divisíveis por 5 temos, 10, 25, 155, entre outros.

- Critério de divisibilidade por 10

Um número é divisível por 10 quando o algarismo da unidade é 0.

Exemplos:

Divisíveis por 10 temos, 20, 50, 160, entre outros.

- Critério de divisibilidade por 6

Um número é divisível por 6, quando é divisível tanto por 2, quanto por 3, assim, o número precisa ser par e a soma de seus algarismos divisível por 3.

Exemplos:

Divisíveis por 6 temos, 12, 36, 324, entre outros. Pois são pares, e a soma de seus algarismos são respectivamente 3, 9 e 9, que são divisíveis por 3.

- Divisibilidade por 7

Para identificar um número divisível por 7, separe o número em duas partes, uma parte será o algarismo das unidades, a outra parte será o restante dos algarismos. Multiplique por 2 o algarismo da unidade, subtraia o resultado da outra parte do número, se o resultado deste procedimento for divisível por 7, então o número será divisível por 7.

Vejamos alguns exemplos passo a passo.

Divisíveis por 7 temos, 182, 161, 231, entre outros.

Separando o algarismo da unidade, dos demais algarismos, ficamos com o resultado do quadro 7.

Quadro 7 – Separação da unidade em relação ao restante dos algarismos de um número

Número	Restante	Unidade
182	18	2
161	16	1
231	23	1

Fonte: Autor (2020)

Realizando o procedimento para verificação da divisibilidade, o restante dos algarismos do número forma um novo número, retiramos deste o dobro do algarismo da unidade do número inicial como no Quadro 8.

Quadro 8 – Procedimento para verificação da divisibilidade por 7

Número	Unidade	Procedimento	Resultado
182	2	$18 - 2 \times 2$	14
161	1	$16 - 2 \times 1$	14
231	1	$23 - 2 \times 1$	21

Fonte: Autor (2020)

Como 14 e 21 são divisíveis por 7, então o procedimento confirma que 182, 161 e 231 também são divisíveis por 7.

Caso não tenhamos certeza se o resultado ao final do procedimento é divisível por 7, podemos realizar com ele, o mesmo do processo inicial. Se o número for formado por dois dígitos (como 14) ou menos, o procedimento ainda funcionará, entretanto, ao final do procedimento você obterá um dos números inteiros, 0, -7, ou -14 caso o número verificado seja divisível por 7.

- Divisibilidade por 8

Podemos pensar de duas maneiras os critérios de divisibilidade para o 8, uma para números formados a partir de 3 dígitos, outra para números em geral. É possível ainda combiná-las.

Para o primeiro caso, o número será divisível por 8 se os algarismos da unidade, dezena e centena (CDU) forem todos zeros (000) ou formarem um número divisível por 8.

Exemplos:

Divisíveis por 8 temos, 32000, 3048, entre outros.

Basta observar em 32000, os 000 (CDU) e em 3048, que 48 é divisível por 8.

Para o segundo caso, basta usar o mesmo procedimento apresentado por último para os divisores de 4, ou seja, pegue o número que quer verificar e divida por 2, usando este resultado, divida-o por 2 e por fim, divida o último resultado por 2, se tal procedimento for possível, o número é divisível por 8, já que 8 é o resultado $2 \times 4 = 2 \times 2^2 = 2^3 = 8$.

Exemplo:

Observe que 56 dividido por 2 é 28, em seguida dividimos o resultado, 28 dividido por 2 é 14 e por fim, dividimos o último resultado, 14 dividido por 2 é 7. Portanto, 56 é divisível por 8.

Observe no primeiro caso, que nos cabe analisar a estrutura do número, enquanto no segundo caso, nos interessa o processo, se for possível realizá-lo, o número será divisível por 8.

- Divisibilidade por 11

Os números formados apenas por dois dígitos (DU), que tenham unidade e dezena iguais são divisíveis por 11, por exemplo 22, 33, 44, entre outros. Conhecido esses casos particulares podemos reduzir os demais casos a estes, para tanto, precisamos separar os demais números em duas partes, algarismo da unidade, dos demais algarismos, em seguida subtrair do número formado pelos demais algarismos, o algarismo da unidade, este procedimento precisa ser repetido até que reste um número com dois algarismos, ou seja, um dos nossos casos particulares, caso o número seja divisível por 11. Veja o passo a passo nos Quadros abaixo.

Exemplos:

Divisíveis por 11 temos, 143, 1067, 10934, entre outros.

Separando o algarismo da unidade, dos demais algarismos, ficamos com o resultado apresentado no quadro 9.

Quadro 9 - Separação da unidade em relação ao restante dos algarismos de um número

Número	Restante	Unidade
143	14	3
1067	106	7
10934	1093	4

Fonte: Autor (2020)

Realizando o procedimento para verificação da divisibilidade, o restante dos algarismos do número forma um novo número, subtraímos deste, o algarismo da unidade do número inicial como no Quadro 10.

Quadro 10 - Procedimento para verificação da divisibilidade por 11

Número	Unidade	Procedimento	Resultado
143	3	$14 - 3$	11
1067	7	$106 - 7$	99
10934	4	$1093 - 4$	1089

Fonte: Autor (2020)

Observe, que 99 e 11 são divisíveis por 11, assim, já podemos confirmar que 1067 e 143 são divisíveis por 11, entretanto, não é imediata a identificação para 1089, logo, precisamos repetir o processo, agora apenas para ele, apresentaremos no Quadro 11.

Quadro 11 – Continuação do procedimento para verificação da divisibilidade por 11

Número	Unidade	Procedimento	Resultado
1089	9	$108 - 9$	99

Fonte: Autor (2020)

Deste modo, como 99 é divisível por 11, confirmamos que 10934, também é divisível por 11.

- Divisibilidade por 12

Um número é divisível por 12, quando é divisível tanto por 3, quanto por 4, assim, o número precisa ser par, o resultado de sua divisão por 2 também precisa ser divisível por 2 e a soma de seus algarismos precisa ser divisível por 3.

Exemplos:

Divisíveis por 12 temos, 276, 192, 396, entre outros, pois a soma dos algarismos deles são respectivamente 15, 12 e 18, todos divisíveis por 3, acrescente-se que 76, 92 e 96 são divisíveis por 4, logo 276, 192 e 396 também o são, portanto, estes são divisíveis por 12.

3.3 Números primos e compostos

Uma possível distinção em duas categorias importantes dentro dos números naturais, é entre números primos e números compostos, onde os números primos possuem grande aplicação, seja em matemática na decomposição de outros números ou em tecnologia através da criptografia.

3.3.1 Números primos (Primalidade)

Um número natural maior que 1 é dito primo, quando possui apenas dois divisores, sendo eles, o número 1, enquanto o outro é o próprio número em questão.

Exemplos:

Os números 2, 3, 5 e 7 são os primeiros primos, além deles próprios, apenas o 1 os divide, o 2 é o único primo, par, enquanto 3, 5 e 7 formam dois pares de primos gêmeos (único trio de primos gêmeos ou primos trigêmeos).

Primos gêmeos são números primos que distam duas unidades um do outro, a exemplo de 3 e 5, assim como 5 e 7. Acredita-se que existam infinitos primos gêmeos, entretanto, não foi provada tal crença, apenas foi provada a infinitude dos números primos em geral.

3.3.2 Números Compostos

Em oposição aos números primos, temos os números compostos. Os números que não são primos são chamados compostos. Recebem este nome pela possibilidade de serem decompostos em fatores primos, ou seja, todo número composto pode ser escrito como produto (multiplicação) de números primos, segundo Hefez (2016), esta propriedade é conhecida como Teorema Fundamental da Aritmética.

Exemplos:

Os números 68, 231 e 286 são exemplos de números compostos, e sua decomposição primária ou decomposição em fatores primos é apresentada no quadro 12.

Quadro 12 – Decomposição em fatores primos

Número	Primos divisores	Decomposição
68	2 e 17	$2 \times 2 \times 17 = 68$
231	$3, 7$ e 11	$3 \times 7 \times 11 = 231$
286	$2, 11$ e 13	$2 \times 11 \times 13 = 286$

Fonte: Autor (2020)

Observe no Quadro 12, que os únicos primos que dividem o número estão apresentados na coluna central, enquanto na coluna direita está apresentada a decomposição do número em fatores primos, para encontrar a decomposição basta identificar os primos que dividem o número desejado, em seguida, dividir o número pelo menor primo, em seguida, dividir o resultado da primeira divisão pelo menor primo possível, inclusive o utilizado anteriormente, o processo é repetido até que não seja mais possível realizar tal o processo, tantas vezes quantas forem possíveis utilizar o número primo para dividir o número(e seus resultados), será a quantidade destes primos na decomposição primária do número.

3.3.3 Crivo de Eratóstenes

Para encontrar números primos manualmente, uma maneira muito difundida é o Crivo de Eratóstenes. Ele criou um processo para identificar números primos por exclusão de seus múltiplos, a este processo de separação, chamamos crivo ou peneira, daí o nome do processo.

O Crivo de Eratóstenes funciona como uma peneira realmente, tornando possível diferenciar um número primo dos demais e descartar seus múltiplos, pois estes não podem ser primos. Vamos mostrar como utilizar o processo para encontrar os primos, primeiro, escreva os números naturais em linhas, de dez em dez (pode ser feito em outras quantidades) até o número 100, como dispostos no Quadro 13.

Quadro 13 – Crivo de Eratóstenes, início

/	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: Autor (2020)

A seguir identificamos o menor número primo, de acordo com o que falamos na subseção 3.3.1, o 2 é o desejado, em seguida riscamos (retiramos) todos os múltiplos de 2, ou seja, os demais números pares, ficando como no quadro 14.

Quadro 14 - Crivo de Eratóstenes, sem múltiplos de 2

/	2	3	/	5	/	7	/	9	/
11	/	13	/	15	/	17	/	19	/
21	/	23	/	25	/	27	/	29	/
31	/	33	/	35	/	37	/	39	/
41	/	43	/	45	/	47	/	49	/
51	/	53	/	55	/	57	/	59	/
61	/	63	/	65	/	67	/	69	/
71	/	73	/	75	/	77	/	79	/
81	/	83	/	85	/	87	/	89	/
91	/	93	/	95	/	97	/	99	/

Fonte: Autor (2020)

Neste momento, temos uma quantidade bem menor de possibilidades, consequentemente o próximo número primo já está visível, realizaremos o mesmo procedimento anterior, mas agora com o 3, que é nosso próximo primo, riscando seus múltiplos, obtemos o Quadro 15.

Quadro 15 - Crivo de Eratóstenes, sem múltiplos de 3

/	2	3	/	5	/	7	/	/	/
11	/	13	/	/	/	17	/	19	/
/	/	23	/	25	/	/	/	29	/
31	/	/	/	35	/	37	/	/	/
41	/	43	/	/	/	47	/	49	/
51	/	53	/	55	/	/	/	59	/
61	/	/	/	65	/	67	/	/	/
71	/	73	/	/	/	77	/	79	/
/	/	83	/	85	/	/	/	89	/
91	/	/	/	95	/	97	/	/	/

Fonte: Autor (2020)

Percebemos pelo Quadro 15, que nosso próximo primo está destacado, o número 5, mas antes de reiniciarmos o procedimento e riscar seus múltiplos, destacamos o brilhante processo desenvolvido por Eratóstenes, como já foram retirados alguns múltiplos de 5, nos resta riscar seus múltiplos a partir de seu quadrado ($5^2 = 25$), a ideia central do processo, consiste em entender que todos os números menores que 25 aparecendo em nossa tabela (os números não riscados), são primos. Tendo compreendido a ideia, seguiremos retirando os múltiplos de 5, e os múltiplos de 7, obtendo o Quadro 16.

Quadro 16 - Crivo de Eratóstenes, sem múltiplos de 5 e de 7

/	2	3	/	5	/	7	/	/	/
11	/	13	/	/	/	17	/	19	/
/	/	23	/	/	/	/	/	29	/
31	/	/	/	/	/	37	/	/	/
41	/	43	/	/	/	47	/	/	/
/	/	53	/	/	/	/	/	59	/
61	/	/	/	/	/	67	/	/	/
71	/	73	/	/	/	/	/	79	/
/	/	83	/	/	/	/	/	89	/
/	/	/	/	/	/	97	/	/	/

Fonte: Autor (2020)

A partir do exposto acima, como nosso próximo número primo é 11, e o produto $11 \times 11 = 121$, sabemos assim, que todos os números não riscados no Quadro 16 são primos, pois só possuem como divisores o 1 e o próprio número.

3.4 Máximo Divisor Comum (mdc)

A utilização do máximo divisor comum em situações do cotidiano possibilita a resolução de demandas onde se façam necessárias divisões em partes iguais de determinadas quantidades ou determinados produtos, buscando otimizar a resolução da demanda.

3.4.1 Conhecendo o mdc

Para entender a ideia de máximo divisor comum (mdc), precisamos identificar os divisores de cada número individualmente, em seguida, verificamos o maior número comum entre os divisores listados dos números, cujo mdc queremos encontrar, assim, o maior valor comum a ambos será o mdc. Observe que caso não exista número maior, o 1 será o mdc, em outras palavras, sempre existe o mdc entre dois números (ou mais). Vejamos os exemplos no Quadro 17 e no Quadro 18.

Quadro 17 – Números e seus divisores

Número	Divisores
7	$1, 7$
12	$1, 2, 3, 4, 6, 12$
14	$1, 2, 7, 14$
15	$1, 3, 5, 15$

Fonte: Autor (2020)

Quadro 18 – MDC entre dois números

MDC
$\boldsymbol{mdc(12, 14) = 2}$
$\boldsymbol{mdc(12, 15) = 3}$
$\boldsymbol{mdc(7, 14) = 7}$
$\boldsymbol{mdc(7, 12) = 1}$
$\boldsymbol{mdc(14, 15) = 1}$

Fonte: Autor (2020)

Vemos no Quadro 17, o maior divisor comum entre 12 e 14, é o número 2, entre os divisores de 12 e 15, o maior número comum é 3, e assim sucessivamente. Observe que, como 7 é primo, possui como divisores apenas o 1 e ele próprio, desta forma, o mdc entre ele e outro número só pode ser ele ou o 1, isso é geral para todos os números primos, enquanto na última linha do Quadro 18, temos o mdc entre 14 e 15 resultando em 1, neste caso, tanto 14, quanto 15 são números compostos, os números caracterizados com esta propriedade são chamados primos entre si ou coprimos.

3.4.2 Aplicações do mdc

O máximo divisor comum pode ser aplicado em situações onde o objetivo seja criar partição (divisão) de tamanho comum entre dois ou mais objetos, sejam eles abstratos como números, ou concretos como arames e tecidos. Vamos a dois exemplos.

Em uma indústria, existem dois tipos de rolos, um com plástico transparente e outro com estampa para destacar no plástico, assim, estes são usados em conjunto, um centralizado sobre o outro, mas para tanto, é necessário saber como dividir corretamente os dois rolos, sabendo que o rolo do plástico mede 290 metros, enquanto o rolo da estampa mede 232 metros. Qual é o máximo de partes que podem ser divididos os rolos para que tenham a mesma quantidade? Qual a medida de uma unidade de plástico e de uma de estampa?

Para resolver a situação acima, vemos que eles precisam ser divididos na mesma quantidade, quando falamos em dividir e com mesma quantidade, então precisa ser um divisor comum, além disto, queremos o maior deles, logo precisamos encontrar o mdc, para tanto, utilizaremos os divisores em pares (ver subseções 3.2.2), onde encontramos os divisores de 290 como [(1, 290), (2, 145), (5, 58), (10, 29)] e os divisores de 232 como [(1, 232), (2, 116), (4,58), (8, 29)], desta forma, o maior número de partes que podem ser divididos os dois rolos em partes iguais é 58, pois é o mdc(232, 290), a utilização dos pares de divisores, facilita a identificação da medida de cada parte, onde a unidade do plástico medirá 5 metros, enquanto a unidade da estampa medirá 4 metros, que representam a divisão de 58 respectivamente por 290 e 232.

Um outro exemplo, é o caso de um professor de educação física que ministra aulas para 3 turmas de primeiro ano do ensino médio e deseja dividir grupos com a mesma quantidade de estudantes sem misturar com estudantes de turmas diferentes.

Sabendo que as turmas A, B e C mencionadas acima, possuem respectivamente 40, 32 e 36 alunos e o professor quer o máximo possível de estudantes por grupo. Qual o maior número de grupos com a mesma quantidade de estudantes esse professor pode formar?

Nosso primeiro objetivo é encontrar o número máximo de estudantes por grupo sem mesclar com estudantes de turmas diferentes, então vamos aplicar o mdc para 40, 32 e 36 expresso por mdc(40, 32, 36) que é igual a 4 (sugestão, encontre usando os pares de divisores). Observe que esse ainda não é nosso resultado, pois ele quer o número máximo de grupos, mas precisávamos primeiro encontrar a quantidade por grupo, agora, precisamos ver quantos grupos tem por turma, dividindo o número de estudantes por turma pela quantidade por grupo, logo nas turmas, A são 10 grupos, B são 8 grupos e C são 9 grupos, somando as quantidades de grupos de todas as turmas encontramos 27, portanto, o máximo é 27 grupos com 4 estudantes.

Observamos que, a utilização dos pares de divisores teria agilizado o processo, pois encontraríamos para os divisores de 40, [(1, 40), (2, 20), (4, 10), (5, 8)], divisores de 32, [(1,32), (2, 16), (4, 8)], e divisores de 36, [(1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6)], facilitando a identificação do mdc como o número 4 e consequentemente o número de grupos por turma, por estar em pares, sendo respectivamente, 10, 8 e 9, restando apenas realizar a soma destes.

3.4.3 Encontrar o mdc manualmente

Para encontrar manualmente o mdc vamos utilizar um processo eficaz, porém repetitivo e as vezes exaustivo. Vamos encontrar o mdc de 237 e 18 utilizando um diagrama, em um processo de sucessivas divisões, iniciamos o dividindo o maior (237) pelo menor (18), em seguida dividindo o menor (18) pelo resto da divisão anterior, e assim, sucessivamente até que não sobre resto na divisão, e neste momento, encontraremos o mdc dos números em questão.

A distribuição no diagrama será a seguinte, os números que serão divididos ficarão na linha do meio, iniciamos apenas com os números cujo mdc queremos encontrar, o maior à esquerda e o menor imediatamente à direita do primeiro (Diagrama 1), na linha superior serão inseridos os quocientes (resultados) das divisões dos números da linha central, este será inserido sobre o divisor, enquanto na linha inferior, serão depositados os restos das divisões, e ficarão logo abaixo do número dividido (dividendo).

Diagrama 1 – Encontrar mdc(237, 18), início

237	18	

Fonte: Autor (2020)

Dividindo 237 por 18, encontramos 13, que será colocado sobre o 18 no diagrama, mas como $18 \times 13 = 234$ e $237 - 234 = 3$, temos que o resto é 3, e este ficará tanto abaixo de 237, quanto ao lado do 18, pois será usado para a próxima divisão, veja no diagrama 2.

Diagrama 2 - Encontrar mdc(237, 18), primeira divisão

	13	
237	18	3
3		

Fonte: Autor (2020)

Pelo processo descrito acima, dividiremos agora 18 pelo resto da divisão anterior, neste caso 3, e o resultado inseriremos, à direita do 13, como no Diagrama 3.

Diagrama 3 - Encontrar mdc(237, 18), segunda divisão

	13	**6**
237	18	3
3		

Fonte: Autor (2020)

Ao dividir 18 por 3, encontramos 6, deixando resto 0, assim, encerramos nosso processo, e encontramos $mdc(237, 18) = 3$, conforme o Diagrama 3. Observe que paramos quando encontramos uma divisão exata (resto zero), e neste caso, o divisor será o mdc desejado.

3.5 Mínimo Múltiplo Comum (mmc)

O mínimo múltiplo comum (mmc) utilizado com frequência na identificação de denominadores em operações com frações será apresentado a seguir, destacado maneiras de encontrar o mmc manualmente e outras aplicações.

3.5.1 Conhecendo o mmc

O mínimo múltiplo comum (mmc) mantém uma relação estreita com o mdc, ambos precisam manter elementos comuns entre os números verificados, entretanto, enquanto o mdc utiliza divisores, o mmc verifica múltiplos, logo, o seu valor deve ser maior que, ou igual ao maior dos números verificados, e para encontrá-lo é necessário que o valor seja o menor múltiplo comum em relação aos números em questão.

Quadro 19 – Número e seus múltiplos

Número	Múltiplos
$\mathbf{4}$	$[4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots]$
$\mathbf{5}$	$[5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots]$
$\mathbf{6}$	$[6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots]$
$\mathbf{11}$	$[11, 22, 33, 44, 55, \ldots]$

Fonte: Autor (2020)

Quadro 20 – MMC de dois números

mmc
$\boldsymbol{mmc(4, 5) = 20}$
$\boldsymbol{mmc(4, 6) = 12}$
$\boldsymbol{mmc(5, 6) = 30}$
$\boldsymbol{mmc(4, 11) = 44}$
$\boldsymbol{mmc(5, 11) = 55}$

Fonte: Autor (2020)

Entre os múltiplos de 4 e 5, o menor número comum é 20, entre os múltiplos de 4 e 6, o menor número comum é 12, e assim sucessivamente. Observemos nos casos em que os números verificados são primos ou primos entre si, o mmc é o produto entre os números em questão.

Como iniciamos falando da relação entre mmc e mdc, vamos tornar a falar sobre o assunto, uma maneira de encontrar um deles, quando se tem o outro, é resolver a equação seguinte, considere m e n números naturais, assim temos que o produto entre o mdc(m,n) e o mmc(m,n) é igual ao produto de m por n, ficando $mdc(m, n) \times mmc(m, n) = m\ x\ n$.

3.5.2 Aplicações do mmc

Como mencionado anteriormente na subseção 3.4.1 e subseção 3.5.1, mdc e mmc possuem estreita relação, por isso algumas aplicações podem parecer semelhantes ou mesmo relacionar ambos em sua utilização e resolução. Vamos aos exemplos concretos.

Um pintor possui dois tipos de tinta para pintar um muro e sabe que com o tipo A consegue pintar 3 metros com um litro, enquanto com o tipo B consegue pintar 5 metros com dois litros de tinta. Que quantidade de tinta de cada tipo é necessária para pintar a menor metragem igual dos tipos de tinta A e B?

Para resolver a situação, note que precisamos encontrar o mmc entre 3 e 5, e como ambos são primos, podemos multiplicar um pelo outro para encontrar o mmc(3,5), que é igual a 15, logo a menor medida será 15 metros, entretanto, ainda precisamos encontrar a quantidade de tinta, para isso, vamos multiplicar a quantidade de litros por metro do tipo A, por 5 e do tipo B por 3, obtendo $5 \times 1 = 5$ e $2 \times 3 = 6$, portanto, as quantidades de tinta desejadas são 5 litros do tipo A e 6 litros do tipo B, para pintar 15 metros de muro com cada tipo de tinta.

Continuando a prática, temos a seguinte situação. Uma costureira costuma usar dois tipos de linha ao mesmo tempo em sua máquina de costura, porém uma das linhas mede 200 metros, enquanto a outra mede 300 metros, mas cansada de ficar com falta de um dos tipos de linha, resolveu fazer o cálculo para saber a quantidade de tubos com cada tipo de linha para comprar e não sobrar de nenhum dos dois tipos. Qual o cálculo necessário para solucionar o problema? Quais são as possíveis quantidades que solucionam o problema?

Somos levados a pensar no mmc(200,300), já que a partir dele será possível encontrar múltiplos comuns dos números 200 e 300. Como mmc(200,300) é igual a 600, temos que a menor quantidade que deve ser comprada são 3 tubos de 200 e 2 tubos de 300, já que 600 dividido por 200 é 3, e 600 dividido por 300 é 2, lembre-se que esta é a menor quantidade, assim, para comprar quantidades maiores, basta manter a proporção, em outras palavras, multiplicar ambos (3 e 2), pelo mesmo número, que por consequência obterá um múltiplo de 600 metros de linha, por exemplo se comprar 6 tubos de 200 metros, deverá comprar 4 tubos de 300, se forem 9 de 200, deve comprar 6 de 300, e assim sucessivamente.

3.5.3 Encontrar o mmc manualmente

Para encontrar manualmente o mmc, vamos utilizar um processo que nos levará a decomposição em fatores primos (Subseção 3.3.2) do mmc desejado. Para tanto, disporemos os números dos quais desejamos encontrar o mmc lado a lado, separados entre si por vírgula, e geralmente à direita dos números citados, colocamos uma barra vertical para separar os números primos que comporão o mmc, dos números que iremos verificar através de suas divisões por números primos.

Tendo entendido a disposição dos números, o processo de divisão inicia com a identificação do menor número primo que divide pelo menos um dos números (ou todos os números), inserindo-o à direita da barra, em seguida, dividimos os números possíveis (por serem divisíveis), o resultado da divisão é inserido abaixo do número dividido, caso um dos número não tenha sido dividido (por não ser divisível pelo primo em questão), este será baixado, e em seguida o processo é reiniciado com a identificação do menor número primo que divide pelo menos um dos números da linha seguinte, podendo ser inclusive o mesmo número primo utilizado anteriormente, este processo se repete até que abaixo de cada número reste apenas o número 1 e por fim, o mmc será o produto dos números primos à direita da barra. Vamos praticar encontrando o mmc de 12 e 8, para tal, faremos o passo a passo descrito acima, apresentado no Diagrama 4.

Diagrama 4 – Encontrando mmc(12, 8), início

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{12,8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{6,4} & \\ & \\ & \end{array}$$

Fonte: Autor (2020)

Identificamos que o menor número primo que divide ambos é 2, pois são ambos pares, ao dividirmos cada um por 2, encontramos $12 \div 2 = 6$ e $8 \div 2 = 4$, ficando como exposto no Diagrama 5.

Diagrama 5 – Encontrando mmc(12, 8), primeira divisão por 2

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{12,8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{6,4} & \\ & \\ & \end{array}$$

Fonte: Autor (2020)

Em seguida, realizaremos o mesmo procedimento, para tanto, identificamos que 2 continua dividindo ambos, assim, apresentaremos os próximos passos no Diagrama 6.

Diagrama 6 - Encontrando mmc(12, 8), segunda divisão por 2

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{12,8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{6,4} & 2 \\ \mathbf{3,2} & \\ & \end{array}$$

Fonte: Autor (2020)

Vemos através do Diagrama 6, que 2 continua sendo o menor número primo que divide pelo menos um dos números a esquerda da barra, assim, continuaremos o procedimento no Diagrama 7.

Diagrama 7 - Encontrando mmc(12, 8), terceira divisão por 2

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{12,8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{6,4} & 2 \\ \mathbf{3,2} & 2 \\ \mathbf{3,1} & \end{array}$$

Fonte: Autor (2020)

Como 3 não é divisível por 2, apenas baixamos ele para a linha seguinte, este procedimento é realizado para todos os números que não são divisíveis pelo número primo ao lado direito da barra (na mesma linha), a partir de agora, nos resta o 3 para dividir pelo próprio 3, pois ele é primo, finalizando o processo como apresentado no Diagrama 8.

Diagrama 8 – Encontrando mmc(12, 8), divisão por 3

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{12,8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{6,4} & 2 \\ \mathbf{3,2} & 2 \\ \mathbf{3,1} & 3 \\ \mathbf{1,1} & \end{array}$$

Fonte: Autor (2020)

Por fim, para encontrarmos o $mmc(12,8)$, nos resta multiplicar os números primos que estão à direita da barra, assim, $mmc(12,8) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$, logo, o $mmc(12,8)$ é igual a 24. Note que, os números primos à direita da barra formam a decomposição primária de 24.

3.6 Números Especiais

Os números reservam inúmeros mistérios, dos quais, alguns foram explorados por estudiosos. A descoberta de características apresentadas por alguns números naturais, originam subconjuntos intrigantes por sua natureza, ou mesmo pelas dúvidas que provocam. São os casos dos Números de Mersenne, Números perfeitos e os Números figurados, pois alguns destes, além de manter enigmas para suas descobertas, mantém relações entre si.

3.6.1 Números de Mersenne

Marin Mersenne foi um padre (monge), que além da religião, atuava em áreas diversas, como Filosofia e matemática, e o seu principal legado foi a descoberta de números primos com uma característica especial, escrito através da expressão de um número de base 2 elevado à um expoente primo, e deste número retira-se uma unidade. Escrito como

$$M(p) = 2^p - 1$$

Onde $M(p)$ é o número primo de Mersenne e p é um número primo qualquer.

No início, ele acreditava que todos os números com essa característica eram primos, entretanto, nem todos os números com tal característica são primos, por esse motivo, são chamados Números de Mersenne, e alguns casos particulares destes, os primos com tal estrutura, são chamados primos de Mersenne. Por exemplo, M(2) é primo, enquanto M(11) não é primo, vejamos.

$$M(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

e

$$M(11) = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047$$

Para $M(2) = 3$, podemos ver com facilidade que é primo, pois já vimos anteriormente, porém pode não ser de mesma facilidade identificar que $M(11) = 2047$, não é primo, mas é possível verificar com a decomposição primária, e neste processo encontraremos que 23 e 89 dividem 2047, e sua decomposição primária é $23 \times 89 = 2047$, portanto, M(11) não é um número primo, mas é um número de Mersenne.

3.6.2 Primos de Mersenne

Vimos na subseção 3.6.1, que um número é dito Primo de Mersenne, se além de ser primo, puder ser escrito da forma

$$M(p) = 2^p - 1$$

Onde p é um número primo. Podemos perceber que nem todo número primo é de Mersenne, pois existem alguns que não podem ser escritos com tal estrutura, por exemplo temos 5, 11, 13, entre outros.

O mais importante nos primos de Mersenne é sua estrutura, onde devido a ela, torna-se possível afunilar a identificação dos números primos (de Mersenne) com milhões de dígitos, ditos números grandes, para a criptografia, um dos ramos que muito os utiliza, para a segurança nos sistemas de comunicação, na internet, nos arquivos e senhas, e quanto maior o número primo, maior será a segurança da criptografia.

Não por acaso, o maior número primo conhecido atualmente (agosto de 2020) é o M(82589933), um número primo de Mersenne que possui mais de 24 milhões de dígitos, encontrado pelo GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search). Para confirmar que um número de Mersenne é primo, é geralmente usado o teste de primalidade de Lucas-Lehmer, este foi o teste usado pelo GIMPS para confirmar a primalidade do atual maior primo de Mersenne conhecido.

3.6.3 Números Perfeitos

Número perfeito é aquele cuja soma de seus divisores próprios (sem o número em questão), resulta o próprio número.

Como exemplo, temos o número 6, onde seus divisores próprios são 1, 2 e 3, ao somar $1 + 2 + 3 = 6$, logo 6 é um número perfeito. Note que 6 é divisor de 6, mas como trata-se do número em questão, não o somamos.

Como o 6 também é divisor de 6, caso decidamos somar todos os divisores, incluindo ele, precisamos fazer um pequeno ajuste na definição de número perfeito, em vez de pensar no próprio número como parâmetro, precisamos saber que tal soma resultará no dobro do número a ser avaliado.

Usando o 6, ainda como exemplo, sabemos que seus divisores são 1, 2, 3 e 6, cuja soma é 1 + 2 + 3 + 6 = 12, e sabemos que 12 é o dobro de 6, observe que neste caso, somamos o 6 como seu divisor, logo o resultado, para que ele seja considerado um número perfeito, deve ser, e é, o dobro de 6, portanto, 6 é um número perfeito.

Os demais números possuem denominação em relação a soma de seus divisores, eles podem ser classificados em abundantes, quando a soma de seus divisores próprios resulta em um valor maior que o número verificado ou podem ser defectivos quando a soma de seus divisores próprios for menor que o número verificado.

Os números perfeitos despertam fascínio há tempos, grandes matemáticos, entre Pitagóricos, Euclides e Euler já se aventuravam por tais números. Inclusive, é de Euclides, o teorema que prova que todo número natural n escrito como,

$$n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$$

onde p e o número $(2^p - 1)$ são primos é um número perfeito, ou seja, se n for do tipo acima, então ele será um número perfeito par, note que citamos o fato de ele ser par, pois até o momento, não se tem conhecimento sobre a existência ou inexistência de números perfeitos ímpares.

O número primo na estrutura do número perfeito, é o hoje conhecido Primo de Mersenne,

$$M(p) = 2^p - 1$$

Note que este, é o número apresentado por Euclides como necessário para a obtenção de um número perfeito par, em outras palavras, não basta que seja um número primo qualquer, é necessário que seja um número primo de Mersenne, foi isso que Euclides provou, e vários séculos depois, Euler completou a demonstração ao provar que se um número é perfeito, então ele será o produto de um número que é potência de base 2 por um primo de Mersenne, demonstrando a recíproca do teorema de Euclides sobre números perfeitos pares.

Vimos que 6 é um número perfeito, vamos mostrar que ele pode ser escrito com a estrutura $n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, assim

$$6 = 2^{2-1} \times (2^2 - 1) = 2 \times (4 - 1) = 2 \times 3$$

e sabemos que $2 \times 3 = 6$, portanto, 6 pode ser escrito na estrutura dos números perfeitos conforme demonstrado por Euclides-Euler, e mais, todos os números perfeitos pares podem ser escritos desta forma.

3.6.4 Números figurados

Números figurados são os que podem representar formas geométricas através da disposição de suas unidades de acordo com o tipo de número em questão, vimos anteriormente um dos tipos, os números quadrados perfeitos (3.2.4), porém não foi apresentado naquele momento com a presente classificação, os números figurados, são também chamados de geométricos. Vejamos alguns exemplos na figura 15.

Figura 15 – Números figurados

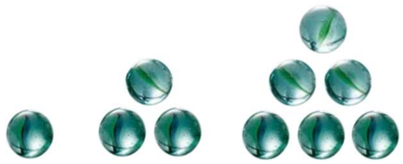
Fonte: Autor (2020). Da esquerda para a direita, número triangular, quadrado, pentagonal e hexagonal.

Apresentaremos nas próximas subseções sobre os números triangulares (subseção 3.6.5), pentagonais (subseção 3.6.6) e hexagonais (subseção 3.6.7).

3.6.5 Número Triangular

Número triangular é aquele cuja a disposição de suas unidades possibilita formar triângulos sem que sobrem ou faltem unidades na construção do triângulo. Como exemplos de números triangulares, temos os números 1, 3 e 6, pois podem ser estruturados da forma mostrada na Figura 16.

Figura 16 – Números 1, 3 e 6 em forma triangular

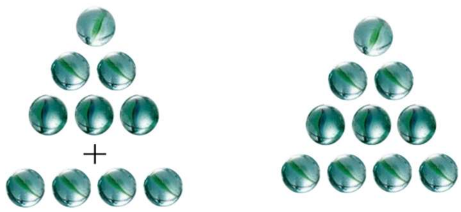


Fonte: Autor (2020).

Observe que podemos obter o próximo número triangular a partir da visualização em triângulo do número atual, bastando assim, verificar o número de elementos da base, e acrescentar o número de elementos da base atual, mais uma unidade e somá-los com o número atual. Se tomarmos o número 6 como exemplo, o triângulo formado por ele (triângulo da direita na Figura 16), dispõe de 3 unidades em sua base, acrescentando 3 unidades, mais 1 unidade e somando com o número 6, teremos o próximo número triangular, desta forma, o próximo número triangular será 10, já que $3 + 1 + 6 = 10$.

Na visualização em forma de triângulo, basta completar corretamente a quantidade de elementos da nova base, como abaixo, acrescentando à nova base o número de elementos da base anterior e somando uma unidade, assim, o exemplo anterior ficará como na figura 17.

Figura 17 - Formação do número triangular 10, a partir do 6



Fonte: Autor (2020).

Vamos conhecer mais sobre números triangulares, relacionando-os aos números perfeitos e primos de Mersenne, antes, precisamos conhecer a fórmula geral para se encontrar um número triangular. A forma de encontrar o número triangular da posição n, onde n é um número natural, é através da fórmula de seu termo geral, dada pela metade do produto de n por (n+1), como abaixo, onde $T(n)$ é o número triangular e n é a posição (ordem) do número triangular em questão.

$$T(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Observemos primeiramente que, $n \cdot (n+1)$ será sempre divisível por 2, pois são números em sequência e um dos dois (n ou $n+1$) será sempre par. Em seguida, relembremos que um número perfeito b, tem a forma

$$b = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$$

com p, primo. Manipulando algebricamente a fórmula que nos fornecer b, podemos reescrevê-la como a fórmula do termo geral dos números triangulares. Assim,

$$b = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1) = \frac{2}{2} \cdot 2^{p-1} \cdot (2^p - 1) = \frac{2^p \cdot (2^p - 1)}{2} = \frac{(2^p - 1) \cdot 2^p}{2}$$

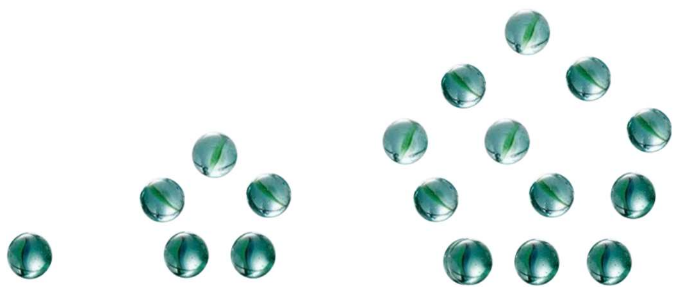
$$b = \frac{(2^p - 1) \cdot 2^p}{2}$$

A manipulação algébrica acima, nos fornece a fórmula para o termo geral dos números triangulares, pois a diferença entre os números $(2^p - 1)$ e 2^p é uma unidade, justamente o mesmo do termo geral dos números triangulares, assim, todo número perfeito par é também um número triangular, mas cuidado, pois nem todo triangular é perfeito. Vemos ainda que o primeiro número do produto na nova estrutura é o Primo de Mersenne.

3.6.6 Número Pentagonal

Os números pentagonais formam com a disposição de suas unidades um pentágono (figura geométrica com 5 lados). Como exemplos, temos na Figura 18, os números 1, 5 e 12, dispostos em forma geométrica.

Figura 18 - Números 1, 5 e 12, em forma pentagonal



Fonte: Autor (2020).

Para encontrar um determinado número hexagonal da posição n, podemos utilizar a fórmula do termo geral dos números pentagonais, expresso pela metade do produto de 3 vezes n menos 1, por n, conforme apresentado a seguir, onde $P(n)$ é o número pentagonal e n indica o número de sua posição.

$$P(n) = \frac{n \cdot (3n - 1)}{2}$$

Por exemplo, para confirmarmos os primeiros três números citados anteriormente, basta substituirmos no lugar de n, os números 1, 2 e 3, um por vez, encontrando,

Para $P(1)$,

$$P(1) = \frac{1 \cdot (3 \cdot 1 - 1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Para $P(2)$,

$$P(2) = \frac{2 \cdot (3 \cdot 2 - 1)}{2} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$$

E Para $P(3)$,

$$P(3) = \frac{3 \cdot (3 \cdot 3 - 1)}{2} = \frac{3 \cdot 8}{2} = 3 \cdot 4 = 12$$

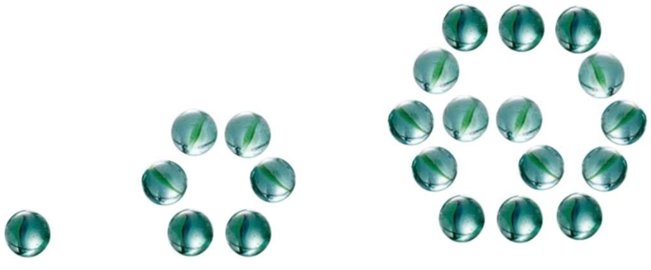
Desta maneira, confirmamos os valores para os três primeiros números pentagonais.

3.6.7 Número Hexagonal

Os números hexagonais, de modo análogo aos demais números figurados, possibilitam construir formas geométricas, e no caso dos hexagonais, é possível formar um hexágono dispondo suas unidades da maneira pretendida, sem que sobrem ou faltem unidades.

São números hexagonais, 1, 6, 15, entre outros. Vejamos a distribuição geométrica destes números na Figura 19.

Figura 19 - Números 1, 6 e 15 em formato hexagonal



Fonte: Autor (2020).

Para encontrar o número hexagonal da posição n, precisamos multiplicar 2 vezes n menos 1, por n, conforme indicado abaixo, onde $H(n)$ representa o número hexagonal, enquanto n representa a disposição numérica do número hexagonal.

$$H(n) = n \cdot (2n - 1)$$

4 ENGENHARIA DE SOFTWARE

A presente seção exibirá a Engenharia de Software, nela será possível entender a caracterização de um software, identificar um software educacional, facilitando diferenciá-lo dos demais por suas funcionalidades e potencialidades vinculadas ao processo de aprendizagem, viabilizando sua inserção no contexto de ensino-aprendizagem, nesta, será apresentado ainda o Senes, objeto do presente trabalho, software desenvolvido pelo autor, identificando seu modo de navegação, sua estrutura, onde encontrar as informações desejadas e o modo prática de conhecimentos, onde será possível aplicar e treinar os temas abordados com níveis diferenciados de dificuldade.

4.1 Caracterizando um Software

A época em que vivemos, apresenta uma realidade muito distinta de um passado próximo em relação à tecnologia, há pouco tempo, os carros por exemplo, eram comandados apenas manualmente, hoje, existe software para dirigir carro em piloto automático, software para estacionar o carro sem ajuda do ser humano, isto para mostrar algumas novas utilidades da tecnologia, sem enunciar outras utilidades já existentes e aprimoradas, como as utilizadas pelas indústrias e o desenvolvimento de computador quântico em fase de produção, com a pretensão de revolucionar o sistema computacional vigente, estas são uma mostra do quanto evoluímos em tecnologia e a consequente relação de nossa dependência cada vez maior de tais avanços como confirma Sommerville (2011, p. 2)

> O mundo moderno não poderia existir sem o software. Infraestruturas e serviços nacionais são controlados por sistemas computacionais, e a maioria dos produtos elétricos inclui um computador e um software que o controla. A manufatura e a distribuição industriais são totalmente informatizadas, assim como o sistema financeiro. A área de entretenimento incluindo a indústria da música, jogos de computador, cinema e televisão, faz uso intensivo de software. Portanto, engenharia de software é essencial para o funcionamento de sociedades nacionais e internacionais.

O desafio de falar de software com propriedade, e em nosso caso, educacional, nos leva à necessidade de compreender e construir conceitos buscando padronizar termos para facilitar o entendimento do presente trabalho, visto que conceitos como o próprio software pode ter interpretações distintas, não antagônicas, mas sentidos amplos ou limitados, como podemos perceber nas definições de Sommerville (2011) e de Rezende (2005), onde para o primeiro, Software não é simplesmente outra palavra para programa de computador, mas toda documentação associada e dados de configurações necessárias para fazer esse programa operar corretamente, assim

> [...] software desenvolvido profissionalmente é, com frequência, mais do que apenas um programa; ele consiste em uma série de programas separados e arquivos de configuração que são usados para configurar este programa. Isso pode incluir documentação do sistema que descreve a sua estrutura; documentação do usuário que explica como usar o sistema; e sites, para usuários baixarem a informação recente do produto. (SOMMERVILLE, 2011, p. 3)

Enquanto para o segundo, software é um programa de computador, ainda que para ele, seja um subsistema de um sistema computacional. Temos ainda autores caracterizando sistema operacional a exemplo do Windows, Linux e MacOS como software base, entretanto, para Rezende (2005, p. 2) o sistema é um "Conjunto de partes que interagem entre si, visando um objetivo comum. Em informática é o conjunto do software, hardware e recursos humanos.", enquanto

> [...] software básico é uma coleção de programas escritos para dar apoio a outros programas. Alguns [...] processam estruturas de informações complexas, mas determinadas. Outras, aplicações de sistema (por exemplo, componentes do sistema operacional, drivers, processadores de telecomunicações) processam dados amplamente indeterminados. Tanto num como no outro caso, a área do software básico é caracterizado por forte interação com o hardware do computador. (REZENDE, 2005, p. 13)

Assim, levando em consideração as definições e acepções acerca de software atribuídas por Sommerville (2011) e por Rezende (2005), podemos afastar do presente trabalho a possibilidade de embaraço quanto ao significado do título em epígrafe, com Sistema Operacional, nos restando a acepção de programa, incluído sua documentação e configuração necessárias ao seu perfeito funcionamento, para definição de software.

A amplitude da aplicação dos softwares favorece sua inserção em diversos campos e áreas na sociedade atual, bastando que se foque no objetivo a ser alcançado e nas melhores ferramentas, pois segundo Rezende (2005, p. 11) "O software pode ser aplicado a qualquer situação em que o conjunto previamente especificado de passos procedimentais (isto é, algoritmo) tiver sido definido", e para Sommerville (2011, p. 2)

> Os sistemas de software são abstratos e intangíveis. Eles não são restringidos pelas propriedades dos materiais, nem governados pelas leis da física ou pelos processos de manufatura. Isso simplifica engenharia de software, Por que não há limites naturais para o potencial do software. No entanto, devido essa falta de restrições físicas, os sistemas de software podem se tornar extremamente complexos de modo muito rápido.

Assim, pensar em software para educação é completamente possível e plausível, devido ao amplo grau de possibilidades e versatilidade, mantendo o cuidado para não o tornar extremamente complexo e inviabilizar com isso, seu uso educacional.

Ao abordar a temática softwares, se faz necessária compreensão sobre Engenharia de Software, por ser fundamental para a elaboração de qualquer aplicativo. A Engenharia de Software se utiliza das técnicas e métodos advindos das engenharias tradicionais a fim de garantir características importantes da produção de produtos, tais como: prazos, qualidade, manutenção, garantias, entre outros. No desenvolvimento de um software os desenvolvedores têm que resolver muitos problemas de ordem industrial, onde o principal problema a ser resolvido é a garantia da qualidade do produto. Tal qualidade deve envolver várias perspectivas, agrupadas em internas e externas ao desenvolvimento.

A garantia da qualidade externa, em geral, está ligada aos usuários e ao cliente que solicitou a criação do software, enquanto a qualidade interna está relacionada aos desenvolvedores. Como qualidade externa o software tem que ser fácil de usar, eficiente, confiável, seguro e agregar alguma forma de valor para o cliente. No caso do desenvolvedor a principal qualidade é a de ser fácil de manter (correções e atualizações).

A Engenharia de Software determina que a qualidade do software deve ser aferida ao longo de seu processo de desenvolvimento, constituindo o processo de software, considerado como o conjunto de atividades, métodos, práticas e transformações que direcionam os desenvolvedores na produção do software, este possui os seguintes subprocessos: processo de desenvolvimento, processo de garantia da qualidade e processo gerência do projeto. Assim, para a produção de Software ocorre a elaboração de um subprojeto para o gerenciamento do desenvolvimento, destacando a determinação dos objetivos, prazos, escolha das ferramentas computacionais e delimitação do projeto de software.

4.2 Identificando Software Educacional

A caracterização e identificação de software educacional, torna-se menos complicada após a compreensão do que é software*,* conforme apresentado na subseção anterior (4.1), tendo em vista sua aplicação voltada para a educação, segundo Frederico e Gianotto (2013, p. 46),

> Os softwares são programas que são desenvolvidos para várias funções, dentre elas auxiliar no processo de ensino. Eles podem ser considerados como programas educacionais, a partir do momento em [...] que realmente contextualizem o processo ensino-aprendizagem.

Em consonância com o supracitado, Morais (2003), afirma, que software educativo tem como objetivo principal facilitar o processo ensino-aprendizagem, buscando possibilitar ao estudante a construção de conhecimentos relativo a um conteúdo didático, assim, “Os softwares educacionais foram criados em diferentes classes para serem utilizados no processo educacional, sendo eles caracterizados como educacional se existe sua inserção em contextos de ensino-aprendizagem.” (MORAIS, 2003, p. 21), em sintonia com tais pensamentos, Oliveira, Costa e Moreira (2001, p. 73) confirmam a caracterização de software como educacional a partir de seu uso no processo de ensino e aprendizagem. Assim, um software não desenvolvido, especificamente, para o uso no processo educacional, por exemplo o Google Meet, mas que seja adequadamente utilizado pela escola é um software educacional, inclusive programas utilizados em processos administrativos escolares ou em contextos pedagógicos podem ser considerados softwares educacionais.

A respeito da categorização dos softwares educacionais, Oliveira, Costa e Moreira (2001) sugerem considera-los como Software Educativo e Software Aplicativo. Neste sentido, Software Educacional é todo software adequadamente utilizado pela escola. Software Educativo (SE) é aquele cujo objetivo seja favorecer os processos de ensino-aprendizagem, ou seja, foram desenvolvidos para a construção de determinado conhecimento relativo a um conteúdo didático, por sua vez Softwares Aplicativos, são aqueles desenvolvidos sem a perspectivas da aplicação pedagógica, mas que em virtude de sua funcionalidade podem ser utilizados pela escola para tal função.

A utilização de ferramentas didáticas na educação tende de modo geral a produzir resultados positivos, desde que a atividade seja planejada e as ferramentas contribuam para o alcance dos objetivos, neste sentido, incluem-se as atividades com softwares educacionais, onde para Santos *et al*. (2012, p. 2), os softwares educativos

> [...] podem contribuir de forma significativa para o processo ensino-aprendizagem, além de se caracterizarem como alternativas enriquecedoras que auxiliam na didática do professor. Esses softwares educacionais podem ser empregados nas mais variadas situações tais como simulações que testam diferentes alternativas de otimização desses sistemas e estimulação do raciocínio lógico o que, consequentemente, favorece a autonomia, as inferências e conclusões a partir dos resultados apresentados.

Mostrando a importância de utilizar softwares educacionais no processo de ensino-aprendizagem para o favorecimento de uma educação emancipadora proporcionando autonomia aos estudantes quanto a sua construção do conhecimento.

Destacamos ainda, que o software educacional, a exemplos de outros, necessita de avaliação desde sua gênese, buscando facilitar o alcance de seus objetivos, nas palavras de

Morais (2003, p. 37), “Não podemos dizer que um software educacional irá atingir seu objetivo se, desde a sua concepção, não houver uma avaliação dos procedimentos que serão utilizados.”, vale ressaltar que, para desenvolver tal ferramenta educacional, o proponente precisa conhecer técnicas pedagógicas, para a qualidade educativa, bem como outros aspectos do software não sejam comprometidos.

Os softwares educacionais estão distribuídos em categorias (PACHECO e BARROS, 2013; SANTOS *et al*., 2012; MORAES, 2013; ALMEIDA e ALMEIDA, 2015), devido à suas características e objetivos, entre tais distinções podemos encontrar:

Tutoriais – onde o programa apresenta uma sequência didática, dependendo do objetivo, tal sequência pode ser rígida ou não, no último caso, o próprio estudante pode escolher os itens ao qual quer acessar e estudar, possibilitando autonomia em seu aprendizado;

Simulações – a depender do programa, os estudantes são apresentados à uma situação problema simulando características da realidade, podendo criar digitalmente inclusive situações impossíveis de se realizar em laboratórios escolares comuns, em muitos casos, tais realizações conseguem suprir a necessidade de aplicação real devido a seus resultados aceitáveis;

Jogos – a característica geral deste, é a ludicidade e o entretenimento, onde o estudante possa aprender e ampliar seus conhecimentos enquanto brinca. Dependendo do programa, o jogo pode ter o computador como desafiante, e atribuir graus de dificuldade conforme o avanço, mas pode também usar o modo versus, colocando um estudante como desafiador de outro em uma “batalha” de conhecimentos.

Aplicativos – enquadram-se neste quesito, os programas desenvolvidos com funções e objetivos diversos do educacional, mas que podem ser utilizados no processo ensino-aprendizagem, a exemplo dos editores de texto, pois podem ser aplicados na produção e edição de textos, a planilha eletrônica, muito utilizada para tabular dados, construção de gráficos, programação matemática, entre outros programas;

Exercício e Prática – neste, são apresentadas atividades a serem desenvolvidas pelos estudantes com base em competências e habilidades, geralmente sobre conhecimentos anteriormente apresentados e usados para contribuir na assimilação ou mesmo para avaliação do aprendizado.

Em linhas gerias, entre as características que distinguem um Software Educativo estão: definição e presença de uma fundamentação pedagógica que permeie todo o seu desenvolvimento; finalidade didática, por levar o aluno/usuário a “construir” conhecimento relacionado com seu currículo escolar; facilidade de uso, uma vez que não se devem exigir do aluno conhecimentos computacionais prévios, mas permitir que qualquer usuário, mesmo que em um primeiro contato com a máquina, seja capaz de desenvolver suas atividades; e atualização quanto ao estado da arte.

Ressalta-se que tais classificações não são exaustivas, tampouco excludente, podendo assim, existir caracterizações outras, para autores distintos, bem como a classificação e enquadramento de um determinado software em mais de uma categoria citada, dependendo principalmente de seu desenvolvimento, objetivo e utilização, tendo em vista que a aplicação depende tanto de quem está orientando seu uso, quanto de quem está utilizando.

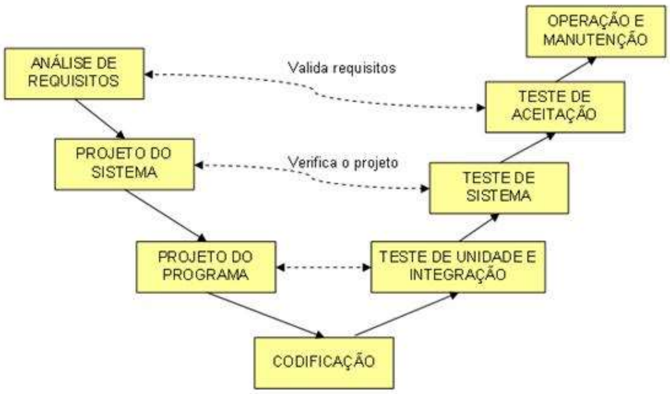
4.3 Senes (Software Educacional para Números Especiais)

A proposição e o desenvolvimento de um software educacional foram tarefas desafiadoras, entre outros, pela baixa quantidade de literatura a respeito do Haskell, programação funcional usada como linguagem do Senes e pelo tempo utilizado para a produção do software que visa contribuir com a aprendizagem de aritmética e apresentar números considerados especiais.

4.3.1 Relações teóricas sobre o Senes

O Senes é um software educacional desenvolvido pelo autor, cujo nome foi pensado inicialmente como uma sigla referente a Software Educacional para Números Especiais, porém, decidimos deixar como o nome próprio Senes, por ser uma palavra palíndromo, podendo ser associada ao símbolo do infinito, mantendo relação direta com os conjuntos numéricos (infinitos), principalmente os conjuntos dos naturais e dos números primos, mais abordados no presente trabalho e no software em questão. No processo de desenvolvimento levou-se em consideração o domínio de programação pelo autor, a facilidade de desenvolvimento e manutenção de um software para o ensino e aprendizagem de Matemática, como motivadoras na escolha do Haskell. Trata-se de uma linguagem de programação que trata o programa como uma função pura, por não provocar efeitos colaterais, portanto, com característica essencial em aplicações Matemáticas. Para a garantia da qualidade do software foi utilizado o modelo de ciclo de vida sequencial em V (Figura 20), e uma pesquisa com utilizadores (ver subseção 5).

Figura 20 – Ciclo de vida de software em V



Fonte: https://www.devmedia.com.br/ciclos-de-vida-do-software/21099

A linguagem de programação Haskell, aborda o paradigma da programação funcional, onde os objetos, diferente das linguagens de programação imperativas que recebem instruções operacionais, são tratados através de fórmulas matemáticas para a implementação de suas ações e a consequente obtenção de resultados, para MUELLER (2019, p. 10), “Essa diferença significa que, em vez de escrever um conjunto preciso de etapas para resolver um problema, você usará funções matemáticas e não se preocupará com o modo de a linguagem realizar a tarefa”. Desta forma, por ser uma linguagem funcional dita pura, seus resultados serão os mesmos, sempre que forem fornecidos os mesmos argumentos.

O software, enquanto ferramenta educacional, foi concebido com base em diversas teorias de aprendizagem, das quais podemos citar principalmente, o Construtivismo, Behaviorismo, Cognitivismo e a mais recente teoria, o Conectivismo, das quais, esta última trata como centro, as interações de aprendizagem ligadas ao meio digital de aprendizagem, enquanto a primeira, ganha destaque por estar diretamente relacionada ao desenvolvimento de materiais didáticos informatizados, sobre tais relações, Coelho e Dutra (2018, p. 62) nos dizem que “todas as abordagens são bem-vindas em prol do alcance de produzir conhecimento, seja ele no ambiente online ou presencial”, incentivando a interação das diversas teorias, na busca por uma aprendizagem significativa.

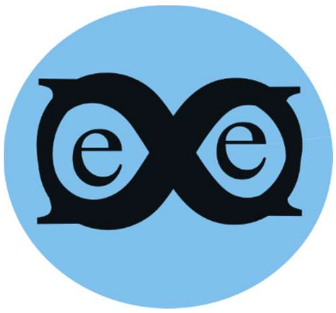
O programa foi desenvolvido para auxiliar a aprendizagem de aritmética na educação básica, valendo-se como fator motivador da aprendizagem as curiosidades despertadas pelos números especiais. Por ser um software tutorial, de exercício e prática (ver subseção 4.2), seu manuseio é intuitivo, podendo ser utilizado sem a presença de um professor ou mesmo tutor, sua utilização é encorajada a estudantes dos diversos níveis e anos da educação, devido a possibilidade de contribuir com o aprendizado de conceitos básicos necessários para períodos escolares diversos, buscando potencializar conhecimentos e habilidades matemáticas necessárias ao melhor aproveitamento de conhecimentos e conceitos que em geral são temas abordados principalmente nos 6° e 7° anos do ensino fundamental, entretanto, necessários para utilização e aplicação em períodos escolares posteriores, inclusive no cotidiano.

Em linhas gerais, o programa foi projetado para contribuir com a minimização das dificuldades dos estudantes em relação as operações matemáticas básicas, trazendo outras informações e práticas, buscando motivar os utilizadores a dedicar-se ao estudo de forma autônoma, entretanto, incentivamos a orientação e supervisão do professor, pois com base na literatura, a utilização do Senes no processo de ensino-aprendizagem, pode contribuir significativamente para que estudante alcance o aprendizado dos temas em questão, proporcionando maior satisfação para todos, mestre, aprendiz e sociedade.

4.3.2 Ambientação ao Senes

O símbolo do software (Figura 21) criado pelo autor, com o fundo formado por uma bola (círculo) azul e o nome Senes estilizado em preto, utilizando a fonte Times new Roman, com os “S” da palavra (Senes) deitados (de lado), um espelhado em relação ao outro, representando o símbolo do infinito, com as letras “e” nos espaços (vãos) internos do símbolo, desta forma, sugere-se pensar na letra “n” como uma das partes do símbolo, ficando a palavra Senes, como Palíndromo que é, sendo repetida infinitamente, como o próprio símbolo significa.

Figura 21 – Ícone, símbolo do Senes



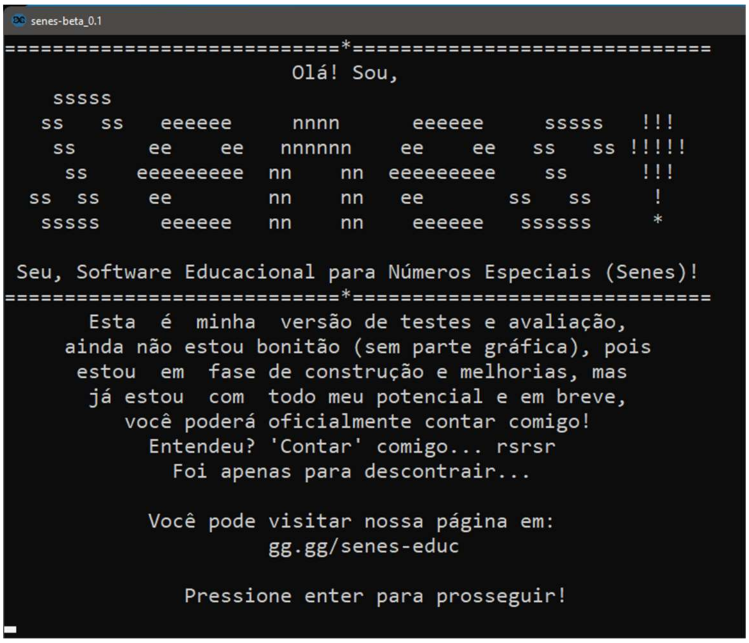
Fonte: Autor (2020)

O programa foi disponibilizado em sua versão beta sem a parte gráfica (GUI), motivado por imprevistos que não foram possíveis solucionar com tempo para sua aplicação e testes, ressaltamos a pretensão em desenvolvê-lo de forma completa, entretanto, por motivos não reconhecidos, dedicamos aproximadamente 25% do tempo dedicado a produzir o software, na tentativa de gerar a parte gráfica, porém mesmo com todas as bibliotecas (informações internas) instaladas, o compilador não identificou os comandos de gerar, ou de fechar a parte gráfica. Pela característica da linguagem utilizada na programação, o erro é apresentado no momento da interpretação ou compilação, assim, o programa não chega a ser gerado com qualquer erro.

Devido ao problema com a parte gráfica, surgiu uma outra necessidade, a de formatar manualmente todo o programa, seu menu, frases, perguntas e o texto apresentado de modo geral no software, pois o programa foi apresentado para testes apenas com a parte textual, buscando manter uma aparência amigável, maior parte do texto ficou na formatação justificado e sem imagens, porém algumas ideias de imagens como partição, para abordar o tema fração, figuras geométricas, para os números figurados e a abertura, valeram-se de símbolos para formar a ideia de imagens.

Com a inicialização do programa senes-beta_0.1, será mostrada a abertura (Figura 22), com uma breve apresentação do software e a informação sobre a versão atual. Para manusear tal versão, você utilizará apenas o teclado numérico para navegar pelos submenus desejados e retornar para o menu principal, deverá pressionar a tecla enter, após a inserção de cada número desejado e onde houver apenas texto para ocorrer a transição para a próxima parte (do texto).

Figura 22 – Abertura do Senes

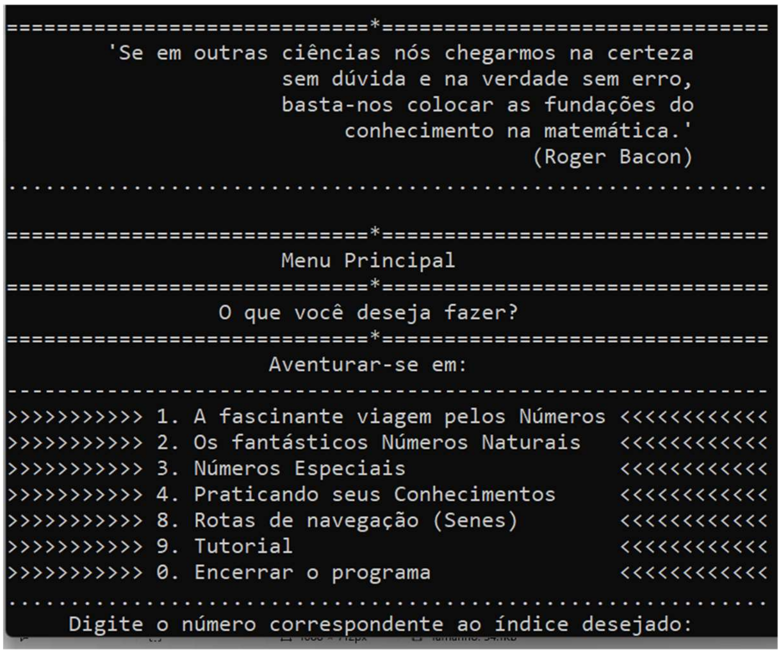


Fonte: Senes-beta_01 (Software)

No início do programa, o utilizador é convidado a inserir seu nome, basta digitar e pressionar a tecla enter, entretanto, caso opte por não inserir, o programa seguirá de maneira normal após pressionar enter.

O menu principal (Figura 23) aponta de forma genérica os temas abordados nos itens dos submenus, sempre que este menu é acessado, o utilizador pode visualizar uma epígrafe diferente apresentado de forma randômica, com objetivo de despertar interesse pelo conhecimento em quem estiver manuseando o aplicativo.

Figura 23 – Menu principal do Senes

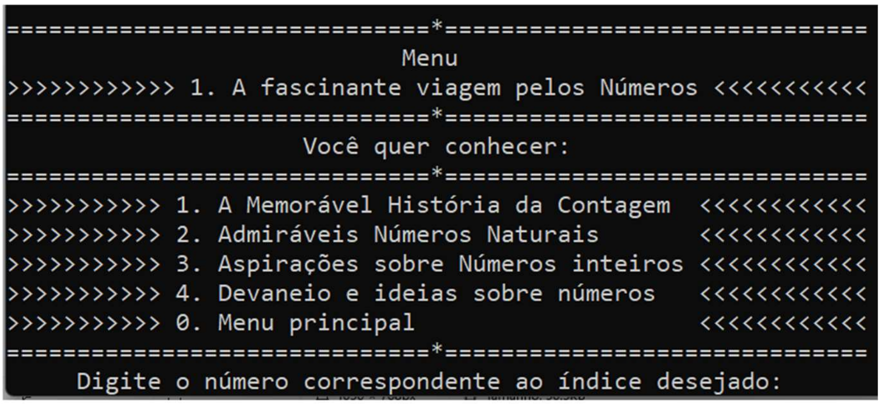


Fonte: Senes-beta_01 (Software)

Para escolher um índice do menu basta inserir o número correspondente e pressionar enter, assim o utilizador será direcionado para o submenu de sua escolha, onde realizará o mesmo procedimento até que chegue a seu objetivo, ou seja, a função do programa que deseja utilizar. Estando na função de seu interesse, basta seguir a orientação local, esta, geralmente consiste em inserir um número natural para ser aplicado ao objetivo da função e em seguida pressionar enter.

A fascinante viagem pelos números (Figura 24), apresenta conhecimentos teóricos, abordando como temática a História da Matemática com ênfase no surgimento da contagem e o consequente aparecimento dos números naturais, relacionando tais conhecimentos com o uso da igualdade em equações, através do equilíbrio delas. Não obstante, são apresentados os números inteiros e ideias sobre outros conhecimentos de conjuntos e números que apesar de fugir ao objetivo deste trabalho, são introduzidos com a pretensão de despertar interesse dos aprendizes pelos temas, motivando-os a buscar mais conhecimentos.

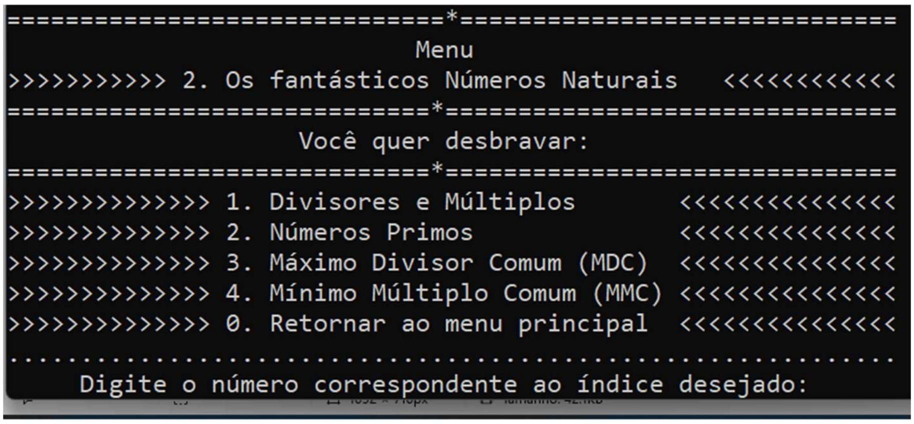
Figura 24 – Menu 1 do Senes



Fonte: Senes-beta_01 (Software)

O menu 2 (Figura 25) – Os fantásticos Números Naturais, inicia a introdução dos conhecimentos relacionados as práticas matemáticas, neste é possível conhecer e aprender a identificar os divisores e múltiplos de um número, números primos, Máximo divisor comum (mdc) e Mínimo múltiplo comum (mmc).

Figura 25 - Menu 2 do Senes



Fonte: Senes-beta_01 (Software)

O subitem 2.1 (Figura 26) do menu, possibilita ao utilizador aprofundar conhecimentos sobre divisores e múltiplos, onde pode aprender a encontrar e diferenciar os divisores de um número através dos critérios de divisibilidade, identificar um quadrado perfeito, associando aos múltiplos, aprender a encontrar divisores de um número em pares, bem como, confirmar sua prática na identificação dos temas em questão, ao gerar lista dos divisores ou múltiplos de um número.

Figura 26 - Submenu 2.1 do Senes

```
===========================*=============================
                          Menu
>>>>>>>>>>>>>>> 2.1 Divisores e Múltiplos <<<<<<<<<<<<<<<<<
==========================*==============================
                       Você quer:
==========================*==============================
>>>>>>>>> 1. Conhecer sobre Divisores e Múltiplos <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>> 2. Ver divisores de um número           <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>> 3. Ver pares de divisores de um número  <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>> 4. Ver múltiplos de um número           <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>> 5. Identificar um quadrado perfeito     <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>> 6. Conhecer critérios de divisibilidade <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>> 9. Retornar ao menu anterior            <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>> 0. Retornar ao menu principal           <<<<<<<<<<<
.........................................................
     Digite o número correspondente a ação desejada:
```

Fonte: Senes-beta_01 (Software)

Ao apresentar os números primos, o submenu 2.2 (Figura 27), mostra a diferença entre os números primos e compostos, como decompor um número em fatores primos, com base no Teorema Fundamental da Aritmética, destaca passo a passo, a forma prática de encontrar os números primos através do Crivo de Eratóstenes, e possibilita a verificação dos números primos de forma individual ou em lista.

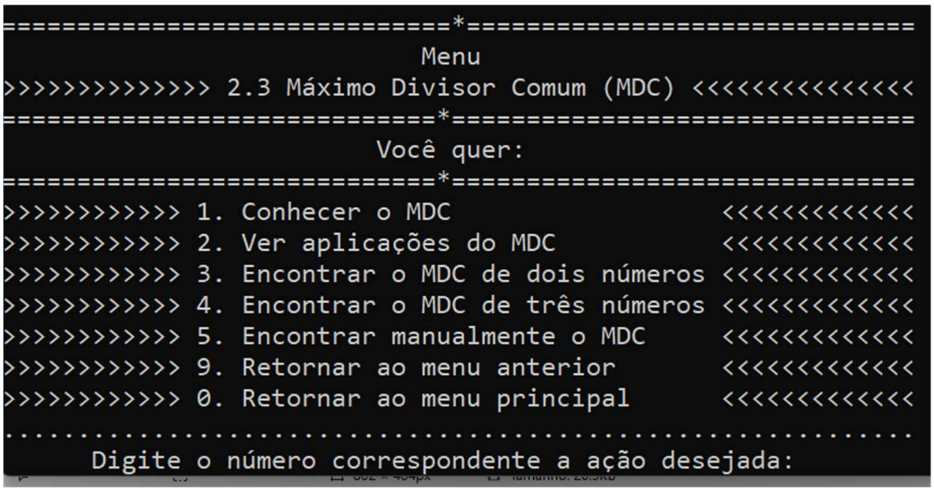
Figura 27 - Submenu 2.2 do Senes

```
==============================*==============================
                            Menu
>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 2.2 Números Primos <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
=============================*===============================
                         Você quer:
=============================*===============================
>>>>>>>>> 1. Conhecer Números Primos e Compostos  <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>> 2. Ver se um número é primo             <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>> 3. Uma lista com números primos         <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>> 4. Ver a decomposição de um número em   <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>>    fatores primos                       <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>> 5. Conhecer o Crivo de Eratóstenes      <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>> 9. Retornar ao menu anterior            <<<<<<<<<<<
>>>>>>>>> 0. Retornar ao menu principal           <<<<<<<<<<<
.............................................................
      Digite o número correspondente a ação desejada:
```

Fonte: Senes-beta_01 (Software)

A possibilidade de aprender sobre o Máximo divisor comum (mdc) é atribuída ao submenu 2.3 (Figura 28), neste, além de apresentar o tema central do item, são apresentados exemplos de aplicações do mdc no cotidiano, e formas de encontrar o mdc manualmente, assim como possibilita confirmar a veracidade da identificação do mdc encontrado de forma manual.

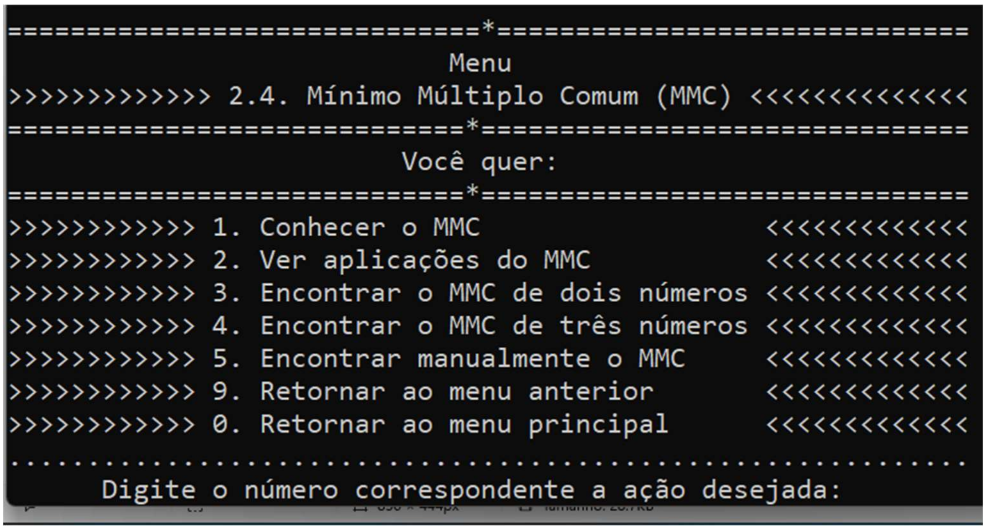
Figura 28 - Submenu 2.3 do Senes



Fonte: Senes-beta_01 (Software)

O Mínimo múltiplo comum (mmc) pode ser encontrado no item 2.4 (Figura 29), de modo análogo ao mdc, é apresentada a teoria sobre o mmc, explicando sobre o tema, além de mostrar exemplos de aplicações do mmc no cotidiano, e formas de encontrar o mmc manualmente, assim como possibilita confirmar a veracidade da identificação do mmc encontrado de forma manual.

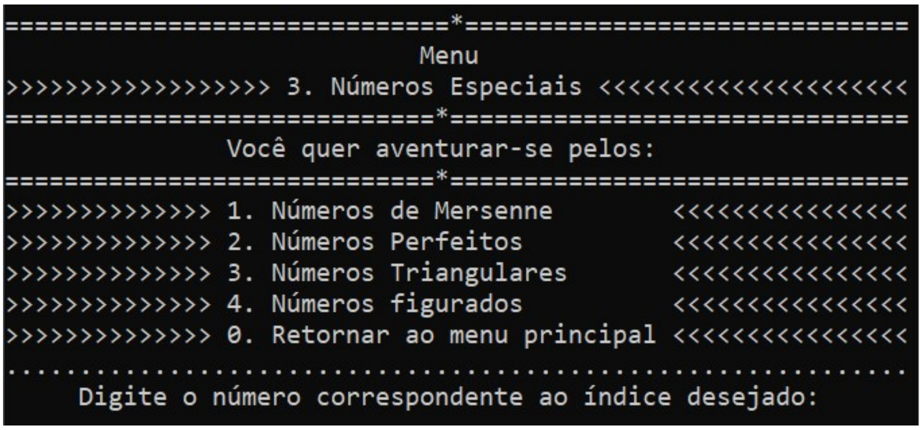
Figura 29 - Submenu 2.4 do Senes



Fonte: Senes-beta_01 (Software)

O menu 3 (Figura 30), guarda os números especiais, através dele é possível conhecer sobre os números de Mersenne, nos quais enquadram-se os primos de Mersenne, os números perfeitos e os números figurados, destacamos destes, os números triangulares por manter relação direta com os números perfeitos.

Figura 30 - Menu 3 do Senes

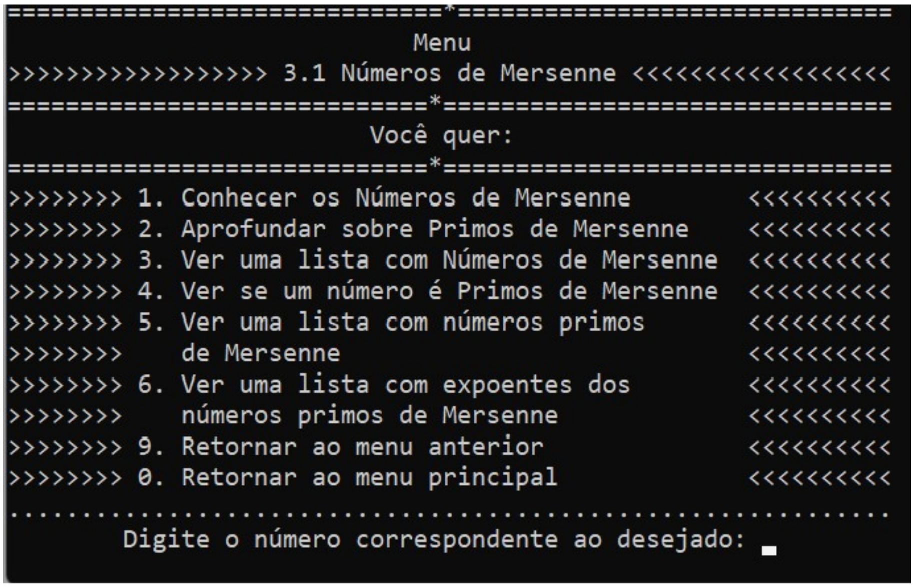


```
==============================*===============================
                             Menu
>>>>>>>>>>>>>>>>>> 3. Números Especiais <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
============================*=================================
             Você quer aventurar-se pelos:
============================*=================================
>>>>>>>>>>>>>> 1. Números de Mersenne        <<<<<<<<<<<<<<<<
>>>>>>>>>>>>>> 2. Números Perfeitos          <<<<<<<<<<<<<<<<
>>>>>>>>>>>>>> 3. Números Triangulares       <<<<<<<<<<<<<<<<
>>>>>>>>>>>>>> 4. Números figurados          <<<<<<<<<<<<<<<<
>>>>>>>>>>>>>> 0. Retornar ao menu principal <<<<<<<<<<<<<<<<
..............................................................
    Digite o número correspondente ao índice desejado:
```

Fonte: Senes-beta_01 (Software)

Observando o submenu 3.1 (Figura 31), é possível conhecer os números de Mersenne, onde destacamos a importância dos números Primos de Mersenne na atualidade, bem como é possível verificar se um número é primo de Mersenne, ver lista com expoentes dos primos de Mersenne, ou com os próprios números de Mersenne.

Figura 31 - Submenu 3.1 do Senes

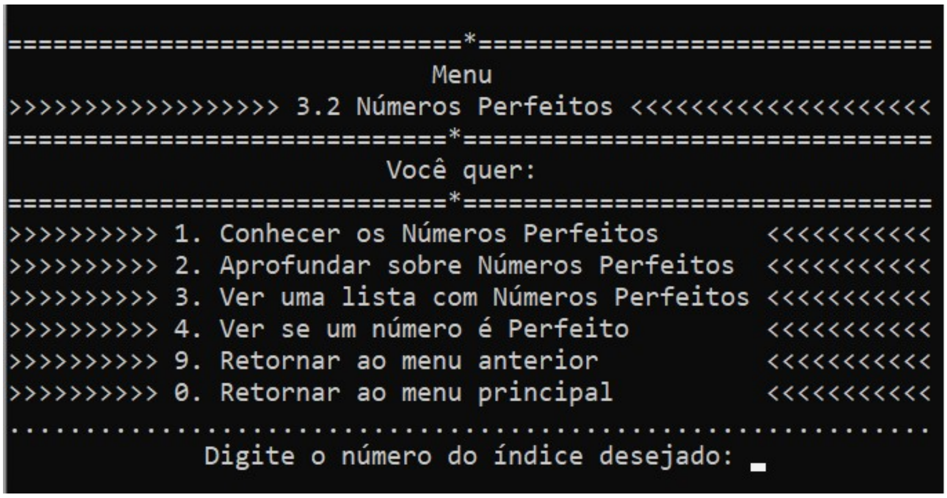


```
=============================*==============================
                            Menu
>>>>>>>>>>>>>>>>>> 3.1 Números de Mersenne <<<<<<<<<<<<<<<<<
============================*===============================
                         Você quer:
============================*===============================
>>>>>>>> 1. Conhecer os Números de Mersenne       <<<<<<<<<<
>>>>>>>> 2. Aprofundar sobre Primos de Mersenne   <<<<<<<<<<
>>>>>>>> 3. Ver uma lista com Números de Mersenne <<<<<<<<<<
>>>>>>>> 4. Ver se um número é Primos de Mersenne <<<<<<<<<<
>>>>>>>> 5. Ver uma lista com números primos      <<<<<<<<<<
>>>>>>>>    de Mersenne                           <<<<<<<<<<
>>>>>>>> 6. Ver uma lista com expoentes dos       <<<<<<<<<<
>>>>>>>>    números primos de Mersenne            <<<<<<<<<<
>>>>>>>> 9. Retornar ao menu anterior             <<<<<<<<<<
>>>>>>>> 0. Retornar ao menu principal            <<<<<<<<<<
............................................................
       Digite o número correspondente ao desejado:
```

Fonte: Senes-beta_01 (Software)

Os números perfeitos foram apresentados no subitem 3.2 (Figura 32), onde são contemplados os números em questão, relacionando-os com os primos de Mersenne, quanto a sua estrutura, realizar a verificação se números são perfeitos e criação de lista de números perfeitos.

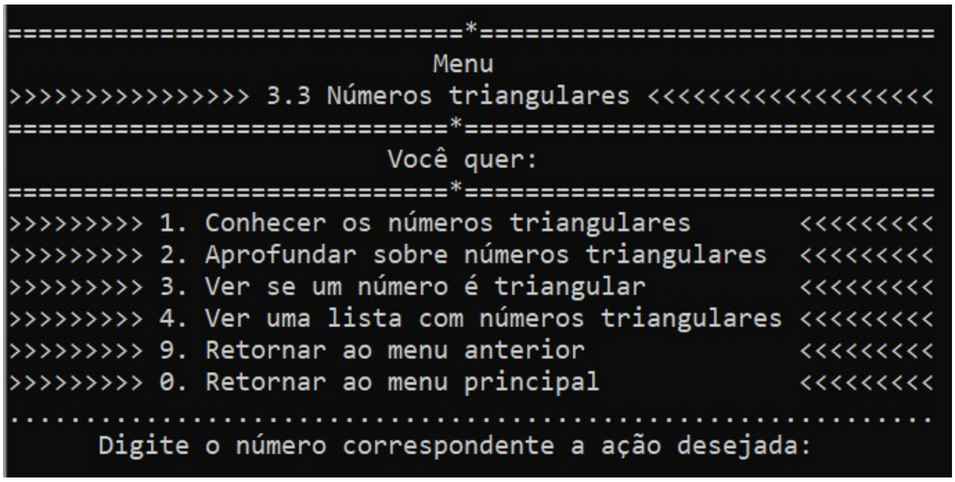
Figura 32 - Submenu 3.2 do Senes



Fonte: Senes-beta_01 (Software)

O submenu 3.3 (Figura 33) – Números triangulares, destaca estes, que são um tipo dos números figurados, decidimos apresentá-los separadamente devido a relação destes com os números perfeitos, assim, são apresentados os conceitos de números triangulares e é possível identificar se um número é triangular e gerar lista com tais números.

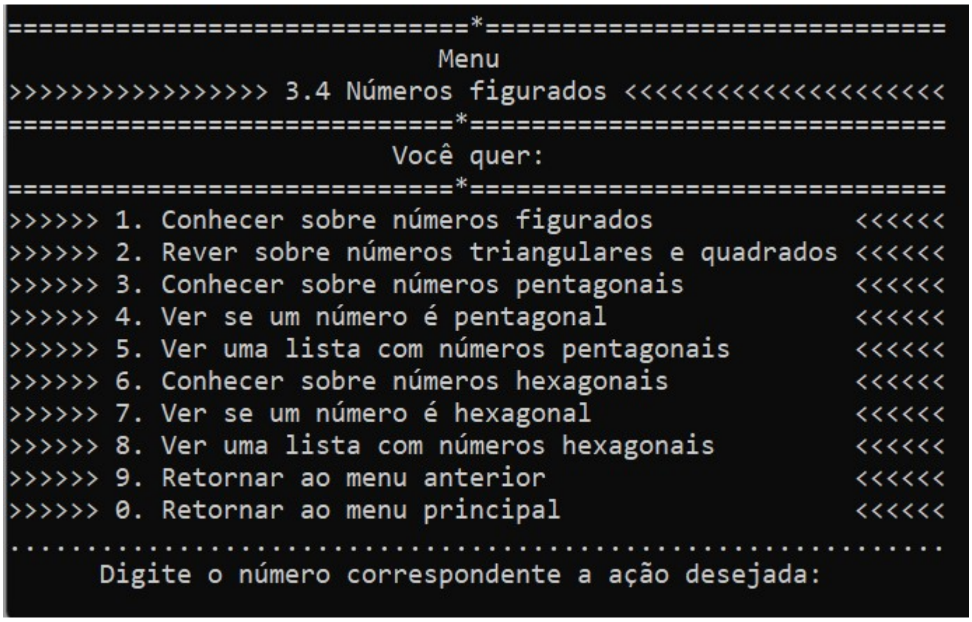
Figura 33 - Submenu 3.3 do Senes



Fonte: Senes-beta_01 (Software)

Os demais números figurados abordados no programa foram apresentados no submenu 3.4 (Figura 34), nele é possível identificar tais números, rever os números quadrados e triangulares, bem como conhecer os números pentagonais e hexagonais e testar se um número se enquadra em uma dessas categorias e ver lista com os números desejados entre os temas abordados.

Figura 34 - Submenu 3.4 do Senes

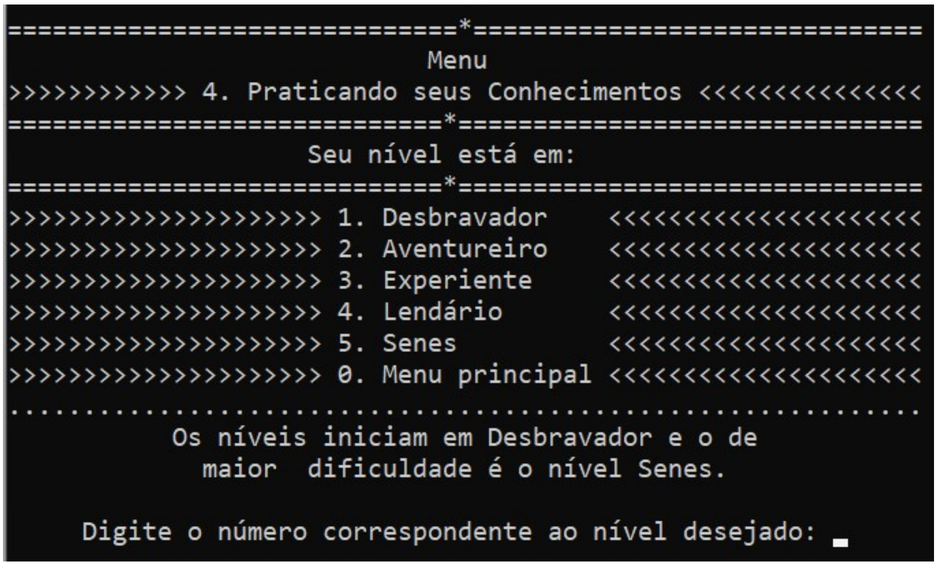


```
===============================*===============================
                              Menu
>>>>>>>>>>>>>>>>> 3.4 Números figurados <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
==============================*================================
                           Você quer:
==============================*================================
>>>>>> 1. Conhecer sobre números figurados             <<<<<<
>>>>>> 2. Rever sobre números triangulares e quadrados <<<<<<
>>>>>> 3. Conhecer sobre números pentagonais           <<<<<<
>>>>>> 4. Ver se um número é pentagonal                <<<<<<
>>>>>> 5. Ver uma lista com números pentagonais        <<<<<<
>>>>>> 6. Conhecer sobre números hexagonais            <<<<<<
>>>>>> 7. Ver se um número é hexagonal                 <<<<<<
>>>>>> 8. Ver uma lista com números hexagonais         <<<<<<
>>>>>> 9. Retornar ao menu anterior                    <<<<<<
>>>>>> 0. Retornar ao menu principal                   <<<<<<
...............................................................
      Digite o número correspondente a ação desejada:
```

Fonte: Senes-beta_01 (Software)

O item praticando seus conhecimentos (menu 4, Figura 35) permite ao aprendiz exercitar o que aprendeu nos itens anteriores, nele o utilizador será convidado a escolher o nível adequado ao seu grau de conhecimento, os desafios inseridos para a prática são os mesmos para todos os níveis (na versão atual, pretendemos acrescentar perguntas e diferenciar algumas de acordo com os níveis para as próximas versões), diferenciando apenas no intervalo numérico submetido de forma randômica para os níveis, quanto maior o índice do nível, maiores os números apresentados nos desafios, os desafios surgem aleatoriamente.

Figura 35 - Menu 4 do Senes



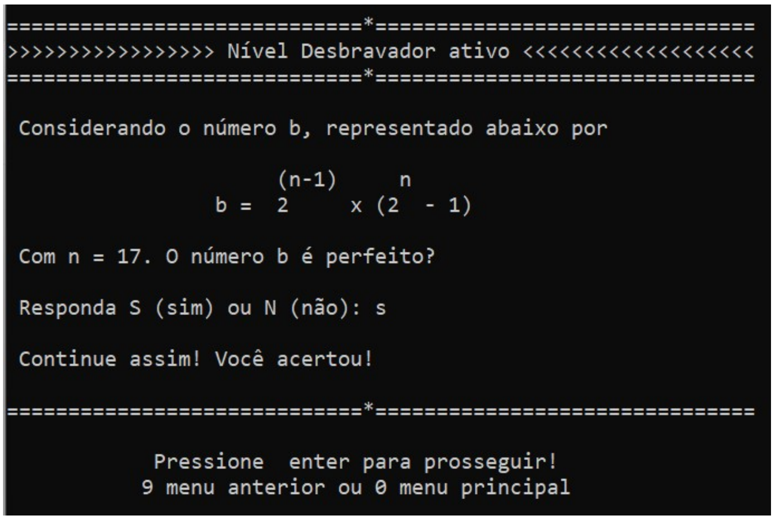
```
==============================*===============================
                              Menu
>>>>>>>>>>>>> 4. Praticando seus Conhecimentos <<<<<<<<<<<<<<<
=============================*================================
                        Seu nível está em:
==============================*===============================
>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 1. Desbravador    <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 2. Aventureiro    <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 3. Experiente     <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 4. Lendário       <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 5. Senes          <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 0. Menu principal <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
..............................................................
          Os níveis iniciam em Desbravador e o de
            maior  dificuldade é o nível Senes.

     Digite o número correspondente ao nível desejado:
```

Fonte: Senes-beta_01 (Software)

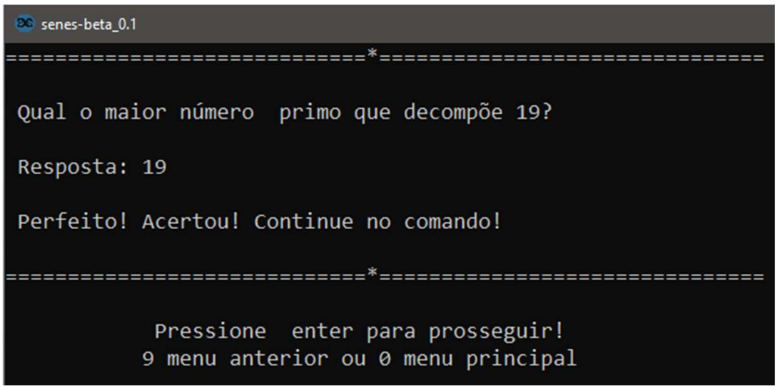
Abaixo apresentamos alguns exemplos de práticas disponíveis no Senes, todos do primeiro nível – Desbravador, destacamos que a teoria, de modo análoga ao apresentado nos desafios foram abordados nos itens anteriores, desta forma, acreditamos que se o aprendiz se deleitou nos conhecimentos disponíveis nos itens anteriores, estará apto a praticar os desafios disponíveis. Apresentaremos alguns exemplos de desafios nas Figuras 36, 37 e 38 abaixo.

Figura 36 – Exemplo 1 de desafio



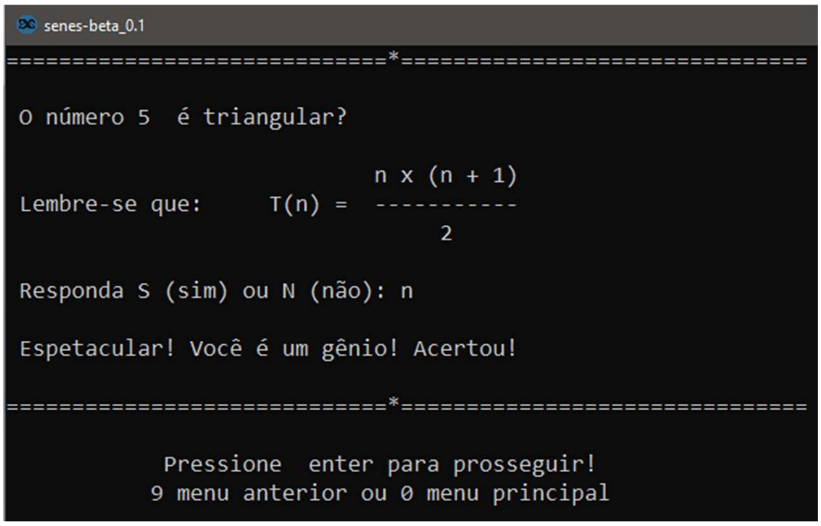
Fonte: Senes-beta_01 (Software)

Figura 37 - Exemplo 2 de desafio



Fonte: Senes-beta_01 (Software)

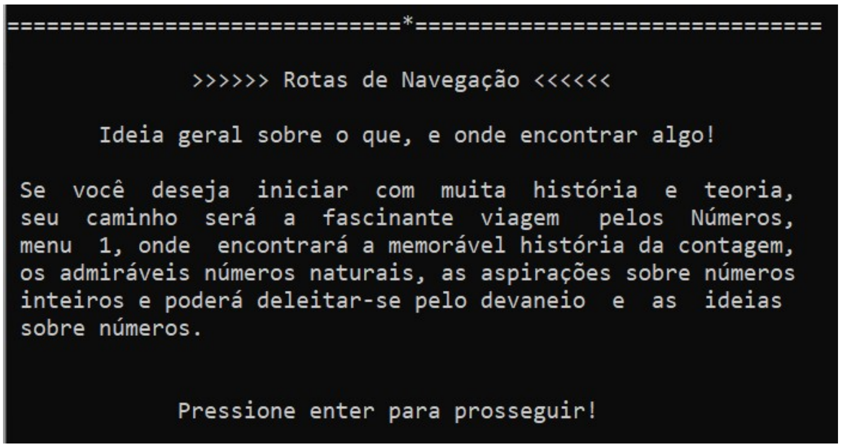
Figura 38 - Exemplo 3 de desafio



Fonte: Senes-beta_01 (Software)

O menu 8 (Figura 39) – Rotas de Navegação (Senes), faz a apresentação dos menus e submenus disponíveis no programa, indicando o que encontrar e onde encontrar dentro do Senes, servindo como um mapa das informações e conhecimentos elencados nele.

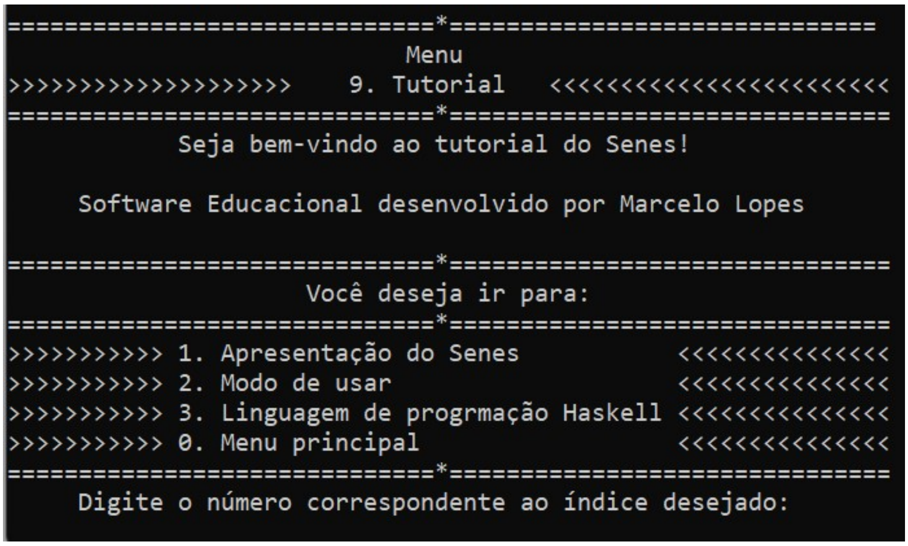
Figura 39 – Menu 8 do Senes



Fonte: Senes-beta_01 (Software)

O tutorial sobre o Senes pode ser encontrado no menu 9 (Figura 40), neste é realizada a apresentação do programa, com duas abordagens diferentes, uma para o aprendiz e outra para professores e tutores, onde apontamos a motivação da produção, os objetivos desejados com a utilização, os envolvidos no projeto, o modo de usar e navegar, os orientadores e a instituição associada e o desenvolvedor do software.

Figura 40 - Menu 9 do Senes



Fonte: Senes-beta_01 (Software)

Portanto, este é o Senes em sua versão (Beta) de testes e avaliação, ele está disponível para download no site https://sites.google.com/view/senes, caso prefira digitar o endereço, dispomos do um link curto gg.gg/senes-educ, para levá-lo a acessar o referido site, no ensejo, informamos o compromisso do autor em continuar o desenvolvimento do programa, buscando dispor de parte gráfica, corrigindo as falhas encontradas e atualizando-o por mais 3 anos.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção, apresentaremos a metodologia aplicada a pesquisa, facilitando a identificação dos motivos que nos levaram a desenvolver tal investigação, o delineamento da aplicação e do levantamento, destacaremos a relevância do tema para a sociedade, bem como, apontaremos as dificuldades proporcionadas pelo contexto da pandemia de Covid-19 para a consecução dos objetivos do presente trabalho, influenciando alterações no projeto original, a exemplo da abordagem pedagógica, deixando de ser ensino-aprendizagem, e passando para o enfoque de aprendizagem.

5.1 Motivação e relevância do tema

A prática docente com estudantes do ensino médio, a vivência do autor no cotidiano educacional, e a literatura educacional, possibilitam a percepção das principais demandas dos professores quanto ao desempenho dos estudantes acerca de suas necessidades matemáticas, das quais, encontram-se a base das operações matemáticas, a Aritmética, chamada popularmente de as quatro operações na educação básica, apontada em diversos casos como uma dificuldade que impede ou dificulta o aprendizado de outros temas na disciplina como descrevem Evangelista (2014), Zatti, Agranionih e Enricone (2010), entre outros, pois como estes conhecimentos são essenciais para a realização de cálculos matemáticos, o baixo domínio das operações matemáticas básicas, influi diretamente na não consecução de resultados corretos, implicando diretamente nos baixos desempenhos educacionais.

Em virtude das dificuldades identificadas para o aprendizado e domínio de Aritmética, este apresentou-se como um tema importante a ser explorado em atividade de dissertação de mestrado, portanto, foi decidido criar um software educacional visando o aprendizado de Aritmética, bem como aplicando-o em práticas cotidianas, a exemplo da aplicação para encontrar números especiais, desta necessidade específica, surgiu a ideia de desenvolver o Senes como ferramenta de auxílio da aprendizagem de aritmética, bem como a aplicação da pesquisa sobre sua influência em tal auxílio.

Tendo em vista os relatos de os maiores problemas apontados por educadores para o baixo desempenho de estudantes em matemática estar relacionado ao pouco domínio de operações matemáticas básicas, junto aos indicadores de que ferramentas digitais podem contribuir positivamente para o aprendizado, como mostra Cassiano (2013), o presente trabalho mostrou-se necessário, ao buscar contribuir com a minimização da problemática ao apresentar o Senes e ao mesmo tempo aferir a sua contribuição para a mudança de tal situação, possibilitando o aprendizado de aritmética, e consequentemente melhores resultados em matemática.

5.2 Interferência da pandemia

A proposta inicial do presente trabalho visava a aplicação do Senes com duas turmas de 7º ano do ensino fundamental, em 2 (duas) escolas da rede pública de educação no município de Santarém, onde seria uma turma de cada escola, o acesso ao programa dar-se-ia através dos laboratórios de informática, e assim, a todos os estudantes das turmas envolvidas na pesquisa seria garantido o acesso ao software.

Entretanto, durante o desenvolvimento do Senes, no mês de março do ano 2020, surgiu na cidade de Santarém a pandemia de Covid-19 (em outros locais do Brasil a pandemia já havia se instalado), provocada pelo vírus Sars-CoV-2, ocasionando a suspenção das atividades escolares presenciais no município, tal situação perdurou o ano letivo de 2020 por completo, e estendeu-se ao primeiro semestre de 2021, as atividades daquele período foram totalmente remotas, apenas no segundo semestre deste último ano, as atividades presenciais começaram a retornar de forma escalonada, desta forma, os estudantes voltaram a frequentar a escola presencialmente por grupos, para evitar aglomeração e impedidos de compartilhar materiais como medida de contenção da pandemia, mantendo-se inviável o uso coletivo dos computadores nas salas de informática, e por consequência impossibilitando a proposta inicial da pesquisa.

Para a consecução da pesquisa, a reformulação da proposta contou com fatores preponderantes como a internet e as redes sociais, pois o software foi posto à disposição na internet, através do link curto do site gg.gg/senes-educ (ou endereço original, https://sites.google.com/view/senes), onde encontra-se até o presente momento (da escrita do trabalho e será mantido e atualizado pelo menos até o ano de 2025) e foi divulgado massivamente nas redes sociais, solicitando a participação da sociedade na pesquisa.

Com o novo desenho da pesquisa, esta passou a ser direcionado ao público em geral, sendo solicitado aos voluntários inicialmente o uso do Senes durante algum período (o tempo que cada um julgou necessário) visando a ambientação e o conhecimento do software, para em seguida responder a um questionário eletrônico a respeito de sua experiência e das possíveis contribuições do programa para a aprendizagem de aritmética.

5.3 Delineamento da pesquisa

A pesquisa foi precedida pelo desenvolvimento do Senes pelo autor, passando a dispô-lo para utilização pelo público no mês de setembro de 2020, em site próprio (link curto http://gg.gg/senes-educ), possibilitando a qualquer pessoa com acesso à internet, contato prévio com o software, conhecendo-o da maneira mais ampla e profunda em que desejasse, para após conhecê-lo, participar da pesquisa respondendo ao questionário eletrônico disponibilizado no mesmo site.

A pesquisa foi caracterizada segundo Gil (2008, p. 55), como levantamento de campo, conhecido como *Survey*, em virtude do objetivo e do conjunto da metodologia adotada, onde para Prodanov (2013, p. 55) “esse tipo de pesquisa ocorre quando envolve a interrogação direta das pessoas cujo comportamento desejamos conhecer através de algum tipo de questionário”. Ela foi desenvolvida durante o mês de outubro de 2020, através de questionário eletrônico na internet, sendo caracterizada segundo Flick (2013, p. 164), como “pesquisa on-line”, motivada pela pandemia, conforme descrito na subseção (5.2) anterior.

Devido às características da pesquisa, segundo a finalidade, podemos reconhecê-la como aplicada, tendo em vista a necessidade prévia da utilização do Senes para a efetivação do estudo, caracterizada ainda como descritiva, onde para Gil (2002), o referido tipo de pesquisa busca descrever as características de determinada população ou o estabelecimento de relações entre variáveis, a mesma, pode ser enquadrada como um estudo de corte transversal por ocorrer em um dado momento no tempo, não tendo sua aplicação prolongada, para Flick (2013), a maior parte dos estudo é feito para se obter um retrato do momento, para analisar a atitude de um grupo e a relação com um objeto, “Essa retratação é em uma concepção de corte transversal: uma mensuração é realizada para captar um estado em um momento específico” (FLICK 2013, p. 74).

A metodologia da pesquisa, apoia-se nas abordagens qualitativa e quantitativa (quali-quantitativa), conhecida como pesquisa de métodos mistos, devido aos tipos de perguntas e consequentemente a análise dos dados obtidos de perguntas com respostas fechadas e abertas, para Flick (2013, p. 185), “Aqueles que apoiam as metodologias mistas estão interessados em combinar pragmaticamente as pesquisas qualitativa e quantitativa”, o presente estudo vale-se ainda do método dedutivo, ao partir de casos genéricos buscando chegar a casos específicos, onde para Gil (2008, p. 9), o método dedutivo “Parte de princípios reconhecidos como verdadeiros e indiscutíveis e possibilita chegar a conclusões de maneira puramente formal, isto é, em virtude unicamente de sua lógica”.

O instrumento utilizado para a coleta de dados foi o questionário eletrônico, disponível no mesmo site em que foi publicado o Senes. Desta forma, para Prodanov (2013, p. 102), esta pesquisa é uma "observação direta extensiva" por ocorrer através de questionário. O questionário eletrônico (Apêndice A) ao ser retirado da internet, mantém apresentação distinta de quando está on-line, na apresentação original (on-line), as perguntas específicas para uma categoria não são vistas por outra categoria, impedindo possíveis erros de marcação, ou seja, ao responder por exemplo a categoria a que pertencia o participante, apareciam para ele apenas as perguntas destinadas a ele, o que não ocorre com o questionário disponível no Apêndice A, pois apresenta todas as perguntas.

A investigação, em seu questionário eletrônico, contou com questões fechadas, fornecendo análise quantitativa dos resultados, por outro lado, dispôs também de questões abertas, possibilitando aos participantes fornecer respostas mais adequadas a suas necessidades, e por consequência, foram obtidos resultados qualitativos, desta forma, o instrumento usado para a coleta de dados possibilitou a caracterização da pesquisa como quali-quantitativa.

O instrumento usado para pesquisa passou por teste para verificar sua adequação, assim, os voluntários para o teste precisaram usar o Senes por algum tempo, em seguida responderam ao questionário e foram indagados sobre a utilização do instrumento, se sentiram dificuldade em responder ou se surgiram dúvidas em alguma pergunta, foram apontados dois itens como semelhantes, o questionário passou por melhorias, e o texto das perguntas esclarecidas, mas mantidas, pois verificavam informações distintas, uma buscava identificar especificamente a influência do programa para a aritmética, enquanto o outro item era mais abrangente, indagando sobre as contribuições do software para a matemática de modo geral, logo, após a intervenção no instrumento, ele ficou amoldado as necessidades da investigação e acessível e compreensível ao público.

Em virtude da problemática adotada e da adequação da aplicação da pesquisa (ver subseções 5.1 e 5.2), esta teve sua proposição ampliada para a sociedade (que usa internet) de modo geral. Os participantes foram divididos em 4 (quatro) grupos, sendo eles: estudantes do ensino fundamental e médio; estudantes de Matemática, cursando graduação ou pós-graduação, desde que não atuasse como professor de Matemática; professores de Matemática, mesmo que estivessem estudando graduação ou pós-graduação; e utilizador do Senes em geral, qualquer pessoa que não se enquadre em nenhuma categoria anterior; os quais, por questões de praticidade e identificação, denominaremos individualmente e respectivamente de Estudante, Acadêmico, Professor e Utilizador, seguido por um número atribuído pela ordem de resposta do questionário.

5.4 Disponibilização e uso do Senes

A internet foi de vital importância para a pesquisa, dada a impossibilidade de desenvolvimento presencial devido a pandemia (conforme mostrado na subseção 5.2), a aplicação foi condicionada a produção de um site para hospedar informações sobre a pesquisa e o Senes. A partir da publicação do site, ocorreu a divulgação da pesquisa nas redes sociais, momento em que foi solicitada a participação do público em geral, estes foram categorizados de acordo com sua qualificação (ver subseção 5.3).

A participação no projeto deu-se através do acesso ao site pelos voluntários para a realização do download do software, instalação em seus computadores particulares, uso do Senes durante o tempo em que consideraram necessário para conhecer, ambientar-se e interagir com ele, após o período de interação com o programa, os participantes foram convidados a responder um questionário eletrônico (ver subseção 5.3) disponível no mesmo site em que é mantido o Senes, através das respostas dos participantes, buscou-se conhecer a contribuição do software para o aprendizado de aritmética e números especiais.

A realização da pesquisa com abordagem proposta foi desafiadora, entre as dificuldades enfrentadas para a consecução da investigação está a pouca disponibilidade de voluntários para participar do projeto, em oposição ao caso da aplicação nas escolas, onde disporíamos de maior participação, pois em condições normais, os estudantes estão diariamente nas escolas.

Podemos citar entre os desafios, a necessidade de os participantes possuírem computador particular (para evitar compartilhamento devido a pandemia) e acesso à internet para baixar o programa, a participação no levantamento exigia o uso do programa durante algum período, para em seguida responder ao questionário, mesmo não sendo indicado um tempo específico, esperava-se que os participantes usassem por tempos e maneiras distintas a depender de seu domínio de ferramentas digitais e o grau de conhecimento e interesse sobre os temas abordados no Senes.

Os meses de setembro e outubro de 2020 foram destinados para a utilização e interação com o Senes, enquanto os meses de outubro e novembro do mesmo ano foram propostos para que os participantes pudessem responder o questionário eletrônico, mantendo a possibilidade de interação com o programa próximo ao período de resposta do levantamento, destaca-se o fato de o software continuar disponível para download e sua disponibilização será mantida até o ano de 2025.

Devido ao fato do programa ser caracterizado como tutorial, qualquer pessoa pode usá-lo independente de conhecimentos prévios, bastando apenas seguir o passo a passo descrito a partir do início, após ambientar-se com o software, a navegação ficará facilitada, podendo seguir para qualquer item do menu, navegando por conhecimentos históricos, aritméticos, ou mesmo saltar diretamente para a prática de conhecimentos, desta forma, a aplicação do programa variou de acordo com o interesse e dedicação de cada participante da pesquisa.

O período de resposta ao questionário seguiu o mesmo procedimento usado para a divulgação do programa, foi divulgado pelas redes sociais a disponibilização do questionário, para que os voluntários pudessem responder. As perguntas foram feitas de forma escalonada, para que a depender da categoria em que o voluntário se enquadrasse, não fossem mostradas as perguntas destinadas as outras categorias. Entre as indagações estavam sobre o tempo aproximado de uso do Senes, acesso a outras ferramentas para aprendizado, indicação do Senes para o aprendizado de aritmética, a importância da aritmética para o aprendizado de matemática em geral, entre outros levantamentos, buscando verificar a relação entre o aprendizado de aritmética e o Senes.

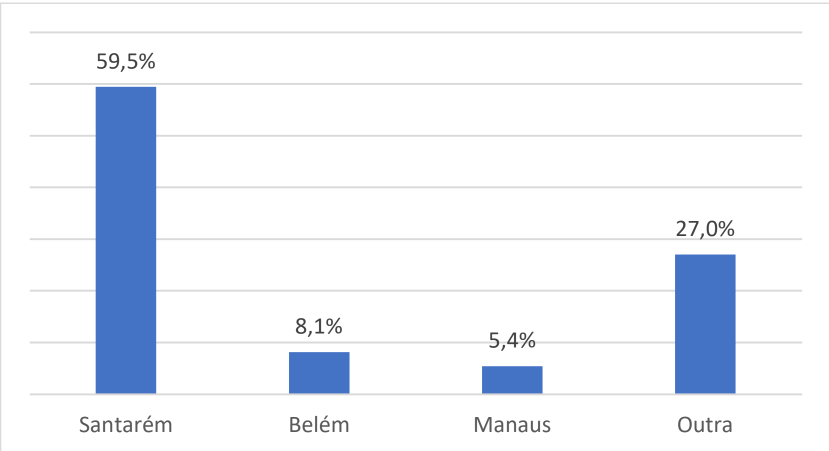
Observando o fato de a participação na pesquisa ser obtida através do voluntariado, não tínhamos como saber quantas pessoas participariam, entretanto, tomamos como base, a média de estudantes em uma sala de aula regular da educação básica, desta forma, esperávamos para o quantitativo, 30 (trinta) participantes, entretanto, o número de participantes foi de 37 (trinta e sete) voluntários.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A presente seção destina-se aos resultados e discussões da pesquisa, na qual constam informações sobre o alcance da investigação e o uso da ferramenta on-line, a faixa etária dos voluntários que engajaram-se na pesquisa, o tempo aproximado de uso do Senes pelos participantes, as relações e implicações indicadas pelos integrantes da investigação a respeito dos novos conhecimentos apreendidos, como temas históricos e aritméticos, principalmente sobre os temas que associam componentes matemáticos, como a relação entre mdc e mmc e a relação entre os números primos de Mersenne e os números perfeitos.

A pesquisa contou com a participação de trinta e sete pessoas, os quais se voluntariaram em meio à internet para usar o Senes durante o tempo julgado suficiente e necessário por cada um. Em seguida os voluntários responderam ao questionário eletrônico (ver subseção 5.3) disponível no site do programa, sobre sua a experiência em relação a utilização do software. Dialogando com os resultados, Faleiros (2016, p. 2) aponta que "com o acesso crescente à *internet* em todo o mundo, as pesquisas com o uso do ambiente virtual mostram-se como uma tendência atual para a coleta de dados, preferida pela maioria dos sujeitos dos estudos". Como a pesquisa foi realizada com auxílio da rede mundial de computadores, foi possível atingir um maior raio de ação, destacando participantes de outros municípios, como apresentado no Gráfico 1, referente à identificação da cidade de residência dos participantes, apesar de a maioria dos voluntários habitarem a cidade de Santarém (59,9%).

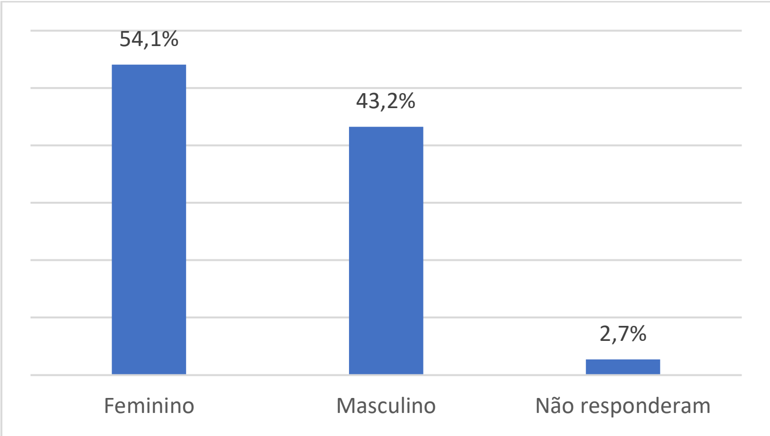
Gráfico 1 – Identificação da cidade de residência.



Fonte: Autor (2020).

De acordo com o levantamento, as mulheres tiveram maior participação na pesquisa conforme se verifica no Gráfico 2 - Representação dos participantes. Os voluntários foram indagados ainda sobre sua faixa etária, dos quais verificou-se que 73% tinham mais de 28 anos, seguidos por 16,2% de jovens na faixa de 21 a 28 anos, enquanto 5,4% estavam entre 15 e 20 anos.

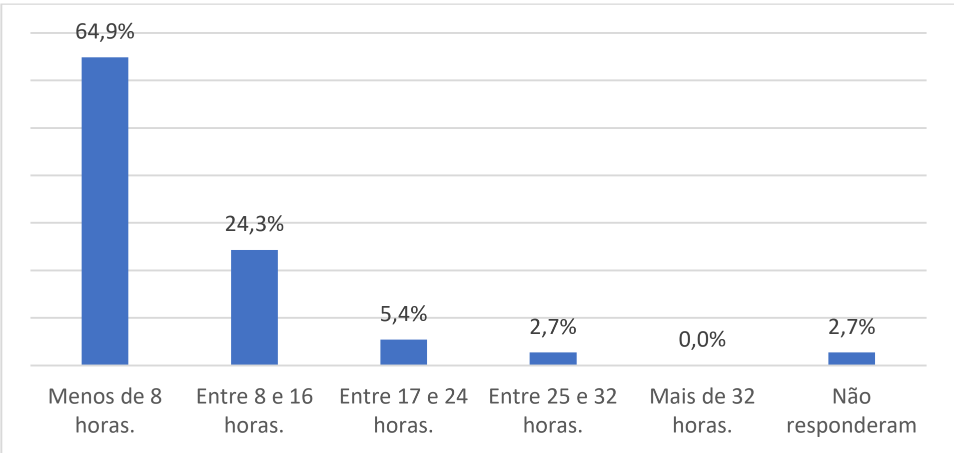
Gráfico 2 – Representação dos participantes.



Fonte: Autor (2020).

As faixas de distribuição do tempo de uso do Senes, apresentado no gráfico 3, foi baseada em tempo médio destinado a oficinas de formação em geral, estas costumam destinar de 4 a 8 horas de participação por oficina, mesmo tendo em vista que cada pessoa dedica seu tempo de maneira diferente para suas atividades cotidianas e os conhecimentos prévios são igualmente distintos, o tempo de uso do software não apresentou variações significativas, pois a maioria (64,9%) utilizou o programa por menos de 8 horas, seguida por aproximadamente um quarto (24,3%) dos participantes com utilização na faixa de 8h a 16h.

Gráfico 3 - Tempo de uso do Senes.

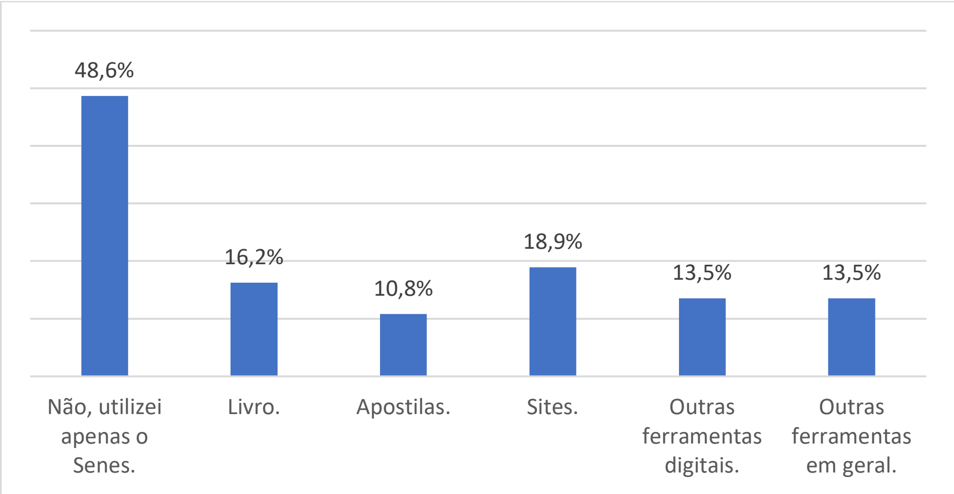


Fonte: Autor (2020).

A variação sobre o tempo de uso do Senes era esperada, principalmente pelo fato de não terem sido desenvolvidas oficinas com os voluntários, o que possibilita a utilização do software de acordo com o tempo a que cada participante destina o uso do computador para suas atividades cotidianas.

O Gráfico 4 mostra a indicação das ferramentas usadas pelos participantes para estudar aritmética no período de utilização do Senes, para responder este item, eles puderam marcar mais de uma opção, neste, aproximadamente metade dos participantes (48,6%) utilizou apenas o Senes para estudar aritmética, enquanto a outra metade, como pode ser notado, além do próprio software, valeu-se de ferramentas diversas, entre elas, livros, apostilas, sites, outras ferramentas digitais e outras ferramentas em geral, o objetivo desta verificação era identificar a relação entre o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos adquiridos ao uso do Senes.

Gráfico 4 - Ferramentas usadas para estudar aritmética.



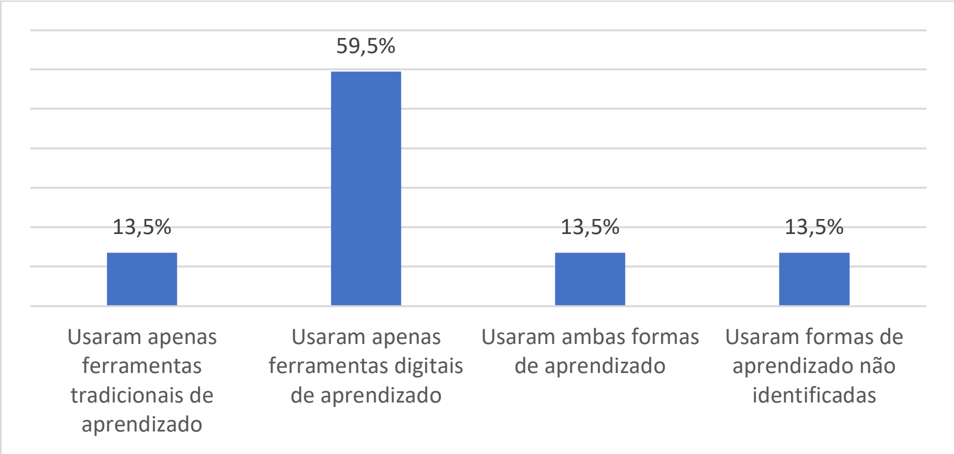
Fonte: Autor (2020).

Para Almeida e Almeida (2015, p. 9),

> As tecnologias têm evoluído com muita rapidez e desempenham um papel preponderante como elemento transformador do modo de acessar e organizar o universo da informação, colocando novos desafios pedagógicos na tarefa de auxiliar o aluno a organizar novos conhecimentos.

Em consonância com os autores, os resultados mostram de maneira sobressalente, o uso de ferramentas digitais como auxílio da aprendizagem de matemática para os participantes da pesquisa, pois 59,5% dos entrevistados valeu-se penas de ferramentas digitais (programas, sites), enquanto 13,5% utilizou apenas ferramentas tradicionais (livros, apostilas), enquanto o mesmo percentual (13,5%) foi observado tanto para os que usaram ambas as formas juntas (ferramentas digitais e tradicionais), quanto para os que usaram formas não identificadas de aprendizagem, tais resultados são apresentados no gráfico 5 – destinado aos tipos de ferramentas utilizados durante a aprendizagem, indicando uma tendência atual para o uso de ferramentas digitais na aprendizagem.

Gráfico 5 - Tipo de ferramenta utilizada na aprendizagem.



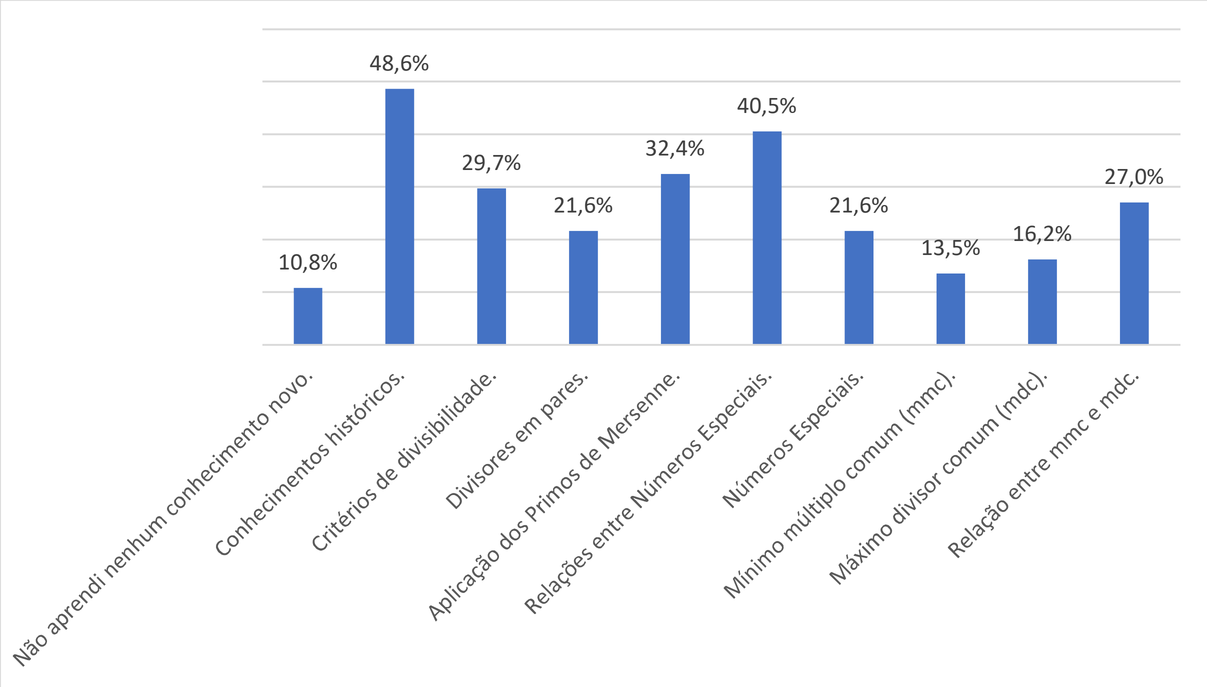
Fonte: Autor (2020).

As respostas dos participantes mostram a adequação do Senes para a prática de conhecimentos aritméticos, pois os voluntários foram unânimes ao afirmar tal posição, assim como 97,3%, afirmaram que o software contribui com o aprendizado de aritmética. Segundo Almeida e Almeida (2015, p. 10),

> O computador é uma ferramenta que deve propiciar as condições para os estudantes exercitarem a capacidade de procurar e selecionar informação, resolver problemas e aprender independentemente. Portanto, em vez de memorizar informação, os estudantes devem ser ensinados a procurar e a usar a informação. Esse é um dos pressupostos que deve guiar o desenvolvimento de software educativo.

Neste sentido, o gráfico 6 apresenta a indicação dos voluntários sobre a apreensão de novos conhecimentos (os participantes puderam marcar mais de um item), onde maioria daqueles destaca ter apreendido algum novo conhecimento, pois apenas 10,8% informa não ter apreendido novos conhecimentos, em contrapartida, quase metade dos participantes (48,6%) destaca ter apreendido conhecimentos históricos, seguido em ordem decrescente pelos que apreenderam sobre relações entre números especiais, aplicação do Primos de Mersenne, critérios de divisibilidade, entre outros conhecimentos.

Gráfico 6 - Aprendizado de novos conhecimentos.



Fonte: Autor (2020).

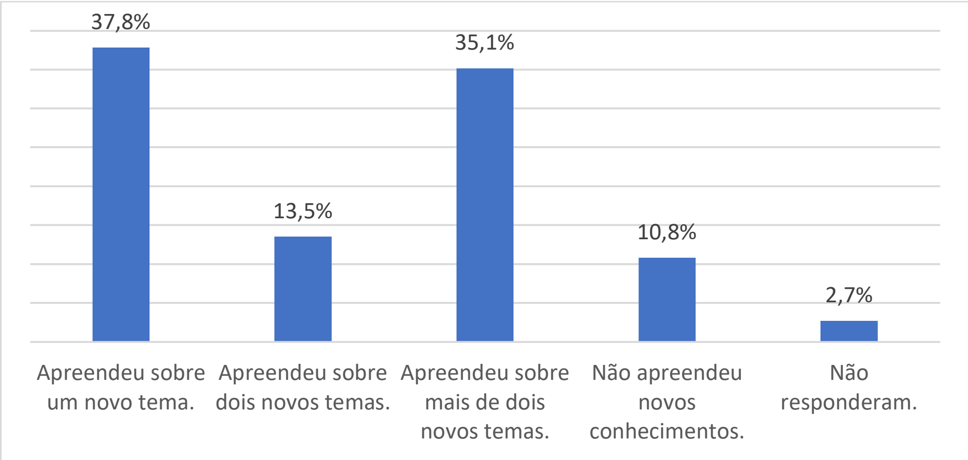
Sobre a maneira descontraída e lúdica como foram abordados os temas no Senes, bem como, ao relacionar conhecimentos matemáticos aos fatos históricos e a utilização no cotidiano, o Professor 6 (classificado conforme seção 5.3) afirmou, “Ja conheço a maioria desses, mas considero para o aluno muito enriquecedor. Particulamente me interessei pela forma como foi proposta.”, concordando com Pacheco e Barros (2013, p. 8) ao afirmar que os “*softwares* matemáticos surgem como alternativa que amplia os conceitos teóricos dos conteúdos em sala de aula e de recurso dinâmico que pode atrair o interesse e a intuição dos alunos e incentivar o estudo dos conceitos de forma inovadora.”, indicando a maneira da abordagem dos temas aritméticos e matemáticos em geral, como fator importante para a aprendizagem.

Na educação básica, para Pacheco e Barros (2013, p.6)

> Os alunos se utilizam diariamente de uma variedade de tecnologias e buscam o entretenimento através do computador, e este pode servir como suporte escolar para a realização de atividades em sala de aula que possibilitam a aprendizagem ativa do aluno ao permitir-lhe se sentir mais envolvido com os conceitos á medida que estes fazem uso da informática educativa para desenvolver suas teorias.

Com base nas respostas dos participantes, aliado aos referenciais, pode-se inferir a relação entre o uso do Senes com o aprendizado de novos temas matemáticos, apontando sua adequação para utilização na educação básica, onde para Cassiano *et al*. (2013), o uso de ferramentas didáticas, a exemplo de softwares educacionais, aumenta o interesse do estudante pelos assuntos abordados, tal resultado pode ser notado no Gráfico 7, que apresenta a quantidade de novos temas apreendidos pelos voluntários, através da indicação de 35,1% dos participantes, pela apreensão de mais de dois novos temas, é possível inferir sobre um dos temas citados por aqueles, onde podemos afirmar ser os conhecimentos históricos, pois o resultado da junção do percentual dos que apreenderam dois novos temas (13,5%), com os que apreenderam mais de dois novos temas (35,1%), é o percentual relacionado a apreensão de conhecimentos históricos (48,6% do Gráfico 6).

Gráfico 7 - Quantidade de novos temas apreendidos.

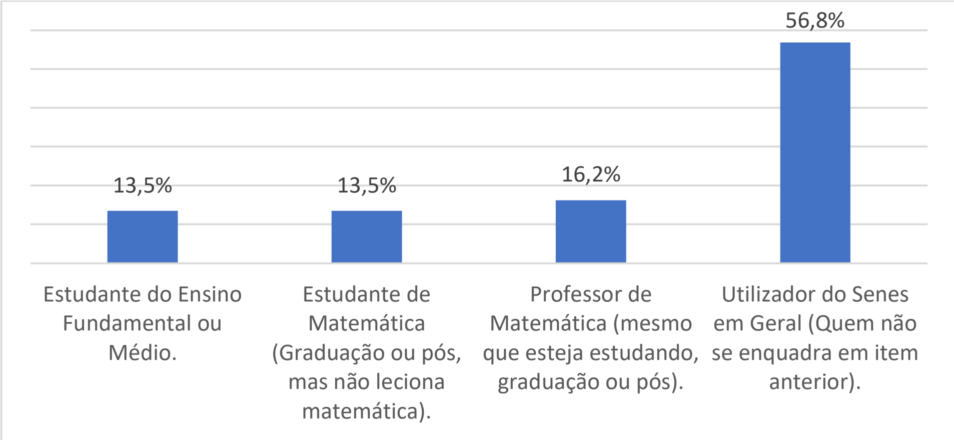


Fonte: Autor (2020).

Os participantes da pesquisa, quando indagados sobre a recomendação do Senes para o aprendizado e para a prática de conhecimentos aritméticos, 94,6% recomendam a utilização do programa, em contrapartida 2,7% não recomendam e 2,7% não responderam, entretanto, não relataram o motivo que os fez não recomendar o uso do aplicativo ou não responder.

Os participantes da pesquisa se caracterizaram como uma das opções a seguir, Estudante, Acadêmico, Professor ou Utilizador, conforme descrito na subseção 5.3, dos quais, esta última apresentou maior participação (56,8%), seguida por Professores (16,2%) como fica evidente no Gráfico 8, destinado para a caracterização dos participantes da pesquisa, apontando ainda a participação de estudantes universitários com o mesmo percentual dos estudantes da educação básica (13,5%), este item objetivava a distinção por categorias, buscando possibilitar a visão do Senes tanto do processo ensino, quanto aprendizagem, porém, ressalta-se que devido a mudança no projeto provocada pela pandemia (ver subseção 5.2), o foco principal da investigação passou a ser a verificação da aprendizagem através do Senes.

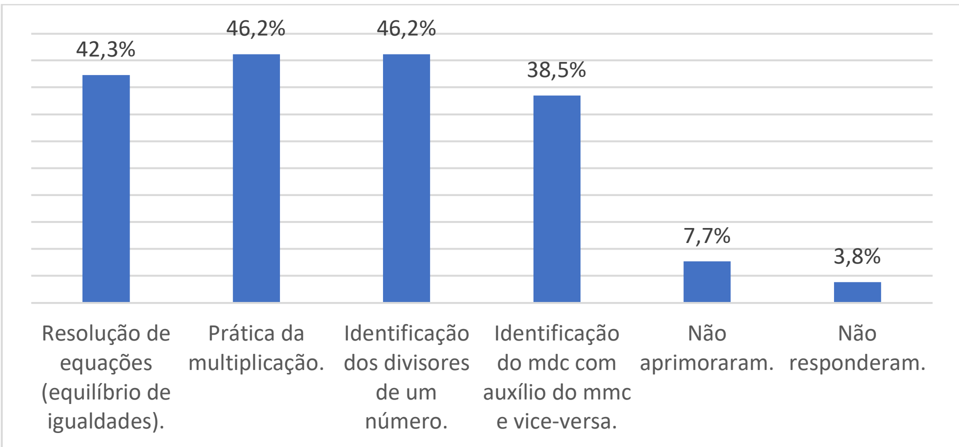
Gráfico 8 - Caracterização dos participantes.



Fonte: Autor (2020).

Quando indagados sobre a importância da aritmética para o aprendizado dos temas matemáticos em geral, os participantes da pesquisa foram unânimes ao afirmar que a aritmética é um fator importante para o aprendizado e desenvolvimento da matemática, em acordo com os trabalhos de Evangelista (2014), Cassiano (2013), Santos (2012), entre outros autores. A maioria dos voluntários considera ter aprimorado conhecimentos e práticas matemáticas com o uso do Senes, como pode ser notado no Gráfico 9, destinado a indicação dos temas e práticas matemáticas aprimoradas com o auxílio do Senes (Os participantes puderam marcar mais de um item), com maiores percentuais estão a identificação dos divisores de um número e a prática da multiplicação, seguida pela resolução de equações, entretanto, alguns apontaram não ter aprimorado conhecimentos e outros não responderam a pergunta.

Gráfico 9 - Aprimoramento de conhecimentos e práticas matemáticas.



Fonte: Autor (2020).

Ao indagar os participantes sobre a utilização de ferramentas digitais para o aprendizado de temas em geral, ou seja, não apenas temas matemáticos (como apontado no

Gráfico 5), o percentual dos utilizadores deste tipo de ferramenta atingiu 95,2%, mostrando relação direta com a observação das respostas anteriores sobre o uso de tecnologia como ferramentas no auxílio da aprendizagem por parte dos participantes da pesquisa, destaca-se a importância atribuída por Brasil (2018, p. 473) para a utilização da tecnologia na educação e na preparação para o futuro, quando afirma ser

> [...] preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Quando relacionamos a contribuição do Senes com o aprendizado da aritmética, vemos pelas respostas dos participantes, apresentadas no Quadro 21, vemos o reforço positivo daquele software educacional no processo de aprendizagem de temas matemáticos, ao possibilitar a apreensão dos conhecimentos de forma aplicada, estimulante e prazerosa, em consonância com os preceitos de Pacheco e Barros (2013, p. 8), ao afirmar que os softwares matemáticos, como o programa em questão, “surgem como alternativa que amplia os conceitos teóricos dos conteúdos em sala de aula e de recurso dinâmico que pode atrair o interesse e a intuição dos alunos e incentivar o estudo dos conceitos de forma inovadora”.

Quadro 21 - Contribuição do Senes para o aprendizado de aritmética.

Participante	Resposta
Utilizador 1	“A prática do aprendizado de Aritmética se torna menos maçante com instrumentos criativos como o Senes. É atrativo usar ferramentas que estimule o raciocínio do aprendiz.”
Utilizador 2	“Sim, é muito bom, para um melhor aprendizado de matemática.”
Utilizador 4	“Sim, principalmente neste tempo de tecnologia moderna”
Utilizador 6	“sim, ajuda a praticar”
Utilizador 9	“Sim, metodologia utilizando a inclusão digital, atrai e estimula os jovens”
Utilizador 12	“Sim, devido a facilidade de utilização e manejamento do programa”
Utilizador 14	“Acredito que a utilização de ferramentas modernas e inovadoras contribuem para o aprendizado.”
Utilizador 17	“Acredito, pois gostei da dinâmica de apresentação das informações.”

Fonte: Questionário eletrônico aplicado aos participantes da pesquisa sobre o uso do Senes (2020), classificados segundo a seção 5.3.

Os participantes foram indagados tanto sobre a contribuição do Senes para aritmética (Quadro 21), quanto sobre a contribuição do programa para o desenvolvimento da matemática de modo geral, este último apresentado no Quadro 22, neste item, os participantes da pesquisa apontaram o potencial do Senes para facilitar o aprendizado de matemática em outros temas além da aritmética, ao funcionar como um recurso auxiliar para a aprendizagem, proporcionando autonomia ao aprendiz (estudante) no processo de apreensão de conhecimentos, por ser possível escolher o que apreender, não impor tempo para o aprendizado e possibilitar a prática dos conhecimentos no ambiente digital, destaca-se a possibilidade de o software facilitar o entendimento de temas matemáticos considerado por muitos como difíceis segundo Cassiano (2013).

Quadro 22 - Contribuição do Senes para a matemática em geral.

Participante	Resposta
Utilizador 2	"Com certeza, porque facilita o aprendizado de matemática em aritmética e outros temas."
Utilizador 5	"Sim, é um auxilio a mais no qual podemos buscar e encontrar recursos."
Utilizador 10	"Sim, pois possibilita ao aluno buscar seu próprip saber e tirar suas dúvidas."
Utilizador 14	"Sim, porque permite um entendimento fácil acerca de uma matéria toda como difícil para a maioria das pessoas."

Fonte: Questionário eletrônico aplicado aos participantes da pesquisa sobre o uso do Senes (2020), classificados segundo a seção 5.3.

A respeito de sugestões e melhorias no Senes, o Quadro 23 mostra as indicações dos participantes, onde a maioria considerou o programa satisfatório, entretanto, surgiram sugestões como, inserir opção de apresentação do passo-a-passo na resolução das questões, para que o aprendiz possa acompanhar o processo de resolução, inserir imagens para auxiliar na compreensão de temas históricos, aumentar o tamanho da fonte do texto no programa e manter o programa atualizado.

Quadro 23 - Sugestões de alterações ou melhorias no Senes.

Participante	Resposta
Professor 1	"Pelo fato de tê-lo utilizado pouco. Ainda não posso acrescentar melhorias, mesmo que eu achei ele bem completo"
Professor 5	"Não percebi uma aba (ver resolução). Nas respostas de S (sim) ou N (não), é interessante e curioso ver o passo a passo daquela conclusão."
Professor 6	"No momento que baixei o software, conforme o disse o criador do projeto, ainda estava em desenvolvimento. Mas creio que inserir imagem mostrando algumas situações, uma parte histórica com imagens, também seria interessante. Mas creio que o criador irá fazer suas adaptações. E particularmente gostei."
Utilizador 1	"Não. São me sinto capaz o suficiente de sugerir algo. A não ser na forma de apresentação. Não sei se é possível ter caracteres maiores."
Utilizador 5	"Não, é só manter atualizado."

Fonte: Questionário eletrônico aplicado aos participantes da pesquisa sobre o uso do Senes (2020), classificados segundo a seção 5.3.

As respostas apresentadas no Quadro 24, registram a avaliação geral concebida pelos voluntários da pesquisa sobre o Senes, nela podemos perceber a importância e a necessidade de ferramentas matemáticas educacionais como o Senes, considerado um ótimo recurso para melhorar a qualidade da educação matemática, um objeto digital de aprendizagem de grande valor acadêmico, apontado como um diferencial entre as propostas apresentadas nas dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA).

Quadro 24 - Avaliação sobre o Senes.

Participante	Resposta
Acadêmico 2	“Ótimo recurso para melhoria educacional.”
Professor 2	“Ótima possibilidade de abordagem de conteúdos da aritmética.”
Professor 4	“Excelente ferramenta ensino matemática.”
Professor 5	“Grande valor acadêmico. Eu vou usar.”
Professor 6	“Achei muito interessante, apesar de ter acessado algumas horas, mas é algo diferente do que é apresentado, em particular nas dissertações do profmat Ufopa.”
Utilizador 9	“Muito instruntivo”

Fonte: Questionário eletrônico aplicado aos participantes da pesquisa sobre o uso do Senes (2020), classificados segundo a seção 5.3.

A avaliação realizada pelos participantes da pesquisa, aponta em geral o uso do Senes no processo de aprendizagem de aritmética, como um fator preponderante para a apreensão dos temas apresentados no referido software de maneira prazerosa e aplicada, proporcionando ao aprendiz envolvimento e autonomia, possibilitando o desenvolvimento do aprendizado de maneira mais natural e envolvente, nas palavras de Cassiano (2013, p 691),

> Não há dúvidas de que a utilização de recursos didáticos dinâmicos aumenta o interesse dos alunos pelas aulas e pelo conteúdo que está sendo desenvolvido. Os *software* educativos podem fazer com que as operações matemáticas com os diferentes conjuntos numéricos ganhem significado para os estudantes.

Desta forma, a resultados da pesquisa, apontam para a adequação do Senes como um software educacional, com potencial para auxiliar na aprendizagem de temas aritméticos e matemáticos de modo geral, dialogando com os autores consultados, vemos a indicação de ferramentas digitais de aprendizagem como um forte impulsionador da qualidade educacional, desde que empregadas de maneira consciente, planejadas e com propriedade.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta seção, indicaremos as relações entre a investigação e a literatura consultada, os resultados alcançados, as contribuições obtidas e as dificuldades e desafios encontrados no percurso, mostraremos desta forma, a importância da utilização de ferramentas digitais a exemplo do Senes, como facilitadoras do processo de aprendizagem, assim como exibiremos a aceitação e recomendação do software como ferramenta de aprendizagem de aritmética e números especiais.

A necessidade de aperfeiçoamento dos métodos, práticas e ferramentas utilizadas no processo de aprendizagem é apresentado pelo desempenho dos estudantes em relação à disciplina Matemática, os resultados costumam indicar necessidade de melhorias na apreensão dos conhecimentos e habilidades neste componente curricular. As mudanças podem ser tanto metodológicas, quanto estruturais, entretanto, nos deteremos na metodologia, tendo em vista o momento no qual vivemos, quando transformações tecnológicas ocorrem em uma velocidade muito grande e o uso da tecnologia é cada vez maior em diversas áreas da sociedade, na educação não é, e não pode ser diferente, pelo fato de o uso da tecnologia poder instigar ao aprendiz maior interesse no objeto (digital de aprendizagem por exemplo) e por conseguir manter sua atenção no desenvolvimento da atividade.

As contribuições da tecnologia na educação podem ser muito proveitosas e render bons frutos em relação ao interesse e apreensão de conhecimentos de acordo com os resultados da pesquisa com a utilização do Senes, pois a maioria dos participantes costuma utilizar recursos tecnológicos para auxiliar seu aprendizado, através de ferramentas digitais a exemplo do referido programa, é possível desenvolver habilidades e temas matemáticos de maneira mais envolvente e prazerosa ao aplicar conhecimentos a situações concretas, mostrando a relação do surgimento do conhecimento a situações históricas reais, levando o aprendiz a refletir sobre o uso da razão para a construção do conhecimento.

Os resultados indicam um percentual muito grande dos participantes valendo-se de recursos digitais para facilitar sua aprendizagem, porém, destaca-se a possibilidade de a relação entre o grande uso de tais ferramentas pelos participantes da pesquisa estar relacionado ao fato da exigência de os voluntários depender de uso de computador, pois foi necessário instalar o software em uma máquina, possibilitando uma possível ligação dos participantes ao prévio interesse em uso de ferramentas digitais, como observa Faleiros (2016), uma das possíveis limitações do uso da pesquisa online é a exclusão dos analfabetos digitais, ou seja, existe a possibilidade de que os participantes estejam habituados com o uso de ferramentas digitais para a própria aprendizagem.

Há de se levar em consideração a influência da pandemia de Covid-19, motivando as pessoas a se readaptar e utilizar-se de todas as ferramentas disponíveis para a aprendizagem, devido a impossibilidade de compartilhamento de materiais físicos como livros, ábacos, materiais concretos, entre outros, propiciando o ambiente para a utilização de ferramentas digitais de aprendizagem, onde o objeto da presente pesquisa enquadra-se, apontando os resultados destacados de grande aceitação e utilização em meio a outras ferramentas digitais voltadas ao aprendizado, de modo geral, nos resta a ênfase e o entendimento de que os recursos digitais de aprendizagem devem ser explorados na busca de melhores resultados educacionais.

O processo para chegar aos resultados aqui apresentados foram desafiadores, inicialmente houve a dificuldade em encontrar materiais voltados à linguagem de programação Haskell, utilizada no desenvolvimento do Senes, tendo em vista a maior utilização da linguagem na academia ou como recurso para banco de dados por grandes empresas devido ao seu potencial em agilidade computacional, foi possível encontrar muitos fragmentos de códigos e materiais diversos apresentando abordagens semelhantes, porém nenhum material apresentava como construir um software completo, "fechado", pronto para instalação e utilização.

A escassez de materiais sobre programação funcional em Haskell tornou a consecução de tal projeto mais dispendioso, porém possível dentro do cabível para aplicação, devido a tal desafio, o software precisou ser disponibilizado e aplicado sem sua parte gráfica, proporcionando ao desenvolvedor outro desafio, pois a parte estrutural de apresentação do programa (*layout*) precisou ser feita manualmente, em oposição ao modelo com parte gráfica, onde através de programação seriam organizados automaticamente.

O autor empenhou-se na tentativa de desenvolver a parte gráfica do Senes, buscando a dispô-lo de forma completa (com ambiente gráfico), entretanto, todas as tentativas de construção da parte gráfica foram frustradas, com vários dos tipos gráficos cabíveis, porém a parte gráfica não funcionava, os testes de construção não abriam e não criavam a janela gráfica, fornecendo sempre erro na identificação da função de construir ou destruir (fechar) a janela gráfica.

As tentativas de produção da parte gráfica tomaram aproximadamente um quarto do tempo destinado a produção do programa, momento em que devido a não consecução da parte gráfica, decidiu-se pela disponibilização e aplicação sem parte gráfica, assim, o software foi apresentado em modo texto, aumentando o trabalho de desenvolvimento do software, pois sem a parte gráfica, todo o *layout* precisou ser programado manualmente em cada linha de texto.

Os desafios foram além da ordem estrutural do programa, o mundo viveu e continua vivendo um período difícil, causado pela pandemia de Covid-19, esta, se estende por dois longos anos, onde milhares de pessoas foram acometidas pela doença e muitas não resistiram às complicações, quadro que apenas no Brasil, já soma mais de 620 mil mortes, em tal situação, a aplicação do Senes nas salas de informática das escolas ficou impossibilitada, e da necessidade de aplicação surgiu a opção de disponibilizá-lo na internet, gerando outra necessidade, a criação e manutenção de um site específico para hospedar a estrutura de divulgação e apresentação do software.

Não obstante, suscitaram outras necessidades, a exemplo da disposição de pessoas interessas em participar da pesquisa, tendo em vista o tempo e seus recursos como internet e computador que precisariam dedicar, a dependência de voluntários com domínio mínimo de informática, pois precisaram realizar o download e a instalação do software em seus computadores, após utilizar o programa, precisaram responder ao questionário eletrônico para que a presente pesquisa pudesse ser concluída.

Em meio aos desafios e necessidades, foi possível obter resultados promissores para a educação matemática e para o programa, pois a aceitação do Senes como ferramenta digital de aprendizagem para a aritmética e matemática em geral foi positiva, tendo em vista que professores de Matemática, participantes da pesquisa indicaram em seus relatos já ter utilizado o software com estudantes e que irão fazer uso do programa como ferramenta de ensino em suas aulas.

A aceitação e utilização do programa por estudantes secundaristas e acadêmicos do curso de Matemática encontra-se na forma didática e lúdica de apresentação dos temas, ao possibilitar a imersão e envolvimento do aprendiz na construção do conhecimento de maneira concreta, ao conceder autonomia para agilizar, delongar ou praticar o aprendizado, e principalmente ao possibilitar a apreensão de conhecimentos matemáticos de maneira menos desgastante, afastando a preconcepção de a matemática ser uma disciplina difícil de apreender e praticar.

A perspectiva de trabalhos futuros nos apresenta necessidades e desafios, entre eles, de continuar o desenvolvimento do Senes inserindo uma apresentação gráfica, buscando deixá-lo mais agradável visualmente, ampliando sua abordagem matemática com novos temas, inserindo jogos e outros recursos dependentes diretamente da parte gráfica, seguindo as sugestões de melhorias propostas pelos participantes da pesquisa, principalmente ao possibilitar ao estudante ver a maneira de resolução sugerida, bem como aplicar o programa em escolas, com estudantes em processo educacional básico para verificar os resultados e ampliar a utilização metodológica do Senes para a prática do ensino-aprendizagem de matemática, enfim, dar continuidade aos trabalhos iniciados com a produção do software, mantendo a perspectivas de uma educação matemática facilitadora e transformadora usando como base ferramentas digitais de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

AIRES, Luís M. **Uma História da Matemática**: dos primeiros agricultores a Alan Turing, dos números ao computador. Lisboa: Sílabo, 2010.

ALMEIDA, Rosa Lívia Freitas de. ALMEIDA, Carlos Alberto Santos de. **Fundamentos e análise de software educativo**. 2 ed. Fortaleza: EdUECE, 2015.

Boyer, Carl Benjamim. Merzbach, Uta C. **História da matemática**. Tradução: Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

Boyer, Carl Benjamim. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 05 fev. 2020.

CASSIANO, João Lucas F. *et al.* Software educativos gratuitos para conteúdos de números e operações. **Revista Nuevas Ideas en Informática Educativa** - TISE 2013, v. 9, p.688-691, 2013. Disponível em: http://www.tise.cl/volumen9/TISE2013/688-691.pdf. Acesso em: 03 fev. 2020.

COELHO, Marco Antônio. DUTRA, Lenise Ribeiro. Behaviorismo, cognitivismo e construtivismo: confronto entre teorias remotas com a teoria conectivista. **Caderno de Educação**, ano 20 - n. 49, v.1, p. 51-76, 2018. Disponível em: https://revista.uemg.br/index.php/cadernodeeducacao/article/view/2791/1529. Acesso em: 30 Jan. 2022.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução: Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVANGELISTA, Antônia Dinamária Gomes. **Regras matemáticas e suas justificativas:** breve histórico sobre o ensino de matemática no Brasil e uma reflexão acerca da inclusão de demonstrações na prática docente. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/9158. Acesso em: 14 set. 2020.

FALEIROS, Fabiana. *et. al*. Uso de questionário online e divulgação virtual como estratégia de coleta de dados em estudos científicos. **Texto e Contexto – Enfermagem** [online]. 2016, v. 25, n. 04, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.1590/0104-07072016003880014. Acesso em 22 set. 2020.

FERREIRA, Sérgio Eduardo. CAMPOS, Flávia de Oliveira. DIAS, Adriana de Oliveira. **Softwares em ambientes educacionais**. *In*: 12º Congresso Regional de Informática e Telecomunicações. Cuiabá, 2008. Disponível em: http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/pacotes/Softwaresemambienteseducacionais.pdf. Acesso em: 03 fev. 2020.

FLICK, Uwe. **Introdução à metodologia de pesquisa:** um guia para iniciantes. Tradução: Magda Lopes; Revisão Técnica: Dirceu da Silva. Porto Alegre: Penso, 2013.

FREDERICO, Fernando Temporini. GIANOTTO, Dulcinéia Ester Pagani. Utilização de softwares no ensino de Física e Matemática: desafios e reflexões. **Revista Diálogos & Saberes,** Mandaguari, v. 9, n. 1, p. 39-59, 2013. Disponível em: http://www.fafiman.br/seer/index.php/dialogosesaberes/article/viewFile/324/315. Acesso em: 03 fev. 2020.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4 ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

IEZZI, Gelson. et. al. **Matemática**: ciência e aplicações. 6. ed. São Paulo, Saraiva, 2010.

KUBO, Olga Mitsue. BOTOMÉ, Silvio Paulo. **Ensino-aprendizagem:** uma interação entre dois processos comportamentais. Interação em Psicologia, Curitiba, v. 5, dez. 2001. ISSN 1981-8076. Disponível em: https://revistas.ufpr.br/psicologia/article/view/3321. Acesso em: 20 jan. 2022.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MARTINS, Ana Rita; SANTOMAURO, Beatriz; RATIER, Rodrigo. Eles podem inspirar a busca por soluções. **Nova Escola.** São Paulo, ano XXIII - nº 216, p. 58-61, 2008.

MASOLA, Wilson de Jesus; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior. **Revista Brasileira de Ensino Superior**, Passo Fundo, v. 2, n. 1, p. 64-74, jun. 2016. ISSN 2447-3944. Disponível em: http://seer.imed.edu.br/index.php/REBES/article/view/1267. Acesso em: 20 jan. 2022.

MORAIS, Rommel Xenofonte Teles de. **Software Educacional:** a importância de sua avaliação e do seu uso nas salas de aula. 2003. Monografia (Ciência da Computação) – Coordenação do Curso de Ciência da Computação, Faculdade Lourenço Filho, Fortaleza 2003. Disponível em: http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/monografias/monografia-rommel-xenofonte.pdf. Acesso em: 05 fev. 2020.

MUELLER, Jhon Paul. **Programação funcional para Leigos**. Traduzido por Eveline Machado Vieira. Rio de Janeiro: Alta books, 2019.

NEVES, Rita de Araujo. DAMIANI, Magda Floriana. Vygotsky e as teorias de aprendizagem. **UNIrevistas.** v. 1, n. 2, abril 2006. Disponível em: http://repositorio.furg.br/bitstream/handle/1/3453/Vygotsky%20e%20as%20teorias%20da%20aprendizagem.pdf?sequence=1. Acesso em: 27 jan. 2022.

OSTERMANN, Fernanda. CAVALCANTI, Cláudio José de Holanda. **Teorias de Aprendizagem**. Porto Alegre: Evangraf; UFRGS, 2011.

OLIVEIRA, Celina Couto de. COSTA, José Wilson da. MOREIRA, Mercia. **Ambientes Informatizados de Aprendizagem**: produção e avaliação de software educativo. Campinas: Papirus, 2001.

PACHECO, José Adson D. BARROS, Janaina V. O uso de Softwares Educativos no Ensino de Matemática. **Revista Diálogos**, Garanhuns, v. 1, n. 8, p. 5-13, fev-mar 2013. Disponível em: http://www.revistadialogos.com.br/Dialogos_8/Adson_Janaina.pdf. Acesso em: 03 fev. de 2020.

PRODANOV, Cleber Cristiano. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]:** métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2 ed. Novo Hamburgo: Feevale. 2013.

RODRIGUES, Andressa Carla. **As quatro operações matemáticas:** das dificuldades ao processo ensino e aprendizagem. 2019. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), São José do Rio Preto, 2019. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/181901. Acesso em 14 set. 2020.

REZENDE, Denis Alcides. **Engenharia de Softwares e Sistema de Informação**. 3 ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Brasport, 2005.

SANTOS, Bruna Martins Ribeiro dos. *et al.* Software Educativo: uma ferramenta de aprendizagem da matemática na educação infantil. **Revista Científica Eletrônica de Pedagogia,** n. 20, jul. 2012. Disponível em: http://faef.revista.inf.br/imagens_arquivos/arquivos_destaque/lqClnX2oK9l7Aam_2013-7-10-16-26-49.pdf. Acesso em: 05 fev. 2020.

SOMMERVILLE, Ian. **Engenharia de software.** Tradução de Ivan Bosnic e kalinka G. De O. Gonçalves. 9 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito**: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos. Tradução: George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

ZATTI, Fernanda. AGRANIONIH, Neila Tonin. ENRICONE, Jacqueline Raquel Bianchi. Aprendizagem matemática: desvendando dificuldade de cálculo dos alunos. **PERSPECTIVA**, Erechim. v.34, n.128, p. 115-132, dezembro/2010. Disponível em: https://www.uricer.edu.br/site/pdfs/perspectiva/128_142.pdf. Acesso em: 20 jan. 2022.

APÊNDICE A

Observação: esta cópia, em arquivo de texto, do questionário eletrônico aplicado aos participantes da pesquisa, sobre o uso do Senes, mostra as perguntas realizadas, entretanto, o layout apresentado pelo questionário na internet era diferente para cada participante em virtude da caracterização deles, no momento de responder, apareciam para eles apenas as perguntas referentes a sua categoria, porém, aqui serão apresentadas todas as perguntas na forma de um questionário físico (indicando saltos de perguntas).

QUESTIONÁRIO ELETRÔNICO - SUA EXPERIÊNCIA JUNTO AO SENES

Ao responder o presente questionário, será resguardado seu anonimato, assim, seus dados pessoais não serão divulgados a terceiros, tendo acesso ao questionário de modo geral apenas o pesquisador e seus orientadores.

1. Endereço de e-mail.

____

2. Qual seu nome?

____

3. Qual sua Cidade? (Marque apenas um item).

- [ ] Santarém
- [ ] Belém
- [ ] Manaus
- [ ] Outra

4. Sexo (Marque apenas um item).

- [ ] Feminino
- [ ] Masculino
- [ ] Prefiro não informar

5. Faixa etária (Marque apenas um item).

☐ Menos de 15 anos.
☐ Entre 15 e 20 anos.
☐ Entre 21 e 28 anos.
☐ Mais de 28 anos.

6. Juntando todos os momentos em que você usou o Senes, por quanto tempo aproximadamente você utilizou o software? (Marque apenas um item).

☐ Menos de 8 horas.
☐ Entre 8 e 16 horas.
☐ Entre 17 e 24 horas.
☐ Entre 25 e 32 horas.
☐ Mais de 32 horas

Sobre a utilização do software, escolha a alternativa que melhor representa sua opinião, não sendo considerado como ferramenta, material de expediente como papel (usado para resoluções), caneta, lápis e borracha, podendo marcar mais de um item como resposta onde tal possibilidade for informada.

7. Você utilizou alguma outra ferramenta (como livros, apostilas, sites) para estudar aritmética além do Senes no período de sua utilização? Caso tenha usado outras ferramentas, marque os itens que utilizou (Pode marcar mais de uma opção).

☐ Não, utilizei apenas o Senes.
☐ Livros.
☐ Apostilas.
☐ Sites.
☐ Outras ferramentas digitais.
☐ Outras ferramentas em geral.

8. Você acredita que o Senes contribui com o aprendizado de aritmética? (Marque apenas um item).

☐ Sim.
☐ Não.

9. Você acredita que o Senes possibilita a prática de conhecimentos aritméticos? (Marque apenas um item).

☐ Sim.
☐ Não.

10. Sobre os temas apresentados no Senes, você considera ter aprendido algo novo, algo que não conhecia ou não havia atentado antes de sua utilização? Caso sua resposta seja positiva, marque a partir do 2º item (Pode marcar mais de uma opção).

Não aprendi nenhum conhecimento novo.

☐ Conhecimentos históricos.
☐ Critérios de divisibilidade.
☐ Divisores em pares.
☐ Aplicação dos Primos de Mersenne.
☐ Relações entre Números Especiais.
☐ Números especiais.
☐ Mínimo múltiplo comum (mmc).
☐ Máximo divisor comum (mdc).
☐ Relação entre mmc e mdc.
☐ Outro: ____

11. Você recomenda a utilização do Senes para o aprendizado e para a prática de conhecimentos aritméticos? (Marque apenas um item).

☐ Sim.
☐ Não.

12. Como você caracteriza-se? (Marque apenas um item).

☐ Estudante do Ensino Fundamental ou Médio, seguir para a pergunta 13.
☐ Estudante de Matemática (Graduação ou pós, mas não leciona matemática), seguir para a pergunta 17.
☐ Professor de Matemática (mesmo que esteja estudando,graduação ou pós), seguir para a pergunta 21.
☐ Utilizador do Senes em Geral (Quem não se enquadra em item anterior), seguir para a pergunta 25.

Estudante do Ensino Fundamental ou Médio

13. Você considera que aprimorou conhecimentos e práticas matemáticas com o uso do Senes? Caso sua resposta seja positiva, marque a partir do 2º item, (Pode marcar mais de uma opção).

- [ ] Considero que não aprimorei conhecimentos, nem práticas matemáticas com o uso do Senes.
- [ ] Resolução de equações (equilíbrio de igualdades).
- [ ] Prática da multiplicação.
- [ ] Identificação dos divisores de um número.
- [ ] Identificação do mdc com auxílio do mmc e vice-versa.
- [ ] Outro: ____

14. Você considera o domínio da aritmética importante para o aprendizado e desenvolvimento da matemática em geral? (Marque apenas um item).

- [ ] Sim.
- [ ] Não.

15. Você acredita que a utilização do Senes em suas aulas de matemática poderá contribuir positivamente para o aprendizado de aritmética? Compartilhe conosco sobre sua opinião.

____

____

____

16. Você acredita que a utilização do Senes em suas aulas de matemática poderá contribuir positivamente para melhorar seu desempenho de matemática de modo geral? Comente sobre sua opinião.

____

____

____

Siga para a pergunta 29.

Estudante de Matemática (Graduação ou pós, mas não leciona matemática)

17. Você costuma utilizar ferramentas digitais para auxiliar sua aprendizagem de matemática? Em caso positivo, compartilhe conosco sobre elas.

____

____

____

18. Você considera o domínio da aritmética importante para o aprendizado e desenvolvimento da matemática em geral? (Marque apenas um item).

☐ Sim.

☐ Não.

19. Você acredita que a utilização do Senes pode contribuir positivamente para o aprendizado de aritmética? Comente sobre sua opinião.

____

____

____

20. Você acredita que a utilização do Senes pode contribuir positivamente para o aprendizado de matemática de modo geral? Compartilhe conosco sobre sua opinião.

____

____

____

Siga para a pergunta 29.

Professor de Matemática (mesmo que esteja estudando, graduação ou pós)

21. Você costuma utilizar ferramentas digitais para auxiliar a aprendizagem de matemática em suas aulas? Caso afirmativo, compartilhe conosco sobre sua prática.

____

____

____

22. Você considera o domínio da aritmética importante para o aprendizado e desenvolvimento da matemática em geral? (Marque apenas um item).

- [ ] Sim.
- [ ] Não.

23. Você acredita que a utilização do Senes em suas aulas de matemática poderá contribuir positivamente para o aprendizado de aritmética? Compartilhe conosco sobre sua opinião.

____

____

____

24. Você acredita que a utilização do Senes em suas aulas de matemática poderá contribuir positivamente para o aprendizado de matemática de modo geral? Compartilhe conosco sobre sua opinião.

____

____

____

Siga para a pergunta 29.

Utilizador do Senes em Geral (Quem não se enquadra em item anterior)

25. Você considera que aprimorou conhecimentos e práticas matemáticas com o uso do Senes? Caso sua resposta seja positiva, marque a partir do 2º item, (Pode marcar mais de uma opção).

- [ ] Considero que não aprimorei conhecimentos, nem práticas matemáticas com o uso do Senes.
- [ ] Resolução de equações (equilíbrio de igualdades).
- [ ] Prática da multiplicação.
- [ ] Identificação dos divisores de um número.
- [ ] Identificação do mdc com auxílio do mmc e vice-versa.
- [ ] Outro: ____

26. Você costuma utilizar ferramentas digitais para auxiliar sua aprendizagem de temas em geral? (Marque apenas um item).

☐ Sim.
☐ Não.

27. Você acredita que a utilização do Senes pode contribuir positivamente para o aprendizado de aritmética? Compartilhe conosco sobre sua opinião.

____
____
____

28. Você acredita que a utilização do Senes pode contribuir positivamente para o aprendizado de matemática de modo geral? Compartilhe conosco sobre sua opinião.

____
____
____

Siga para a pergunta 29.

SUGESTÕES E AVALIAÇÃO SOBRE O SENES

29. Você sugere alguma alteração ou melhoria ao Senes? Quais alterações e qual o motivo?

____
____
____

30. Qual sua avaliação sobre o Senes?

____
____
____

31. Gostaria de comentar algo que não foi contemplado nos itens anteriores?

____

____

____

Eu autorizo que as informações por mim prestadas sejam utilizadas para o Trabalho de Conclusão de Curso de Marcelo de Lima Lopes, estudante do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), em Santarém, que tem como título "Desenvolvimento de software educacional e sua aplicação em números especiais", orientado pelos professores doutores Mario Tanaka Filho e José Antônio de Oliveira Aquino, de acordo com o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), anexo.

☐ Estou ciente e concordo com o termo acima.

APÊNDICE B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

Prezado (a) Sr(a)., convidamos você a participar da Pesquisa intitulada "**DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE EDUCACIONAL E SUA APLICAÇÃO EM NÚMEROS ESPECIAIS"** de responsabilidade do aluno Marcelo de Lima Lopes**, matrícula 2019203015, do curso Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará, Campus Santarém**, sob a orientação do professor Dr. Mário Tanaka Filho e Dr. José Antônio de Oliveira Aquino. O objetivo da presente pesquisa é identificar as possíveis implicações do uso do Senes (Software Educacional Para Números Especiais), software desenvolvido pelo pesquisador, como ferramenta de aprendizagem de Aritmética, tanto pela visão de educadores matemáticos, quanto pela visão de estudantes e da comunidade em geral.

Sua participação é voluntária e as informações obtidas a partir desta pesquisa serão confidenciais, desta forma, os dados obtidos serão utilizados sem identificar os participantes.

A pesquisa será desenvolvida da seguinte forma:
I - Os dados serão coletados por meio de questionário eletrônico com perguntas fechadas e abertas, aplicados aos sujeitos da pesquisa de forma voluntária: professores de matemática, estudantes universitários de matemática, estudantes secundarista e comunidade em geral (este último caracterizado como demais participantes que não se enquadram nos itens anteriores).

II – A participação na presente pesquisa não acarretará ônus algum ao participante em relação aos procedimentos metodológicos efetuados durante o estudo;

III – O participante tem a liberdade de desistir ou recusar-se a participar de qualquer procedimento, assim como de interromper a colaboração neste estudo no momento em que desejar, sem necessidade de qualquer explicação;

V – Será garantido ao participante da pesquisa a manutenção de seu sigilo e privacidade;

VI - O participante, em razão do caráter voluntário da pesquisa, não receberá remuneração e nenhum tipo de recompensa em razão de sua participação no estudo.

Diante dos esclarecimentos acima, eu, declaro que não tenho dúvidas acerca do necessário para participação na pesquisa, motivo pelo qual concordo em participar do estudo, ciente de que não receberei qualquer valor pecuniário para tal, bem como poderei não mais integrar o projeto a qualquer momento.

Já eu, Marcelo de Lima Lopes, estudante responsável pelo estudo de pesquisa, declaro que estou cumprindo com os termos do presente TCLE. O aceite a este documento é vinculado ao necessário aceite de participação na pesquisa, último item do questionário eletrônico (Google Forms) e ficará disponível no mesmo site destinado a pesquisa (gg.gg/senes-educ), possibilitando aos participantes o acesso e a guarda do presente TCLE.

Marcelo de Lima Lopes
Estudante/Pesquisador